



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Mecânica

LUCAS NEVES EGIDIO

**Controle via Realimentação de Estado de Sistemas
Afins com Comutação a Tempo Discreto**

CAMPINAS
2016

LUCAS NEVES EGIDIO

**Controle via Realimentação de Estado de Sistemas
Aíns com Comutação a Tempo Discreto**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na Área de Mecatrônica.

Orientadora: Profa. Dra. Grace Silva Deaecto

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO
ALUNO LUCAS NEVES EGIDIO E ORIENTADO
PELA PROFA. DRA. GRACE SILVA DEAECTO.

CAMPINAS
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES, 33003017

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Eg41c Egidio, Lucas Neves, 1992-
Controle via realimentação de estado de sistemas afins com comutação a tempo discreto / Lucas Neves Egidio. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Grace Silva Deaecto.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas com comutação. 2. Sistemas de tempo discreto. 3. Sistemas de controle por realimentação. 4. Desigualdades matriciais lineares. I. Deaecto, Grace Silva, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: State feedback control of discrete-time switched affine systems

Palavras-chave em inglês:

Switched systems

Discrete-time systems

Feedback control systems

Linear matrix inequalities

Área de concentração: Mecatrônica

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Grace Silva Deaecto [Orientador]

Alberto Luiz Serpa

Luís Fernando Costa Alberto

Data de defesa: 09-09-2016

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Controle via Realimentação de Estado de Sistemas
Afins com Comutação a Tempo Discreto**

Autor: Lucas Neves Egidio

Orientadora: Profa. Dra. Grace Silva Deaecto

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Profa. Dra. Grace Silva Deaecto, Presidente
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
Faculdade de Engenharia Mecânica - Unicamp

Prof. Dr. Luís Fernando Costa Alberto
Escola de Engenharia de São Carlos - USP

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 09 de setembro de 2016.

Dedico este trabalho ao meu Pai e à minha Mãe,
Maurício e Ângela.

AGRADECIMENTOS

Antes de mais nada, gostaria de agradecer ao meu pai e à minha mãe, Maurício e Ângela, que sempre me apoiaram e jamais mediram esforços para fornecer as condições mais favoráveis possíveis para que eu pudesse me dedicar aos meus compromissos acadêmicos com afinco.

Agradeço também à minha avó Glória, à minha avó Sinhá, meu avô Pino e à minha madrinha Maura, que, cada uma à sua maneira única, sempre me motivaram a estudar, a ensinar e propagar o bem.

Também muito devo aos meus irmãos Arthur e Alice assim como ao meu primo Thiago e demais familiares com os quais cresci, amadureci e muito aprendi.

Meu carinhoso obrigado à Fernanda que, ao meu lado durante a totalidade da duração deste trabalho, foi peça fundamental para sua conclusão.

Não posso deixar de prestar meu reconhecimento a todos os mestres dos quais tive o prazer de ser aluno do primário ao mestrado. Em especial, agradeço à minha orientadora, Grace que sempre acreditou em mim nestes 2 anos de trabalho, proporcionando esta oportunidade singular, motivando o meu esforço e repassando conhecimentos valiosos que serão levados por toda a minha vida.

Deixo registrado meu agradecimento a todos os amigos da ECA e da pós que fiz durante estes 6 anos e meio em Campinas onde fui muito bem acolhido desde o começo. Agradeço também aos amigos da República Tangamandápio, aos companheiros de trabalho da ARU, Equipe Phoenix e AAAECA, todos de suma importância nos momentos de descontração. Da mesma forma, agradeço à toda comunidade da FEM, sem a qual este trabalho jamais teria sido possível.

Por fim, minha gratidão à CAPES, responsável pelo financiamento deste trabalho.

A todos, meu singelo muito obrigado.

*"O cérebro eletrônico faz tudo
Faz quase tudo
Quase tudo
Mas ele é mudo."
(Gilberto Gil, 1969)*

RESUMO

Nesta dissertação, duas funções de comutação dependentes do estado são propostas para sistemas afins com comutação a tempo discreto de forma a assegurar estabilidade prática global de um ponto de equilíbrio desejado, pertencente a um conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis. O projeto de ambas leva em conta a minimização do volume de uma região de convergência invariante elipsoidal, contendo o ponto de equilíbrio de interesse, para onde as trajetórias do estado são assintoticamente atraídas. Segundo o nosso conhecimento, este é um dos primeiros resultados que tratam da síntese de uma função de comutação estabilizante para sistemas afins com comutação a tempo discreto. As condições de projeto são generalizadas para tratar controle de sistemas com dados amostrados, em que o período de amostragem pode ser incerto, o que permite evitar frequências de comutação arbitrariamente elevadas e, por consequência, a ocorrência de chattering (trepidação) além de atenuar possíveis imperfeições na implementação. Alguns exemplos numéricos validam os resultados teóricos e são usados para comparação com outra técnica recente disponível na literatura. Um exemplo de aplicação prática que consiste no controle da velocidade de um motor CC é apresentado.

Palavras-Chave: Sistemas com comutação; Sistemas de tempo discreto; Sistemas de controle por Realimentação; Desigualdades matriciais lineares.

ABSTRACT

In this master's thesis, two state dependent switching functions are proposed for discrete-time switched affine systems. The design conditions must ensure global practical stability of a desired equilibrium point that belongs to a set of attainable ones. Both techniques take into account the volume minimization of an ellipsoidal invariant convergence region containing the point of interest, to where the state trajectories are asymptotically attracted. To the best of our knowledge, these are one of the first results dealing with the synthesis of a stabilizing switching function for discrete-time switched affine systems. The design conditions are generalized to cope with sampled-data control systems with uncertain sampling period, which allow to avoid arbitrarily high switching frequency and, consequently, chattering occurrence as well as to deal with possible implementation imperfections. Some numerical examples validate the theory and are used for comparison with other recent technique available in the literature. An example of practical application which consists in the speed control of a DC motor is presented.

Keywords: Switched systems; Discrete-time systems; Feedback control systems; Linear Matrix Inequalities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Ilustração dos conceitos de estabilidade.	26
2.2	Representação em diagrama de blocos de sistema com comutação a tempo contínuo.	34
3.1	Plano de fase dos subsistemas 1, à esquerda e 2, à direita.	40
3.2	Região dos pontos de equilíbrio atingíveis X_{ce}	40
3.3	Plano de fase do sistema afim com comutação.	42
3.4	Evolução no tempo das variáveis de estado, à esquerda, e da regra, à direita.	42
3.5	Evolução no tempo da função de Lyapunov $v(\xi)$	44
4.1	Evolução do estado (esq.) e da regra $\sigma(\xi)$ (dir.), no tempo k para Técnica L.	55
4.2	Representação da região \mathcal{X}_L no \mathbb{R}^3	55
4.3	Representação da região $\mathcal{X}_L = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : (\xi - \mu)'W(\xi - \mu) \leq 1\}$	55
4.4	Evolução do estado (esq.) e da regra $\sigma(\xi)$ (dir.), no tempo k para Técnica NL.	56
4.5	Representação da região \mathcal{X}_{NL} no \mathbb{R}^3	56
4.6	Evolução das variáveis de estado ao decorrer da semana k	64
4.7	Evolução das variáveis de estado deslocadas e regiões \mathcal{X} e \mathcal{S}	64
4.8	Trajetórias do estado no tempo.	70
4.9	Evolução da regra σ no tempo.	70
4.10	Trajetórias do estado e regiões \mathcal{X} e \mathcal{S} no \mathbb{R}^3	71
4.11	Modelo do manipulador industrial de 2 GDL.	72
4.12	Esquema do circuito Buck-Boost acoplado a um motor CC.	72
4.13	Evolução da velocidade rotacional ω em função do tempo para várias referências.	74

LISTA DE TABELAS

4.1	Comparação dos volumes das Técnicas O e SO. (Ex. 4.2)	65
4.2	Comparação dos volumes das Técnicas O e SO. (Ex. 4.3)	70
4.3	Tempo de estabilização $t_{5\%}$ com DC do PWM e λ associados às velocidades ω . . .	75
B.1	Opções utilizadas na execução da função ga do MATLAB.	91

LISTA DE ALGORITMOS

4.1	Algoritmo de Frank-Wolfe para a Técnica L	51
4.2	Estabilidade de sistemas afins a tempo discreto para a Técnica NL	53
4.3	Sistemas amostrados sob período variável - Técnica L adaptada	67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CC	Corrente contínua
DMC	Departamento de Mecânica Computacional
GA	<i>Genetic Algorithm</i>
GDL	Graus de liberdade
FEM	Faculdade de Engenharia Mecânica
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LTI	Linear Independente do Tempo
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

\mathcal{C}	Superfície de comutação	
\mathcal{H}	Conjunto de todas as matrizes Hurwitz estáveis.	
k	Instante de amostragem genérico	
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais	
\mathbb{N}_{0k}	Conjunto de inteiros no intervalo $[0, k]$	
\mathbb{N}_k	Conjunto de inteiros no intervalo $[1, k]$	
N	Número de subsistemas disponíveis	
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais	
$\mathbb{R}_{+(+)}$	Conjunto dos números reais não-negativos (positivos)	
\mathbb{R}^n	Conjunto de vetores reais de tamanho n	
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de n linhas e m colunas	
\mathbb{S}^n	Conjunto das matrizes reais simétricas de ordem n	
$\mathbb{S}_{+(+) }^n$	Conjunto de matrizes reais simétricas semi-definidas (definidas) positivas de ordem n	
\mathcal{S}	Região de convergência invariante	
\mathfrak{S}	Conjunto de todas as matrizes Schur estáveis.	
t	Instante de tempo genérico	
t_k	k -ésimo instante de amostragem	
T	Período de amostragem	[s]
T_k	Período de amostragem no instante k	[s]
T_M	Período de amostragem máximo	[s]
T_m	Período de amostragem mínimo	[s]
$v(\cdot)$	Função de Lyapunov	
$vol(\cdot)$	Volume generalizado de uma região	
w	Vetor das entradas de um sistema	
x	Vetor do estado de um sistema	
x_e	Ponto de equilíbrio para a Técnica L	

\bar{x}_e	Ponto de equilíbrio para a Técnica NL
x_{ce}	Ponto de equilíbrio para o sistema a tempo contínuo
\mathcal{X}	Região de convergência
y	Vetor das saídas de um sistema

Letras Gregas

$\gamma(A)$	Vetor contendo os autovalores de A
Λ^N	Conjunto do Simplex unitário de tamanho N .
λ	Vetor pertencente ao conjunto Λ .
ξ	Vetor do estado deslocado para o ponto de equilíbrio
σ	Regra de comutação

Sobrescritos

x^k	x elevado a k -ésima potencia
x'	Transposto de x

Subscritos

x_k	k -ésimo elemento do vetor x
X_λ	Combinação linear de $\{X_1, \dots, X_N\}$ sobre λ , $\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i X_i\right)$
A_k	k -ésimo elemento do conjunto $\{A_1, \dots, A_N\}$

Notações

$\Delta v(\cdot)$	Operador diferença temporal da função de Lyapunov
$\nabla_x f(x)$	Derivada da função $f(x)$ em relação a matriz ou vetor x
$X \geq (>)0$	$X \in S_{+(+)}^n$
$\ \cdot \ $	Norma Euclidiana
$ \cdot $	Módulo de um escalar
\otimes	Produto de Kronecker
$r_1 < r_2$ $< r_3$	Relação de desigualdade $r_1 < r_2$ e $r_1 < r_3$. Nenhuma relação é definida entre r_2 e r_3 .

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Estrutura da dissertação	20
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	22
2.1	Sistemas Dinâmicos LIT	22
2.1.1	Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	25
2.1.1.1	Tempo Contínuo	27
2.1.1.2	Tempo Discreto	29
2.2	Desigualdades Matriciais Lineares	32
2.3	Sistemas com Comutação	33
2.4	Considerações finais	35
3	SISTEMAS AFINS COM COMUTAÇÃO	36
3.1	Sistemas a tempo contínuo	36
3.2	Sistemas com dados amostrados	44
3.3	Considerações Finais	46
4	ESTABILIDADE PRÁTICA DE SISTEMAS AFINS	47
4.1	Sistemas afins a tempo discreto	47
4.1.1	Condições de estabilidade	49
4.1.2	Região de convergência invariante	57
4.2	Sistemas com dados amostrados	65
4.2.1	Estabilidade sobre frequência de amostragem incerta	67
4.3	Aplicação prática	71
4.4	Considerações finais	75
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	79
A	CONCEITOS MATEMÁTICOS	86
A.1	Cálculo de condições iniciais de uma trajetória	86
A.2	Lema do Complemento de Schur	86

A.3	Elipsoides	87
A.4	Minimização de volume - Cálculo do gradiente	87
A.5	S-Procedure	89
B	ALGORITMO GENÉTICO	90

CAPÍTULO 1

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos sempre foi um tópico de grande interesse da literatura nos campos da matemática e da física. Desde a formalização da mecânica clássica com as contribuições de Isaac Newton, a modelagem do comportamento de sistemas reais em termos de equações diferenciais e equações a diferenças se tornou cada vez mais essencial para o entendimento do nosso mundo.

Com os desenvolvimentos tecnológicos nas grandes áreas das engenharias mecânica, elétrica e de computação durante os séculos XX e XXI, uma demanda por teorias de análise e controle a respeito de sistemas munidos de certas características não lineares inéditas se fez crescente. Surgem nesse contexto os sistemas híbridos, onde a sua dinâmica, seja contínua ou discreta, interage com eventos discretos que podem ser também modelados matematicamente, veja (DECARLO et al., 2000; LUNZE; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2009). Do ponto de vista de aplicação, o interesse no estudo destes sistemas emerge mormente devido ao surgimento de controladores industriais como painéis de relés, controladores lógico programáveis (CLPs) e microprocessadores. Ademais, vários fenômenos não ligados ao contexto de engenharia podem também ser descritos em termos de sistemas híbridos como, por exemplo, o ricochete de uma bola de basquete ao bater no chão, onde podemos considerar que sua velocidade muda instantaneamente durante a colisão, veja (LUNZE; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2009).

Uma importante subclasse dos sistemas híbridos é a composta por sistemas com comutação. Estes sistemas são definidos por um conjunto finito de subsistemas dinâmicos e uma regra responsável por escolher a cada instante qual deles estará ativo e guiará as trajetórias do sistema no tempo. Algumas referências básicas neste assunto são os livros (LIBERZON, 2003; SUN, 2006) e os artigos (DECARLO et al., 2000; SHORTEN et al., 2007). O que caracteriza a comutação é justamente o evento de troca entre qual dos subsistemas se torna ativo, geralmente causando uma notável mudança no comportamento do sistema. Tal fenômeno pode tanto ser uma perturbação, como uma variável de controle a ser projetada visando assegurar estabilidade ou melhoria de desempenho. Essa regra está, geralmente, associada a elementos que transitam

de forma praticamente instantânea entre estados como chaves elétricas, relés, válvulas de fluxo ou cilindros pneumáticos.

Para o caso específico onde todos os subsistemas são lineares a literatura é bem rica em resultados, seja no caso contínuo ou no discreto, veja (GEROMEL; COLANERI, 2006a; GEROMEL; COLANERI, 2006b; FIACCHINI; JUNGERS, 2014), onde este último apresenta condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade desta classe de sistemas no domínio do tempo discreto baseado na teoria de conjuntos. Existem estudos também que abordam o caso de controle via realimentação de estado para sistemas incertos e realimentação dinâmica de saída, veja (GEROMEL; DEAECTO, 2009; DEAECTO et al., 2011a; ZHAI, 2001; ZHAI et al., 2003).

Um caso mais geral em relação ao linear é quando ao menos um subsistema possui um termo constante em sua formulação em espaço de estado sendo chamado de termo afim. Obtemos, dessa forma, um sistema afim com comutação que é o foco dos estudos realizados durante este mestrado. Este tipo de sistema é muito comum em projetos práticos de engenharia, em especial nas áreas de eletrônica e sistemas de potência, como pode ser observado nas referências (CARDIM et al., 2009; CORONA et al., 2007; DEAECTO et al., 2010; GARCIA et al., 2009; KUIAVA et al., 2013; KUIAVA et al., 2014) e (HAUROIGNE et al., 2011). Como será visto ao longo dessa dissertação, esta classe de sistema possui um conjunto de pontos de equilíbrio alcançáveis diferentemente do caso linear onde a origem é o único ponto de equilíbrio. Havendo escolhido um ponto atingível, a literatura apresenta condições para sua estabilidade a tempo contínuo que, de modo genérico, exigem que a regra comute entre subsistemas com frequência arbitrariamente elevada. As referências (DEAECTO; SANTOS, 2015; TROFINO et al., 2012; SCHARLAU et al., 2014) tratam o caso de realimentação de estado enquanto (DEAECTO; GEROMEL, 2016; EGIDIO; DEAECTO, 2016a) desenvolvem condições para realimentação dinâmica de saída. Todavia, dispositivos reais geralmente não podem alternar entre seus estados com períodos muito pequenos e vários acionamentos consecutivos podem danificar componentes do sistema ou diminuir sua vida útil. Esta característica muitas vezes inviabiliza a aplicação prática destes resultados.

Uma proposta para sanar tal dificuldade é impor uma limitação à frequência de comutação, veja (HETEL; FRIDMAN, 2013; DEAECTO et al., 2014; ALBEA et al., 2015). Uma abordagem perspicaz para realizar tal imposição é projetar uma regra de comutação globalmente estabilizante para sistemas afins com comutação a tempo discreto. Dessa forma, além de permitir assegurar a estabilidade para sistemas naturalmente discretos (sistemas biológicos, de logística e econômicos), é possível estudar sistemas a tempo contínuo discretizados. Neste caso, a frequência de comutação é naturalmente limitada pela frequência de amostragem, que pode ser

escolhida pelo projetista.

No âmbito deste trabalho duas funções de comutação dependentes do estado são propostas para sistemas afins com comutação a tempo discreto, de forma a assegurar estabilidade prática global de um ponto de equilíbrio desejado. A estabilidade prática é geralmente satisfatória em projetos de engenharia, veja (KUIAVA et al., 2013; XU; ZHAI, 2005). O projeto de ambas leva em conta a minimização do volume de uma região elipsoidal, contendo tal ponto, para onde as trajetórias do estado são assintoticamente atraídas. As regras se diferenciam inicialmente pela escolha do conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis. Embora nenhuma delas seja melhor em termos de minimização de volume, uma é mais simples de ser resolvida numericamente visto que está sujeita a restrições que são descritas em termos de desigualdades matriciais lineares. Neste caso, é possível aplicar o algoritmo de Frank-Wolfe, já conhecido na literatura de otimização não linear, veja (FRANK; WOLFE, 1956). A outra regra, mais difícil de resolver, depende de restrições não convexas cuja solução pode ser obtida, por exemplo, através de algoritmos genéticos.

Segundo o nosso conhecimento, os resultados obtidos nesta dissertação representam um dos primeiros que tratam da síntese de uma função de comutação estabilizante para sistemas afins com comutação a tempo discreto. As condições de projeto são generalizadas para tratar controle de sistemas com dados amostrados, em que o período de amostragem pode ser incerto. Esta última abordagem, além de evitar frequências de comutação elevadas, atenua possíveis imperfeições na implementação. Alguns exemplos numéricos validam os resultados teóricos e são usados para comparação com outra técnica recente disponível na literatura, veja (HETEL; FRIDMAN, 2013). Um exemplo de aplicação prática que consiste no controle da velocidade de um motor CC utilizado em um manipulador robótico é apresentado.

1.1 Estrutura da dissertação

Esta dissertação é composta de 5 capítulos cujos conteúdos estão resumidamente apresentados a seguir:

- **Capítulo 1:** Diz respeito a esta introdução onde o contexto sobre o tema é apresentado, o problema central é levantado e os resultados são brevemente discutidos.
- **Capítulo 2:** Uma revisão sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares invariáveis no tempo é feita. Logo a seguir é definido o problema de otimização convexa geral com restrições baseadas em desigualdades matriciais lineares. Por fim, uma breve discussão sobre sistemas com comutação é posta em cena.

- **Capítulo 3:** Este capítulo é composto por resultados conhecidos da literatura no que tange a estabilidade de sistemas afins com comutação a tempo contínuo e com dados amostrados. Estes resultados são importantes para motivar o estudo de sistemas afins com comutação a tempo discreto.
- **Capítulo 4:** Contendo os principais resultados obtidos durante este mestrado, neste capítulo técnicas inéditas para o controle de sistemas afins a tempo discreto via realimentação de estado são desenvolvidas. Estas técnicas são comparadas numericamente e teoricamente. Além disso, um conjunto de exemplos numéricos e práticos validam os resultados teóricos obtidos.
- **Capítulo 5:** Considerações finais a respeito deste trabalho são discutidas. Temas para trabalhos futuros e as publicações ligadas a este também são apresentadas.
- **Apêndice A:** Desenvolvimentos e conceitos matemáticos importantes que foram omitidos do texto a fim de manter sua organização são listados.
- **Apêndice B:** Apresenta um breve resumo a respeito de Algoritmos Genéticos para problemas de otimização.

Todas as figuras, tabelas, corolários, lemas, algoritmos, exemplos e equações importantes estão numerados em referência ao capítulo que são apresentados enquanto os teoremas são numerados continuamente. Para facilitar a navegação do leitor que estiver de posse da versão digital, hiperligações foram colocadas em cada referência e citação. Outrossim, na apresentação de cada referência bibliográfica, ao final do texto, apresentamos a lista das páginas onde esta é citada ao decorrer da dissertação.

As simulações numéricas foram realizadas com auxílio do software MATLAB 2015a em um Intel(R) Core(TM) i5-2450M @ 2.50GHz. Os problemas de otimização descritos em termos de desigualdades matriciais lineares foram resolvidos através do pacote *LMI Lab* presente na *Robust Control Toolbox* do MATLAB considerando uma precisão relativa de 10^{-4} .

CAPÍTULO 2

Conceitos Fundamentais

Este capítulo é destinado à apresentação de alguns conceitos já bem difundidos na literatura de engenharia de controle. Estes conceitos são importantes pois fornecem embasamento teórico aos resultados obtidos ao longo deste trabalho e dá ao leitor leigo na área condições de acompanhar os desenvolvimentos apresentados nos demais capítulos. Primeiramente, abordamos a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos Lineares e Invariantes no Tempo (LIT) para os domínios contínuo e discreto. Em um segundo momento, apresentamos uma introdução sobre desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), mostrando como problemas de controle podem ser descritos como um problema de otimização convexa em termos de LMIs. Finalmente, um breve resumo sobre sistemas com comutação é apresentado e são discutidas algumas particularidades desta importante classe de sistemas.

2.1 Sistemas Dinâmicos LIT

A realização em espaço de estado de um sistema linear e invariante no tempo de ordem n_x é dada na forma de um conjunto de n_x equações diferenciais de primeira ordem que, no domínio do tempo contínuo, é descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

em que as variáveis de estado x_1, \dots, x_{n_x} compõem o vetor de estado $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ representa a entrada externa e $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída controlada. A primeira igualdade define a equação dinâmica do sistema e a segunda a equação da saída. As matrizes (F, G, C, D) possuem dimensões compatíveis. A equação dinâmica do sistema possui a seguinte solução geral

$$x(t) = e^{Ft}x(0) + \int_0^t e^{F(t-\zeta)}Gw(\zeta) d\zeta \quad (2.2)$$

veja (CHEN, 1995). Para encontrar seu equivalente a tempo discreto, definimos $t_{k+1} - t_k = T > 0$ como sendo o período de amostragem, em que $t_k = kT$, $\forall k \in \mathbb{N}$, são instantes de amostragem sucessivos com $t_0 = 0$. Considerando que a entrada externa é constante entre estes instantes, isto é, $w(t) = w(t_k)$, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, temos que a equação (2.2) torna-se

$$x(t) = e^{F(t-t_k)}x(t_k) + \left(\int_{t_k}^t e^{F(t-\zeta)} d\zeta \right) Gw(t_k) \quad (2.3)$$

válida para todo $t \in [t_k, t_{k+1})$. Para a situação limite em que $t = t_{k+1}$, temos

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= e^{F(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{F(t_{k+1}-\zeta)} d\zeta \right) Gw(t_k) \\ &= e^{FT}x(t_k) + \left(\int_0^T e^{F\tau} d\tau \right) Gw(t_k) \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde utilizamos a mudança de variável $\tau = T - \zeta + t_k$ na segunda igualdade. Definindo $x[k] := x(t_k)$, podemos então descrever um sistema a tempo discreto com resposta idêntica a (2.1) nos instantes de amostragem através de um sistema de equações a diferenças com a seguinte realização em espaço de estado

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bw[k], \\ y[k] = Cx[k] + Dw[k], \end{cases} \quad x[0] = x_0 \quad (2.5)$$

em que $A = e^{FT}$ e $B = \left(\int_0^T e^{F\tau} d\tau \right) G$. O par (A, B) pode ser obtido de forma eficiente a partir do cálculo da exponencial da matriz aumentada $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_w) \times (n_x+n_w)}$ da forma

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} F & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{\mathcal{A}T} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

De fato, utilizando o operador transformada de Laplace $\mathcal{L}\{\cdot\}$ obtemos

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}T} &= \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - \mathcal{A})^{-1} \} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} sI - F & -G \\ 0 & sI \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} (sI - F)^{-1} & \frac{1}{s}(sI - F)^{-1}G \\ 0 & \frac{1}{s}I \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

e, como consequência, a identidade

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{FT} & \left(\int_0^T e^{F\tau} d\tau \right) G \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

a qual permite facilmente obter o sistema discretizado (2.5), cuja solução geral da equação dinâmica é dada por

$$x[k] = A^k x[0] + \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1} B w[\ell] \quad (2.9)$$

Embora tenhamos apresentado o sistema a tempo discreto (2.5) como resultado da discretização de um sistema a tempo contínuo, vários sistemas dinâmicos são naturalmente representados de forma discreta. A seguir apresentamos um simples exemplo retirado de (GEROMEL; PALHARES, 2011).

Exemplo 2.1. Suponha que um bem tenha sido adquirido em um determinado ano por V_0 unidades monetárias e deseja-se determinar o seu valor presente considerando uma inflação anual de $i\%$. Considerando $k = 0$ o ano da compra e $k = L$ o ano atual temos

$$V(k) = \left(1 + \frac{i}{100} \right)^k V_0, \quad k \in \mathbb{N}_{0L} \quad (2.10)$$

com $V(0) = V_0$. Definindo $r = 1 + i/100$, temos que a equação a diferenças que descreve esta sequência é simplesmente

$$\begin{cases} x[k+1] = rx[k] \\ y[k] = x[k] \end{cases}, \quad x[0] = V_0 \quad (2.11)$$

em que a saída é o valor presente $y[k] = V(k)$. Assim como esta, várias sequências podem ser representadas na forma de equações a diferenças (2.5).

Além da forma de representação de estado, podemos descrever o sistema LIT no domínio da frequência a partir da sua função de transferência. Neste caso, supondo que as condições iniciais são nulas, e utilizando a Transformada de Laplace ou a Transformada \mathcal{Z} determinamos a relação entrada-saída $\hat{y}(s) = H_{wy}(s)\hat{w}(s)$ ou $\hat{y}(z) = H_{wy}(z)\hat{w}(z)$ para o domínio de tempo contínuo ou discreto, respectivamente, em que

$$H_{wy}(s) = C(sI - F)^{-1}G + D \quad (2.12)$$

é a função de transferência do sistema a tempo contínuo (2.1) e

$$H_{wy}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2.13)$$

é a função de transferência do sistema a tempo discreto (2.5). Após caracterizar o sistema em ambos os domínios de tempo, apresentamos a seguir o estudo da sua estabilidade.

2.1.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Nesta subseção assumimos que o sistema LIT em consideração é autônomo, isto é, $w(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$. Embora nosso foco seja o estudo desta classe de sistemas, as definições apresentadas a seguir são genéricas, válidas para qualquer sistema dinâmico, e particularizadas para sistemas LIT. Inicialmente, definimos o conceito de ponto de equilíbrio, como apresentado em (LUENBERGER, 1979).

Definição 2.1. O ponto $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$ no espaço de estado é *ponto de equilíbrio* de um sistema dinâmico contínuo se ele apresentar a seguinte propriedade: se $x(t_*) = x_e$ para algum instante de tempo $t_* \in \mathbb{R}_+$ então $x(t) = x_e$ para todos os instantes subsequentes $t \geq t_*$. Para sistemas a tempo discreto essa definição é análoga mudando somente a escala de tempo para $k \in \mathbb{N}$ no lugar de $t \in \mathbb{R}_+$.

Note que se a matriz F for não singular, a origem $x_e = 0$ é o único ponto de equilíbrio do sistema (2.1), pois é solução única da equação $\dot{x}(t) = Fx(t) = 0$. O mesmo ocorre para o sistema a tempo discreto (2.5) quando $1 \notin |\gamma(A)|$, ou seja, quando a matriz $I - A$ for regular, pois neste caso a origem $x_e = 0$ também é solução única da equação $x[k] = Ax[k]$.

De maneira genérica, para um sistema dinâmico qualquer, o conceito de estabilidade é apresentado a seguir, veja (SLOTINE et al., 1991) e (KHALIL, 2002).

Definição 2.2. Um ponto de equilíbrio de um sistema contínuo x_e é dito *estável* se, para todo $R > 0$, existir um escalar $r > 0$ tal que, se $\|x(0) - x_e\| < r$, então $\|x(t) - x_e\| < R$. Caso contrário, o ponto de equilíbrio é dito *instável*. Para sistemas discretos essa definição é análoga.

Em especial, o ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico é dito *assintoticamente estável* se ele for estável e se existir $r > 0$ tal que para qualquer condição inicial na região $\|x(0) - x_e\| < r$ a trajetória $x(t)$ tender ao ponto de equilíbrio x_e , ou seja, $x(t) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$. Adicionalmente, x_e é dito *globalmente assintoticamente estável* se for assintoticamente estável para qualquer $r > 0$, ou seja, se a condição inicial puder ser escolhida em qualquer lu-

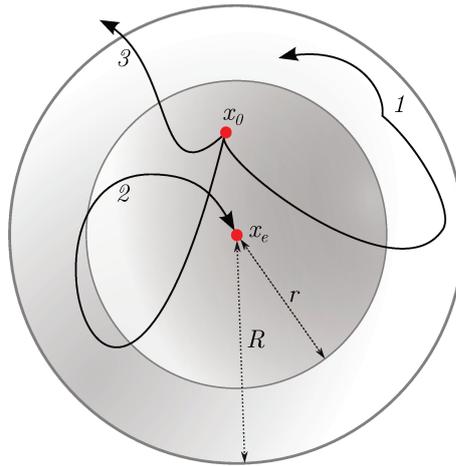


Figura 2.1 - Ilustração dos conceitos de estabilidade.

gar no espaço de estado. Estes conceitos estão ilustrados na Figura 2.1 onde a curva 1 indica estabilidade genérica, a curva 2 estabilidade assintótica e a curva 3 instabilidade do ponto de equilíbrio $x_e \in \mathbb{R}^{n_x}$.

Particularmente, a análise de estabilidade de sistemas LIT pode ser feita apenas analisando os polos da sua função de transferência, ou de forma equivalente, os autovalores da sua matriz dinâmica. Assim, um sistema LIT a tempo contínuo é globalmente assintoticamente estável se todos os autovalores de F apresentarem parte real estritamente negativa, neste caso, dizemos que a matriz F é Hurwitz estável. Para sistemas a tempo discreto a estabilidade assintótica global é assegurada quando todos os autovalores de A estiverem localizados dentro do círculo de raio unitário, neste caso, a matriz A é dita Schur estável. Note que se um sistema a tempo contínuo é Hurwitz estável, então o sistema discretizado segundo (2.4) é Schur estável para qualquer $T > 0$ pois $A = e^{FT} = \mathcal{V}e^{\mathcal{F}T}\mathcal{V}^{-1}$ em que \mathcal{V} e \mathcal{F} são as matrizes dos autovetores e autovalores de F , respectivamente.

A estabilidade de um sistema dinâmico também pode ser analisada através do critério de Lyapunov. Este critério se baseia na escolha de uma função especial chamada de função de Lyapunov e definida como segue, (KHALIL, 2002)

Definição 2.3. Uma função $v(x): \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}_+$ é uma *Função de Lyapunov* se apresentar as seguintes características:

- $v(x) > 0, \forall x \neq x_e; v(x) = 0$, para $x = x_e$
- $v(x)$ é continuamente diferenciável em relação a todas as componentes de $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ (ou apenas contínua no caso discreto)
- $\dot{v}(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{D}$ com $x_e \in \mathcal{D}$ para algum domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ (no caso discreto $\Delta v(x) \leq 0$)

Embora a definição apresentada seja a mais geral, utilizada para analisar qualquer tipo de estabilidade, neste momento, estamos interessados em funções de Lyapunov que permitam assegurar estabilidade assintótica global e, portanto, o terceiro item da definição fica restrito a $\dot{v}(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $x \neq x_e$. Note que $v(x)$ tem característica de uma função distância permitindo analisar o quão longe um estado genérico $x(t)$ está do seu ponto de equilíbrio x_e no decorrer do tempo. Se para qualquer condição inicial dada, a função $v(x(t))$ sempre diminuir e tender a zero no decorrer do tempo, ou seja, se $\dot{v}(x(t)) < 0, \forall x \in \mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^{n_x}, x \neq x_e$, então $x(t) \rightarrow x_e$ e concluímos que o ponto de equilíbrio x_e é globalmente assintoticamente estável. O teorema seguinte apresenta o critério de Lyapunov para o estudo da estabilidade.

Teorema 1 (Teorema de Lyapunov). *Um sistema dinâmico com ponto de equilíbrio x_e é globalmente assintoticamente estável se existir uma função de Lyapunov $v(x)$, ilimitada para $\|x\|$ ilimitado, satisfazendo $\dot{v}(x) < 0, \forall x \neq x_e$, para o caso contínuo ou $\Delta v(x) < 0, \forall x \neq x_e$, para o caso discreto.*

Para sistemas LIT uma boa candidata à função de Lyapunov é a função quadrática

$$v(x) = x'Px, \quad (2.14)$$

sendo $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$. Note que ela satisfaz os dois primeiros itens da Definição 2.3 e, ademais, é radialmente ilimitada para $\|x\|$ ilimitado. A seguir apresentamos o estudo de estabilidade desta classe de sistemas para ambos os domínios de tempo.

2.1.1.1 Tempo Contínuo

Como mencionado anteriormente, a estabilidade do ponto de equilíbrio $x_e = 0$, do sistema $\dot{x} = Fx$ evoluindo de $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, é assegurada sempre que $\dot{v}(x) < 0, \forall x \neq 0$. Desta forma, calculando a derivada temporal da função (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \\ &= x'(F'P + PF)x \end{aligned} \quad (2.15)$$

Assim, dada $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ uma matriz simétrica e definida positiva, se for possível determinar $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ solução da equação de Lyapunov para o tempo contínuo

$$F'P + PF = -Q \quad (2.16)$$

então $\dot{v}(x) = -x'Qx < 0$ para todo $x \neq 0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, o que nos permite escrever o seguinte lema, veja (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

Lema 2.1. *Seja o sistema LIT (2.1) com $w(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}_+$. O ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é globalmente assintoticamente estável se e somente se para $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ dada, existir uma matriz $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ satisfazendo a equação de Lyapunov (2.16).*

Prova: A suficiência advém diretamente da existência de uma solução $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ para a equação de Lyapunov. Esta solução garante que a distância $v(x(t)) = x(t)'Px(t)$ de $x(t)$ à origem é uma função decrescente e, portanto, assegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Como consequência, o sistema é globalmente assintoticamente estável. Para provar a necessidade devemos mostrar que, sendo o sistema estável, para qualquer $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ dada é sempre possível encontrar uma solução única $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ da equação de Lyapunov. Desta forma, supondo que a matriz F é Hurwitz estável, uma possível solução de (2.16) é

$$P = \int_0^{\infty} e^{F't} Q e^{Ft} dt \quad (2.17)$$

Note que esta integral sempre existe pois $\text{Re}\{\gamma_j(F)\} < 0, \forall j \in \mathbb{N}_{n_x}$. Multiplicando à direita de (2.17) por um vetor genérico $0 \neq \chi \in \mathbb{R}^{n_x}$ e à esquerda por sua transposta, temos

$$\chi' P \chi = \int_0^{\infty} x' Q x dt \quad (2.18)$$

em que $x(t) = e^{Ft} \chi$ é a solução do sistema para condição $x(0) = \chi$. De (2.18) podemos concluir que P é simétrica e definida positiva $\chi' P \chi > 0$ pois $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$. Para verificar se (2.17) satisfaz a equação de Lyapunov, substituímos a expressão de P em (2.16) obtendo

$$\begin{aligned} F'P + PF &= F' \left(\int_0^{\infty} e^{F't} Q e^{Ft} dt \right) + \left(\int_0^{\infty} e^{F't} Q e^{Ft} dt \right) F \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{F't} Q e^{Ft} dt = e^{F't} Q e^{Ft} \Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{F't} Q e^{Ft} - Q \\ &= -Q \end{aligned} \quad (2.19)$$

em que a última igualdade decorre do fato de que o limite indicado é nulo pois F é Hurwitz estável. Deste desenvolvimento concluímos que P é solução de (2.16). Para provar sua unicidade, assumimos a existência de uma outra matriz \tilde{P} satisfazendo $F'\tilde{P} + \tilde{P}F = -Q$ a qual subtraída

de (2.16) fornece

$$F'(P - \tilde{P}) + (P - \tilde{P})F = 0 \quad (2.20)$$

Multiplicando (2.20) à esquerda por $e^{F't}$ e à direita pelo transposto, obtemos

$$e^{F't} \left(F'(P - \tilde{P}) + (P - \tilde{P})F \right) e^{Ft} = \frac{d}{dt} \left(e^{F't}(P - \tilde{P})e^{Ft} \right) = 0 \quad (2.21)$$

o que indica que $e^{F't}(P - \tilde{P})e^{Ft}$ é uma matriz constante no tempo. Logo, avaliando essa expressão para $t = 0$ e $t \rightarrow \infty$ e igualando os resultados, temos que

$$P - \tilde{P} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{F't}(P - \tilde{P})e^{Ft} = 0 \quad (2.22)$$

o que nos faz concluir que $P = \tilde{P}$, encerrando assim a prova. \square

2.1.1.2 Tempo Discreto

Para o caso discreto, a estabilidade do ponto de equilíbrio $x_e = 0$, do sistema $x[k+1] = Ax[k]$ evoluindo de $x[0] = x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, é assegurada sempre que $\Delta v(x) < 0$, $\forall x \neq 0$. Desta forma, avaliando o operador diferença da função (2.14) para uma trajetória arbitrária do sistema, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= v(x[k+1]) - v(x[k]) \\ &= x[k+1]'Px[k+1] - x[k]'Px[k] \\ &= x[k]'(A'PA - P)x[k] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Analogamente ao caso contínuo, a estabilidade assintótica global pode ser assegurada sempre que para uma matriz $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ dada, existir uma matriz $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ satisfazendo a equação de Lyapunov para o tempo discreto

$$A'PA - P = -Q \quad (2.24)$$

pois, assim, $\Delta v(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ indicando que a distância entre $x[k]$ e $x_e = 0$ sempre diminui. O lema seguinte formaliza este importante resultado.

Lema 2.2. *Seja o sistema LIT (2.5) com $w(t) \equiv 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. O ponto de equilíbrio $x_e = 0$ é globalmente assintoticamente estável se e somente se para $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ dada, existir uma matriz $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ satisfazendo a equação de Lyapunov (2.24).*

Prova: Similar ao caso contínuo, a suficiência decorre da existência de $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ que asse-

gura $\Delta v(x) < 0, \forall x \neq 0$ e, como consequência, $\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = 0$. Para provar a necessidade, assumindo que A é Schur estável, devemos mostrar que P é solução única da equação de Lyapunov. Considere a matriz

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k Q (A)^k \quad (2.25)$$

como uma possível solução desta equação. Note que a série indicada sempre converge pois $|\gamma_j(A)| < 1, \forall j \in \mathbb{N}_{n_x}$. Multiplicando à direita de (2.25) por um vetor $0 \neq \chi \in \mathbb{R}^{n_x}$ e à esquerda pelo transposto obtemos

$$\chi' P \chi = \sum_{i=0}^{\infty} x' Q x \quad (2.26)$$

em que $x[k] = A^k \chi$ é solução do sistema a tempo discreto para $x[0] = \chi$. Assim, a matriz P é simétrica e definida positiva, ou seja, $\chi' P \chi > 0$ como consequência de $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$. Substituindo a expressão de P na equação (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} A' P A - P &= A' \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A')^k Q (A)^k \right) A - \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k Q (A)^k \\ &= -(A')^0 Q (A)^0 \\ &= -Q, \end{aligned}$$

provando assim que P é uma solução de (2.24). Para demonstrar sua unicidade, assumimos que \tilde{P} também satisfaz $A' \tilde{P} A - \tilde{P} = -Q$, a qual subtraída de (2.24) fornece

$$A'(P - \tilde{P})A = (P - \tilde{P}) \quad (2.27)$$

Multiplicando esta identidade à direita por A^k e à esquerda pelo seu transposto e somando de $k = 0$ até $k \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (A')^{k+1} (P - \tilde{P}) (A)^{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k (P - \tilde{P}) (A)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (A')^{k+1} (P - \tilde{P}) (A)^{k+1} + P - \tilde{P} \end{aligned} \quad (2.28)$$

o que implica que $P - \tilde{P} = 0$ provando a unicidade da solução e concluindo, assim, a prova. \square

Vamos agora considerar um sistema mais geral em que a entrada externa $w(t)$ é constante

para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, (2.1) torna-se um sistema afim com a seguinte realização em espaço de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + g \\ y(t) = Cx(t) + d \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad (2.29)$$

em que $g \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $d \in \mathbb{R}^{n_y}$ são termos afins. Fazendo a mudança de variável $\xi(t) = x(t) - x_{ce}$ com $x_{ce} = -F^{-1}g$, sendo o único ponto de equilíbrio para F regular, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = F\xi(t) \\ \tilde{y}(t) = C\xi(t) \end{cases}, \quad \xi(0) = x_0 - x_{ce}, \quad (2.30)$$

com $\tilde{y}(t) = y(t) - Cx_{ce} - d$, cuja estabilidade pode ser analisada utilizando o critério de Lyapunov apresentado anteriormente. No caso do sistema discretizado

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + b \\ y[k] = Cx[k] + d \end{cases}, \quad x[0] = x_0 \quad (2.31)$$

com período de amostragem $T \in \mathbb{R}_+$, em que $A = e^{FT}$ e $b = \int_0^T e^{F\tau} d\tau g$ e utilizando a mesma mudança de variáveis $\xi[k] = x[k] - x_e$ com $x_e = -(A - I)^{-1}b$ sendo o ponto de equilíbrio do caso discreto para $(A - I)$ regular, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} \xi[k+1] = A\xi[k] \\ \tilde{y}[k] = C\xi[k] \end{cases}, \quad \xi(0) = x_0 - x_e, \quad (2.32)$$

que também permite a aplicação direta dos resultados anteriores para a análise da sua estabilidade. Um ponto interessante a ser observado é que os pontos de equilíbrio dos sistemas (2.29) e (2.31) são idênticos como demonstrado a seguir.

$$\begin{aligned} x_e &= -(A - I)^{-1}b \\ &= -(e^{FT} - I)^{-1} \int_0^T e^{F\tau} d\tau g \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$= -(e^{FT} - I)^{-1} \left(e^{F\tau} \Big|_0^T \right) F^{-1}g = -F^{-1}g = x_{ce} \quad (2.34)$$

Infelizmente, como veremos no Capítulo 4 esta propriedade não se mantém no caso de sistemas afins com comutação. A seguir apresentamos uma breve introdução sobre desigualdades matriciais lineares. O leitor pode consultar a referência (BOYD et al., 1994) para maiores detalhes a respeito deste tema.

2.2 Desigualdades Matriciais Lineares

O problema mais geral de otimização matemática pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{X}} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) > 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}_m \\ & h_i(x) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \end{aligned} \tag{2.35}$$

onde $x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis do problema de otimização, $f(x): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é a função objetivo e $g(x): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $h(x): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ são funções genéricas que definem o conjunto de restrições. Um vetor $x_* \in \mathbb{X}$ é dito uma solução factível se as limitações impostas pelas restrições $g_i(x_*) > 0, \forall i \in \mathbb{N}_m$ e $h_i(x_*) = 0, \forall i \in \mathbb{N}_p$ forem respeitadas. Além disso, x_* é uma solução ótima local se minimizar o valor da função $f(x)$ em uma vizinhança factível $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ e dito um ótimo global se minimizá-la em todo o conjunto \mathbb{X} .

Em geral, não é computacionalmente viável avaliarmos a função objetivo em todos os pontos do domínio $x \in \mathbb{X}$ para encontrarmos a solução global. Dessa forma, métodos numéricos lineares e não lineares para resolução de problemas de otimização estão bastante presentes na literatura, veja (BOYD; VANDENBERGHE, 2004), (LUENBERGER; YE, 1984), (BAZARAA et al., 2010). Em particular, o desenvolvimento dos métodos de pontos interiores na década de 80, veja (KARMAKAR, 1984; NESTEROV et al., 1994), para a solução de desigualdades matriciais lineares representou um grande avanço na área de teoria de controle. De fato, problemas até então difíceis de resolver analiticamente, passaram a ser descritos como problemas de otimização linear e resolvidos facilmente em tempo polinomial. Esta evolução na área da otimização foi tão importante para a área de controle que, atualmente, a solução de um problema de controle termina na sua descrição como um problema de otimização na forma

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c'x \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{R}(x) < 0, \end{aligned} \tag{2.36}$$

com

$$\mathcal{R}(x) := \mathcal{R}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{R}_i \tag{2.37}$$

em que $\mathcal{R}_i \in \mathbb{S}^m$, $\forall i \in \mathbb{N}_{0n}$, são matrizes simétricas reais e x_i é a i -ésima componente do vetor de variáveis $x \in \mathbb{R}^n$. A restrição $\mathcal{R}(x) < 0$ é uma desigualdade matricial linear em x , ou seja, uma LMI¹.

¹do inglês *Linear Matrix Inequality*.

Neste sentido, a solução das equações de Lyapunov para os domínios do tempo contínuo e discreto (2.16) e (2.24) podem ser obtidas a partir da solução dos problemas de otimização

$$\begin{aligned} \min_{P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}} \quad & \text{tr}(P) \\ \text{s.a} \quad & F'P + PF + Q < 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

e

$$\begin{aligned} \min_{P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}} \quad & \text{tr}(P) \\ \text{s.a} \quad & A'PA - P + Q < 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

respectivamente. De fato, considerando que P_* é solução da equação de Lyapunov (2.24) com $Q \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ dada, e que qualquer solução da desigualdade (2.39) satisfaz $A'PA - P + Q = -S$ para uma matriz $S \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ arbitrária, temos

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k (Q + S) (A)^k \\ &> \sum_{k=0}^{\infty} (A')^k Q (A)^k = P_* \end{aligned} \quad (2.40)$$

Assim, minimizando o traço de P (e conseqüentemente a soma de seus autovalores) fazemos com que a solução do problema convirja para P_* , mínimo do conjunto das matrizes factíveis. Raciocínio idêntico pode ser utilizado para a obtenção de (2.38).

É importante salientar que muito embora o conjunto $\mathcal{R}(x) < 0$ possa traduzir restrições altamente não lineares descritas por polinômios ou frações racionais, por exemplo, a função matricial $\mathcal{R}(x)$ ainda pode ser expressa na forma (2.37) a partir da utilização de várias ferramentas de linearização desenvolvidas ao longo dos anos. Uma das ferramentas mais importantes é a aplicação do Lema do Complemento de Schur disponível no Apêndice A. Exemplos de problemas complexos escritos em termos de restrições convexas podem ser conferidos em (BOYD et al., 1994) e (EBIHARA et al., 2015). Nos capítulos subsequentes, utilizaremos esta abordagem a fim de tratar estabilidade de sistemas afins com comutação.

2.3 Sistemas com Comutação

Sistemas dinâmicos com comutação constituem uma subclasse dos sistemas híbridos² caracterizados por apresentar um conjunto de subsistemas e uma função de comutação, também

²Sistema híbrido é um sistema dinâmico onde existem dinâmicas contínuas e discretas que interagem entre si.

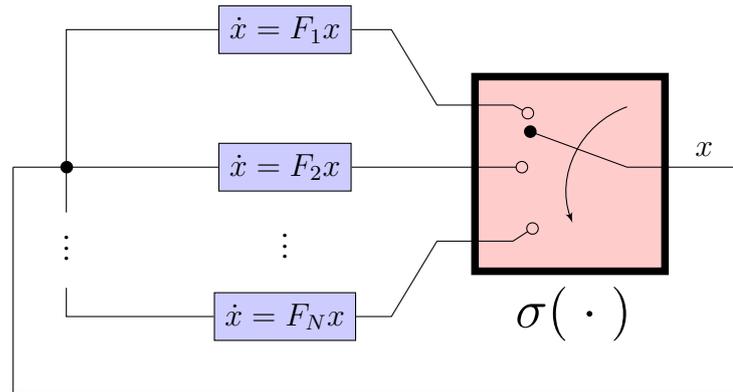


Figura 2.2 - Representação em diagrama de blocos de sistema com comutação a tempo contínuo.

chamada de regra de comutação, responsável por selecionar a cada instante de tempo um dos subsistemas disponíveis, veja (LIBERZON, 2003). De acordo com a regra, estes sistemas podem ser classificados entre dois casos, a depender de quando $\sigma(\cdot)$ é uma perturbação ou uma variável de controle a ser determinada. No que diz respeito ao primeiro caso, o problema de controle se resume em assegurar estabilidade para uma regra arbitrária $\sigma(t): \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{N}_N$. O segundo caso é de maior interesse e consiste em determinar uma função $\sigma(x): \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{N}_N$ capaz de assegurar estabilidade ou melhorar o desempenho do sistema global. A Figura 2.2 apresenta um diagrama de blocos para ilustração composto por N subsistemas lineares e uma chave $\sigma(x)$ que determina qual deles definirá o comportamento global a cada instante de tempo.

O grande interesse no estudo desta classe de sistemas é devido ao seu grande potencial em aplicações práticas e importantes características do ponto de vista teórico. Eles aparecem na modelagem de vários sistemas físicos como aqueles estudados em eletrônica de potência, veja (CORONA et al., 2007) e (CARDIM et al., 2009). Também podem ser utilizados no projeto de controladores chaveados para sistemas LPVs³ quando não é possível fazer a medida do parâmetro variante no tempo, veja (DEAECTO et al., 2011b), além de ser uma alternativa para o controle multiobjetivo, veja (GEROMEL et al., 2007).

Sob o ponto de vista teórico, podemos levantar importantes características destes sistemas. Como será visto no Exemplo 3.1, é possível projetar uma regra de comutação capaz de assegurar estabilidade para casos em que todos os subsistemas são instáveis. No caso onde existem subsistemas estáveis, a regra tem um importante papel na melhoria do desempenho uma vez que, se adequadamente projetada, pode fornecer um desempenho melhor do que aquele de cada subsistema isolado.

Uma característica comum de sistemas com comutação é a possível ocorrência de modos deslizando no espaço de estado, veja (UTKIN et al., 2009). Estes modos são caracterizados pela

³do inglês Linear Parameter Varying

existência de uma frequência de comutação muito elevada permitindo ao sistema assumir uma dinâmica inédita, diferente daquelas de seus subsistemas isolados. Contudo, provocam um fenômeno indesejado chamado *chattering* ou trepidação que pode causar danos aos componentes físicos do sistema, geralmente não projetados para atuar sob altas frequências de chaveamento. É possível encontrar na literatura alguns resultados que minimizam a ocorrência do *chattering*, como em (DEAECTO et al., 2014) e (ALBEA et al., 2015). No Capítulo 4, uma nova abordagem será apresentada a fim de eliminar a ocorrência deste fenômeno para sistemas afins com comutação.

2.4 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos conceitos importantes para a compreensão dos resultados principais deste trabalho. Para mais detalhes a respeito da teoria de sistemas dinâmicos LIT as referências (GEROMEL; KOROGUI, 2011; CHEN, 1995) são básicas no assunto. Para o estudo mais geral de sistemas dinâmicos (LUENBERGER, 1979; FRANKLIN et al., 1998; SLOTINE et al., 1991) podem ser consultados. Também realizamos uma breve introdução sobre desigualdades matriciais lineares aplicadas a problemas de controle, sendo (BOYD et al., 1994; BOYD; VANDENBERGHE, 2004) importantes referências neste contexto. Por fim, apresentamos conceitos básicos a respeito de sistemas com comutação. Para maiores detalhes o leitor poderá consultar (LIBERZON, 2003; SUN, 2006; DEAECTO, 2010).

CAPÍTULO 3

Sistemas Afins com Comutação

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados recentes disponíveis em (DEAECTO; SANTOS, 2015) e (HETEL; FRIDMAN, 2013) sobre estabilidade de sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Mais especificamente, tratamos do projeto de uma função de comutação dependente do estado capaz de assegurar estabilidade global de um ponto de equilíbrio escolhido pelo projetista dentre um conjunto de pontos possíveis no espaço de estado. Como ficará claro, a garantia de estabilidade assintótica exige que a frequência de comutação seja extremamente elevada, o que pode provocar danos nos equipamentos restringindo a aplicação da regra de comutação. Desta forma, nosso objetivo é enfatizar alguns dos aspectos mais importantes desta classe de sistemas e investigar o que ocorre quando impomos uma frequência de comutação finita. Esta imposição foi realizada em (HETEL; FRIDMAN, 2013) e as condições de estabilidade estão apresentadas na Seção 3.2. As conclusões obtidas são motivação para o próximo capítulo onde apresentamos condições que asseguram estabilidade de sistemas afins com comutação a tempo discreto e com dados amostrados que são os principais resultados desta dissertação.

3.1 Sistemas a tempo contínuo

Seja um sistema afim com comutação a tempo contínuo representado pela seguinte equação diferencial no espaço de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_\sigma x(t) + g_\sigma \\ y(t) = E_\sigma x(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída controlada e $\sigma(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{N}_N$ é a função de comutação que escolhe a cada instante de tempo um dos subsistemas disponíveis (F_i, g_i, E_i) , $i \in \mathbb{N}_N$. O termo afim g_i , $i \in \mathbb{N}_N$ faz com que o sistema possua vários pontos de

equilíbrio compondo a seguinte região no espaço de estado

$$X_{ce} = \{x_{ce} \in \mathbb{R}^{n_x} : x_{ce} = -F_\lambda^{-1}g_\lambda, F_\lambda \in \mathcal{H}, \lambda \in \Lambda^N\} \quad (3.2)$$

em que \mathcal{H} é o conjunto das matrizes Hurwitz estáveis, F_λ e g_λ são combinações convexas de $\{F_1, \dots, F_N\}$ e $\{g_1, \dots, g_N\}$, respectivamente, e Λ^N define o simplex unitário de dimensão N dado por

$$\Lambda^N := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i = 1 \right\} \quad (3.3)$$

Neste caso, o problema de controle consiste em determinar uma função de comutação $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{N}_N$ capaz de conduzir as trajetórias do sistema, partindo de qualquer condição inicial, ao ponto de equilíbrio desejado pertencente ao conjunto (3.2). Note que este problema é mais abrangente do que aquele enfrentado no caso linear que apresenta a origem como o único ponto de equilíbrio. Além disso, se ao menos um dos subsistemas for estável, uma solução trivial para garantir estabilidade do sistema linear é manter a função de comutação fixa neste subsistema. No caso afim, o ponto de equilíbrio de interesse geralmente não coincide com aquele de nenhum dos subsistemas e, portanto, não existe uma solução trivial. Pelo contrário, como será ilustrado em seguida, para que a trajetória permaneça no ponto de interesse após o período transitório, a frequência de comutação deve ser arbitrariamente elevada.

A literatura apresenta alguns resultados sobre a análise de estabilidade destes sistemas, como por exemplo, os artigos (BOLZERN; SPINELLI, 2004), (DEAECTO et al., 2010), (DEAECTO; SANTOS, 2015), (SCHARLAU et al., 2014) e (TROFINO et al., 2012), sendo que os três primeiros adotam uma função de Lyapunov quadrática e os dois últimos adotam uma função de Lyapunov do tipo máximo que, infelizmente, fornece condições mais conservadoras devido às restrições impostas para garantir estabilidade na eventual ocorrência de modos deslizantes.

Para um ponto de equilíbrio de interesse $x_{ce} \in X_{ce}$, utilizando a seguinte transformação da variável de estado $\xi = x - x_{ce}$ no sistema (3.1) e definindo $h_i = F_i x_{ce} + g_i$ e $\tilde{y} = y - E_\sigma x_{ce}$, obtemos

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= F_\sigma \xi + h_\sigma \\ \tilde{y} &= E_\sigma \xi \end{cases}, \quad \xi(0) = \xi_0 = x_0 - x_{ce} \quad (3.4)$$

que permanece afim, diferente do que foi observado no capítulo anterior para o caso de sistemas LIT. Podemos verificar que a estabilidade assintótica de (3.1) é garantida sempre que a estabilidade de (3.4) for assegurada, ou seja, $x(t) \rightarrow x_{ce}$ sempre que $\xi(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Assim, nosso objetivo é determinar uma função de comutação estabilizante $\sigma(\xi)$ capaz de conduzir as

trajetórias de (3.4) para a origem. O teorema a seguir, disponível em (DEAECTO et al., 2010) e (SANTOS, 2015), baseia-se na função de Lyapunov quadrática

$$v(\xi) = \xi' P \xi \quad (3.5)$$

com $P > 0$ e fornece condições de estabilidade assintótica global e um custo garantido para o sistema em estudo.

Teorema 2. *Para o sistema afim com comutação (3.4), considere que o ponto de equilíbrio $x_{ce} \in X_{ce}$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda^N$ associado sejam dados. Se existir uma matriz $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ satisfazendo a LMI*

$$F'_\lambda P + P F_\lambda + R_\lambda < 0 \quad (3.6)$$

com $R_i = E'_i E_i$, então a função de comutação do tipo mínimo

$$\sigma(\xi) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} \xi' (Q_i \xi + 2P h_i) \quad (3.7)$$

com $Q_i = F'_i P + P F_i + R_i$, garante a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_{ce} \in X_{ce}$ e um limitante superior para a integral

$$\int_0^\infty \tilde{y}' \tilde{y} dt \leq \xi'_0 P \xi_0. \quad (3.8)$$

Prova: Avaliando a derivada temporal da função (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(\xi) &= \dot{\xi}' P \xi + \xi' P \dot{\xi} \\ &= \xi' (F'_\sigma P + P F_\sigma + R_\sigma) \xi + 2\xi' P h_\sigma - \tilde{y}' \tilde{y} \\ &= \min_{i \in \mathbb{N}_N} \xi' (Q_i \xi + 2P h_i) - \tilde{y}' \tilde{y} \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} \xi' (Q_\lambda \xi + 2P h_\lambda) - \tilde{y}' \tilde{y} \\ &\leq \xi' Q_\lambda \xi - \tilde{y}' \tilde{y} \\ &< -\tilde{y}' \tilde{y} \\ &< 0 \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade é consequência de (3.7), a primeira desigualdade vem do operador mínimo e do fato de que para $x_{ce} \in X_{ce}$ temos $h_\lambda = 0$ e a segunda desigualdade vem de (3.6).

Enfim, da segunda desigualdade podemos desenvolver

$$\int_0^{\infty} \dot{v}(\xi) dt < - \int_0^{\infty} \tilde{y}' \tilde{y} dt$$

o que garante o limitante superior da equação (3.8), pois $v(\xi(\infty)) = 0$ e $v(\xi(0)) = \xi_0' P \xi_0$ finalizando, assim, a prova. \square

Neste momento, podemos destacar os seguintes pontos. O primeiro é que fazer $x_{ce} \in X_{ce}$ é equivalente a encontrar λ que satisfaça $h_\lambda = F_\lambda x_{ce} + g_\lambda = 0$ o que é um problema de difícil solução, veja (BLONDEL; TSITSIKLIS, 1997). Entretanto, para um número relativamente pequeno de subsistemas podemos resolvê-lo sem grandes dificuldades através de busca exaustiva com passo suficientemente pequeno em relação às componentes de $\lambda \in \Lambda^N$. O segundo ponto diz respeito ao conservadorismo. Note que da desigualdade (3.6) podemos concluir que uma condição suficiente para estabilidade é que F_λ seja Hurwitz estável e, portanto, nada é imposto às matrizes F_i , $\forall i \in \mathbb{N}_N$ consideradas isoladamente. O próximo exemplo ilustra o resultado apresentado no Teorema 2.

Exemplo 3.1. Seja o sistema (3.1) definido pelas matrizes

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

e $E_1 = E_2 = I$. Note que $\max_{i \in \mathbb{N}_2} \operatorname{Re} \gamma_i(F_1) = 0.5 > 0$ e $\max_{i \in \mathbb{N}_2} \operatorname{Re} \gamma_i(F_2) = 0.3723 > 0$ o que caracteriza a instabilidade de ambos os subsistemas. Nosso objetivo é encontrar uma regra de comutação $\sigma(x)$ dependente do estado que assegure a estabilidade do ponto de equilíbrio $x_{ce} = [1.2051 \quad -0.4700]'$ desejado. Para explorar o comportamento dos subsistemas isolados, os planos de fase de ambos foram esboçados na Figura 3.1 através de simulações isoladas, sendo representados na variável $\xi = x - x_{ce}$. No caso do subsistema 1, as condições iniciais foram escolhidas de forma a garantir que em $t = 4[s]$ as trajetórias em verde estejam uniformemente distribuídas sobre uma circunferência de raio 5 centrada em $x_{e1} = -F_1^{-1}g_1$, veja o Apêndice A para mais detalhes. Para o subsistema 2 as trajetórias em azul partem de uma circunferência de raio 8 centrada em $x_{e2} = -F_2^{-1}g_2$. Os pontos x_{e1} e x_{e2} são representados por \blacktriangle e \bullet , respectivamente.

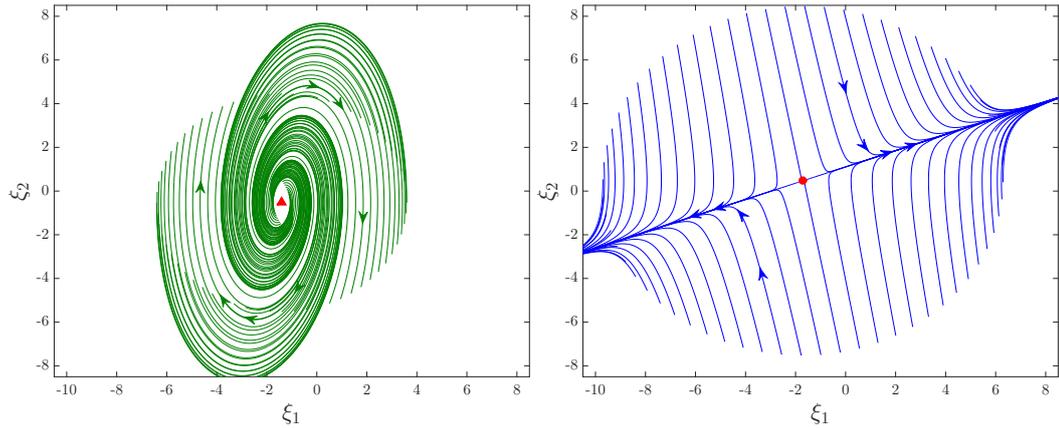


Figura 3.1 - Plano de fase dos subsistemas 1, à esquerda e 2, à direita.

Primeiramente, realizamos uma busca exaustiva em todo o conjunto Λ^2 de forma a encontrar os pontos $x = -F_\lambda^{-1}g_\lambda$ que estão apresentados em vermelho na Figura 3.2. Os pontos destacados em azul são aqueles pertencentes ao conjunto (3.2) que satisfazem a condição $F_\lambda \in \mathcal{H}$. Verificamos imediatamente que o nosso ponto de interesse $x_{ce} \in X_{ce}$, em preto, está associado a $\lambda = [0.47 \ 0.53]'$. Destacamos também os pontos x_{e1} e x_{e2} . É importante notar que para $\lambda_s = [0.2857 \ 0.7143]'$, F_{λ_s} é singular, o que justifica o comportamento assintótico da figura.

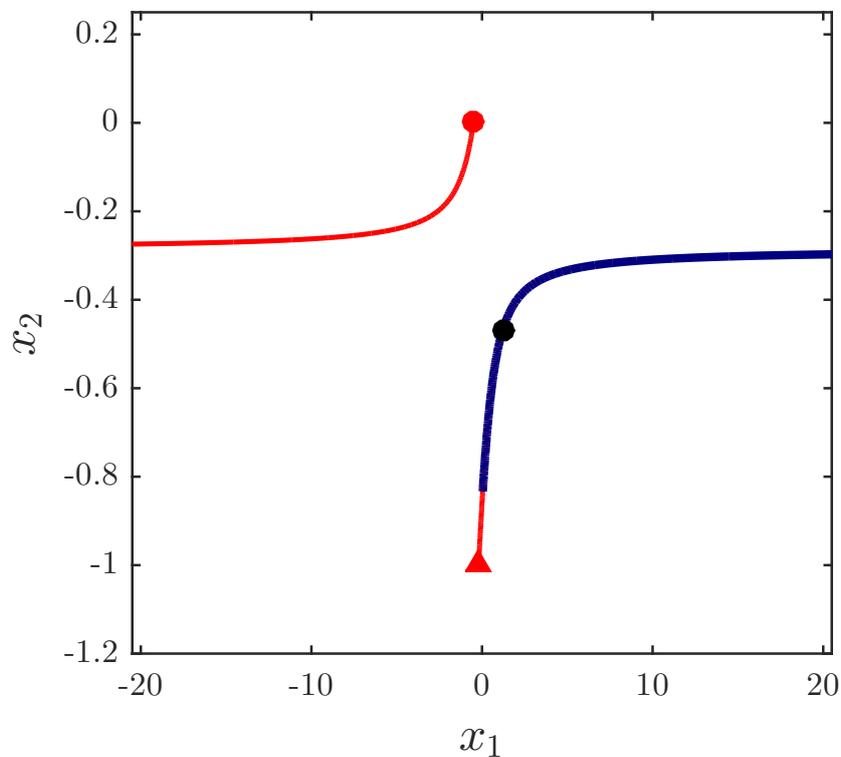


Figura 3.2 - Região dos pontos de equilíbrio atingíveis X_{ce} .

Conhecendo x_{ce} e o seu vetor λ associado reescrevemos o sistema na forma (3.4) e resolvemos o problema de otimização

$$\min_{P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}} \text{tr}(P) \quad \text{s.a.} \quad (3.6) \quad (3.10)$$

Esta função objetivo foi escolhida de forma a fazer com que o problema de otimização seja independente da condição inicial do sistema. Obtemos então a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1.3702 & 0.3876 \\ 0.3876 & 0.4072 \end{bmatrix}$$

e calculamos $Q_i, \forall i \in \mathbb{N}_2$, o que nos permite implementar a regra de comutação (3.7). Podemos definir a superfície de comutação como o lugar geométrico formado por $\xi \in \mathcal{C}$ sendo

$$\mathcal{C} := \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \xi'(Q_i\xi + 2Ph_i) - \xi'(Q_j\xi + 2Ph_j) = 0, i, j \in \mathbb{N}_N, i > j\}. \quad (3.11)$$

Note que uma superfície de comutação separa regiões onde dois subsistemas diferentes são selecionados pela regra $\sigma(\xi)$. Além disso, ela pode definir regiões onde a regra alterna entre ambos os sistemas com altíssima frequência, chamadas de superfícies deslizantes. Reescrevendo a definição do conjunto \mathcal{C} na forma quadrática para $N = 2$, obtemos

$$(\xi - \xi_c)' \Delta Q (\xi - \xi_c) = r \quad (3.12)$$

onde, $\Delta Q = Q_1 - Q_2$, $\Delta h = h_1 - h_2$, $r = \Delta h' P \Delta Q^{-1} P \Delta h$ e $\xi_c = -\Delta Q^{-1} P \Delta h$. Calculando os autovalores de ΔQ encontramos $\gamma_1(\Delta Q) = -5.4530$ e $\gamma_2(\Delta Q) = 4.9125$ o que nos permite concluir que a superfície de comutação é dada por uma hipérbole.

Podemos agora apresentar o plano de fase do sistema com comutação operando sob a regra (3.7) na Figura 3.3, a partir de trajetórias com condições iniciais uniformemente distribuídas sobre uma circunferência de raio 8 centrada em x_{ce} . Na figura também destacamos a superfície de comutação \mathcal{C} em linhas cinzas pontilhadas, o modo deslizante em preto, as trajetórias referentes aos subsistemas 1 e 2 em verde e azul, respectivamente, com os seus pontos de equilíbrio e a origem representada por \bullet .

Por fim, apresentamos na Figura 3.4 a evolução no tempo das variáveis de estado de

uma trajetória iniciada em $\xi_0 = [-2.3223 \quad -7.6555]'$ assim como o comportamento da função de comutação.

Em destaque nesta figura, observamos que a regra alterna entre ambos os subsistemas com frequência extremamente alta. Por simulação numérica calculamos o valor da integral (3.8) e obtivemos que $\int_0^\infty \tilde{y}'\tilde{y} dt = 24.4743 < \xi_0' P \xi_0 = 45.0331$ como esperado.

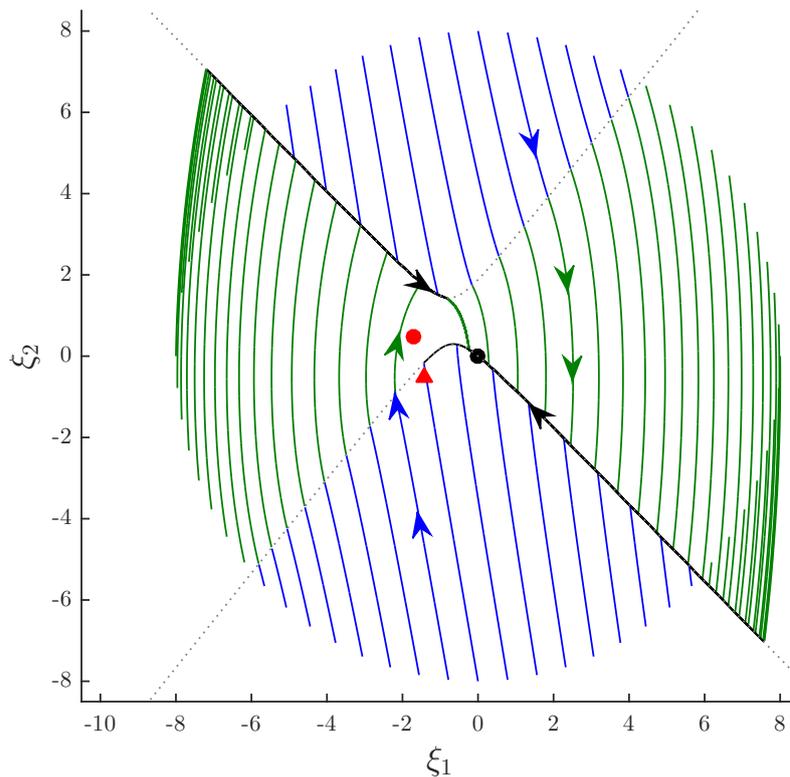


Figura 3.3 - Plano de fase do sistema afim com comutação.

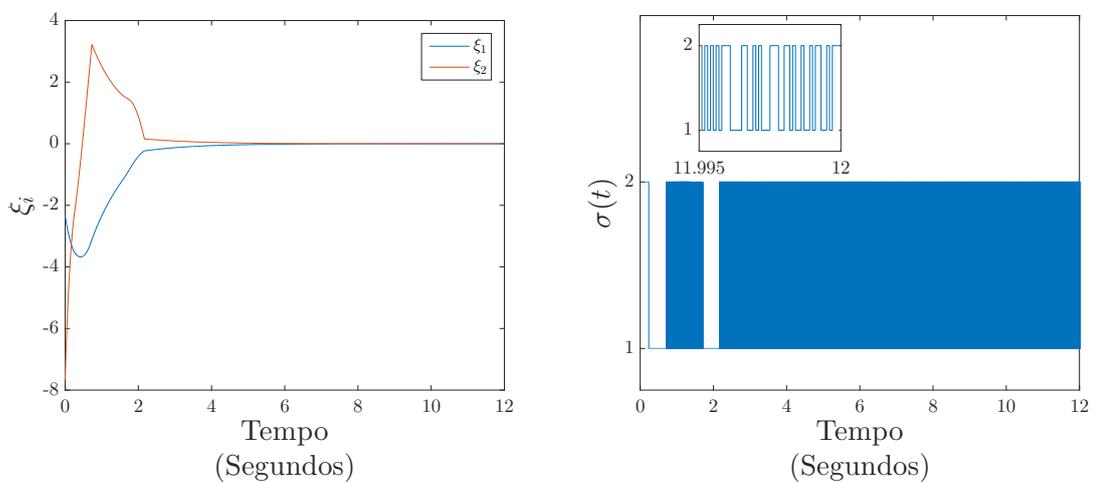


Figura 3.4 - Evolução no tempo das variáveis de estado, à esquerda, e da regra, à direita.

Analisando as Figuras 3.3 e 3.4 podemos verificar que quando o estado encontra uma

superfície deslizante a regra de comutação alterna entre ambos os subsistemas com frequência muito elevada, necessária para manter a trajetória dos estados sobre esta superfície, caracterizando um modo deslizante. Isto faz com que o sistema adquira um comportamento inédito que não é definido por nenhum dos subsistemas.

Todavia, o chaveamento em alta frequência resulta no fenômeno conhecido como *chattering* ou trepidação, indesejado em aplicações práticas. Altas taxas de comutação podem danificar componentes do sistema, causar ruídos e também estar associadas a perdas de energia em geral. Além do mais, limitações físicas podem exigir um intervalo de tempo a ser respeitado, dentro do qual não pode ocorrer comutação, o que torna inviável a implementação da regra proposta no Teorema 2. Desta forma, é de grande interesse da literatura contemporânea a obtenção de uma função de comutação que assegure estabilidade de sistemas afins para frequências de comutação reduzidas. Este fato motiva o estudo da estabilidade de sistemas afins a tempo discreto, cuja frequência de comutação está naturalmente limitada pela frequência de amostragem. Este é um dos temas centrais desta dissertação que será desenvolvido em detalhes no próximo capítulo. Entretanto, vale investigar o que ocorre com as trajetórias do sistema governadas pela função de comutação do Teorema 2 quando a frequência de comutação diminui, o que é realizado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.2. Seja o sistema afim já definido no Exemplo 3.1 e considere a função de comutação (3.7) constante entre dois instantes de amostragem sucessivos, ou seja, $\sigma(t) = i, \forall t \in [t_k, t_{k+1})$, com $t_{k+1} - t_k = T > 0$ sendo o período de amostragem. Neste exemplo, vamos implementar a regra de comutação para $T \in \{10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0\}[s]$ e obter o comportamento de $\xi(t)$ para cada caso partindo de uma condição inicial $\xi_0 = [-4 \ -6]'$. Na Figura 3.5 é possível observar o desenvolvimento no tempo da função de Lyapunov $v(\xi)$ para cada um dos períodos de amostragem.

Note que para $T = 1[s]$ o sistema é instável. Entretanto, para $T \in \{10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}\}[s]$ a função de Lyapunov $v(\xi)$ possui limitante superior que é maior a medida que $T > 0$ aumenta. Isto indica que, para esta condição inicial particular, as trajetórias não divergem, mas variam dentro de uma região contendo o ponto de equilíbrio. No próximo capítulo, definiremos formalmente esta região e determinaremos uma função de comutação responsável por guiar as trajetórias do sistema para uma região de convergência invariante de volume mínimo.

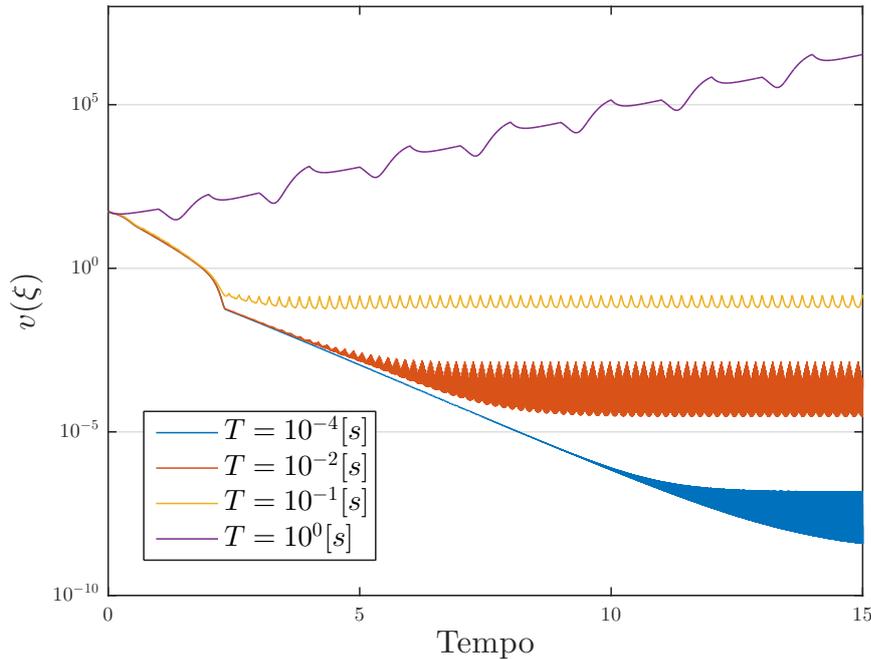


Figura 3.5 - Evolução no tempo da função de Lyapunov $v(\xi)$.

Este exemplo é apenas ilustrativo uma vez que o Teorema 2 não garante estabilidade nestas condições. Entretanto, ele indica a importância de se encontrar uma técnica de controle que garanta levar as trajetórias do sistema ao ponto de equilíbrio desejado, ou ao menos a uma região contendo o ponto de interesse. A seção seguinte apresenta a proposta fornecida na referência (HETEL; FRIDMAN, 2013) para resolver este problema.

3.2 Sistemas com dados amostrados

A referência (HETEL; FRIDMAN, 2013) propõe uma função de comutação estabilizante, dependente do estado amostrado, que assegura a convergência das trajetórias do sistema (3.4) para uma região elipsoidal \mathcal{E}^{T_M} a ser definida em seguida. Mais especificamente, a regra de comutação proposta em (HETEL; FRIDMAN, 2013), baseada na função de Lyapunov (3.5), é dada por

$$\sigma(\xi(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} \xi(t_k)' P(F_i \xi(t_k) + h_i), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (3.13)$$

que é constante no intervalo $t \in [t_k, t_{k+1})$ evitando assim a ocorrência de modos deslizantes. Além disso, esta referência leva em conta que o período de amostragem $t_{k+1} - t_k = T_k$ é desconhecido e pode variar no intervalo $0 < T_k < T_M$, sendo $T_M > 0$ um valor a ser definido pelo projetista. O teorema a seguir apresenta as condições de estabilidade que permitem a obtenção

de $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ importante para a implementação de (3.13).

Teorema 3. *Para o sistema afim com comutação (3.4), considere o ponto de equilíbrio $x_{ce} \in X_{ce}$, seu vetor $\lambda \in \Lambda^N$ associado, $T_M > 0$ e $\gamma > 0$ dados. Se existir uma matriz $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$, matrizes $U_i \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ e um escalar $\beta > 0$ satisfazendo as condições*

$$\begin{bmatrix} \Omega_i^1(\lambda, 0) & \Omega_i^2(0) \\ * & \Omega_i^3(0) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}_N \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_i^1(\lambda, T_M) & \Omega_i^2(T_M) & -T_M \Psi_i(\lambda) \\ * & \Omega_i^3(T_M) & T_M h_i' P \\ * & * & \Omega_i^4(T_M, \lambda) \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}_N \quad (3.15)$$

com

$$\begin{aligned} \Omega_i^1(\lambda, \tau) &= F_\lambda' P + P F_\lambda + 2\gamma P + (T_M - \tau) F_i' U_i F_i \\ \Omega_i^2(\tau) &= (T_M - \tau) F_i' U_i h_i \\ \Omega_i^3(\tau) &= (T_M - \tau) h_i' U_i h_i - \beta T_M \\ \Omega_i^4(\tau, \lambda) &= -\tau U_i e^{-2\gamma T_M} + \tau^2 \Psi_i(\lambda) \\ \Psi_i(\lambda) &= (F_\lambda - F_i)' P + P (F_\lambda - F_i) \end{aligned}$$

então a regra de comutação (3.13) assegura que o estado do sistema é exponencialmente atraído para o elipsóide

$$\mathcal{E}^{T_M} := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \xi' P \xi \leq T_M \frac{\beta}{2\gamma} \right\} \quad (3.16)$$

Prova: A prova está disponível em (HETEL; FRIDMAN, 2013). □

Sobre este teorema é importante fazer as seguintes considerações. A primeira refere-se à comparação com o resultado apresentado no Teorema 2. Note que enquanto F_λ ser Hurwitz estável é uma condição suficiente para a factibilidade do Teorema 2, ela é apenas necessária para o Teorema 3. Esta conclusão é bastante razoável tendo em vista que este último impõe uma restrição adicional sobre a regra, ou seja, a frequência de comutação deve respeitar um limitante superior definido pelo projetista. Outro ponto a ser notado é que as condições do Teorema 3 dependem de um parâmetro de ajuste $\gamma > 0$. Este parâmetro, que corresponde à taxa de decaimento do sistema, não pode ser eliminado uma vez que aparece no denominador

de (3.16) e, portanto, influencia de maneira importante o volume da região de convergência. No próximo capítulo, fornecemos uma função de comutação que além de estabilidade, assegura uma região de convergência invariante de volume mínimo. Convidamos o leitor à verificar o Exemplo 4.3, onde comparamos a técnica a ser desenvolvida no Capítulo 4, um dos nossos resultados principais, com a proposta no Teorema 3. Neste exemplo fica claro a eficiência da função de comutação que será apresentada quando comparada à regra proposta em (HETEL; FRIDMAN, 2013).

3.3 Considerações Finais

Neste capítulo fornecemos condições de estabilidade global para sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Mais especificamente, apresentamos dois resultados recentes da literatura. O primeiro, disponível em (DEAECTO; SANTOS, 2015), propõe condições para estabilidade assintótica global de um ponto de equilíbrio escolhido pelo projetista. A desvantagem desta técnica é que ela exige uma frequência de comutação muito elevada para manter as trajetórias dos estados sobre o ponto escolhido, o que pode inviabilizar a implementação prática da regra de comutação. Para este caso, avaliamos a influência de impor frequências de amostragem limitadas e concluímos que, como esperado, nem mesmo a estabilidade do sistema pode ser garantida a depender do período de amostragem. A outra técnica, proposta em (HETEL; FRIDMAN, 2013), é mais conservadora mas permite tratar problemas que apresentam frequência de comutação limitada evitando a existência de modos deslizantes. No próximo capítulo fornecemos uma solução alternativa para resolver o mesmo problema. Como ficará claro, trata-se de uma condição menos conservadora e mais geral do que a proposta em (HETEL; FRIDMAN, 2013).

CAPÍTULO 4

Estabilidade Prática de Sistemas Afins

Este capítulo contém os principais resultados da dissertação que também estão disponíveis em (DEAECTO; EGIDIO, 2016) e (EGIDIO; DEAECTO, 2016b). Motivados em solucionar os problemas já mencionados no capítulo anterior resultantes da alta frequência de comutação exigida para assegurar estabilidade assintótica para sistemas a tempo contínuo, este capítulo é dedicado a estudar sistemas afins a tempo discreto. Esta escolha foi realizada uma vez que estes sistemas possuem naturalmente a frequência de comutação limitada pela frequência de amostragem. Em um segundo momento, estes resultados são generalizados para tratar controle de sistemas com comutação e dados amostrados levando em conta que o período de amostragem pode variar no tempo respeitando um intervalo conhecido. Segundo o nosso conhecimento, esta é uma das primeiras propostas que tratam do projeto de uma função de comutação via realimentação de estado para sistemas afins puramente discretos. Apresentamos duas funções de comutação diferentes projetadas de forma a levar em conta a minimização do volume de uma região de convergência invariante elipsoidal para onde as trajetórias do estado são assintoticamente atraídas, contendo o ponto de equilíbrio de interesse. Exemplos ilustrativos são usados para validar a teoria desenvolvida e a compará-la com outras técnicas disponíveis na literatura sendo elas um controlador baseado em sinal PWM¹, muito comum em aplicações de engenharia, e a técnica de controle proposta em (HETEL; FRIDMAN, 2013).

4.1 Sistemas afins a tempo discreto

Seja o sistema com comutação a tempo discreto com a realização em espaço de estado

$$x[k+1] = A_{\sigma}x[k] + b_{\sigma}, \quad x[0] = x_0 \quad (4.1)$$

em que $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $(A_i, b_i) \in \{(A_1, b_1), \dots, (A_N, b_N)\}$ são as matrizes de dimensões compatíveis que definem cada um dos N subsistemas disponíveis a cada instante

¹do inglês Pulse Width Modulation

de tempo para reger a dinâmica do sistema. Assim como no caso a tempo contínuo, visto no Capítulo 3, $\sigma(x): \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{N}_N$ é uma função de comutação dependente do estado a ser projetada que define uma sequência responsável por levar as trajetórias do sistema em direção ao ponto de equilíbrio x_e a ser escolhido. Definimos então um novo sistema deslocado, através da escolha de uma variável de estado auxiliar $\xi = x - x_e$, dado por

$$\xi[k+1] = A_\sigma \xi[k] + \ell_\sigma, \quad \xi[0] = \xi_0 \quad (4.2)$$

onde $\ell_i(x_e) = (A_i - I)x_e + b_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$. Visto que, de maneira geral, x_e não coincide com os pontos de equilíbrio dos subsistemas isolados, uma frequência de comutação muito alta é necessária para manter o estado fixo neste ponto, resultando em um fenômeno conhecido como *chattering* (trepidação). Contudo, em sistemas a tempo discreto a frequência de comutação é naturalmente limitada pela frequência de amostragem e, portanto, estabilidade assintótica é geralmente impossível de ser assegurada. Devido a esta característica intrínseca desta classe de sistemas, as técnicas aqui desenvolvidas garantem estabilidade prática. Neste tipo de estabilidade as trajetórias são guiadas para uma região contendo o ponto de equilíbrio, e uma vez que a atingem em um instante $k_0 \in \mathbb{N}$, não a deixam para todo instante subsequente $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$. A região mencionada é dita uma região invariante como definida em (SLOTINE et al., 1991). A estabilidade prática é satisfatória para várias aplicações de engenharia desde que esta região seja suficientemente pequena. Como ficará claro em seguida, as condições aqui propostas são baseadas na função de Lyapunov quadrática no estado

$$v(\xi) = \xi' P \xi, \quad (3.5, r.)$$

para alguma $P \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ como apresentada no Capítulo 3, e na função de comutação

$$\sigma(\xi) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} v(A_i \xi + \ell_i) \quad (4.3)$$

que é projetada de forma a assegurar a existência de uma região de convergência invariante como definida a seguir.

Definição 4.1. Uma região $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ é uma *região de convergência invariante* do sistema (4.2) governado por uma função de comutação $\sigma(\xi)$ se as seguintes condições forem simultaneamente satisfeitas:

- (a) $0 \in \mathcal{S}$;

- (b) Se $\xi \notin \mathcal{S}$, então $\Delta v(\xi) < 0$;
- (c) Se $\xi[k] \in \mathcal{S}$, então $\xi[k+1] \in \mathcal{S}$;

Uma região $\mathcal{X} \subset \mathcal{S}$ é dita *região de convergência* se satisfaz pelo menos os itens (a) e (b).

De acordo com a Definição 4.1, as trajetórias do sistema tendem ao ponto de equilíbrio $\xi = 0$ dentro da região \mathcal{S} mas não necessariamente o atingem. Isso ocorre pois nada é imposto em relação ao sinal de $\Delta v(\xi)$ quando $\xi \in \mathcal{S}$. Note que, se a região for apenas de convergência, ou seja, se somente os itens (a) e (b) forem satisfeitos, as trajetórias podem deixar \mathcal{X} em algum instante de tempo mas, devido a (b), retornam ao seu interior em outro instante subsequente. O item (c) assegura a propriedade de invariância, em que as trajetórias uma vez no interior de \mathcal{S} nunca a deixam. Nosso interesse principal é determinar a função de comutação (4.3) a partir de condições que minimizem o volume da região \mathcal{S} mantendo, por consequência, as trajetórias do sistema o mais próximo possível do ponto de equilíbrio desejado. Nos desenvolvimentos que seguiremos adotaremos a seguinte estratégia: Primeiramente, a partir da função de Lyapunov (3.5) vamos obter condições que garantam estabilidade prática do sistema a partir da minimização do volume de uma região de convergência \mathcal{X} . Posteriormente, para esta função de Lyapunov particular, vamos determinar a região de convergência invariante associada. Em um segundo momento, nosso objetivo é obter condições que minimizem diretamente a região de convergência invariante \mathcal{S} .

4.1.1 Condições de estabilidade

Apresentamos agora duas condições de estabilidade prática para o sistema (4.2). Ambas se diferem inicialmente no que se refere à definição do conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis. Como ficará claro posteriormente, a primeira condição é baseada em um problema de otimização convexa com restrições lineares ao passo que a segunda recai sobre um problema de otimização com restrições não convexas e não lineares. Para facilitar as discussões referenciamos a primeira condição por *Técnica L* e a segunda por *Técnica NL*. Primeiramente, para a Técnica L, definimos o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis como sendo

$$X_e := \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = (I - A_\lambda)^{-1}b_\lambda, A_\lambda \in \mathfrak{S}, \lambda \in \Lambda^N\} \quad (4.4)$$

em que \mathfrak{S} é o conjunto de todas as matrizes Schur estáveis. Note que o conjunto (4.4) contém todos os x_e tais que $\ell_\lambda = 0$. O próximo teorema apresenta as condições da Técnica L para garantir estabilidade prática de (4.2).

Teorema 4 (Técnica L). *Para o sistema afim com comutação (4.2), considere que o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda^N$ associado sejam dados. Se existirem matrizes P , $W \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ solução do problema de otimização convexa*

$$\begin{aligned} & \min_{P, W \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}} && -\ln(\det(W)) \\ & && \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P A_i - P < -W, \\ \text{s.a} & && \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i \begin{bmatrix} 1 - \ell_i' P \ell_i & \bullet \\ c_i & W \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

com $c_i = A_i' P \ell_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$, então a função de comutação (4.3) garante que a região elipsoidal

$$\mathcal{X}_L := \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : (\xi - \mu)' W (\xi - \mu) \leq 1\} \quad (4.6)$$

é uma região de convergência com volume mínimo centrada em $\mu = W^{-1} c_\lambda$.

Prova: A prova segue da adoção de uma candidata à função de Lyapunov $v(\xi) = \xi' P \xi$ e a função de comutação (4.3). Avaliando o operador diferença de $v(\xi)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta v(\xi) &= v(A_\sigma \xi + \ell_\sigma) - v(\xi) \\ &= \min_{i \in \mathbb{N}_N} (A_i \xi + \ell_i)' P (A_i \xi + \ell_i) - \xi' P \xi \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{j \in \mathbb{N}_N} \lambda_j (A_j \xi + \ell_j)' P (A_j \xi + \ell_j) - \xi' P \xi \\ &\leq -\xi' Q_\lambda \xi + 2c_\lambda' \xi + \rho_\lambda \\ &\leq -(\xi - \mu)' Q_\lambda (\xi - \mu) + c_\lambda' Q_\lambda^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda \end{aligned} \quad (4.7)$$

com $-Q_i = A_i' P A_i - P$ e $\rho_i = \ell_i' P \ell_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$. Sem perda de generalidade podemos introduzir uma nova variável matricial $W < Q_\lambda$ e uma restrição $c_\lambda' Q_\lambda^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda < 1$ o que nos leva às desigualdades em (4.5). Juntamente com (4.7), tais desigualdades garantem que para todo $\xi \notin \mathcal{X}_L$ temos $\Delta v(\xi) < 0$. Além disso, a verificação de que $0 \in \mathcal{X}_L$ é simples uma vez que substituindo $\xi = 0$ no primeiro membro da desigualdade que define \mathcal{X}_L obtemos $c_\lambda' W^{-1} c_\lambda$ e, a partir da segunda desigualdade de (4.5), concluímos que $c_\lambda' W^{-1} c_\lambda < c_\lambda' W^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda < 1$. Encerramos a prova minimizando o volume de \mathcal{X}_L . Veja o Apêndice A onde mostramos que este volume é proporcional a $(\det(W))^{-1/2}$ e, portanto, minimizar a função objetivo do problema (4.5) equivale a minimizar o volume do conjunto (4.6). \square

É importante ressaltar alguns pontos a respeito deste resultado. Primeiramente, notemos que o Teorema 4 apresenta um problema de otimização convexa com restrições lineares porém a função objetivo é não linear. Entretanto, ela é convexa e seu gradiente é dada por $\nabla_W(-\ln(\det(W))) = -W^{-1}$, como pode ser visto no Apêndice A. A literatura apresenta alguns métodos para resolver este problema de otimização, dentre eles, escolhemos o algoritmo de Frank-Wolfe, veja (FRANK; WOLFE, 1956). O Algoritmo 4.1 adaptado à Técnica L resume-o brevemente.

Algoritmo 4.1 Algoritmo de Frank-Wolfe para a Técnica L

Dados: $\epsilon = 10^{-3}$, $W_0 = I$

Saída: P_* , W_*

- 1: $q \leftarrow 0$
- 2: Resolver o problema do passo 4 e fazer $W_q = S_q$, $P_q = R_q$
- 3: **repita**
- 4: Resolver o problema de otimização convexa

$$\begin{aligned} & \inf_{R, S \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}} -\text{tr}(W_q^{-1}S) \\ \text{s.a. } & \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' R A_i - R < -S, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i \begin{bmatrix} 1 - \ell_i' R \ell & \bullet \\ c_i & S \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

a fim de encontrar R_q e S_q

- 5: Por busca unidimensional, determinar

$$\alpha_q = \arg \max_{\alpha \in [0,1]} \ln(\det(\alpha S_q + (1 - \alpha)W_q))$$

- 6: $W_{q+1} \leftarrow \alpha_q S_q + (1 - \alpha_q)W_q$, $P_{q+1} \leftarrow \alpha_q R_q + (1 - \alpha_q)P_q$
 - 7: $q \leftarrow q + 1$
 - 8: **enquanto** $-\text{tr}((W_{q-1})^{-1}(S_{q-1} - W_{q-1})) < -\epsilon$
 - 9: $W_* = W_{q-1}$
 - 10: $P_* = P_{q-1}$
-

Através deste método a convergência para a solução ótima global é sempre garantida. Outro ponto a ser ressaltado diz respeito à suficiência das condições propostas. Em contraste com o que acontece nos sistemas a tempo contínuo, no domínio do tempo discreto a Schur estabilidade da matriz A_λ não é uma condição suficiente para a estabilidade global do sistema. Como foi provado em (DEAECTO et al., 2014), uma condição necessária e suficiente para a factibilidade de $\sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P A_i - P < -W$ é que a matriz $\sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i (A_i' \otimes A_i) \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$ seja Schur estável, o que é mais conservador do que exigir apenas que A_λ seja Schur estável.

Por fim, é importante notar que a região de convergência definida em (4.6) não está centrada na origem. Este fato pode representar uma limitação para a minimização do volume, visto

que o centro μ pode não estar próximo da origem. Propomos então um outro resultado que representa a Técnica NL. O próximo teorema apresenta condições alternativas que nos permitem encontrar uma região de convergência centrada em $\xi = 0$ e será enunciado a seguir.

Teorema 5 (Técnica NL). *Para o sistema afim com comutação (4.2), considere um ponto de equilíbrio \bar{x}_e pertencente ao conjunto*

$$\bar{X}_e := \left\{ \bar{x}_e \in \mathbb{R}^{n_x} : \bar{x}_e = -J_\lambda^{-1} \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P b_i, A_\lambda \in \mathfrak{S}, \lambda \in \Lambda^N \right\} \quad (4.8)$$

com $J_i = A_i' P (A_i - I)$, e matrizes $P, W \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ satisfazendo o seguinte problema de otimização não convexa

$$\begin{aligned} \min_{P, W \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}} \quad & -\ln(\det(W)) \\ & \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P A_i - P < -W, \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i \bar{\ell}_i' P \bar{\ell}_i < 1 \\ & J_\lambda \bar{x}_e + \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P b_i = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

para $\bar{\ell}_i = (A_i - I)\bar{x}_e + b_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$, então a função de comutação (4.3) garante que a região

$$\mathcal{X}_{NL} := \{ \xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \xi' W \xi \leq 1 \} \quad (4.10)$$

é uma região de convergência com volume mínimo.

Prova: A prova é idêntica àquela do Teorema 4 observando que todos os pontos $\bar{x}_e \in \bar{X}_e$ satisfazem $c_\lambda = 0$. \square

Este problema é mais complexo do que o proposto no Teorema 4, uma vez que $\bar{\ell}_i$ depende de \bar{x}_e e que por sua vez depende de P . Como consequência, não é possível determinar \bar{X}_e apenas realizando uma busca em Λ^N , visto que para cada λ podem existir inúmeros \bar{x}_e . Além do mais, adicionamos a condição do conjunto \bar{X}_e às restrições do problema fazendo com que as condições do teorema se tornem altamente não lineares e não convexas. Existem na literatura exemplos que aplicam métodos heurísticos como algoritmos genéticos para a resolução de problemas deste tipo, veja (KRISHNAKUMAR; GOLDBERG, 1992) e (SANNA; MURRONI, 2011), cujo funcionamento é brevemente explicado no Apêndice B. Uma tentativa para resolver este problema de maneira determinística é a implementação do seguinte algoritmo.

Entretanto, assim como no caso de métodos heurísticos, este algoritmo geralmente con-

Algoritmo 4.2 Estabilidade de sistemas afins a tempo discreto para a Técnica NL

Dados: ϵ, P_0 solução de $\sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P A_i - P < -I$

Saída: P_*, W_*

1: $q \leftarrow 0$

2: **repita**

3: Calcular $x_e(P_q)$ e $\ell_i(x_e), \forall i \in \mathbb{N}_N$.

4: Aplicar o algoritmo de Frank-Wolfe para obter P_{q+1} e W_{q+1} .

5: $q \leftarrow q + 1$

6: **enquanto** $\|x_e(P_q) - x_e(P_{q-1})\| > \epsilon$

7: $W_* = W_q$

8: $P_* = P_q$

verge para soluções subótimas. Para os exemplos analisados o método heurístico encontrou regiões de convergência com volumes menores, mostrando-se mais eficiente.

Neste ponto é importante comparar teoricamente as técnicas de projeto L e NL. Pela desigualdade (4.7) concluímos que seus respectivos teoremas asseguram a seguinte região de convergência $\{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : (\xi - \mu)' W (\xi - \mu) < f(z)\}$ com a função $f(z)$ dada por

$$\begin{aligned}
 f(z) &= c_\lambda' Q_\lambda^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda \\
 &= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P (B_i z + b_i) \right)' Q_\lambda^{-1} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P (B_i z + b_i) \right) + \\
 &\quad + \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i (B_i z + b_i)' P (B_i z + b_i)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

sendo $-Q_i = A_i' P A_i - P$ e $B_i = A_i - I$. A função $f(z)$ representa o raio ao quadrado da região de convergência para uma matriz W genérica e um ponto de equilíbrio z . Após alguns cálculos simples, porém extensos, encontramos a sua matriz Hessiana $\nabla_z^2 f(z) = 2PB_\lambda Q_\lambda^{-1} B_\lambda' P$ e seu gradiente $\nabla_z f(z) = 2PB_\lambda(x_e - z)$. Denotando \bar{x}_e e x_e como sendo qualquer ponto de equilíbrio pertencente a \bar{X}_e e X_e , respectivamente, é possível expandir $f(z)$ em série de Taylor até a segunda ordem em torno de \bar{x}_e e encontrar a relação

$$f(x_e) = f(\bar{x}_e) + (x_e - \bar{x}_e)' (M_\lambda - Q_\lambda) (x_e - \bar{x}_e) \tag{4.12}$$

sendo $M_\lambda = (PB_\lambda + Q_\lambda) Q_\lambda^{-1} (PB_\lambda + Q_\lambda)'$. A diferença $M_\lambda - Q_\lambda$ resulta em uma matriz indefinida em sinal. Portanto, baseando-se apenas neste fato, não podemos concluir qual das técnicas é melhor em relação à minimização do volume da região de convergência. O exemplo a seguir ilustra a validade das técnicas propostas.

Exemplo 4.1. Seja o sistema afim com comutação a tempo discreto definido pelas matrizes

$$A_i = e^{F_i T}, b_i = \int_0^T e^{F_i \tau} d\tau g_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$$

em que $T = 1[s]$ e

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}, g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $\max_{i \in \mathbb{N}_2} |\gamma_i(A_1)| = 1.1083$ e $\max_{i \in \mathbb{N}_2} |\gamma_i(A_2)| = 1$ o que caracteriza a instabilidade de ambos os subsistemas. Desejamos levar o estado $x[k]$ para uma região de convergência de volume mínimo que contenha o ponto de equilíbrio $x_e = [3.2545 \ -0.0048 \ -0.4645] \in X_e$. Através de uma busca exaustiva em todo o conjunto Λ^2 verificamos que para $\lambda = [0.4 \ 0.6]'$ obtemos o ponto escolhido $(I - A_\lambda)^{-1} b_\lambda = x_e \in X_e$. Resolvendo então as condições do Teorema 4 a partir da implementação do Algoritmo 4.1 encontramos como solução

$$W = \begin{bmatrix} 0.0369 & -0.0226 & 0.0037 \\ -0.0226 & 0.1070 & -0.0114 \\ 0.0037 & -0.0114 & 0.1047 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0.5363 & 0.3984 & 0.0793 \\ 0.3984 & 1.4455 & 0.4763 \\ 0.0793 & 0.4763 & 0.3014 \end{bmatrix}$$

que nos permite implementar a regra (4.3) e obter a resposta temporal do sistema apresentada na Figura 4.1 para uma condição inicial $x_0 = [5 \ 5 \ 5]'$. A região de convergência elipsoidal \mathcal{X}_L obtida está centrada em $\mu = [3.5214 \ -0.6451 \ -1.1459]'$ e possui um volume de $vol(\mathcal{X}_L) = 222.2080$. Esta região está representada nas Figuras 4.2 no \mathbb{R}^3 e 4.3 em função do tempo.

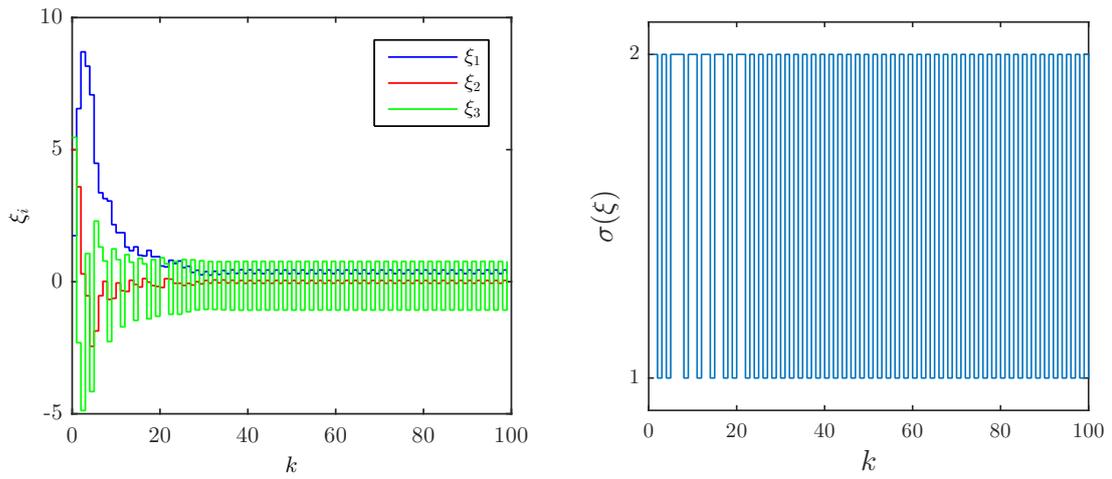


Figura 4.1 - Evolução do estado (esq.) e da regra $\sigma(\xi)$ (dir.), no tempo k para Técnica L.

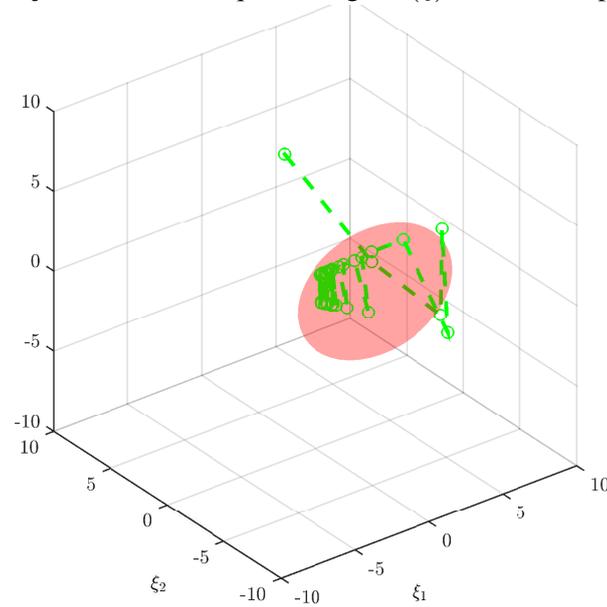


Figura 4.2 - Representação da região \mathcal{X}_L no \mathbb{R}^3

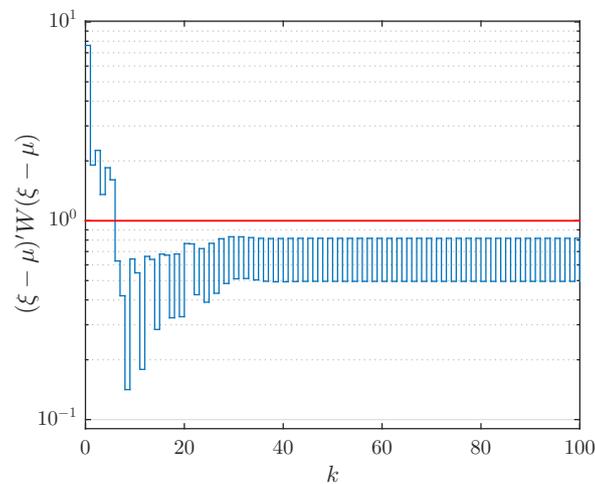


Figura 4.3 - Representação da região $\mathcal{X}_L = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : (\xi - \mu)'W(\xi - \mu) \leq 1\}$.

A título de comparação, para este mesmo sistema, o problema de otimização descrito no Teorema 5 foi resolvido através de um algoritmo genético implementado na função \mathfrak{ga} do MATLAB (veja Apêndice B). Obtivemos como solução $\bar{x}_e = [2.2161 \ -0.2387 \ -0.8261]'$ $\in \bar{X}_e$ e as matrizes

$$W = \begin{bmatrix} 0.0521 & -0.0081 & 0.0549 \\ -0.0081 & 0.4660 & -0.1731 \\ 0.0549 & -0.1731 & 0.4505 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.1746 & 0.8623 & 0.1922 \\ 0.8623 & 3.6960 & 1.0041 \\ 0.1922 & 1.0041 & 0.9276 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

o que garante uma região de convergência de volume mínimo $vol(\mathcal{X}_{NL}) = 46.5528$ que é aproximadamente 21% de $vol(\mathcal{X}_L)$. Realizamos a simulação no tempo para a Técnica NL obtendo as trajetórias apresentadas nas Figuras 4.4 e 4.5.

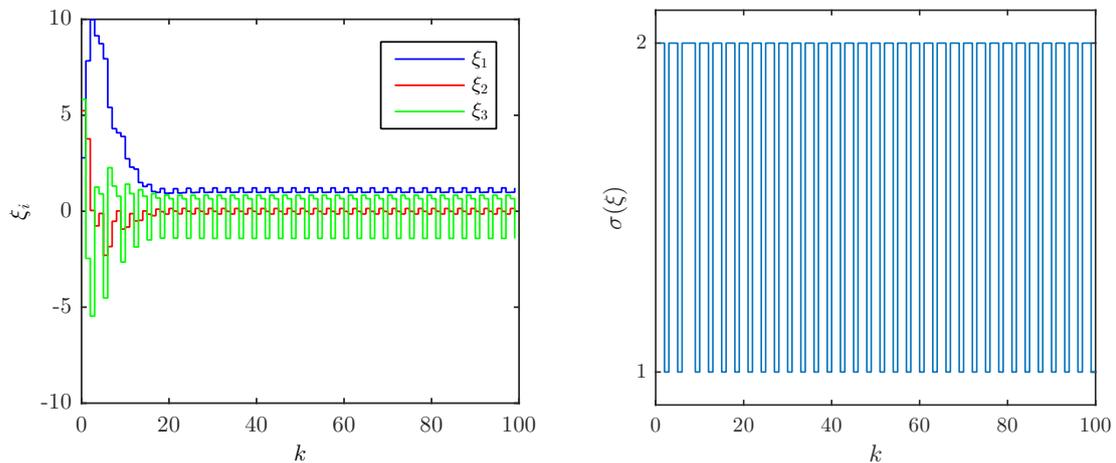


Figura 4.4 - Evolução do estado (esq.) e da regra $\sigma(\xi)$ (dir.), no tempo k para Técnica NL.

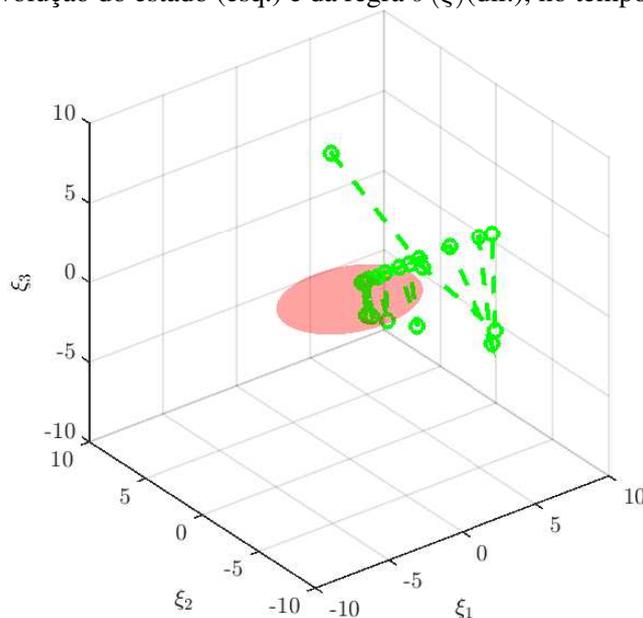


Figura 4.5 - Representação da região \mathcal{X}_{NL} no \mathbb{R}^3 .

Alguns pontos relevantes podem ser destacados em relação ao Exemplo 4.1. Primeiramente, notemos que foi possível levar o estado ξ para regiões de convergência \mathcal{X}_L e \mathcal{X}_{NL} evidenciando a eficiência de ambas as técnicas propostas. Ademais, para este caso em particular, a Técnica NL forneceu uma região de convergência de volume menor. Entretanto, ela não permitiu levar as trajetórias ao ponto de equilíbrio desejado $x_e \in X_e$. Alguns testes numéricos mostraram que impondo \bar{x}_e igual ao ponto de equilíbrio de interesse $x_e \in X_e$ e utilizando $\lambda \in \Lambda^N$ como variável de otimização na Técnica NL, o algoritmo genético não encontrou solução após várias iterações. Da mesma maneira, como ambas as técnicas não são comparáveis em termos de conservadorismo, a Técnica NL pode levar as trajetórias do sistema a pontos de equilíbrio $\bar{x}_e \in \bar{X}_e$ que não pertencem ao conjunto X_e e, portanto, que não poderiam ser atingidos pela Técnica L. Observamos que a grande desvantagem da Técnica NL do ponto de vista de implementação é a impossibilidade de conhecer o conjunto \bar{X}_e de antemão.

4.1.2 Região de convergência invariante

Nosso objetivo neste momento é determinar a região de convergência invariante a partir da solução dos Teoremas 4 ou 5. Vamos mostrar que para a função de Lyapunov particular calculada através da solução do Teorema 4, a região

$$\mathcal{S} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : v(\xi) \leq r\} \quad (4.14)$$

com $r > 0$ dado pela solução ótima de

$$r_* = \sup_{\xi \in \mathcal{X}_L} v(\xi) = \inf_{r > 0} \{r : v(\xi) < r, \forall \xi \in \mathcal{X}_L\} \quad (4.15)$$

satisfaz os três itens da Definição 4.1. Note que este problema envolve a determinação do valor máximo de uma função convexa pertencente a um conjunto convexo que, de forma surpreendente, pode ser escrito em termos de LMI através da utilização do *S-procedure*, veja (BOYD et al., 1994) e o Apêndice A. Antes de tratá-lo, apresentaremos o Lema 4.1 disponível em (DEAECTO; GEROMEL, 2016) e que será importante para os desenvolvimentos futuros.

Lema 4.1. *Seja a solução*

$$r_* = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{q_1(z) : q_2(z) < 0\} \quad (4.16)$$

para $q_1(z)$ e $q_2(z)$ sendo funções quadráticas convexas de $z \in \mathbb{R}^n$. Se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q_1 - \alpha Q_2 > 0 \quad (4.17)$$

onde Q_1 e Q_2 são as matrizes Hessianas de $q_1(z)$ e $q_2(z)$, respectivamente, então para o problema

$$\bar{r}_* = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{q_1(z) - \alpha q_2(z) : q_2(z) < 0\}. \quad (4.18)$$

temos $\bar{r}_* = r_*$.

Prova: Se (4.17) for verificada para algum α , logo concluímos que $p(z) = q_1(z) - \alpha q_2(z)$ é estritamente convexa. Sendo z_* a solução ótima do problema (4.16) e \bar{z}_* a solução ótima do problema (4.18), podemos concluir que $\lim_{z \rightarrow z_*} q_2(z) = \lim_{z \rightarrow \bar{z}_*} q_2(z) = 0$ pois $q_2(z) < 0$ define um conjunto convexo de restrição que estará ativa em ambos os casos, uma vez que buscamos limitantes superiores para funções objetivo também convexas. Da própria definição dos problemas podemos dizer que

$$r_* = q_1(z_*) \geq q_1(\bar{z}_*) = \bar{r}_* + \alpha q_2(\bar{z}_*),$$

$$\bar{r}_* = p(\bar{z}_*) \geq p(z_*) = r_* - \alpha q_2(z_*).$$

Levando em conta que $q_2(z_*) = q_2(\bar{z}_*) = 0$ obtidos através dos limites calculados anteriormente, podemos concluir que $\bar{r}_* = r_*$, finalizando esta prova. \square

Todos os desenvolvimentos que seguem levam em conta os resultados da Técnica L, mas um procedimento idêntico pode ser adotado para a Técnica NL. Além disso, eles foram inspirados na referência (DEAECTO; GEROMEL, 2016) que fornece condições baseadas em uma função de Lyapunov diferente da adotada nesta dissertação. Enunciaremos a seguir o Teorema 6 que nos permitirá encontrar uma região de convergência invariante a partir da solução ótima do problema (4.5). Por fornecer uma solução subótima no que se refere à minimização do volume da região de convergência invariante, a técnica apresentada neste teorema será referenciada por Técnica SO, para facilitar as discussões futuras.

Teorema 6 (Técnica SO). *Seja um sistema (4.2) e a região de convergência \mathcal{X}_L garantida pelo Teorema 4 junto com as matrizes P e W solução de (4.5). Se existirem escalares $r, \beta > 0$*

solução do problema de otimização descrito em termos de LMIs

$$\begin{aligned} & \inf_{r, \beta > 0} && r \\ & \text{s.a} && \begin{bmatrix} r - \beta & \bullet & \bullet \\ P\mu & P & \bullet \\ 0 & P & \beta W \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

então a região elipsoidal

$$\mathcal{S}_{SO} := \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \xi' P \xi < r\} \quad (4.20)$$

defina uma região de convergência invariante que satisfaz $\mathcal{X}_L \subset \mathcal{S}_{SO}$.

Prova: Aplicando o *S-procedure* às restrições do problema (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} r_* &= \sup_{\xi \in \mathcal{X}_L} v(\xi) \\ &= \inf_{r > 0} \{r : v(\xi) < r, \forall \xi \in \mathcal{X}_L\} \\ &= \inf_{r, \beta \in \mathbb{R}_{++}} \{r : \xi' P \xi - r < \beta(\xi - \mu)' W (\xi - \mu) - \beta, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n_x}\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Este problema pode ser resolvido a partir da determinação do ínfimo de $r \in \mathbb{R}_{++}$ satisfazendo $g(\xi) < r$ com $g(\xi)$ sendo a seguinte função quadrática

$$g(\xi) = \xi'(P - \beta W)\xi + 2\beta\xi'W\mu - \beta\mu'W\mu + \beta \quad (4.22)$$

Isto equivale a encontrar o valor máximo de $g(\xi)$ que, claramente, só existe se esta função for côncava, ou seja, se $P - \beta W < 0$. Logo, assumindo que $g(\xi)$ é concava, o seu valor máximo obtido a partir da equação $\nabla_{\xi} g(\xi) = 0$ ocorre para o ponto crítico

$$\xi_* = -\beta(P - \beta W)^{-1}W\mu \quad (4.23)$$

Assim, fazendo $g(\xi_*) < r$ e utilizando a variável auxiliar $X = \beta W$, obtemos

$$\begin{aligned} r - \beta &> \mu'(X(X - P)^{-1}X - X)\mu \\ &> \mu'((I - PX^{-1})^{-1}X - X)\mu \\ &> \mu'([I + P(I - X^{-1}P)^{-1}X^{-1}]X - X)\mu \\ &> \mu'(P^{-1} - (\beta W)^{-1})\mu \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde foi utilizado o Lema da Inversa na terceira desigualdade. Levando em conta que $P^{-1} - (\beta W)^{-1} > 0$ podemos aplicar Lema do Complemento de Schur (veja Apêndice A) em (4.24) e reescrevê-la como

$$\begin{bmatrix} r - \beta & \bullet \\ \mu & P^{-1} - (\beta W)^{-1} \end{bmatrix} > 0. \quad (4.25)$$

Multiplicando esta desigualdade à direita e à esquerda por $T = \text{diag}(I, P)$, obtemos a desigualdade

$$\begin{bmatrix} r - \beta & \bullet \\ \mu P & P - P(\beta W)^{-1}P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.26)$$

que pode ser reescrita na forma (4.19) após aplicar novamente o Lema do Complemento de Schur. Logo, pelo *S-procedure*, se existir r, β solução de (4.19), então $r = r_*$ é solução de (4.15). Note que, como as duas primeiras condições da Definição 4.1 são válidas para \mathcal{X}_L o mesmo ocorre para \mathcal{S}_{SO} pois $\mathcal{X}_L \subseteq \mathcal{S}_{SO}$. Resta provar que a condição (c) desta definição é satisfeita. Para essa finalidade, vamos analisar a região definida por (4.20) para dois casos possíveis considerando $\xi[k] \in \mathcal{S}_{SO}$, a saber:

- Se $\xi[k] \notin \mathcal{X}_L$ sabemos da Definição 4.1 que $v(\xi[k+1]) < v(\xi[k])$ logo $\xi[k+1] \in \mathcal{S}_{SO}$.
- Se $\xi[k] \in \mathcal{X}_L$ nada pode-se afirmar a respeito do sinal de $\Delta(v(\xi[k]))$, entretanto, da desigualdade (4.7) concluímos que

$$\begin{aligned} v(\xi[k+1]) &\leq v(\xi[k]) - (\xi - \mu)'Q_\lambda(\xi - \mu) + c'_\lambda Q_\lambda^{-1}c_\lambda + \rho_\lambda \\ &< v(\xi[k]) - (\xi - \mu)'W(\xi - \mu) + 1 \\ &< \sup_{\xi \in \mathbb{R}^{n_x}} \{q_1(\xi) - q_2(\xi) : q_2(\xi) < 0\} \\ &< r, \end{aligned} \quad (4.27)$$

com $q_1(\xi) = v(\xi[k])$ e $q_2(\xi) = (\xi - \mu)'W(\xi - \mu) - 1$. A segunda desigualdade vem das restrições (4.5) e a última é consequência do Lema 4.1 para $\alpha = 1$, observando que da primeira restrição de (4.5) temos $P - W > \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P A_i > 0$.

Podemos concluir que todos os itens da Definição 4.1 foram atendidos e, portanto, a região \mathcal{S}_{SO} é uma região de convergência invariante. \square

O Teorema 6 demonstra como é possível obter uma região invariante \mathcal{S}_{SO} para onde a regra (4.3) guiará os estados uma vez que já conhecemos a região de convergência \mathcal{X}_L . Contudo, como já mencionado, essa região invariante é subótima uma vez que não escolhemos as matrizes

P e W de forma a minimizar seu volume. A partir desta observação desponta um novo objetivo: determinar uma regra $\sigma(\xi)$ capaz de levar as trajetórias do sistema para uma região invariante de volume mínimo. O próximo teorema fornece estas condições. A técnica utilizada será chamada Técnica O para fins de discussão.

Teorema 7 (Técnica O). *Para o sistema afim com comutação (4.2), considere que o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e seu vetor $\lambda \in \Lambda^N$ associado sejam dados. Se existirem matrizes P , $W \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}$ e um escalar $\beta > 0$ soluções do problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min_{P, W \in \mathbb{S}_{++}^{n_x}, \beta > 0} \quad & -\ln(\det(P)) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i \in \mathbb{N}_N} \lambda_i A_i' P A_i - P < -W, \\ & \begin{bmatrix} 1 - \beta \rho_\lambda & \bullet & \bullet \\ \beta c_\lambda & \beta W & \bullet \\ 0 & P & P \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

então a função de comutação (4.3) garante que a região elipsoidal

$$\mathcal{S}_O := \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : \xi' P \xi < 1\} \quad (4.29)$$

é uma região de convergência invariante de volume mínimo.

Prova: Podemos notar de (4.7) que a desigualdade (4.6) sem normalização junto com $Q_\lambda > W$ é dada por

$$\mathcal{X}_L = \{\xi \in \mathbb{R}^{n_x} : (\xi - \mu)' W (\xi - \mu) < c_\lambda' W^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda\} \quad (4.30)$$

com $\mu = W^{-1} c_\lambda$. Realizando o mesmo procedimento do teorema anterior em que

$$r_* = \inf_{r > 0} \{r : v(\xi) < r, \forall \xi \in \mathcal{X}_L\} \quad (4.31)$$

mas fazendo sem perda de generalidade a normalização $r_* = r = 1$, devemos determinar a região de convergência $\{v(\xi) < 1, \forall \xi \in \mathcal{X}_L\}$ de volume mínimo. Assim, aplicando o *S-procedure* obtemos a restrição

$$\xi' P \xi - 1 < \beta ((\xi - \mu)' W (\xi - \mu) - c_\lambda' W^{-1} c_\lambda - \rho_\lambda)$$

que pode ser reescrita como $g(\xi) - 1 < 0$ com

$$g(\xi) = \xi'(P - \beta W)\xi + 2\beta\xi'c_\lambda + \beta\rho_\lambda \quad (4.32)$$

Para a determinar o valor máximo desta função devemos considerar que $g(\xi)$ é côncava, ou seja, $P - \beta W < 0$ e, desta forma, podemos encontrar ξ_* que maximiza $g(\xi)$, dado por

$$\xi_* = -\beta(P - \beta W)^{-1}c_\lambda \quad (4.33)$$

solução da equação $\nabla_\xi g(\xi) = 0$. Substituindo-o em $g(\xi_*) - 1 < 0$ obtemos $1 - \beta\rho_\lambda > \beta c'_\lambda(\beta W - P)^{-1}c_\lambda$, com $\beta W - P > 0$, o que nos permite aplicar o Lema do Complemento de Schur e obter a desigualdade

$$\begin{bmatrix} 1 - \beta\rho_\lambda & \bullet \\ \beta c_\lambda & \beta W - P \end{bmatrix} > 0. \quad (4.34)$$

Fazendo $P = PP^{-1}P$ e aplicando novamente o Lema do Complemento de Schur ao bloco matricial (2,2), encontramos a última desigualdade de (4.28). Note que uma solução de (4.28) satisfaz as restrições de (4.5) e, portanto, é possível determinar \mathcal{X}_L subótimo. Utilizando o mesmo procedimento realizado nos dois itens da prova do Teorema 6 podemos concluir que a região \mathcal{S}_O além de convergente é invariante. A função objetivo em (4.28) permite a minimização do volume da região \mathcal{S}_O . \square

É importante ressaltar que para atingir a solução ótima, a Técnica O apresenta maior custo computacional uma vez que o problema (4.28) não é uma LMI. Contudo, fixando β este problema se torna linear nas variáveis P e W , podendo então ser resolvido realizando uma busca linear em β e resolvendo um conjunto de LMIs para cada $\beta > 0$ de modo a encontrar o menor valor da função objetivo. O exemplo a seguir compara os resultados obtidos utilizando as Técnicas SO e O bem como as regiões de convergência \mathcal{X}_L associadas.

Exemplo 4.2. Um frigorífico armazena $c[k] \in \mathbb{R}$ toneladas de um produto congelado ao fim de uma semana $k \in \mathbb{N}$. A cada semana seu proprietário pode encomendar $v_i \in \{0, 20, 40, 60, 80\}$ toneladas deste produto. Será considerado constante o número de toneladas $w[k] = 40$ que ele vende em uma semana. Sabendo que quando o proprietário encomenda v_σ toneladas no fim da semana k ele só as recebe no final da semana $k + 1$ e que ele tem uma perda de 10% dos produtos armazenados por semana, podemos aproximar

o sistema que descreve seu estoque na forma (4.1) pelas matrizes

$$A_i = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b_i = \begin{bmatrix} -40 \\ v_i \end{bmatrix}, \forall i \in \mathbb{N}_5 \quad (4.35)$$

em que $x = [c \ p]'$ é o estado e $p \in \mathbb{R}$ é o número de toneladas em trânsito. Desta maneira, $\sigma(x)$ é uma variável de decisão do proprietário que indica o quanto ele deve comprar a cada semana. Querendo manter um estoque em torno de 65 toneladas a fim de economizar com gastos de manutenção do frigorífico e minimizar as perdas, o proprietário verificou que para $\lambda = [0 \ 0 \ 0.675 \ 0.325 \ 0]'$ ele obtém $x_e = [65 \ 46.5]'$ em X_e , através da equação (4.4). Resolvendo as condições do Teorema 7 de forma a minimizar \mathcal{S} ele obteve as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 0.9338 & 0.9240 \\ 0.9240 & 2.0533 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad W = \begin{bmatrix} 0.1740 & 0.1144 \\ 0.1144 & 0.8413 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (4.36)$$

e $\beta = 5.55$, podendo então implementar a função de comutação dada por (4.3). Considerando que na semana $k = 0$ seu frigorífico tinha $c[0] = 250$ toneladas do produto e havia $p[0] = 0$ toneladas em trânsito, a evolução das quantidades armazenadas e em trânsito nas 50 semanas subsequentes pode ser observada a Figura 4.6. A média do valor armazenado $c[k]$ a partir da semana 25 foi $\bar{c} = 61.5324$ toneladas, o que demonstra que a regra (4.3) foi eficiente em manter a quantidade armazenada em torno de 65 toneladas. Ademais, utilizando W e P obtidas do Teorema 7, calculamos a região de convergência \mathcal{X} utilizando (4.30). A Figura (4.6) apresenta as regiões de convergência \mathcal{X} e \mathcal{S} obtidas bem como a trajetórias dos estados ξ .

A título de comparação, resolvemos as condições do Teorema 6 e obtivemos as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 5.6980 & 5.1282 \\ 5.1282 & 11.3960 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad W = \begin{bmatrix} 1.0826 & 0 \\ 0 & 5.6980 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (4.37)$$

e $r = 6.2632$ que nos levaram às regiões de convergência $\bar{\mathcal{X}}$ e $\bar{\mathcal{S}}$. A Tabela 4.1 apresenta as relações dos volumes normalizadas em $vol(\mathcal{S})$.

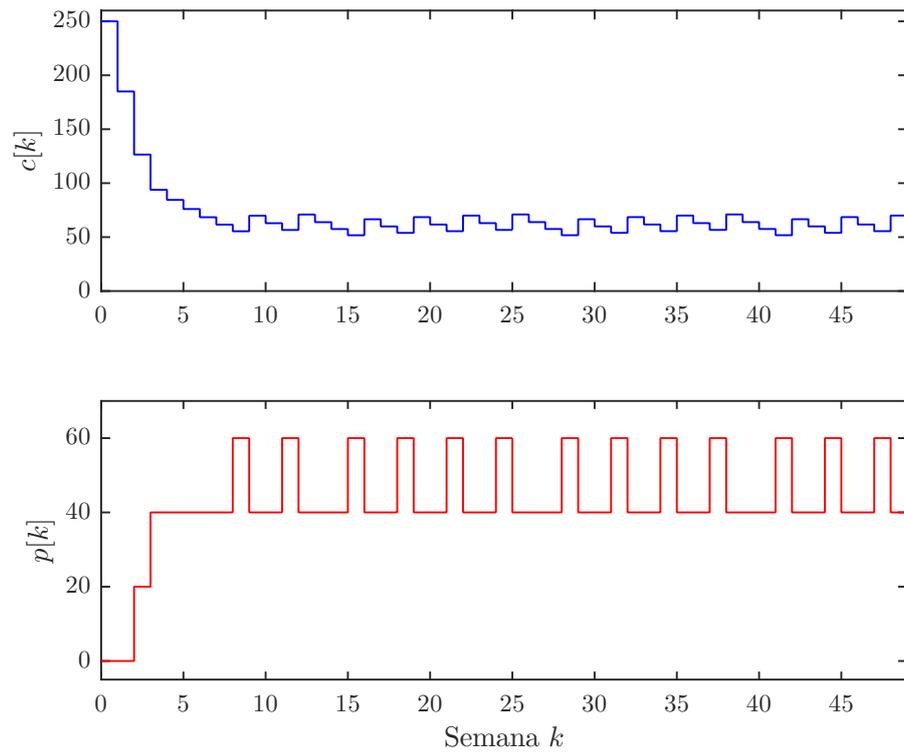


Figura 4.6 - Evolução das variáveis de estado ao decorrer da semana k .

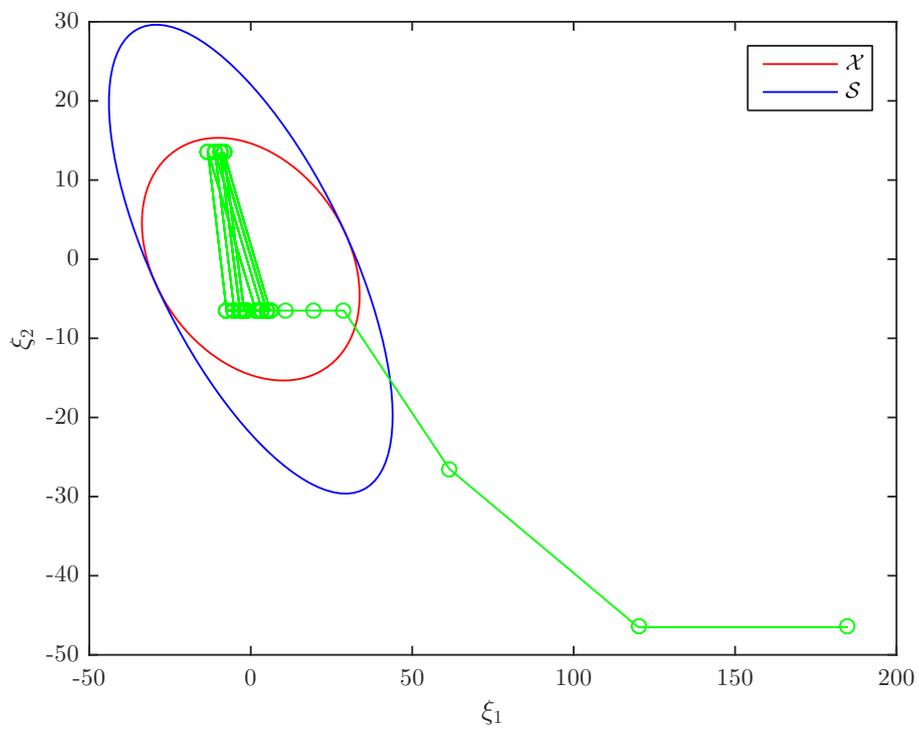


Figura 4.7 - Evolução das variáveis de estado deslocadas e regiões \mathcal{X} e \mathcal{S} .

	$z = \mathcal{X}$	$z = \mathcal{S}$
$\frac{vol(\bar{z})}{vol(\mathcal{S})}$	41.52%	103.92%
$\frac{vol(z)}{vol(\mathcal{S})}$	50.89%	100%

Tabela 4.1 - Comparação dos volumes das Técnicas O e SO. (Ex. 4.2)

Estas relações eram esperadas uma vez que a Técnica O (Teorema 7) se preocupa em minimizar o volume da região \mathcal{S} enquanto a Técnica SO minimiza o volume da região \mathcal{X} (Teorema 6).

Um último comentário se faz apropriado antes de finalizar esta seção. Note que na Figura 4.7 as duas elipses que definem as regiões \mathcal{X} e \mathcal{S} se tocam em dois pontos. Isso ocorre pois estes pontos correspondem aos valores de ξ solução do problema de otimização dado por (4.15).

4.2 Sistemas com dados amostrados

Neste ponto, nosso objetivo é generalizar os resultados anteriores para tratar sistemas a tempo contínuo com dados amostrados descritos pela seguinte equação no espaço de estado

$$\dot{x} = F_\sigma x + g_\sigma, \quad x(0) = x_0. \quad (4.38)$$

Dessa forma, o projetista deve definir um período de amostragem $T \in \mathbb{R}_{++}$ durante o qual a função de comutação não varia. Na sequência, ainda nesta seção, trataremos o caso em que o período de amostragem $T_k = t_{k+1} - t_k > 0$ é não uniforme satisfazendo $T_k \in [T_m, T_M]$. Como já mencionado no capítulo anterior, o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis para este sistema são todos aqueles pertencentes a

$$X_{ce} = \{x_{ce} \in \mathbb{R}^{n_x} : x_{ce} = -F_\lambda^{-1} g_\lambda, F_\lambda \in \mathcal{H}, \lambda \in \Lambda^N\} \quad (3.2, r.)$$

e para assegurar estabilidade assintótica de um deles, a frequência de comutação deve ser extremamente elevada causando a ocorrência de *chattering*, fenômeno que desejamos evitar a partir da escolha de uma função de comutação $\sigma(t) = i \in \mathbb{N}_N$ que se mantém constante em $t \in [t_k, t_{k+1})$, sendo $T = t_{k+1} - t_k > 0$. Estes sistemas podem ser reescritos como o sistema a tempo discreto dado em (4.1) tal que $x[k] = x(t_k) = x(kT), \forall k \in \mathbb{N}$, com as matrizes $A_i = e^{F_i T}$ e $b_i = \int_0^T e^{F_i \tau} d\tau g_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$.

Como vimos, é possível garantir que $0 \in \mathcal{X}$ para um sistema a tempo discreto porém, no

caso de sistemas amostrados, o projetista deve assegurar que o ponto de equilíbrio $x_{ce} \in X_{ce}$ também esteja presente na região de convergência. O corolário a seguir apresenta as condições de estabilidade para esta classe de sistemas.

Corolário 4.1. *As condições de estabilidade apresentadas nos Teoremas 6 e 7 garantem que o ponto de equilíbrio $x_{ce} \in X_{ce}$ do sistema (4.38) está contido na região de convergência \mathcal{X} e, portanto, é praticamente estável pela aplicação da função de comutação*

$$\sigma(\xi(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} v(A_i \xi(t_k) + \ell_i), \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (4.39)$$

com $\xi = x - x_e$ e $x_e \in X_e$ se incluirmos ao conjunto de restrições destes teoremas a desigualdade matricial linear

$$(x_{ce} - x_e)' W (x_{ce} - x_e) < 2c'_\lambda (x_{ce} - x_e) + \rho_\lambda. \quad (4.40)$$

Prova: A prova segue diretamente da observação de que a região de convergência \mathcal{X}_L dada por (4.30) é idêntica a (4.40). \square

Neste ponto é importante analisar o que ocorre quando o período de amostragem $T > 0$ se torna arbitrariamente pequeno. Adotando a aproximação de primeira ordem $A_i \approx I + T F_i$ e $b_i = T g_i$, encontramos que $X_e \rightarrow X_{ce}$ elemento a elemento quando $T > 0$ tende a zero. Além disso, os vetores $\ell_i \rightarrow T(F_i x_e + g_i)$ e $c_i \rightarrow P \ell_i, \forall i \in \mathbb{N}_N$. Consequentemente, $\ell_\lambda \rightarrow 0$ pois $x_e \rightarrow x_{ce}$ e $c_\lambda \rightarrow 0$ que, por sua vez, implica que $\mu = 0$ e a região de convergência torna-se a origem $\mathcal{X}_* \rightarrow \{0\}$, indicando que $x(t)$ tende assintoticamente para x_{ce} . Finalmente, a função de comutação torna-se

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) &= \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} v(A_i \xi + \ell_i) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} v(\xi + T(F_i \xi + F_i x_e + g_i)) \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{N}_N} \xi' P (F_i \xi + (F_i x_{ce} + g_i)) \end{aligned} \quad (4.41)$$

recuperando a conhecida função de comutação para sistemas a tempo contínuo apresentada no capítulo anterior. A seguir realizamos o projeto levando em conta robustez com relação ao período de amostragem.

Algoritmo 4.3 Sistemas amostrados sob período variável - Técnica L adaptada

Dados: Sistema (4.2), $x_e \in X_e$, $x_{ce} \in X_{ce}$ associado a um $\lambda \in \Lambda^N$, Ω

Saída: P, W e *factive*

- 1: $q \leftarrow 0$
 - 2: $\Omega_{ap} \leftarrow \{T_M\}$
 - 3: **repita**
 - 4: $q \leftarrow q + 1$
 - 5: Encontrar $P_q > 0$ e $W_q > 0$ que resolvem o problema de otimização
 $\inf J_q = -\ln(\det(W))$ s.a (4.5) e (4.40)
 para todos $T \in \Omega_{ap}$.
 - 6: Por busca linear, determinar $T_q = \arg \max_{T \in \Omega} \gamma_{max}(\Phi(P_q, W_q, T))$.
 - 7: $\Omega_{ap} \leftarrow \Omega_{ap} \cup \{T_q\}$
 - 8: **enquanto** P_q, W_q factíveis e $\max_{T \in \Omega} \gamma_{max}(\Phi(P_q, W_q, T)) > 0$
 - 9: **se** $\max_{T \in \Omega} \gamma_{max}(\Phi(P_q, W_q, T)) < 0$ **então**
 - 10: $P_* \leftarrow P_q$
 - 11: $W_* \leftarrow W_q$
 - 12: *factive* \leftarrow **verdadeiro** {Solução ótima encontrada}
 - 13: **senão**
 - 14: *factive* \leftarrow **falso** {Solução ótima não existe; problema infactível}
 - 15: **fim se**
-

4.2.1 Estabilidade sobre frequência de amostragem incerta

Uma outra situação importante a ser estudada é quando o período de amostragem deixa de ser constante e passa a ser incerto de modo que $T_k \in \Omega := [T_m, T_M]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde $T_m, T_M \in \mathbb{R}_{++}$. Tal caso é recorrente, por exemplo, em aplicações de controle através de redes de comunicação, onde podem ocorrer *jitters* que são atrasos irregulares na entrega de pacotes, veja (SOUZA, 2012). Outro caso onde este efeito é observado é em sistemas embarcados baseados em escalonamento preemptivo de tarefas. Devemos então encontrar uma técnica capaz de projetar uma função de comutação $\sigma(x(t))$ constante em $t \in [t_k, t_{k+1})$ sendo $t_{k+1} - t_k = T_k \in \Omega$. Não é uma tarefa simples assegurar que as condições dos Teoremas 6 ou 7 juntas com o Corolário 4.1 sejam válidas para todo $T \in \Omega$ devido ao fato de dependerem intrinsecamente de T . O desenvolvimento a seguir será feito para a Técnica L apresentada no Teorema 4 mas procedimento análogo pode ser realizado para as demais condições de estabilidade apresentadas anteriormente. Definindo a função

$$\Phi(P, W, T) = \begin{bmatrix} -Q_\lambda + W & \bullet & \bullet \\ 0 & f(x_e) - 1 & \bullet \\ 0 & 0 & \xi_e' P \xi_e - 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.42)$$

com $f(x_e) = c_\lambda' W^{-1} c_\lambda + \rho_\lambda$ e $\xi_e = x_{ce} - x_e$, nós temos que a desigualdade (4.42) satisfaz todas

as condições do Teorema 4 junto com (4.40). Note a dependência de $T > 0$ nas matrizes do sistema $A_i(T)$, $b_i(T)$ e no vetor $x_e(T)$. Para levar em conta um período de amostragem robusto esta desigualdade deve ser satisfeita para todo $T \in \Omega$, o que parece uma condição difícil de se verificar. Entretanto, podemos explorar o fato de que o parâmetro variante no tempo é um escalar e substituir Ω por uma discretização $\Omega_{ap} \subset \Omega$, resolvendo o problema apenas para $T \in \Omega_{ap}$ onde Ω_{ap} é uma varredura finita suficientemente refinada de Ω . Esta estratégia já foi aplicada em (DEAECTO et al., 2014) e (GEROMEL; SOUZA, 2015). Todavia, a depender do tamanho desta discretização o problema de otimização possuirá um número muito elevado de restrições o que afetará o desempenho do algoritmo resolvidor. A referência (GEROMEL; SOUZA, 2015) propôs um procedimento alternativo eficiente que assegura a validade das LMIs para todo $T \in \Omega$ e está apresentada no Algoritmo 4.3.

Note que a cada iteração do Algoritmo 4.3 o conjunto de restrições aumenta, uma vez que as condições do Teorema 4 devem ser válidas para todos os períodos $T \in \Omega_{ap}$ e, portanto, $J_{q+1} > J_q$, pois novas restrições implicam em maior conservadorismo. Este algoritmo converge para a solução ótima sempre que o problema admitir solução factível.

É simples notar que o mesmo procedimento pode ser adotado para a Técnica O visando minimizar o volume de uma região invariante \mathcal{S} . Para isso, basta implementar o Algoritmo 4.3 alterando a função $\Phi(\cdot)$ e o passo 5 de maneira a representar o problema de otimização fornecido pelo Teorema 7. O exemplo a seguir compara este resultado a um outro disponível na literatura e enunciado no Teorema 3 do capítulo anterior.

Exemplo 4.3. O dados numéricos deste exemplo foram retirados de (HETEL; FRIDMAN, 2013). Seja o sistema a tempo contínuo (4.38) dado pelas matrizes

$$F_1 = \begin{bmatrix} 4.15 & -1.06 & -6.70 \\ 5.74 & 4.78 & -4.68 \\ 26.38 & -6.38 & -8.29 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} -3.20 & -7.60 & -2.00 \\ 0.90 & 1.20 & -1.00 \\ 1.00 & 6.00 & 5.00 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 5.75 & -16.48 & 2.41 \\ 9.51 & -9.49 & 19.55 \\ 16.19 & 4.64 & 14.05 \end{bmatrix}, \quad F_4 = \begin{bmatrix} -12.38 & 18.42 & 0.54 \\ -11.90 & 3.24 & -16.32 \\ -26.50 & -8.64 & -16.60 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que definem $N = 4$ subsistemas instáveis. O ponto de equilíbrio de interesse é a origem $x_{ce} = 0$, associado a $\lambda(x_{ce}) = [0.15 \ 0.20 \ 0.30 \ 0.35]'$. Em (HETEL; FRIDMAN, 2013) os autores utilizaram a técnica apresentada no Teorema 3 para encontrar uma regra de comutação praticamente estabilizante considerando um período de amostragem incerto pertencente ao intervalo $T_k \in (0, T_M][s]$, sendo $T_M = 3.2 \cdot 10^{-4}$ o valor máximo para o qual as condições desta referência são factíveis. Utilizando o valor de $\lambda(x_{ce})$, determinamos o ponto x_e correspondente e, aplicando o resultado do Teorema 7 junto com o Corolário 4.1 foi possível assegurar a estabilidade deste sistema para intervalos de amostragem até $T_M = 1.726 \cdot 10^{-3}[s]$, aproximadamente quatro vezes maior do que aquele garantido em (HETEL; FRIDMAN, 2013). Implementamos o Algoritmo 4.3 para as condições da Técnica O considerando um período de amostragem variável $T_k \in \Omega := [3 \cdot 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-3}][s]$ que foi escolhido de forma a evitar a ocorrência de *chattering* e levar em conta variações no período de amostragem que caracterizam *jitters*. Note que a regra fornecida em (HETEL; FRIDMAN, 2013) não garante estabilidade para este intervalo de variação. Utilizando as condições do Teorema 7 obtivemos após três iterações, as matrizes

$$W = \begin{bmatrix} 0.3938 & -0.2347 & -0.1358 \\ -0.2347 & 0.3299 & 0.0066 \\ -0.1358 & 0.0066 & 0.1372 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}, \quad P = \begin{bmatrix} 0.0429 & -0.0409 & -0.0113 \\ -0.0409 & 0.4122 & -0.1586 \\ -0.0113 & -0.1586 & 0.1012 \end{bmatrix}.$$

Uma vez encontrada a matriz P podemos implementar a regra (4.3) considerando que o período de amostragem desta simulação varia uniformemente em Ω de maneira aleatória. Na Figura 4.8 é possível observar que as trajetórias do estado, partindo de $x_0 = [-5 \ 0 \ 5]'$, são atraídas para a região de convergência \mathcal{X} , em vermelho, no interior da região invariante \mathcal{S} , em azul. Quando em regime, como visto na Figura 4.10, os valores do estado oscilam com baixa amplitude em torno da origem. Tais resultados nos permitem concluir que esta técnica foi eficiente tanto em evitar altas frequências de comutação, como em projetar a regra $\sigma(\xi)$ globalmente estabilizante para um período de amostragem T_k incerto.

Com o objetivo de comparar as Técnicas O e SO, implementamos o Algoritmo 4.3 para as condições do Teorema 4 obtendo $\bar{\mathcal{X}}$ e, posteriormente, calculamos a região de

convergência invariante $\bar{\mathcal{S}}$ associada através do Teorema 6. As relações de volume obtidas estão apresentadas na Tabela 4.2.

	$z = \mathcal{X}$	$z = \mathcal{S}$
$\frac{vol(\bar{z})}{vol(\mathcal{S})}$	0.67%	118.46%
$\frac{vol(z)}{vol(\mathcal{S})}$	2.02%	100%

Tabela 4.2 - Comparação dos volumes das Técnicas O e SO. (Ex. 4.3)

Podemos notar a eficiência da Técnica O em relação à SO no que se refere à minimização do volume da região de convergência invariante.

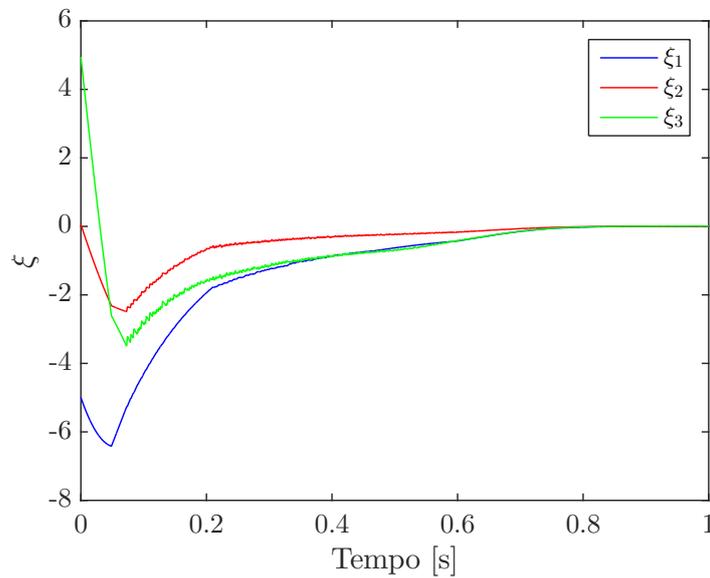


Figura 4.8 - Trajetórias do estado no tempo.

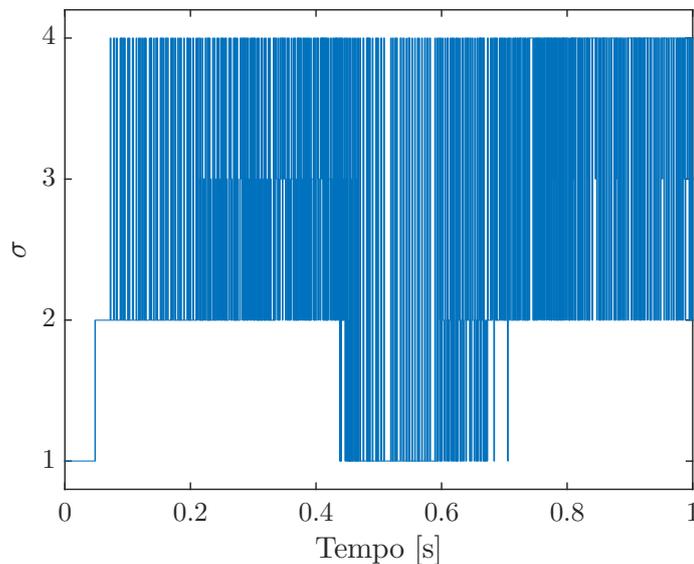


Figura 4.9 - Evolução da regra σ no tempo.

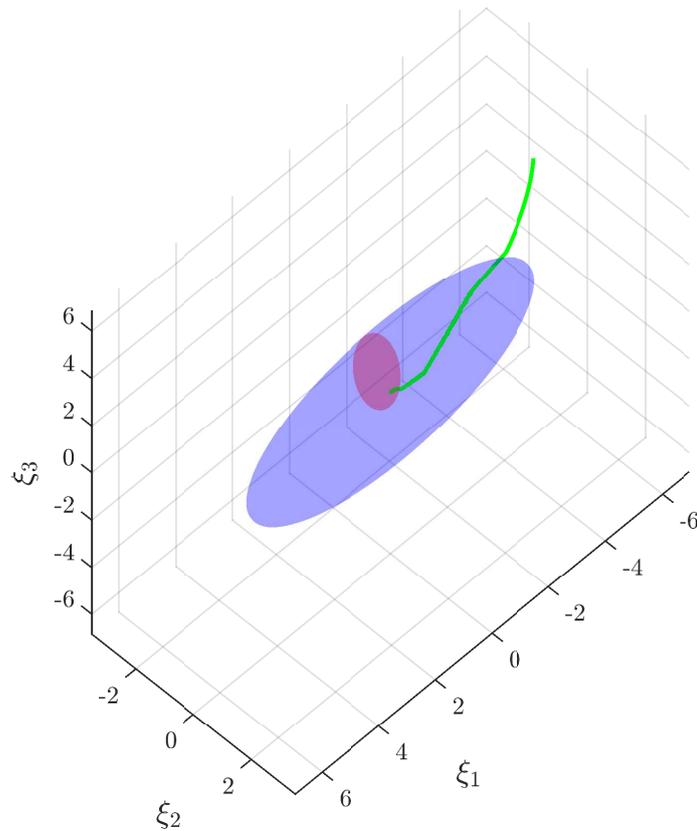


Figura 4.10 - Trajetórias do estado e regiões \mathcal{X} e \mathcal{S} no \mathbb{R}^3

4.3 Aplicação prática

Para motivar o leitor no que tange à aplicabilidade da teoria apresentada neste capítulo, preparamos um exemplo onde um manipulador industrial de 2 graus de liberdade, útil em uma vasta gama de contextos, necessita do controle preciso de suas variáveis de juntas. Com foco exclusivo no controle de sua junta rotacional, utilizamos um circuito de conversão de corrente contínua *Buck-Boost* que alimenta um motor CC acoplado a esta junta. Empregamos a Técnica O para o projeto de uma regra de comutação que comandará o acionamento da chave do circuito de conversão a fim de controlar a velocidade rotacional desta junta.

Exemplo 4.4. Um manipulador industrial de dois graus de liberdade é composto por uma junta de revolução, dado pelo ângulo θ em torno do eixo z , e uma junta prismática, dada pelo deslocamento d . Seu modelo pode ser visto na Figura 4.11.

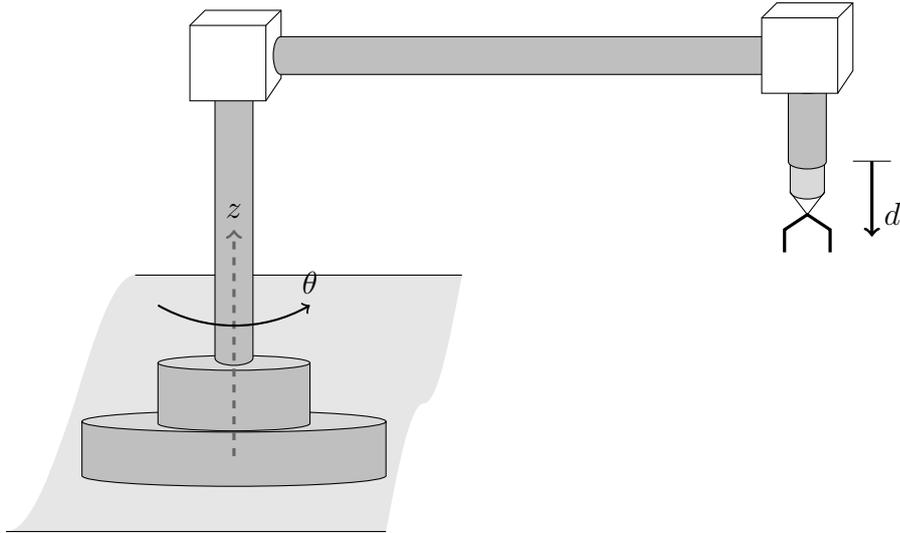


Figura 4.11 - Modelo do manipulador industrial de 2 GDL.

Visando controlar a velocidade rotacional $\omega := \dot{\theta}$ do manipulador, um motor de corrente contínua foi fixado à base e acoplado ao eixo móvel. Para realizar seu acionamento um circuito de conversão CC-CC Buck-Boost foi implementado e um esquema simplificado é apresentado na Figura 4.12.

O motor utilizado apresenta constante $K = 0.2520$ [V.s/rad], resistência dos enrolamentos de cobre $R_m = 5.45$ [Ω], indutância $L_m = 35$ [mH] e foi assumido linearidade magnética. Para o circuito do conversor Buck-Boost foi empregado um capacitor de $C = 22$ [mF], um indutor de indutância $L = 150$ [mH] e resistência $R = 4.25$ [Ω], uma chave s e um diodo, ambos considerados ideais. Este circuito é alimentado por uma fonte de tensão $E = 48$ [V].

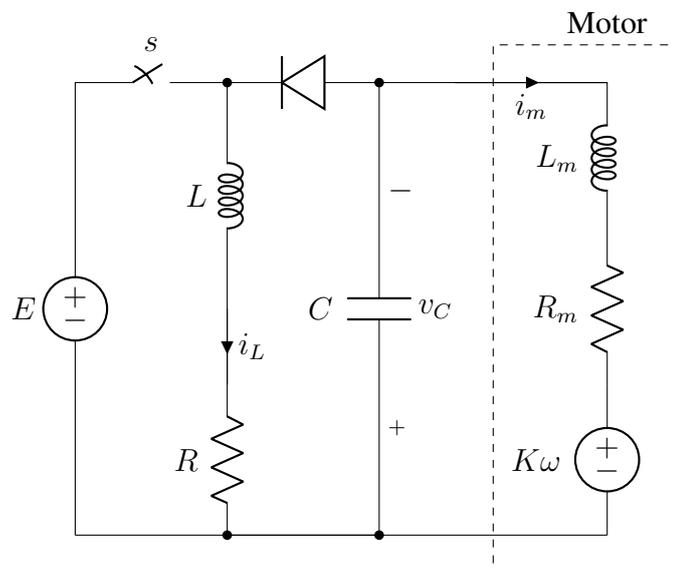


Figura 4.12 - Esquema do circuito Buck-Boost acoplado a um motor CC.

Considerando que o conjunto rotor-manipulador apresenta momento de inercia $J_m = 0.298 [kg.m^2]$, constante de atrito viscoso $B_a = 91.1 [N.m.s/rad]$ e que uma carga é suspensa pela ferramenta implicando em um momento de inércia $J_w = 5 [kg.m^2]$, a abertura e o fechamento da chave s permitem obter um sistema afim com comutação a tempo contínuo na forma (3.1) com matrizes

$$F_1 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_m/L_m & -1/L_m & -K/L_m \\ 0 & 1/C & 0 & 0 \\ 0 & K/(J_m + J_w) & 0 & -B_a/(J_m + J_w) \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & -R_m/L_m & -1/L_m & -K/L_m \\ 1/C & 1/C & 0 & 0 \\ 0 & K/(J_m + J_w) & 0 & -B_a/(J_m + J_w) \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo o vetor de estado dado por $x = [i_L \quad i_m \quad v_C \quad \omega]^T$. As 2 primeiras linhas foram obtidas através da Lei de Kirchhoff das tensões, a terceira foi obtida da derivada da equação da tensão do capacitor e a última, das equações do movimento de Newton-Euler. Como visto no Teorema 7 junto ao Corolário 4.1 é possível projetar uma regra de comutação σ dada por (4.3) capaz de controlar a velocidade angular ω deste manipulador. Para evitar altas frequências de comutação, consideramos que a regra permanece constante entre dois instantes de tempo sucessivos, respeitando um período pré-estabelecido $t_{k+1} - t_k = T > 0$ com $T = 1[ms]$. Foram então escolhidas 5 velocidades de operação para o manipulador $\bar{\omega}_i \in \{0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 1.5\} [rad/s]$. Realizando uma busca exaustiva em Λ^2 encontramos valores de $\lambda(x_e)$ que nos permitem obter as velocidades angulares desejadas bem como os respectivos pontos de equilíbrio $x_e \in X_e$. Utilizando cada um dos vetores $\lambda(x_e)$ determinamos os pontos de equilíbrio x_{ce} correspondentes. Com o projeto da função $\sigma(\xi)$, obtida a partir da aplicação da Técnica O junto com o Corolário 4.1 no sistema discretizado, garantimos a existência de uma região de convergência invariante elipsoidal \mathcal{S} de volume mínimo centrada em x_e tal que $x_{ce} \in \mathcal{S}$. Simulações numéricas partindo de condições iniciais nulas foram realizadas para validar a técnica apresentada e compará-la com a técnica do PWM,

onde a função de comutação é dada por

$$\sigma_{\text{PWM}}(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t < t_k + \delta T \\ 2, & t_k + \delta T \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (4.43)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ em que δ é o *Duty Cycle* do PWM. Este foi calculado utilizando a primeira componente de $\lambda(x_{ce})$ definido pelo sistema a tempo contínuo de forma a obter as velocidades angulares desejadas. Entretanto, notamos que para este exemplo em particular os valores de $\lambda(x_e)$ e $\lambda(x_{ce})$ foram muito próximos. A Figura 4.13 apresenta, em azul, a evolução da velocidade quando a função σ é utilizada e, em verde, a resposta ao controle via PWM.

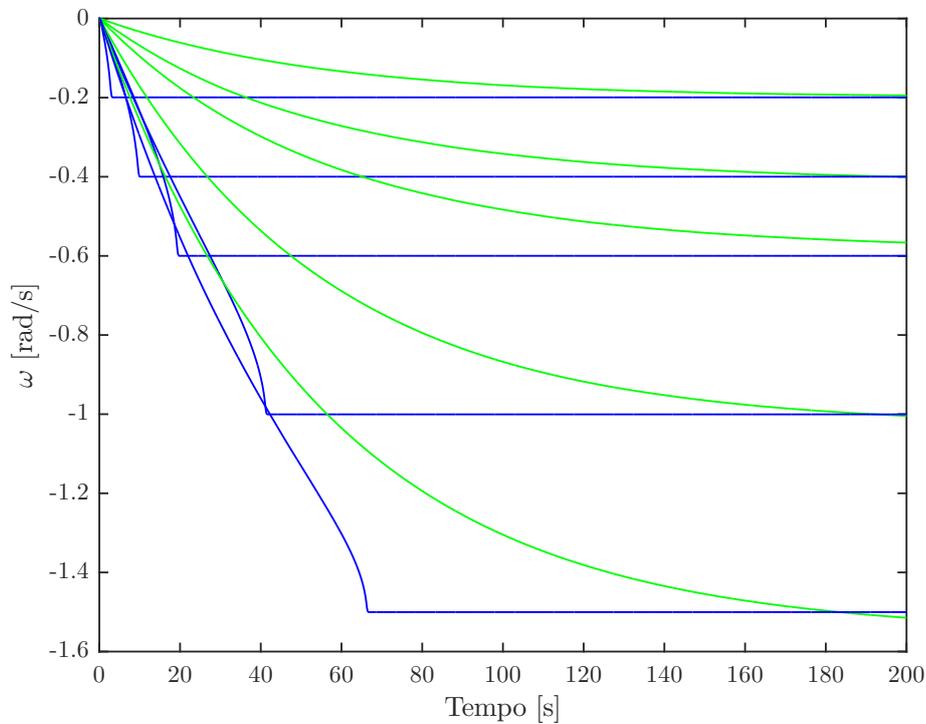


Figura 4.13 - Evolução da velocidade rotacional ω em função do tempo para várias referências.

Os valores correspondentes às simulações podem ser observados na Tabela 4.3. Nota-se que a regra σ levou o sistema para a velocidade angular ω de forma muito mais eficiente em relação ao controle via PWM. Percebemos o comportamento não linear da trajetória resultante, que permitiu obter um tempo de estabilização muito inferior àquele fornecido pela técnica do PWM.

$\bar{\omega}_i$ [rad/s]	Técnica (PWM)	Técnica O
0.2	$\delta = 0.0158$ $t_{5\%} = 178.84$ [s]	$\lambda_1 = 0.0158$ $t_{5\%} = 2.98$ [s]
0.4	$\delta = 0.0316$ $t_{5\%} = 155.44$ [s]	$\lambda_1 = 0.0316$ $t_{5\%} = 9.67$ [s]
0.6	$\delta = 0.0473$ $t_{5\%} > 200$ [s]	$\lambda_1 = 0.0473$ $t_{5\%} = 19.27$ [s]
1.0	$\delta = 0.0786$ $t_{5\%} = 149.69$ [s]	$\lambda_1 = 0.0786$ $t_{5\%} = 40.97$ [s]
1.5	$\delta = 0.1175$ $t_{5\%} = 146.22$ [s]	$\lambda_1 = 0.1175$ $t_{5\%} = 65.68$ [s]

Tabela 4.3 - Tempo de estabilização $t_{5\%}$ com DC do PWM e λ associados às velocidades ω .

Os dois exemplos apresentados anteriormente deixam claro a validade da técnica desenvolvida no contexto de controle de sistemas com dados amostrados, a sua eficiência em relação a outras propostas disponíveis na literatura, bem como a sua aplicabilidade prática comparada à técnica do PWM. É importante frisar uma pequena diferença na aplicação da Técnica O em ambos os exemplos. No primeiro, os cálculos foram realizados tendo como parâmetro o ponto de equilíbrio do sistema a tempo contínuo x_{ce} e seu vetor $\lambda(x_{ce})$ associado, enquanto que no segundo, usamos o ponto de equilíbrio do sistema a tempo discreto x_e e seu vetor $\lambda(x_e)$ correspondente. Ambas as maneiras são possíveis uma vez que o Corolário 4.1 assegura que ambos os pontos estão dentro da região de convergência invariante desejada.

4.4 Considerações finais

Neste capítulo foi estudada a estabilidade prática de sistemas afins com comutação a tempo discreto. Desenvolvemos duas funções de comutação capazes de guiar as trajetórias do estado para uma região de convergência \mathcal{X} de volume mínimo contendo o ponto de equilíbrio desejado. Estas funções são baseadas em duas técnicas distintas derivadas de diferentes escolhas para o conjunto dos pontos de equilíbrio atingíveis. Estas técnicas foram chamadas de Técnica L e NL sendo a primeira descrita como a solução de um problema de otimização convexa com restrições lineares e a segunda, um problema não convexo com restrições não lineares. Partindo de uma análise teórica baseada na comparação dos raios das regiões de convergência, não é pos-

sível decidir qual delas é melhor em termos de minimização de volume. Entretanto, a Técnica L é mais vantajosa pois além de ser mais fácil de resolver numericamente, permite determinar de antemão o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis. Primeiramente, determinamos a região de convergência de volume mínimo \mathcal{X}_* e a região invariante \mathcal{S} associada. Em um segundo momento, obtivemos condições para a obtenção da região de convergência invariante de volume mínimo \mathcal{S}_* . Estes resultados foram generalizados para tratar controle de sistemas a tempo contínuo com dados amostrados e foram comparados com aquele proposto em (HETEL; FRIDMAN, 2013).

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos técnicas inéditas para o projeto de uma função de comutação σ dependente do estado capaz de guiar as trajetórias de um sistema afim a tempo discreto, partindo de uma condição inicial arbitrária, para um ponto de equilíbrio escolhido pelo usuário dentre aqueles pertencentes a um conjunto pré-definido. Uma vez que asseguram estabilidade prática, estas técnicas são ótimas pois minimizam o volume da região de convergência \mathcal{X} ou da região de convergência invariante \mathcal{S} . Uma generalização para tratar de sistemas com dados amostrados sob período de amostragem incerto foi realizada. Este caso, além de evitar naturalmente a ocorrência de *chattering* abrange o controle via rede de comunicação, onde uma das exigências é fazer com que o fluxo de informações respeite algumas restrições do canal. Uma comparação com a técnica apresentada em (HETEL; FRIDMAN, 2013) foi realizada por meio de um exemplo onde pudemos constatar que as condições aqui desenvolvidas são menos conservadoras em relação ao máximo período de amostragem para o qual a estabilidade do sistema é garantida. Além disso, através de um exemplo de aplicação prática foi possível verificar a eficiência do método de projeto desenvolvido durante esta dissertação.

Os estudos realizados durante o mestrado resultaram em três trabalhos científicos submetidos a congressos importantes da área, a saber

- G. S. Deaecto e L. N. Egidio, “Practical stability of discrete-time switched affine systems ”, In Proceedings of the European Control Conference, 2016, pp 2048-2053.
- L. N. Egidio e G. S. Deaecto, “Controle ótimo de sistemas afins com comutação a tempo discreto”, em Anais do Congresso Brasileiro de Automática, 2016, aceito para apresentação oral.
- L. N. Egidio e G. S. Deaecto, “Controle \mathcal{H}_2 via realimentação de saída de sistemas afins com comutação a tempo contínuo”, em Anais do Congresso Brasileiro de Automática, 2016, aceito para apresentação oral.

Os dois primeiros apresentam parte dos resultados do Capítulo 4. Já o terceiro diz respeito ao

projeto de filtros dinâmicos de ordem completa, para o domínio do tempo contínuo, que são importantes para fornecer as informações necessárias para a função de comutação quando somente a saída medida está disponível. Este resultado motiva o estudo do projeto via realimentação de saída para o caso discreto que é um trabalho importante a ser realizado como consequência natural desta dissertação. Além disso, os procedimentos matemáticos utilizados podem ser generalizados para levar em conta critérios de desempenho como taxa de decaimento, índices \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ que são pontos de grande importância em projetos de controle de sistemas.

Referências

ALBEA, C.; GARCIA, G.; ZACCARIAN, L. Hybrid dynamic modeling and control of switched affine systems: Application to DC-DC converters. In **Proceeding os the IEEE Conference on Decision and Control**. 2015. p. 2264–2269. 2 citações nas páginas 19 e 35.

BAZARAA, M.; JARVIS, J.; SHERALI, H. **Linear Programming and Network Flows**. Wiley, 2010. Uma citação na página 32.

BLONDEL, V.; TSITSIKLIS, J. N. NP-hardness of some linear control design problems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 35, n. 6, p. 2118–2127, 1997. Uma citação na página 39.

BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In **Proceedings of the IEEE American Control Conference**. 2004. v. 5, p. 3890–3895. Uma citação na página 37.

BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge University Press, 2004. 2 citações nas páginas 32 e 35.

BOYD, S. P.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. SIAM, 1994. 5 citações nas páginas 31, 33, 35, 57 e 89.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M.; aO, E. A.; COVACIC, M. R. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009. 2 citações nas páginas 19 e 34.

CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. 2nd. ed. New York, USA Oxford

University Press, Inc., 1995. 2 citações nas páginas 23 e 35.

COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; LOCATELLI, A. **Control Theory and Design: An \mathcal{RH}_2 and \mathcal{RH}_∞ Viewpoint**. Elsevier Science, 1997. Uma citação na página 88.

CORONA, D.; BUISSON, J.; SCHUTTER, B. D.; GIUA, A. Stabilization of switched affine systems: An application to the buck-boost converter. In **Proceeding of the American Control Conference**. 2007. p. 6037–6042. 2 citações nas páginas 19 e 34.

DEAECTO, G.; SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. Chattering free control of continuous-time switched linear systems. **IET Control Theory & Applications**, v. 8, n. 5, p. 348–354, 2014. 4 citações nas páginas 19, 35, 51 e 68.

DEAECTO, G. S. **Projeto de controladores dinâmicos com comutação: aplicação em sistemas mecânicos e conversores de potência CC-CC**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2010. Uma citação na página 35.

DEAECTO, G. S.; EGIDIO, L. N. Practical stability of discrete-time switched affine systems. In **Proceeding of the European Control Conference**. Aalborg, DK, 2016. p. 2048–2053. Uma citação na página 47.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Stability and robustness analysis of discrete-time switched affine systems. **Submetido**, 2016. 3 citações nas páginas 19, 57 e 58.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control of switched linear systems. **Automatica**, v. 47, n. 8, p. 1713–1720, 2011. Uma citação na página 19.

_____. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011. Uma citação na página 34.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F.; POMILIO, J. Switched affine systems

control design with application to DC–DC converters. **IET Control Theory & Applications**, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010. 3 citações nas páginas 19, 37 e 38.

DEAECTO, G. S.; SANTOS, G. C. State feedback \mathcal{H}_∞ control design of continuous-time switched affine systems. **IET Control Theory & Applications**, v. 9, n. 10, p. 1511–1516, 2015. 4 citações nas páginas 19, 36, 37 e 46.

DECARLO, R.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. et al. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. **Proceedings of the IEEE**, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000. Uma citação na página 18.

EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. **S-variable Approach to LMI-based Robust Control**. Springer, 2015. Uma citação na página 33.

EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S. Controle \mathcal{H}_2 via realimentação de saída de sistemas afins com comutação a tempo contínuo. In **Anais do Congresso Brasileiro de Automática**. aceito para apresentação oral, 2016. Uma citação na página 19.

_____. Controle ótimo de sistemas afins com comutação a tempo discreto. In **Anais do Congresso Brasileiro de Automática**. aceito para apresentação oral, 2016. Uma citação na página 47.

FIACCHINI, M.; JUNGERS, M. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems: A set-theory approach. **Automatica**, v. 50, n. 1, p. 75–83, 2014. Uma citação na página 19.

FRANK, M.; WOLFE, P. An algorithm for quadratic programming. **Naval research logistics quarterly**, Wiley Online Library, v. 3, n. 1-2, p. 95–110, 1956. 2 citações nas páginas 20 e 51.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; WORKMAN, M. L. **Digital control of dynamic systems**. Addison-wesley Menlo Park, 1998. Uma citação na página 35.

GARCIA, F. S.; POMILIO, J.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Analysis and control of

DC-DC converters based on Lyapunov stability theory. In **Proceeding of the IEEE Energy Conversion Congress and Exposition**. San Jose, USA, 2009. p. 2920–2927. Uma citação na página 19.

GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006. Uma citação na página 19.

_____. Stability and stabilization of discrete time switched systems. **International Journal of Control**, v. 79, n. 07, p. 719–728, 2006. Uma citação na página 19.

GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. **Automatica**, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009. Uma citação na página 19.

GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S.; COLANERI, P. Multi-objective H_2 control via switched linear systems. In **Proceeding of the IFAC Symposium on Systems, Structure and Control**. Foz do Iguassu, Brazil, 2007. p. 238–243. Uma citação na página 34.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. **Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios**. Editora Blucher, São Paulo, SP, 2011. 3 citações nas páginas 28, 35 e 86.

GEROMEL, J. C.; PALHARES, A. G. **Análise Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios**. São Paulo, Brasil Editora Blucher, 2011. Uma citação na página 24.

GEROMEL, J. C.; SOUZA, M. On an LMI approach to optimal sampled-data state feedback control design. **International Journal of Control**, v. 88, n. 11, p. 2369–2379, 2015. Uma citação na página 68.

HAUROIGNE, P.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Switched affine systems using sampled-data controllers: robust and guaranteed stabilization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 56, n. 12, p. 2929–2935, 2011. Uma citação na página 19.

HETEL, L.; FRIDMAN, E. Robust sampled–data control of switched affine systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 58, n. 11, p. 2922–2928, 2013. 11 citações nas páginas 19, 20, 36, 44, 45, 46, 47, 68, 69, 76 e 77.

KARMAKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In **Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing**. 1984. p. 302–311. Uma citação na página 32.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. Prentice Hall, 2002. 2 citações nas páginas 25 e 26.

KRISHNAKUMAR, K.; GOLDBERG, D. E. Control system optimization using genetic algorithms. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 15, n. 3, p. 735–740, 1992. Uma citação na página 52.

KUIAVA, R.; RAMOS, R. A.; POTA, H. R.; ALBERTO, L. F. Practical stability of switched systems without a common equilibria and governed by a time-dependent switching signal. **European Journal of Control**, v. 19, n. 3, p. 206–213, 2013. 2 citações nas páginas 19 e 20.

_____. Practical stability assessment of distributed synchronous generators under variations in the system equilibrium conditions. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 55, p. 275–284, 2014. Uma citação na página 19.

LIBERZON, D. **Switching in systems and control**. Birkhäuser Boston, 2003. 3 citações nas páginas 18, 34 e 35.

LOHN, J. D.; COLOMBANO, S. P. A circuit representation technique for automated circuit design. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 3, n. 3, p. 205–219, 1999. Uma citação na página 90.

LOHN, J. D. et al. **Evolutionary Design of an X-Band Antenna for NASA’s Space Technology 5 Mission**. 2003. Uma citação na página 90.

LUENBERGER, D. **Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications**.

Wiley, 1979. 2 citações nas páginas 25 e 35.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and nonlinear programming**. Springer, 1984. Uma citação na página 32.

LUNZE, J.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. **Handbook of hybrid systems control: theory, tools, applications**. Cambridge University Press, 2009. Uma citação na página 18.

NESTEROV, Y.; NEMIROVSKII, A.; YE, Y. **Interior-point polynomial algorithms in convex programming**. SIAM, 1994. Uma citação na página 32.

RUSSELL, S.; NORVIG, P. **Artificial Intelligence: A Modern Approach**. Prentice Hall, 2010. Uma citação na página 90.

SANNA, M.; MURRONI, M. Optimization of non-convex multiband cooperative sensing with genetic algorithms. **IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing**, v. 5, n. 1, p. 87–96, 2011. Uma citação na página 52.

SANTOS, G. C. **Controle via realimentação de estado de sistemas afins com comutação**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Mecânica, 2015. Uma citação na página 38.

SCHARLAU, C. C.; OLIVEIRA, M. C. de; TROFINO, A.; DEZUO, T. J. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. **Systems & Control Letters**, v. 68, p. 1–8, 2014. 2 citações nas páginas 19 e 37.

SHORTEN, R.; WIRTH, F.; MASON, O.; WULFF, K.; KING, C. Stability criteria for switched and hybrid systems. **SIAM Review**, v. 49, n. 4, p. 545–592, 2007. Uma citação na página 18.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. **Applied nonlinear control**. Prentice-Hall, 1991. 3 citações nas páginas 25, 35 e 48.

SOUBHIA, A. L. **Otimização discreta para o posicionamento de atuadores e de sensores para controle de vibrações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Mecânica, 2015. Uma citação na página 90.

SOUZA, M. **Controle de sistemas dinâmicos através de redes de comunicação**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2012. Uma citação na página 67.

SUN, Z. **Switched linear systems: Control and design**. Springer Science & Business Media, 2006. 2 citações nas páginas 18 e 35.

TROFINO, A.; SCHARLAU, C. C.; DEZUO, T. J.; OLIVEIRA, M. C. de. Switching rule design for affine switched systems with \mathcal{H}_∞ performance. In **Proceeding of the IEEE Conference on Decision and Control**. 2012. p. 1923–1928. 2 citações nas páginas 19 e 37.

UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. **Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems, Second Edition**. CRC Press, 2009. Uma citação na página 34.

XU, X.; ZHAI, G. Practical stability and stabilization of hybrid and switched systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 11, p. 1897–1903, 2005. Uma citação na página 20.

ZHAI, G. Quadratic stabilizability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In **Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control**. Orlando, USA, 2001. v. 3, p. 2165–2166. Uma citação na página 19.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. **International Journal of Control**, v. 76, n. 7, p. 747–753, 2003. Uma citação na página 19.

APÊNDICE A

Conceitos Matemáticos

Neste apêndice apresentamos alguns conceitos e desenvolvimentos matemáticos que, por questões de organização, foram omitidos do texto dos capítulos anteriores.

A.1 Cálculo de condições iniciais de uma trajetória

No Exemplo 3.1, para a confecção da figura que esboça o plano de fase do subsistema 1 foi necessário calcular quais condições iniciais deveriam ser escolhidas para que após um instante t dado, as trajetórias estivessem uniformemente distribuídas sobre uma circunferência dada. Para isso, partindo da equação (2.2) foi possível obter a expressão da condição inicial em função do estado ξ em um instante t para um sistema afim, dada por

$$\xi(0) = e^{-Ft}(\xi(t) - F^{-1}(e^{Ft} - I)h).$$

Note que para este tipo de sistema, para um ponto qualquer sempre existirá um $\xi(0)$ tal que o estado estará sobre um ponto arbitrário depois de t segundos quando F for regular.

A.2 Lema do Complemento de Schur

O Lema do Complemento de Schur, bastante difundido na literatura matemática, é uma ferramenta importante no contexto de otimização convexa. Ele é enunciado a seguir, como em (GEROMEL; KOROGUI, 2011).

Lema A.1 (Lema do Complemento de Schur). *Seja uma matriz $S(\eta) \in \mathbb{S}^{(n_x+n_y)}$ e um $\eta \in \mathbb{R}^n$ qualquer. $S(\eta)$ pode ser dividida em blocos na forma*

$$S(\eta) = \begin{bmatrix} U(\eta) & V(\eta) \\ V(\eta)' & X(\eta) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

sendo $U(\eta) \in \mathbb{S}^{n_x}$, $V(\eta) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ e $X(\eta) \in \mathbb{S}^{n_y}$. Dessa maneira, $S(\eta) \in \mathbb{S}_{++}^{(n_x+n_y)}$ se e

somente se

$$U(\eta) > 0 \text{ e } X(\eta) - V(\eta)'U(\eta)^{-1}V(\eta) > 0. \quad (\text{A.2})$$

ou

$$X(\eta) > 0 \text{ e } U(\eta) - V(\eta)X(\eta)^{-1}V(\eta)' > 0, \quad (\text{A.3})$$

Prova: Seja a matriz

$$T(\eta) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ V(\eta)'U(\eta)^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

não-singular. Podemos fatorar $S(\eta) = T(\eta)K(\eta)T(\eta)'$ sendo

$$K(\eta) = \begin{bmatrix} U(\eta) & 0 \\ 0 & X(\eta) - V(\eta)'U(\eta)^{-1}V(\eta) \end{bmatrix}.$$

Note que $S(\eta) > 0$ sempre que $K(\eta) > 0$, obtendo então as condições referentes à (A.2). Para (A.3) a prova é feita de maneira análoga. \square

A.3 Elipsoides

Um elipsoide \mathcal{E} de dimensão n é dado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$x'Dx \leq r \quad (\text{A.5})$$

onde $D \in \mathbb{S}_{++}^n$ e $r \in \mathbb{R}_{++}$. Este elipsoide possui n semieixos ortogonais cujas normas são dadas por $\|s_i\| = (\gamma_i(D)/r)^{-1/2}$, $\forall i \in \mathbb{N}_N$. Seu volume generalizado é dado pela expressão

$$\text{vol}(\mathcal{E}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2 + 1)} \det\left(\frac{D}{r}\right)^{-1/2}. \quad (\text{A.6})$$

onde $\Gamma(\cdot)$ representa a função Gama. Esta fórmula pode ser obtida partindo da expressão do volume de uma bola unitária em um espaço euclidiano n dimensional e aplicando uma transformação linear endomórfica $(D/r)^{1/2}$ sobre este espaço.

A.4 Minimização de volume - Cálculo do gradiente

O volume de um elipsoide dado por (A.5) para $r = 1$, sem perda de generalidade, é proporcional a $g(D) = \det(D^{-1/2})$. Esta expressão é não convexa nos elementos de D uma vez

que o determinante representa o produto de seus autovalores. Entretanto, é simples notar que o mínimo de $g(D)$ coincide com o mínimo de

$$f(D) = 2 \ln(g(D)) = -\ln(\det(D)),$$

pois a função logaritmo é injetora e crescente. Ademais, podemos mostrar que $f(D)$, $D \in \mathbb{S}_{++}^n$ é uma função convexa, veja (COLANERI et al., 1997). De fato, para um $D_0 \in \mathbb{S}_{++}^n$ particular, temos

$$\begin{aligned} f(D) - f(D_0) &= -\ln(\det(D_0^{-1}D)) \\ &= -\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \ln(\gamma_i(D_0^{-1}D)) \\ &\geq -\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \{\gamma_i(D_0^{-1}D) - 1\} \\ &\geq -\text{Tr}(D_0^{-1}D + I) \end{aligned} \tag{A.7}$$

em que a primeira desigualdade foi baseada no fato de que a função escalar $f(z) = -\ln(z)$ para $z \in \mathbb{R}_{++}$ é convexa e, portanto, $f(z) \geq -z + 1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} f(D) &\geq f(D_0) - \text{Tr}(D_0^{-1}D) + \text{Tr}(D_0^{-1}D_0) \\ &\geq f(D_0) + \text{Tr}(-D_0^{-1}(D - D_0)) \end{aligned} \tag{A.8}$$

o que demonstra a convexidade da função $f(D)$, $D \in \mathbb{S}_{++}^n$. Desta maneira podemos concluir que minimizar $f(D)$ implica em minimizar o volume de seu elipsoide associado.

Além disso, fazendo D arbitrariamente próximo de D_0 , temos

$$f(D) \approx f(D_0) + \text{Tr}(-D_0^{-1}(D - D_0)) \tag{A.9}$$

o que nos permite concluir que

$$\nabla_D f(D) = -D^{-1} \tag{A.10}$$

Esta expressão é importante para a implementação do algoritmo de Frank-Wolfe (Algoritmo 4.1) utilizado para a minimização de $f(D)$. Em cada passo, este algoritmo utiliza o gradiente de $f(D)$ para minimizar a aproximação linear da função objetivo dada por (A.9).

A.5 S-Procedure

O *S-procedure* é uma ferramenta importante no contexto da otimização convexa que nos permite reescrever restrições não-lineares em uma LMI, as vezes diretamente, as vezes através de algumas manipulações adicionais. Assim como apresentado em (BOYD et al., 1994), consideremos funções quadráticas $F_i: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}_{0p}$ de uma variável $x \in \mathbb{R}^n$. Se queremos garantir que

$$F_0(x) > 0 \quad \forall x \neq 0: F_i(x) \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_p, \quad (\text{A.11})$$

basta encontrar constantes $\tau_i \in \mathbb{R}_{++}, \forall i \in \mathbb{N}_p$ tais que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$F_0(x) - \sum_{i \in \mathbb{N}_p} \tau_i F_i(x) > 0. \quad (\text{A.12})$$

Ademais, quando $p = 1$, (A.11) e (A.12) são equivalentes.

APÊNDICE B**Algoritmo Genético**

Como apresentado em (RUSSELL; NORVIG, 2010) um Algoritmo Genético, também conhecido como GA, é uma técnica de otimização heurística inspirada pela evolução biológica. Na primeira iteração deste algoritmo, também chamada de primeira geração, uma população de N_p soluções candidatas é gerada aleatoriamente e cada solução é denominada um indivíduo. Logo, cada indivíduo possui um valor associado a cada uma das variáveis do problema e, assim, um valor para a função objetivo. Este último pode ser penalizado, no caso de violação das restrições de um problema de otimização restrita. Sem perda de generalidade, quando utilizado para a minimização, apenas uma parte dos indivíduos que retornam os menores valores para a função objetivo é selecionada para compor a população da próxima iteração, chamada de elite. Para gerar novamente as N_p soluções da nova geração, o algoritmo produz novos indivíduos ditos filhos dos selecionados anteriormente.

Esta relação de parentesco se baseia tanto no processo biológico denominado *crossing over*, durante a formação de gametas, quanto na transformação genética de bactérias. Neste passo do algoritmo, dois pais são escolhidos aleatoriamente dentre a elite e suas soluções associadas são combinadas de forma a gerar uma nova solução candidata para um novo indivíduo filho. Geralmente, são também realizadas mutações neste instante, realizando alterações aleatórias pontuais nos valores de variáveis associados aos novos indivíduos, a fim de aumentar a variedade das soluções da nova geração.

Gerações diferentes são criadas sucessivamente até que o processo iterativo satisfaça um critério de parada predeterminado. É comum neste caso dizer que o algoritmo convergiu quando a alteração do valor da função objetivo entre os melhores indivíduos de duas iterações consecutivas é menor que um certo erro ϵ pequeno.

Este tipo de abordagem para solução de problemas de otimização está sendo bastante difundido em projetos de engenharia, sendo usado de maneira a otimizar o desenho de trilhas para circuitos elétricos, projeto de antenas, seleção de atuadores e sensores em sistemas de controle, dentre outros, veja (LOHN; COLOMBANO, 1999; LOHN et al., 2003; SOUBHIA, 2015).

Parâmetro	Valor
N_p	10000
Função de criação	@gacreationuniform
Função de <i>crossing over</i>	@crossoverscattered
Função de mutação	@mutationadaptfeasible

Tabela B.1 - Opções utilizadas na execução da função `ga` do MATLAB.

Como o foco deste trabalho não foi desenvolver algoritmos genéticos, na resolução do Exemplo 4.1 foi utilizada a função `ga` do MATLAB presente na *Global Optimization Toolbox*. Os parâmetros utilizados na implementação deste exemplo estão disponíveis na Tabela B.1.