

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

# **Dinâmica Não-Linear de Um Rotor Não-Ideal**

Autora: Elvira Rafikova

Orientador: Prof.Dr. José Manoel Balthazar

Co-orientador: Prof.Dr. Helder Hanibal Hermini

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

## **Dinâmica Não-Linear de Um Rotor Não-Ideal**

Autor: Elvira Rafikova  
Orientador: Prof .Dr. José Manoel Balthazar  
Co-orientador: Prof. Dr. Helder Anibal Hermini

Curso: Engenharia Mecânica  
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2006  
S.P . – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R121d Rafikova, Elvira  
Dinâmica não-linear de um rotor não-ideal / Elvira  
Rafikova. --Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientadores: José Manoel Balthazar, Helder Aníbal  
Hermi

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Teoria não-linear. 2. Teoria dos sistemas  
dinâmicos. 3. Motores elétricos de corrente continua. 4.  
Vibração ressonante. I. Balthazar, José Manoel. II.  
Hermi, Helder Aníbal. III. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.  
Título.

Título em Inglês: Nonlinear dynamics of nonideal rotor

Palavras-chave em Inglês: Nonideal systems, Limited power supply, Sommerfeld effect

Área de concentração: Materiais e Processos de Fabricação

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Marcelo Amorim Savi, Kátia Lucchesi Cavalca

Data da defesa: 21/02/2006

## **Dedicatória:**

Dedico esse trabalho, num impulso egoísta, às minhas noites solitárias de insônia sonolenta. Noites amigas e companheiras, quietas consoladoras do desespero, que me ensinaram a confiar apenas em mim mesma. Dedico o esforço, o suor e as lágrimas à biblioteca onde esse trabalho cairá no esquecimento e será enterrado entre tantos outros do gênero. Dedico ele ao Universo que com tantos astros brilha na escuridão e nos ensina, a cada noite que passa, que nunca o compreenderemos completamente.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por terem me concebido, criado, educado e apoiado sempre nas minhas sanidades e quase sempre nas minhas sandices.

Agradeço às pessoas especiais, meus colegas: Karen que me ensinou muito além de matemática e engenharia, sem a qual esse trabalho não existiria. Ao Jefersson que sempre esteve pronto pro que der e vier.

Agradeço aos Professores Balthazar pela inspiração e orientação, Kurka pela ajuda, cuidado e preocupação; Helder pela disposição a ajudar sempre.

Agradeço ao professor Brasil pela preciosa colaboração.

Agradeço às amigas Letícia, Paula, Natália e Stella , por ter me aturado nos momentos mais difíceis, pelas boas risadas, pelas finais de semana gordos, pela bagunça genérica.

Agradeço ao Fabio por me ensinar o inglês que eu jamais imaginara, à Elisabete que, além de me ensinar música, me mostrou o que a voz de uma mulher é capaz.

Aos meus amigos: Eder, Simone, Fabiano, Celina e outros, agradeço a presença, o carinho e os bons momentos.

Agradeço à Karen e à Celina que gentilmente me adotaram e me cuidaram nos finais de semana.

Agradeço ao ABBA e aos Bee Gees pelas músicas fantásticas que embalam tão docemente os meus trabalhos científicos monótonos.

Agradeço pela ajuda recebida de todas as pessoas que realmente quiseram que esse trabalho viesse a luz e colaboraram de alguma forma para isso.

Agradeço aos meus amigos do Sul, especialmente Mauren , Eduardo, Pedro, Ana Paula que , apesar de não colaborar diretamente no trabalho, estiveram sempre preocupados comigo.

Agradeço aos meus inimigos que me fortaleceram ao longo dos anos, me desafiaram e me instigaram a ultrapassar fronteiras.

Agradeço ao Deus que me protege, me cuida e me ilumina e à Deusa que com a sua luz suave me inspira sabedoria.

*“Le beaux est toujours bizarre”  
Charles Baudelaire*

## Resumo

RAFIKOVA, Elvira, *Dinâmica Não-Linear de Um Rotor Não-Ideal*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 82 p. Dissertação (Mestrado)

Esse trabalho investiga um sistema dinâmico não-ideal que pertence a uma classe especial dos sistemas dinâmicos. O objeto de estudo desse trabalho é um rotor que consiste de um disco preso a uma barra elástica e excitado por uma fonte de energia de potência limitada. O sistema se desloca transversalmente e verticalmente além de possuir uma coordenada de rotação. Um estudo numérico do problema é realizado para investigar a dinâmica não-linear do sistema. Simulações numéricas tais como: diagramas de espaço de fase, curvas de resposta em frequência, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov mostram uma forte influência da fonte de energia na resposta do sistema e revelam oscilações regulares e irregulares. Além disso, o efeito Sommerfeld é observado, assim como o salto na resposta em frequência quando o parâmetro de controle do motor é variado. Finalmente comprova-se que os regimes irregulares presentes no movimento do sistema tem uma natureza caótica.

### *Palavras Chave*

- Sistemas Não-Ideais, Fonte de Potência Limitada, Caos, Efeito Sommerfeld

## Abstract

RAFIKOVA, Elvira, *Nonlinear Dynamics of Nonideal Rotor*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. 82p. Dissertação (Mestrado)

This work investigates a non-ideal dynamic system that is a special group of dynamics systems. The object studied in this work is a rotor composed of an elastic shaft carrying a disc which is excited by a limited power supply. The system has *transversal* and *vertical* displacement and a coordinate of rotation of the disc. A numerical study is done here in order to investigate the non-linear dynamics of the system. Numerical simulations such as: space-state diagrams, frequency response diagrams, bifurcations diagrams and Lyapunov exponent show the strong influence of the energy source on system response, and reveal regular and irregular motions. Besides, Sommerfeld effect is observed, as well as the jump in system response, when a control parameter of the energy source is varied. Furthermore, it is shown that the irregular regimes that occur in the system's motion are of chaotic nature.

### *Key Words*

Nonideal Systems, Limited Power Supply, Chaos, Sommerfeld Effect



# Índice

LISTA DE FIGURAS .....	iii
LISTA DE TABELAS.....	v
NOMENCLATURA.....	vi
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução .....	1
1.2 Apresentação dos capítulos .....	4
1.3 Revisão Bibliográfica .....	4
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES E NÃO-IDEAIS.....</b>	<b>8</b>
2.1 Conceitos de Estabilidade conforme Lyapunov .....	9
2.2 Critério de estabilidade Routh – Hurwitz .....	10
2.3 Caos Determinístico .....	13
2.4 Expoentes de Lyapunov .....	14
2.5 Bifurcações .....	15
2.6 Definição de Sistemas dinâmicos não ideais .....	17
2.7 Características da Fonte de Energia .....	19
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA.....</b>	<b>23</b>

3.1 Apresentação do sistema .....	23
3.2 Equações de Movimento .....	24
3.3 Solução analítica aproximada .....	28
3.3.1 O método da média .....	28
3.3.2 Solução Analítica para o Sistema do Rotor Não Ideal .....	30
3.4 Estudo da Estabilidade .....	35
<b>CAPÍTULO 4</b>	
<b>SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>40</b>
4.1 Simulação numérica do rotor não-ideal .....	41
4.2 Energia dissipada e a curva característica do motor .....	42
4.3 O efeito Sommerfeld .....	43
4.4 Análise do espaço de fase.....	48
4.5 Velocidades angulares .....	63
4.6 Investigação da dinâmica caótica .....	69
<b>CAPÍTULO 5</b>	
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>75</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>78</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>83</b>

## Lista de Figuras

Figura 1- Evolução de um volume esférico no espaço de fase.....	15
Figura 2-Diagrama de bifurcação de resposta em frequência .....	17
Figura 3- Aparato do experimento de Kononenko e Korablev .....	19
Figura 4- Figuras esquemáticas das curvas características a-) exponencial , b-) linear .....	20
Figura 5- Respostas em frequência do experimento de Kononenko e Korablev .....	21
Figura 6- Curva de comparação da resposta em frequência.....	22
Figura 7-O modelo físico do rotor .....	24
Figura 8- Torques Líquidos: a) forma linear b) forma exponencial .....	42
Figura 9: Curva de energia dissipada pelo sistema e curva característica do motor .....	43
Figura 10- a) Deslocamento $x$ em função do tempo b) Velocidade angular em função do tempo. Sistema “absorvido” pela ressonância .....	44
Figura 11- a) Amplitude do deslocamento $x$ em função do tempo b) Velocidade angular em função do tempo. Passagem pela ressonância.....	45
Figura 12: Diagrama temporal quando $a= 2$ e $b =0.002$ .....	45
Figura 13: Diagrama temporal quando $a= 2.5$ e $b= 0.002$ .....	46
Figura 14- Resposta em frequência .....	46
Figura 15- Resposta em frequência . Aumento de excentricidade .....	47
Figura 16- Resposta em frequência. Aumento de massa e da excentricidade .....	48

Figura 17- a) Espaço de fase $x$ em $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude $x$ quando $a=0.1$ $b=0.02$	50
Figura 18- Regime Estacionário- Espaço de fase $x$ em $x'$ com $a=0.1$ e $b=0.02$	51
Figura 19- Transiente após 300s , $a=0.1$ , $b=0.002$	52
Figura 20- Regime estacionário após 1000s , $a=0.1$ , $b=0.002$	53
Figura 21- $a=0.2$ $b=0.02$	54
Figura 22 $a=0.3$ $b=0.02$ .	55
Figura 23 $a=0.4$ $b=0.02$	56
Figura 24- $a=0.5$ $b=0.02$ .	57
Figura 25- Regime Permanente $a=0.5$ $b=0.02$ .	58
Figura 26- $a=1.5$ $b=0.02$	59
Figura 27- $a=1.7$ $b=0.02$	60
Figura 28- $a=1.8$ $b=0.02$	61
Figura 29- $a=1.9$ $b=0.02$	62
Figura 30- Velocidade angular em função do tempo . a) $a=0.5$ , $b=0.02$ e b) $a=0.9$ $b=0.02$ .....	64
Figura 31- Velocidade angular em função do tempo . a) $a=1$ , $b=0.02$ e b) $a=1.4$ $b=0.02$	65
Figura 32- Velocidade angular em função do tempo . a) $a=1.5$ , $b=0.02$ e b) $a=1.6$ $b=0.02$	66
Figura 33- Velocidade angular em função do tempo . a) $a=1.7$ $b=0.02$ ; b) $a=1.8$ $b=0.02$	67
Figura 34- Velocidade angular em função do tempo . a) $a=1.9$ , $b=0.02$ e b) $a=2.1$ $b=0.02$ .....	68
Figura 35- Espectro do Expoente de Lyapunov do sistema	69
Figura 36-Espectro de Expoentes de Lyapunov	70
Figura 37: Diagrama de bifurcação do parâmetro de controle $a$ pela resposta do sistema em amplitude $x$	71
Figura 38- a) digrama de bifurcação do parâmetro $a$ do motor pela resposta do sistema b) digrama de bifurcação do parâmetro do motor pelo expoente de lyapunov	72
Figura 39- a) diagrama de bifurcação pela resposta $x$ b) bifurcação do parâmetro $a$ pelo expoente de Lyapunov. Condição inicial diferente	73

## Lista de Tabelas

Tabela 1-Valores dos parâmetros de simulação .....	41
--	----

## Nomenclatura

$x$  : deslocamento na horizontal

$y$  : deslocamento do sistema na vertical

$\varphi$  : ângulo rotacional do sistema

$\rho$  : excentricidade do rotor

$\chi$  : parâmetro relacionado ao amortecimento externo

$\omega$  : frequência natural

$\Omega$  : frequência rotacional do sistema

$q$ : parâmetro ligado ao torque resistivo

$c$ : coeficiente de rigidez

$I$ : momento de inércia

$m$ : massa do rotor

$k$ : coeficiente de amortecimento interno

$a$ : parâmetro de controle do motor

$b$ : parâmetro do motor

$M(\phi)$ : torque motriz

$L(\phi)$ : torque líquido

$H(\phi)$ : torque resistivo

$r$ : distância entre os pontos O e W

$W$ : ponto de fixação do rotor na barra

$O$ : origem das coordenadas

$T$ : energia cinética

$V$ : energia potencial

$q_i$  coordenadas generalizadas

$\varepsilon$  : pequeno parâmetro

$\Phi_i$  funções que representam os lados direitos das equações durante o estudo da estabilidade pelo critério R-H

$\xi$  : solução para a fase do sistema

$\lambda_i$  : expoentes característicos de Lyapunov

$t$ : tempo

# Capítulo 1

## Considerações Iniciais

### 1.1 Introdução

O homem nunca deve esquecer as origens do seu progresso científico e tecnológico por isso convém voltar à Grécia Antiga para explicar as primeiras origens do estudo da dinâmica dos corpos. Os avanços cosmológicos permitiram desenvolvimento de ferramentas de observação, predição e contagem do tempo. Possibilitaram a realização de previsões de eclipses e estabelecimento de órbitas de corpos celestes. Entre algumas das ferramentas desenvolvidas para esses fins está um mecanismo de engrenagens 32 peças que é o mais antigo mecanismo diferencial utilizado para o cálculo de posições de sol e da lua.

Em 1473 Nicolau Copérnico percebeu que a teoria ptolomaica que então vigorava estava errada e tudo indicava que a Terra girava em torno do Sol. Tycho Brach, introduziu o rigor da precisão e a noção de erro, provou que o céu não é imutável como acreditavam os gregos liquidando de vez com a teoria ptolomaica. Além disso, Tycho Brach fez precisas observações planetárias. Suas anotações permitiram, após a morte de Brach, ao Johanes Kepler deduzir a exata natureza das órbitas planetárias.

No entanto, foi Galileu quem primeiro se ocupou da mecânica dos corpos na superfície da Terra. Ele investigou a mecânica de Aristóteles em especial a cinemática e provou várias leis, descobriu a constante da gravidade, provou a existência do vácuo e a não homogeneidade da matéria. No entanto seus estudos sobre a mecânica dos corpos foram seu maior triunfo, tornando-o pai da dinâmica moderna.



Galileu foi o princípio, Newton, a continuação. Nascido no ano da morte de Galileu, Newton publicou o seu célebre trabalho *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* que sintetizou os seus estudos em Leis de Gravitação Universal, mérito pelo qual é mais conhecido atualmente. Além disso, elaborou o método do *cálculo diferencial*, paralelamente ao Gottfried Leibnitz. Ambos, com seus métodos resolveram problemas práticos de determinação de distâncias através de velocidades ou vice-versa. Jean Lê Rond d'Álembert, por sua vez desenvolveu o estudo de cordas em vibração e formulou a equação diferencial *parcial*.

Por sua vez, Lagrange reformulou a dinâmica introduzindo o princípio da conservação de energia, que afirmava que todo o movimento de um corpo poderia ser descrito através das equações da sua energia em função da energia cinética e energia potencial. A segunda contribuição de Lagrange foi a introdução de coordenadas para a representação algébrica da geometria do movimento.

Henri Poincaré nascido em 1854, o último universalista, foi desafiado pelo problema de interação entre 3 corpos. Para estudar a dinâmica desse sistema Poincaré criou um novo ramo na matemática: a Topologia. No ensaio: *Sobre o problema dos três corpos*, o autor formulava as equações da dinâmica e aplicava a um problema com o número arbitrário de corpos movendo-se com sob a gravitação newtoniana. No mesmo ensaio, ele cita a existência de soluções periódicas das equações, e com recursos limitados da época, Poincaré faz a conclusão “Existem séries cujos coeficientes são periódicos e que formalmente satisfazem as equações. Resta demonstrar a convergência dessa série”.

Enquanto Poincaré descobria uma nova propriedade do comportamento de equações diferenciais, intrínseca a alguns tipos de sistemas, Sommerfeld dava início a uma nova classe de sistemas dinâmicos: os sistemas dinâmicos não ideais. Em um experimento em que se considerava um sistema dinâmico oscilante sob a influência de uma fonte de excitação, operando com potência limitada, Sommerfeld observou a ocorrência de fenômenos diferenciados quando o sistema oscilante interagia com a fonte de excitação. Ele notou que na região de ressonância, a rotação do motor (fonte de excitação utilizada) variava de maneiras distintas conforme a variação da amplitude do sistema oscilante, sendo extremamente dependente da coordenada de movimento do sistema e não dependente simplesmente do tempo. Após as observações de Sommerfeld, foram constatados outros fenômenos na existência de interação entre fonte de energia e sistema

oscilante na região de ressonância. Observou-se a dependência da curva de ressonância com relação ao sentido da variação da frequência da força de excitação, que a ocorrência de oscilações instáveis em um sistema linear está intimamente ligada às propriedades do motor elétrico, o fenômeno do salto ("jump") durante a passagem de um regime ressonante para um regime não ressonante.

Nos anos 50 e 60, Kononenko e seus colaboradores estudaram intensamente os sistemas não ideais vindo a sintetizar sua teoria no livro: Vibrações em sistemas de potência limitada. Nele há demonstração, através do método assintótico de Bogoliubov [11] do comportamento de sistemas excitados por fontes de potência limitada. Kononenko estudou, principalmente de forma analítica, os problemas de vibrações de sistemas não-ideais, vindo a realizar alguns experimentos, porém poucas simulações numéricas devido a recursos limitados da época.

Por outro lado, em 1963, Edward Lorenz, provou de forma computacional do que então era chamado de erros, de aleatoriedade, de imprevisibilidade. Lorenz, estudando modelos de convecção das camadas de ar descritos pelas equações de turbulência de Navier-Stokes, descobriu a existência do Caos no comportamento dos sistemas complexos e caracterizou a sensibilidade desses sistemas às condições iniciais o que se tornou mais conhecido popularmente como Efeito Borboleta.

Recentemente, a formulação de sistemas dinâmicos como não ideais tem sido explorada de forma intensiva. Balthazar e colaboradores [8] retomaram o estudo de sistemas vibrantes não-ideais e apresentam uma revisão completa de diferentes teorias a respeito do assunto. Formou-se um grupo de pesquisas que visa intensificar os estudos nesta área e obter novos resultados associando sistemas não ideais, não linearidades e teoria do caos, auxiliados pelos modernos recursos computacionais que tornam a análise da dinâmica desses sistemas mais evidente. O objeto de estudo deste trabalho é um sistema não ideal, que também faz parte desta série de trabalhos. O objetivo principal desse trabalho é o estudo de um rotor de dois graus de liberdade além da coordenada do motor com a formulação não-ideal e não-linear. Estuda-se a dinâmica não-linear do sistema através de simulações numéricas e método de perturbação solução analítica aproximada.

## **1.2 Apresentação dos capítulos**

No capítulo 1 desse trabalho encontra-se uma revisão bibliográfica a respeito de sistemas não-ideais, dinâmica não-linear e caos. No capítulo 2 são apresentados alguns tópicos introdutórios em sistemas dinâmicos, estabilidade, critério de Routh-Hurwitz, dinâmica caótica e uma revisão da teoria de sistemas não-ideais. No terceiro capítulo é apresentado o sistema mecânico estudado: o rotor não –ideal, é mostrada a solução analítica aproximada pelo método assintótico da média e também, apresentado um estudo da estabilidade através do critério Routh-Hurwitz. No capítulo 3 encontram-se as simulações numéricas, principal foco desse trabalho. O objetivo principal do estudo numérico é a visualização da dinâmica não –linear do sistema, presente em diagramas de bifurcação, resposta em frequência, espaços de fase e expoentes de Lyapunov. Apresenta-se, então, os diagramas temporais e da variação da velocidade angular do sistema para diversos parâmetros de controle para mostrar os efeitos da formulação não-ideal do problema. O gráfico de resposta em frequência é apresentado para mostrar o fenômeno do salto. Além disso, para uma visualização geométrica do sistema é mostrada a evolução do espaço de fase com a mudança dos parâmetros do motor. Uma visão mais aprofundada na dinâmica do sistema é obtida através de diagramas de bifurcação e do expoente de Lyapunov comprovando a existência de regimes caóticos.

## **1.3 Revisão Bibliográfica**

O primeiro relato que se tem a respeito da interação entre um sistema oscilante e a fonte de energia é apresentado por Sommerfeld em 1902 [47]. Em seu experimento, constituído por uma mesa e um motor elétrico, o qual servia como fonte de excitação, ele observa que a velocidade do motor não era uma função suave que dependia apenas da energia inserida ao sistema. Quando a amplitude atinge o seu valor máximo, na região de ressonância, o gasto de energia cresce aproximadamente o dobro. Por outro lado, após a ressonância, a amplitude decresce bruscamente, enquanto a velocidade do motor cresce rapidamente. A este fenômeno atribuiu-se o nome de Efeito Sommerfeld. Rocard publica em 1949 o primeiro estudo analítico deste fenômeno [4].

Kalischuk nota a dependência da curva de ressonância com relação ao sentido da variação da frequência da força de excitação em 1939 [29]. No ano seguinte, Martyshkin [34] mostra que a ocorrência de oscilações instáveis em um sistema linear está intimamente ligada às propriedades do motor elétrico. O fenômeno do salto ("jump") tem o seu primeiro relato em 1953 [4], quando Blekhman observa, em um estudo de auto-sincronização de massas rotacionais desbalanceadas, que a passagem de um regime ressonante para um regime não ressonante se dá através de um salto. A partir de 1958, Kononenko publica vários artigos investigando sistemas não ideais, características da fonte de energia e passagem pela ressonância, destacando-se entre eles um artigo de 1964, que contém um experimento realizado por Kononenko e Korablev [34] em 1959, no qual Kononenko demonstra que, com potência limitada, a velocidade angular do excitador não é aleatória, mas sim determinada pela interação entre o sistema estrutural e o excitador [2]. Em 1969, Kononenko [30] dedica um livro a sistemas dinâmicos com fonte de potência limitada, o qual faz referência a vários trabalhos e experimentos na área. Nayfeh e Mook [41] discutem o experimento realizado por Kononenko e Korablev além de outros.

Uma revisão completa de diferentes teorias sobre sistemas vibrantes não ideais é apresentada por Balthazar e colaboradores [7]. Recentemente, a formulação de sistemas dinâmicos como não ideais tem sido explorada de forma intensiva. Em 2002, Souza e colaboradores [48] apresentam o estudo de um sistema sujeito a choque, excitado por fonte não ideal, detectando oscilações regulares e irregulares, bifurcações e caos no movimento do sistema. Belato e colaboradores [10] apresentam o estudo de um sistema eletromecânico não ideal, quando o torque gerado pelo motor é determinado pelo próprio movimento do pêndulo.

Balthazar e colaboradores [7, 8] apresentam ricas revisões bibliográficas sobre sistemas não ideais e apresentam vários sistemas mecânicos clássicos analisados sob a perspectiva de formulação não ideal. Em [5] é utilizado o método de Melnikov para detectar bifurcações de Hopf em um sistema não ideal. Em [26] foi obtida uma solução analítica para um sistema de dois graus de liberdade com fonte de energia não ideal e as soluções numéricas mostraram comportamento regular e irregular do sistema, dependendo do modelo do torque. O modelo linear gerou movimentos regulares, e o modelo não –linear de torque gerou movimentos irregulares e caóticos.

Resultados recentes sobre a aplicação do método da média em sistemas com fonte de excitação não ideal podem ser encontrados em [19] e [14]. O primeiro utiliza o método para verificar a presença do fenômeno de saturação, cujos resultados são comparados com resultados de integração numérica obtidos. O sistema estudado é um pórtico com não linearidades quadráticas, operando na região de ressonância interna 1:2. Um sistema semelhante foi estudado anteriormente por Brasil e Mook [12], quando constata-se a saturação dos modos durante a passagem pela ressonância. Dantas e Balthazar [14] também estudam uma estrutura aporticada, sujeita a oscilações livres, e fazem uma abordagem mais formal do método da média.

Em [13] é realizado um estudo de um rotor com formulação ideal e não linear com o objetivo de investigação de efeitos, na passagem pela ressonância, de um dispositivo externo que submete o sistema a ação do atrito seco de Coulomb. Verifica-se que o mecanismo auxiliar atua como amortecedor reduzindo a amplitude de vibração do sistema na região de ressonância. Além disso, o trabalho levanta alguns pontos fundamentais em dinâmica de rotores com a influência do torque, excentricidade e amortecimento na passagem pela ressonância.

Iwatsubo [28] estudou um problema semelhante ao problema deste trabalho, considerando, no entanto, uma assimetria na barra que sustenta o rotor. Foi obtida uma solução assintótica semelhante a do kononenko, soluções numéricas e um estudo experimental que quando a fonte de energia tinha a potência limitada a interação entre a estrutura do sistema e o motor aumentava com o aumento da assimetria da barra.

Dimentimberg [16] estudou o problema do rotor desbalanceado, montado em base rígida suspensa por molas elásticas, o qual se move apenas na direção vertical. Ele estudou o problema não ideal numericamente para encontrar *thresholds* de passagem e captura do sistema na ressonância, realizando também um estudo paramétrico e, experimentalmente para promover a passagem do sistema pela ressonância alterando a sua rigidez.

Suherman e Plaut [49] estudaram um sistema de rotor de dois graus de liberdade com excentricidade, em ambas formulações: ideal e não-ideal, promovendo a passagem pela ressonância controlando a amplitude através de uma variação na rigidez do sistema. Os resultados numéricos mostraram a diminuição na amplitude das oscilações durante a passagem pela ressonância devido à variação de rigidez.

Na análise de sistemas com características caóticas as ferramentas da teoria do caos se fazem presentes. Tais métodos de análise tem origem nos trabalhos de Poincaré (1921), Birkhoff (1927), Lyapunov (1949), Andronov e outros (1966), Sekar e Narayanan (1995). A caracterização dos fenômenos caóticos tais como a dependência das condições iniciais, aparecimento de atratores estranhos no espaço de fase, oscilações irregulares foi realizada em vários sistemas e explorada extensivamente. Alguns desses sistemas são: oscilador de Duffing (1918), oscilador de Van der Pol (1927), equações de Lorenz(1963).

## Capítulo 2

### Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e Não-Ideais

I. Newton (1642-1727) concebeu o cálculo diferencial e integral, propôs as três leis a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo, deduziu a lei de gravitação universal e muitas outras contribuições. Mas, a sua contribuição mais importante foi relacionar a gravitação com o comportamento dinâmico do Sistema Solar. Newton admitia não compreender a natureza da gravidade; entretanto foi capaz de deduzir a lei que rege o comportamento dos corpos sob sua ação. E, com base nessa lei, comprova os experimentos realizados por Galileu e dá início a busca de métodos de resolução analíticos de sistemas dinâmicos. Um sistema dinâmico é definido por uma variável independente, real ou inteira positiva  $t$  (variável temporal); pelo espaço de fases (ou espaço de estados) formado por uma variável dependente  $x(t)$   $n$ -dimensional; por uma métrica (geralmente a norma euclideana), utilizada para medir distâncias no espaço de fases; e por um operador evolução  $\Phi$ , que quando aplicado a condição inicial determina o estado do sistema no instante  $t$ , ou seja,  $x(t) = \Phi(x(0))$ . Este operador também é conhecido como fluxo, denominação introduzida por Newton, adotada ainda nos dias de hoje. Observa-se que na posição de equilíbrio  $x_0$ ,  $\Phi(x_0) = x_0$ . Para Newton, uma quantidade "que flui" é uma quantidade que varia dinamicamente e a taxa de variação temporal dessa quantidade, ou seja, a derivada, recebeu o nome de fluxion. Resolver a equação diferencial é achar sua solução geral, seu fluxo. Assim, Newton estabeleceu uma conexão entre equações diferenciais e a imagem geométrica de um fluxo.

## 2.1 Conceitos de Estabilidade conforme Lyapunov

Um sistema dinâmico é definido por:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.1)$$

sendo  $x$  um vetor do estado ( $n$ -dimensional e real) e  $f(x, t)$  é um vetor  $n$ -dimensional cujos elementos são funções de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $t$ . Assume-se que o sistema (2.1) tem uma única solução começando em uma dada condição inicial. Se a função  $f$  não depende explicitamente de tempo o sistema (2.1) chama-se autônomo.

Os pontos de equilíbrio do sistema autônomo são os valores  $x^*$  determinados pela equação:

$$f(x^*) = 0 \quad (2.2)$$

Para introduzir a definição de estabilidade no sentido de Lyapunov considera-se uma hiper-esfera de raio  $\varepsilon$  que caracteriza a vizinhança da órbita  $x^*$ . Denota-se  $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$ ,

onde  $\|x - x^*\|$  é chamada de norma Euclidiana e definida por:

$$\|x - x^*\| = [(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

**Definição 1.** A solução de equilíbrio  $x^*$  é estável se para cada número  $\varepsilon > 0$  pode ser encontrado um número  $\delta > 0$  (dependendo de  $\varepsilon$ ) tal que para qualquer condição inicial  $x(t_0)$ ,

$$\|x(t_0) - x^*\| < \delta(\varepsilon) \quad (2.4)$$

tenha por consequência uma trajetória  $x(t)$  tal que

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad (2.5)$$



Se não existir o número  $\delta(\epsilon)$  mencionado na definição acima, o sistema é denominado instável.

**Definição 2.** O ponto de equilíbrio do sistema (2.1) é assintoticamente estável se, além de ser estável, satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t_0) - x^*\| = 0 \quad (2.6)$$

O método mais comum de estudar a estabilidade do sistema (2.1) é pelo exame dos autovalores da matriz do sistema linearizado no ponto de equilíbrio. O sistema linearizado tem a seguinte forma:

$$\dot{x} = J x \quad (2.7)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A estabilidade de um ponto de equilíbrio é estabelecida pelo sinal da parte real de autovalores da matriz  $J$ . Se todas as partes reais têm sinal negativo, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

## 2.2 Critério de estabilidade Routh – Hurwitz

No sistema linearizado (2.7), os autovalores da matriz  $J$  são raízes do polinômio característico, que é obtido a partir do determinante:

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (2.9)$$

onde  $I$  é a matriz de identidade.

O problema de descobrir se todas as raízes de um polinômio têm parte real negativa, sem calcular explicitamente essas raízes, foi solucionado em 1874 por E.J. Routh (1831-1907). Em 1895, A. Hurwitz (1859-1919) encontrou, independentemente, uma solução equivalente.

O polinômio característico de grau  $n$  para os autovalores da matriz  $J$  tem a seguinte forma geral:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.10)$$

O critério de Routh – Hurwitz estabelece as condições necessárias e suficientes para que todas as raízes do polinômio tenham parte real negativa. Essas condições são dadas em termos da matriz de Hurwitz que geralmente é designada como  $H$ .

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \dots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \dots 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \dots 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Se a matriz  $J$  tem a dimensão  $n \times n$ , então  $H$  também é  $n \times n$ .

A matriz  $H$  é construída do seguinte modo:

- Na primeira linha, escrevem-se os coeficientes  $a_j$  com índice ímpar, com  $j$  crescente; na segunda linha, escrevem-se os coeficientes  $a_j$  com  $j$  par, com  $j$  crescente. Note-se que  $a_0$  é o coeficiente de  $\lambda^n$ , que, nesse caso, vale 1. As demais posições são preenchidas com zeros.
- As duas linhas seguintes são obtidas deslocando-se as duas primeiras linhas uma coluna para a direita, e colocando zeros nas posições que ficaram vazias.

- Segue-se esse processo para se construir as demais linhas, até que  $a_n$  ocupe o canto inferior direito.

O critério de Routh – Hurwitz estabelece que  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  para todo  $j = 1, \dots, n$  se são todos positivos os coeficientes  $a_j$ , e se são positivos os determinantes  $\Delta_j$ :

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Observa-se que, como  $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ , a última das condições  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0, \dots$ ,  $\Delta_n > 0$  de Routh-Hurwitz pode substituir-se por  $a_n > 0$ .

Observa-se que das condições de Routh-Hurwitz se deduz que a positividade de todos os coeficientes não é suficiente para que as partes reais de todas as raízes sejam negativas.

Aplicando o teorema de Routh-Hurwitz para os polinômios de segundo, terceiro e quarto graus, temos:

$$a) \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

As condições de Routh-Hurwitz se reduzem  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ .

$$b) \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

As condições de Routh-Hurwitz se reduzem  $a_1 > 0$ ,  $a_1a_2 - a_3 > 0$

$$c) \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

As condições de Routh-Hurwitz se reduzem a:

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0, \quad (a_1a_2 - a_3)a_3 - a_1^2a_4 > 0, \quad a_4 > 0 \quad (2.13)$$

## 2.3 Caos Determinístico

O fulgor determinista do século XVII do Laplace dizia: “Um matemático infinitamente inteligente pode prever com a precisão que desejar o comportamento de um sistema”. No entanto a previsão na análise clássica de alguns sistemas escapava de uma determinação precisa. Em 1903, alguns anos após ter desenvolvido vários estudos a respeito da estabilidade do sistema solar, J.H. Poincaré (1854-1912) escreveu, referindo-se aos seus estudos sobre o problema dos três corpos: “...pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível...”. A conclusão de Poincaré foi que as soluções em série, geralmente utilizadas na busca de soluções para os problemas da época, eram divergentes. Porém, em meados do século XX, A.N. Kolmogorov (1903-1987), V.I. Arnold e J. Moser provaram que a convergência (ou divergência) dessas séries depende da escolha das condições iniciais. Assim, um sistema com três ou mais corpos pode ter movimentos regulares ou caóticos. Esse resultado é uma consequência do teorema KAM, cuja sigla é dedicada às iniciais do nome de seus autores. Em sistemas caóticos os erros nas condições iniciais crescem exponencialmente com o tempo, inviabilizando uma previsão de longo prazo. A resolução de um modelo meteorológico simplificado, realizada através de simulações em computador, resultaram na descoberta do primeiro atrator estranho (termo cunhado por Ruelle e Takens), que caracteriza um sistema caótico. A descoberta de sistemas caóticos afetou o próprio método científico criado por Galileu

para a validação da teoria, pois se o sistema analisado é caótico, previsões de longo prazo são intrinsecamente impossíveis, o que dificulta essa validação. Caos ocorre num sistema determinista quando seu comportamento é aperiódico (irregular) e depende sensivelmente das condições iniciais. A dependência sensível às condições iniciais é calculada através de expoente de Lyapunov, logo este é atualmente o instrumento mais utilizado para a comprovação de caos num sistema dinâmico.

## 2.4 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov também conhecidos como expoentes característicos associados com uma trajetória são essencialmente uma medida de taxas de expansão e contração das trajetórias que a rodeiam [40]. Eles são quantidades assintóticas que descrevem a taxa exponencial com a qual uma perturbação na trajetória do sistema cresce ou decresce com o tempo numa dada região do espaço de fase. Pelo fato de medir a divergência de trajetória no espaço de fase o expoente de Lyapunov quantifica a dependência sensível a condições iniciais. A definição rigorosa é encontrada em [25].

Supõe-se então um fluxo tal como (2.1) e a evolução deste a partir de duas condições iniciais próximas  $x_0$  e  $y_0 = x_0 + \varepsilon$  tal que:

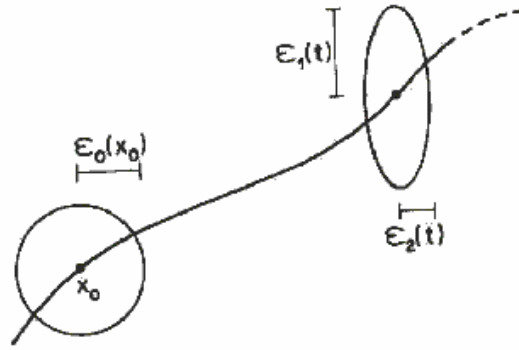
$$|y_0 - x_0| \leq \varepsilon_0(x_0) \quad (2.14)$$

O expoente de Lyapunov mede o crescimento exponencial da perturbação  $\varepsilon_k(t)$  (figura 2.9) e pode ser definido como:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

O elemento de volume esférico de raio  $\varepsilon_0(x_0)$  que evolui em torno de um ponto inicial  $x_0$ , depois de um tempo se torna um elipsóide com eixos  $\varepsilon_1(t)$  e  $\varepsilon_2(t)$  Figura abaixo. De (2.15) é imediato que :

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(x_0) e^{\lambda_i t} \quad (2.16)$$



**Figura 1- Evolução de um volume esférico no espaço de fase**

Um espaço de fases  $m$ -dimensional tem  $m$  expoentes de Lyapunov associados. Conclui-se então que a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas. Além disso, para a existência de uma solução caótica associada a um atrator estranho é necessário pelo menos um expoente  $\lambda_i > 0$  para caracterizar a dependência sensível às condições iniciais. Para movimentos periódicos e quase-periódicos tem-se  $\lambda_i < 0$  nas direções perpendiculares à trajetória e  $\lambda_i = 0$  ao longo dela. Em sistemas dissipativos o somatório dos expoentes de Lyapunov é negativo, pois nesses sistemas há uma diminuição do hiper-(volume no espaço de fases). Conclui-se então a ocorrência de atratores estranhos está condicionada, além da existência de pelo menos um expoente positivo, a  $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$ . A terceira condição de ocorrência de atratores estranhos em espaço de fase é a dimensão do espaço de fase  $m \geq 3$ , pois em espaço bidimensional, a presença de um expoente de Lyapunov positivo tornaria o somatório dos expoentes  $\sum_{i=1}^2 \lambda_i \geq 0$  o que não caracteriza uma contração no espaço de fase.

## 2.5 Bifurcações

Um sistema dinâmico que descreve um sistema mecânico depende de um ou mais parâmetros de controle. A apresentação deste sistema pode, então, ser formulada como função desse parâmetro. Dessa forma a alteração no valor desse parâmetro provoca mudanças no comportamento do sistema. A variação do parâmetro de controle pode acarretar mudanças qualitativas dos estados estacionários. Eles podem passar de estáveis para instáveis. Novos

pontos podem aparecer e outros desaparecer no espaço de fases. Quando o parâmetro de controle atinge um valor crítico o sistema perde a estabilidade estrutural e sofre uma *bifurcação*. O valor crítico do parâmetro de controle é chamado de *ponto de bifurcação*.

O sistema é dito estruturalmente estável quando para perturbação suficientemente pequena ele mantém um fluxo resultante topologicamente equivalente ao inicial. Quando isso não acontece o sistema perde a estabilidade estrutural.

O termo bifurcação é francês e foi introduzido por Poincaré em 1885, referindo a uma mudança qualitativa no espaço de fases. Bifurcações produzidas por um único parâmetro são chamadas de bifurcações de codimensão-um.

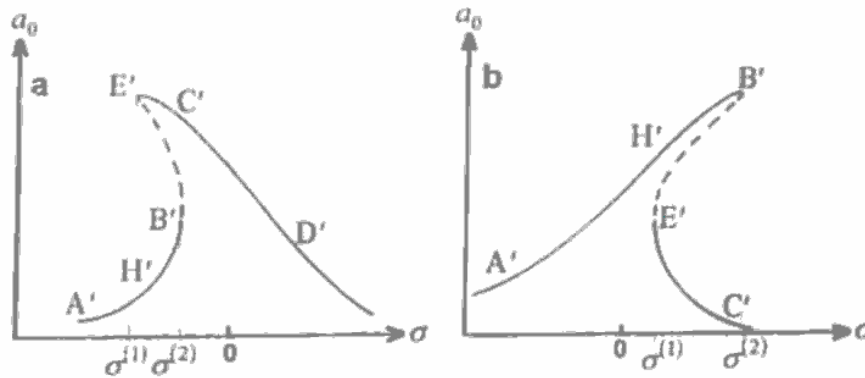
As bifurcações podem ser do tipo *estáticas* e do tipo *dinâmicas*. As estáticas ocorrem em soluções estáticas (pontos fixos). Já as bifurcações dinâmicas ocorrem para pontos fixos e também para soluções periódicas. Entre as bifurcações estáticas encontram-se: *sela-nó*, *transcrítica*, *forquilha (pitchfork)*. Entre as bifurcações dinâmicas estão *sela-nó* ou *dobra cíclica*, *bifurcações de Hopf* e *bifurcação Flip*. As bifurcações dinâmicas estão associadas a espaços de fase  $m$ -dimensionais, onde  $m > 3$ .

Há também os chamados *pontos de retorno (turning points)* que são conhecidos como narizes (*noses*) e joelhos (*knees*). Para uma função  $x^2 - \mu = 0$  há soluções apenas para  $\mu > 0$ . O ponto onde as oscilações começam a existir é o ponto de retorno. Estes pontos aparecem constantemente aos pares provocando o efeito de histerese.

Já outra classificação em [1] classifica as bifurcações em *contínuas* e *descontínuas* ou *catastróficas* dependendo de como o espaço de estados do sistema varia com a variação dos parâmetros. As bifurcações descontínuas ou catastróficas são subdivididas em “perigosas” e “explosivas” dependendo de se o sistema dá um salto a um atrator remoto desconexo ou explode num grande atrator com um subatrator que contém um fantasma (*phantom*) do atrator original.

A ferramenta geralmente utilizada para analisar as características das soluções do equilíbrio de um sistema sob a variação de um intervalo de parâmetro de controle é o diagrama de bifurcação.

Um dos diagramas de bifurcação é o conhecido diagrama de resposta em frequência que mostra a variação de amplitude em função da frequência do sistema, como na figura abaixo:



**Figura 2-Diagrama de bifurcação de resposta em frequência**

Quando o parâmetro de controle  $k$  gradualmente aumentado até atingir o valor crítico, o segmento  $A'H'B'$  evolui continuamente até  $B'$  onde há o salto para segmento estável  $E'C'D'$ . Quando ocorre o inverso, o sistema parte do ponto  $D'$  e o parâmetro de controle  $k$  é gradualmente decrementado, o sistema salta do ponto  $E'$  para o ponto  $H'$ . Então o salto, chamado de bifurcação sela-nó, é uma bifurcação descontínua catastrófica. Para valores  $D'$   $k < k_1$  ou  $k > k_2$  há apenas um ponto fixo estável que atrai a evolução da dinâmica do sistema. No entanto, no intervalo  $k_1 < k < k_2$  dois segmentos estáveis coexistem além de um segmento instável (intervalo  $B'E'$ ), por isso esse é um intervalo de *biestabilidade*. Nesse intervalo de  $k$  o sistema pode evoluir ou para o segmento  $A'H'D'$  ou para o  $E'C'D'$  quando  $t \rightarrow \infty$ , dependendo da condição inicial [40].

## 2.6 Definição de Sistemas dinâmicos não ideais

Uma das classificações das fontes de energia, e a que nos interessa, é aquela que divide as fontes de energia em ideais e não –ideais. Criteriosamente essa classificação leva em conta a os efeitos experimentados por um acoplamento ou não do sistema vibrante e do motor atuante no sistema. Por isso, as fontes de energia ideais são aquelas nas quais esse acoplamento não é considerado e, portanto a análise do sistema é simplificada significativamente. Já uma fonte de energia não-ideal é aquela que segundo o Kononenko “que age sobre o sistema dinâmico e ao mesmo tempo experimenta uma ação recíproca do sistema ” [30] .



Esse acoplamento se manifesta na relação, existente nesse tipo de sistema, entre a frequência do motor e a amplitude do sistema vibrante que é possível visualizar, não somente nas equações de movimento, mas aplicando um método assintótico e obtendo a solução aproximada em forma analítica.

Uma fonte de energia não-ideal está associada a sistemas de potência limitada, ou seja, aqueles sistemas em que a carga do sistema não é desprezível frente a potência do motor. Especialmente, quanto mais limitada é a potência mais intensa é a influência da característica do motor no movimento oscilatório do sistema.

A formulação de um sistema dinâmico com fonte de energia não ideal deve incluir mais um termo (ou equação) que expressa essa dependência no sistema, com coordenadas  $x$  e  $\phi$  da fonte e as coordenadas do sistema. Pode também incluir um termo  $Q$  nas equações do sistema que representa o acoplamento desse com a fonte não-ideal e considera os termos não-lineares que geralmente são desprezados na formulação tradicional. Portanto é possível representar o movimento de um sistema dinâmico de  $n$  graus de liberdade excitado por uma fonte de energia não-ideal por:

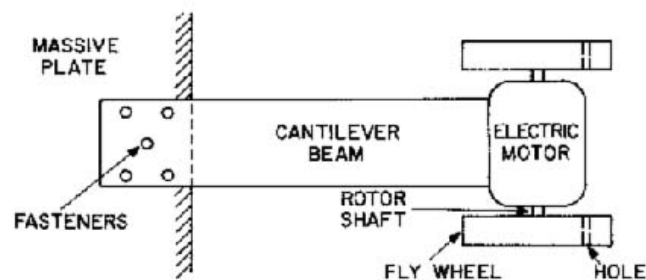
$$\begin{aligned} & (m_{i1}\ddot{x}_1 + \beta_{i1}\dot{x}_1 + c_{i1}x_1) + (m_{i2}\ddot{x}_2 + \beta_{i2}\dot{x}_2 + c_{i2}x_2) + \dots + (m_{in}\ddot{x}_n + \beta_{in}\dot{x}_n + c_{in}x_n) = \\ & = Q_i(\phi, \dot{\phi}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \\ & I\ddot{\phi} + H(\phi, \dot{\phi}) - L(\phi, \dot{\phi}) = R(\phi, \dot{\phi}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nota-se que a representação de um sistema não-ideal resulta num sistema autônomo pois não é explicitamente dependente do tempo.

Essa relação intrínseca do sistema vibratório com a sua fonte de energia torna a dinâmica desse sistema bastante complexa com a ocorrência de alguns fenômenos, principalmente perto da região da ressonância, como, por exemplo, o aumento da potência exigido pela fonte, o fenômeno do salto e caos. Os dois primeiros são manifestações de um efeito descoberto por Sommerfeld [47] e portanto denominado, em sua homenagem, de Efeito Sommerfeld. Já a ocorrência do caos nos sistemas não-ideais está associada, tanto a presença de termos não-lineares, quanto a presença

de pontos de bifurcação e surgimento de regiões de instabilidade e regimes não-estacionários na região da ressonância. Por isso, a suma importância de se estudar o sistema nessa região.

Sommerfeld foi o precursor da teoria de sistemas dinâmicos não-ideais, quando em um experimento observou que a velocidade do motor não dependia apenas do tempo, mas também da amplitude de oscilação do sistema. Um experimento um pouco mais recente foi realizado por Kononenko e Korablev (1959) [31] com uma viga engastada, excitada por um rotor que gira duas massas desbalanceadas em sua extremidade, cujo esquema é apresentado na figura abaixo.

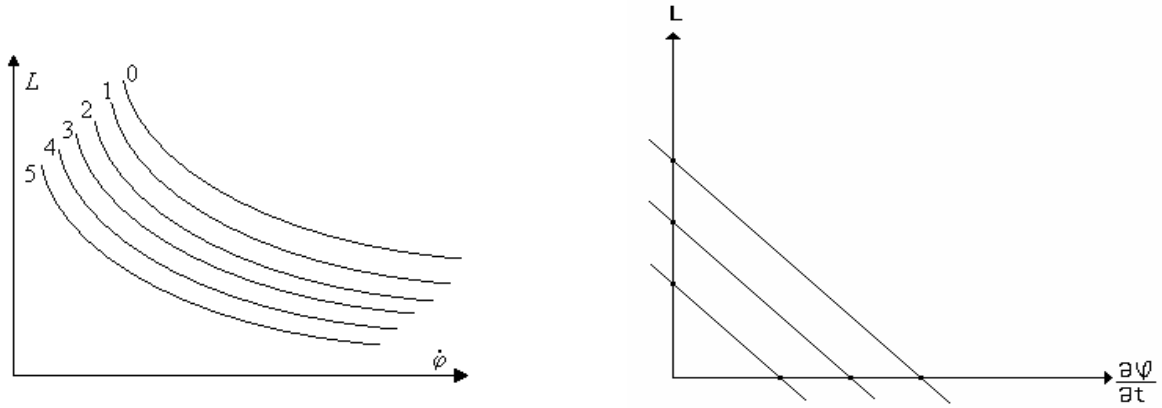


**Figura 3- Aparato do experimento de Kononenko e Korablev**

Já a ocorrência do caos nos sistemas não-ideais está associada, tanto a presença de termos não-lineares, quanto à presença de pontos de bifurcação e surgimento de regiões de instabilidade e regimes não-estacionários na região da ressonância. Por isso a suma importância de se estudar o sistema nessa região

## **2.7 Características da Fonte de Energia**

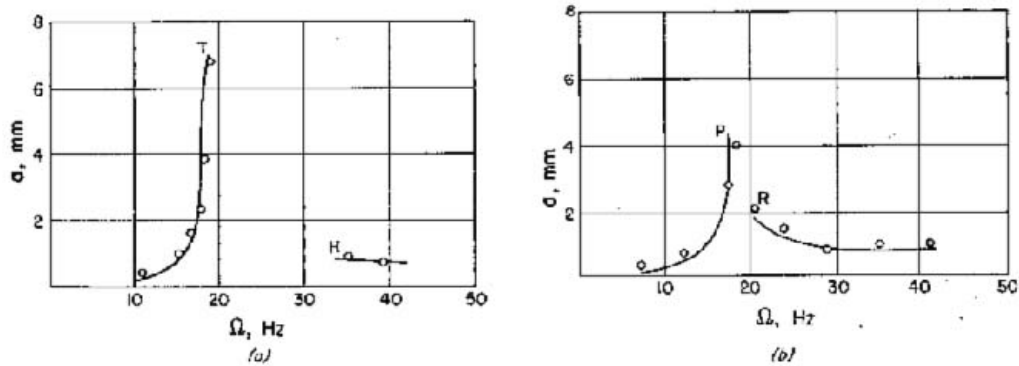
A característica de uma fonte de energia é a relação entre os seus parâmetros. Ela está ligada à representação das propriedades essenciais da fonte. Para um motor elétrico a característica descreve os processos de um circuito elétrico, para um motor a vapor contam os processos termodinâmicos, para baterias e acumuladores leva-se em conta os processos eletroquímicos. Por isso, para cada uma dessas fontes há parâmetros convenientes para sua representação: para um motor elétrico os parâmetros convenientes são a voltagem e a corrente, para uma fonte mecânica seria o torque e a velocidade angular, ou força e velocidade linear. Por isso, a relação entre os parâmetros escolhidos para a representação da fonte de energia é dada como o atributo mais importante dessa fonte e é denominada de curva característica.



**Figura 4:** Figuras esquemáticas das curvas características a-) exponencial  $ae^{-b\phi}$ , b-) linear  $a - b\phi$

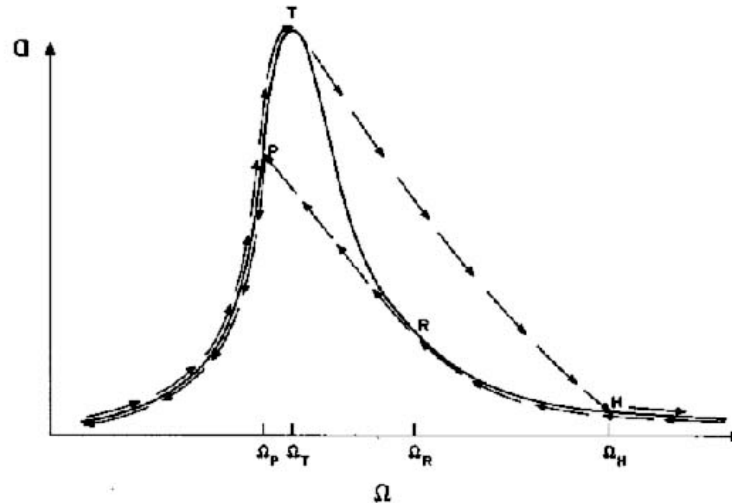
Do ponto de vista prático, as curvas características podem ser obtidas experimentalmente para determinadas fontes de energia.

Para o sistema mecânico estudado nesse trabalho se utilizará a fonte de energia que relaciona o torque líquido com a velocidade de rotação do motor  $\frac{d\phi}{dt}$ . Um atributo importante nesse sentido é o gradiente da curva característica  $N = \frac{dL}{d\phi}$ . Aquelas fontes cujo gradiente é pequeno são chamadas de fontes suaves (*soft energy sources*), já as que têm o gradiente grande são denominadas fontes rígidas (*hard energy sources*). Assim, quanto maior o valor de N, maior é a sua inclinação, podendo chegar a uma posição muito íngreme (praticamente vertical), caracterizando o sistema ideal. O tipo de fonte determina a área de instabilidade na curva de resposta em frequência e é especialmente significativa nos sistemas que apresentam não linearidades cúbicas nas suas equações de movimento devido a forças restauradoras não-lineares.



**Figura 5- Respostas em frequência do experimento de Kononenko e Korablev a)  $\Omega$  crescente b)  $\Omega$  decrescente**

A Figura 5 mostra a amplitude em função da frequência obtida para o experimento de Kononenko e Korablev -. Os pequenos círculos mostrados na figura foram obtidos fazendo com que o rotor atingisse um estado de equilíbrio para o qual o parâmetro de controle é fixo, ou seja, a amplitude da resposta ao estado de equilíbrio foi medida. A curva sólida corresponde à resposta teórica obtida para o mesmo sistema. A figura da esquerda mostra esses resultados para  $\Omega$  crescente, enquanto a figura da direita mostra os mesmos resultados para  $\Omega$  decrescente. Pode-se observar certos intervalos em que não existem respostas ao estado de equilíbrio. Além disso, o tamanho desse intervalo muda para os valores de  $\Omega$  crescente ou decrescente. Este fenômeno, encontrado em sistemas não ideais, é denominado fenômeno do salto ("jump"). As curvas características influenciam o salto na medida em que conduzem a resposta do sistema ao próximo ponto estável da curva.



**Figura 6- Curva de comparação da resposta em frequência para sistemas ideais(linha cheia ) e não ideais (setas)**

A Figura 6 mostra a curva de resposta em frequência típica de um sistema linear ideal. Os pontos P, R, T e H correspondem aos pontos da figura 2.13. As setas indicam o sentido de variação do parâmetro de controle em um sistema não ideal. Observa-se que o sistema não ideal não possui resposta entre as frequências -T e -H quando a frequência é crescente, o que não acontece com o sistema ideal. Por outro lado, quando a frequência é decrescente o sistema não tem respostas para o intervalo de frequências -R e -P.

Observa-se que do lado esquerdo do pico de ressonância, a potência inserida ao sistema é inicialmente pequena. Variando suavemente esta potência, a frequência e a amplitude da curva de ressonância sofrem um aumento considerável. Por outro lado, a partir do ponto P a potência inserida ao sistema é bem maior, no entanto a frequência sofre uma pequena variação (de -P a -T). Ou seja, um aumento relativamente grande da potência provoca um aumento considerável na amplitude mas quase não altera a frequência. Para o ponto T a característica do movimento muda. Um crescimento na potência inserida faz a amplitude decrescer consideravelmente e a frequência crescer também de forma considerável. Este fenômeno é conhecido como efeito Sommerfeld.

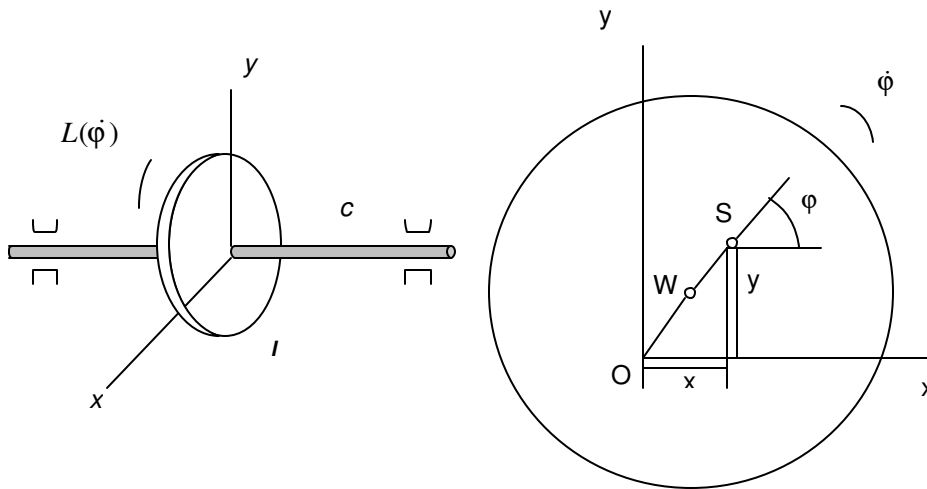
## Capítulo 3

### Solução Analítica Aproximada

O comportamento dinâmico de sistemas não lineares, por vezes, não é possível ser determinado de forma exata. Assim, uma das alternativas é a utilização de métodos de perturbação para a obtenção de uma solução analítica aproximada para o sistema dinâmico. Essas técnicas consistem basicamente em conhecer completamente as soluções de um dado sistema homogêneo e analisar pequenas perturbações próximas a elas. A solução analítica aproximada é também, confortável para a análise de estabilidade local do sistema através do critério Routh-Hurwitz (descrito no item 2.2). Neste capítulo é apresentado o sistema dinâmico estudado, derivadas as equações de movimento e desenvolvida uma solução baseada num método clássica de perturbação, o método da média, conforme se encontra em [30]. Além disso, é apresentado um estudo de estabilidade segundo o critério R-H.

#### 3.1 Apresentação do sistema

O sistema mecânico estudado nesse trabalho é um rotor que consiste de um disco de massa  $m$  e momento de inércia  $I$ , uma barra elástica com massa desprezível apoiada em dois suportes. O disco está fixo exatamente no ponto médio da barra, chamado de  $W$ .



**Figura 7-O modelo físico do rotor**

O centro de massa é o ponto  $S$  e está deslocado por um pequeno desbalanceamento ( $\rho$ ) relativo ao ponto de fixação  $W$ . A barra possui uma rigidez  $c$ , que é a mesma em todas direções radiais. Para simplificar o problema considera-se que o torque é diretamente aplicado ao disco sem considerar os efeitos torcionais. O rotor se desloca na direção de  $x$  e  $y$ , com o sistema de coordenadas tendo origem em  $O$ , ponto que coincide com o centro de movimento do eixo ao ser deformado. A coordenada  $\phi$  descreve o ângulo referente a rotação do disco e conseqüentemente o disco gira com velocidade  $\dot{\phi}$ . Nesse sistema deve ser considerado o torque líquido  $L(\dot{\phi})$ , o torque da força que resiste ao movimento, chamado daqui em diante de torque resistivo e a força de fricção aplicada ao ponto  $S$ . A distância entre os pontos  $O$  e  $W$  é  $r$ , e  $s$  a distância entre  $O$  e o centro de massa  $S$ .

### 3.2 Equações de Movimento

Para derivar as equações de movimento inicialmente considera-se o sistema sem a existência das forças de amortecimento, a fim de simplificar a análise inicial. Calculam-se as energias cinética e potencial do sistema e as suas derivadas parciais e após é aplicada a formulação de Lagrange para cada direção das coordenadas do sistema. Obtêm-se, então, as três equações sem a consideração da ação do amortecimento. Após isso, introduz-se a formulação das forças não conservativas de amortecimento e obtêm-se as equações de movimento do sistema.

Portanto para o primeiro momento calcula-se a distância entre os pontos  $O$  e  $W$ :

$$|OW|^2 = r^2 = (x - \rho \cos \varphi)^2 + (y - \rho \sin \varphi)^2 \quad (3.1)$$

E a velocidade do ponto S é dada por :

$$V_s^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (3.2)$$

Calculando a energia cinética :

$$T = \frac{1}{2} I_s \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m V_s^2 \quad (3.3)$$

O momento de inércia em S é igual ao momento de inércia em W mais o termo  $m\rho^2$  então substituído (3.2) em (3.3) a expressão da energia cinética se torna :

$$T = \frac{1}{2} (I_w + m\rho^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (3.4)$$

Calculando a energia potencial temos:

$$V = \frac{1}{2} cr^2 + mgs \sin \varphi \quad (3.5)$$

Mas  $r$  é dado pela distância entre os pontos O e W, portanto por (3.1), substituindo em (3.5) temos:

$$V = \frac{1}{2} c [(x - \rho \cos \varphi)^2 + (y - \rho \sin \varphi)^2] + mgs \sin \varphi \quad (3.6)$$

Então se aplica a equação de Lagrange para obter as equações de movimento. Primeiramente calculando na direção x temos a seguinte expressão para a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$



As derivadas parciais da Energia Cinética e Potencial nas direções do deslocamento  $x$  de da velocidade  $\dot{x}$  são:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = c(x - \rho \cos \varphi) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

As derivadas parciais da Energia Cinética e Potencial nas direções do deslocamento  $y$  de da velocidade  $\dot{y}$  :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = c(y - \rho \sin \varphi) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (3.9)$$

O mesmo processo na direção da coordenada  $\varphi$  :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (I_w + m\rho^2)\dot{\varphi} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (I_w + m\rho^2)\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = c(x - \rho \sin \varphi)\rho \sin \varphi + c(y - \rho \cos \varphi)(-\rho \cos \varphi) - mg \cos \varphi \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

A formulação de Lagrange, nessa direção deve levar em conta as forças não conservativas do torque, representadas por  $M(\varphi)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = M(\varphi) \quad (3.11)$$

Substituindo as expressões (3.10) em (3.11) temos:

$$(I_w + m\rho^2)\ddot{\varphi} = M(\varphi) - c\rho(x \sin \varphi - y \cos \varphi) - mg\rho \cos \varphi + \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (3.12)$$

Mas o quinto e o sexto termo do lado direito se cancelam e o quarto termo tende a zero. Então temos a terceira equação de movimento do sistema na direção  $\varphi$  :

$$(I_w + m\rho^2)\ddot{\varphi} = M(\varphi) - c\rho(x\sin\varphi - y\cos\varphi) \quad (3.13)$$

Onde  $M(\varphi) = L(\dot{\varphi}) - Q(\varphi)$ , que é o torque resultante entre o torque  $L(\dot{\varphi})$  fornecido pela fonte de energia ao sistema e o torque  $Q(\varphi)$ , torque resistivo ao movimento.

O sistema, sem a ação do amortecimento é:

$$m\ddot{x} + cx = c\rho \cos\varphi$$

$$m\ddot{y} + cy = c\rho \sin\varphi \quad (3.14)$$

$$(I_w + m\rho^2)\ddot{\varphi} = M(\varphi) - c\rho(x\sin\varphi - y\cos\varphi)$$

A ação do amortecimento é considerada como ação de forças friccionais na forma simplificada e retirada de [15]. Por isso o termo que representa a ação de forças externas de amortecimento é proporcional à velocidade do centro de massa S. Temos então os termos para esse amortecimento na direção x e y respectivamente:  $\chi\dot{x}$ ,  $\chi\dot{y}$ . Já a ação de forças de amortecimento internas é proporcional a velocidade de deformação da barra de sustentação. Os termos que representam essas forças são, nas direções x e y, respectivamente:  $k(\dot{x} + \dot{\varphi}y)$ ,  $k(\dot{y} + \dot{\varphi}x)$ . Adicionando esses termos no sistema (3.15) temos o sistema equações que representa o problema estudado, com a ação do amortecimento:

$$m\ddot{x} + cx = c\rho \cos\varphi - k(\dot{x} + \dot{\varphi}y) - \chi\dot{x}$$

$$m\ddot{y} + cy = c\rho \sin\varphi - k(\dot{y} + \dot{\varphi}x) - \chi\dot{y} \quad (3.15)$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi) - c\rho(x\sin\varphi - y\cos\varphi) - k(\dot{x}y - \dot{y}x) - k\dot{\varphi}(x^2 + y^2)$$

### 3.3 Solução analítica aproximada

#### 3.3.1 O método da média

A solução analítica aproximada é realizada pelo método originalmente criado por Krylov e Bogoliubov, o método da média. Ele é um dos métodos que podem ser utilizados para obter uma solução analítica aproximada de equações diferenciais. É um método de Perturbação que consiste em considerar certas quantidades como funções que variam suavemente no tempo. Para isso é introduzido um pequeno parâmetro positivo e o sistema de equações diferenciais é reduzido à forma normal [18]:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2(\varepsilon t) q_i = \varepsilon f(\varphi, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

onde  $q_i$  são as coordenadas normais e  $\varepsilon t$  a variação suave do tempo e  $\omega_i^2(\varepsilon t) = \frac{c_i(\varepsilon t)}{m_i(\varepsilon t)}$  são as frequências naturais instantâneas do sistema linear, do sistema quando é considerado  $\varepsilon = 0$ . Quando as quantidades  $c_i(\varepsilon t)$ ,  $m_i(\varepsilon t)$  independem do tempo, são constantes, então as frequências  $\omega_i^2(\varepsilon t)$  são as frequências naturais do sistema.

As funções  $\varepsilon f_i$  são chamadas funções ou forças perturbativas contendo termos que representam a dissipação de energia, termos não lineares e a excitação externa. A presença de  $\varepsilon$  neste termo indica uma pequena contribuição de  $f_i$  e portanto, sistemas dinâmicos apresentados na forma (3.16) são denominados sistemas fracamente não lineares. Além disso,  $f_i$  são funções periódicas com período  $2\pi$ . Para sistemas não ideais, as excitações externas são funções do deslocamento angular  $\varphi(t)$  e de  $D(\varepsilon t) \cos(\varphi t)$ , sendo  $\dot{\varphi}(t) = \omega$  a frequência de excitação e  $D(\varepsilon t)$  frequências e amplitudes dependentes do tempo.

Fazendo  $\varepsilon = 0$  e substituindo em (3.16) temos:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2(\varepsilon t) q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

que equivalem as equações não perturbadas correspondentes ao sistema (3.16) e cujas soluções são harmônicos do ângulo de fase  $\psi_i = \varphi + \beta_i$ :

$$q_i = a_i \cos \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

Para o sistema perturbado, as equações (3.16) podem ser reescritas na seguinte forma assintótica:

$$q_i = a_i(\varepsilon t) \cos \psi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j (\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

O primeiro passo para obter uma solução analítica para o sistema dinâmico (3.18) através do método da média é utilizar o método de variação de parâmetros para transformar as variáveis dependentes  $q_i$  em novas variáveis dependentes  $a_i$  e  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Como (3.16) e (3.18) constituem  $2n$  equações para  $3n$  variáveis, impõe-se condições adicionais.

$$\dot{q}_i = -\omega_i a_i \sin \psi_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

requerendo que a velocidade da coordenada  $q$  do sistema perturbado (3.16) tenha a mesma forma que para o caso não perturbado.

Substituindo as equações (3.18) nas (3.16) efetua-se uma mudança de variáveis  $q \rightarrow z$  com  $q = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_n]^T$  e  $z = [a_1 \beta_1 \quad a_2 \beta_2 \quad \dots \quad a_n \beta_n]^T$ , cujas equações diferenciais são na forma de :

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j G_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \sin \psi_i \\ \alpha_i \dot{\beta}_i &= (\omega_i - \omega)(\varepsilon t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \cos \psi_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.21)$$

O sistema (3.21) acrescido da equação  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  representa o sistema (3.16) em novas coordenadas. As funções periódicas  $G_{ij}$  e  $T_{ij}$  variam suavemente no tempo. Em geral, restringe-se

a solução a  $m$ -ésima aproximação, ou seja, as somas infinitas que aparecem nas três últimas equações, são substituídas por somas finitas de 1 até  $m$ . Supondo que a solução das equações (3.21) para  $m = 1$  são do tipo  $z = y + \varepsilon \omega(y, t, \varepsilon)$  ou seja :

$$\begin{aligned} a_i &= A_i + \varepsilon U_i(\varphi, A_1, \dots, A_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad i=1, 2, \dots, n/2 \\ \beta_i &= \xi_i + \varepsilon V_i(\varphi, A_1, \dots, A_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad i=1, 2, \dots, n/2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Quando  $U$  e  $V$  são funções que variam suavemente no tempo, pode se obter uma primeira aproximação para as equações (3.22) determinando  $A_i$  e  $\xi_i$  através de equações médias  $\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y)$  de (3.21), através da substituição de variáveis, basta que existam as integrais:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j G n_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \xi_1, \dots, \xi_n) d\varphi, i = 1, 2, \dots, n; \\ \alpha_i \dot{\xi}_i &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \varepsilon \sigma_i a_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T n_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \right] d\varphi, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para encontrar os estados estacionários as equações médias obtidas devem ser igualadas a zero e então obtém-se as expressões de  $A_i$  e  $\xi_i$  para o estado estacionário. Esta solução estacionária é constante e equivalente à solução de equilíbrio das equações médias. Por isso é possível fazer o estudo de estabilidade desses estados estacionários a partir de autovalores da matriz jacobiana do sistema médio linearizado e aplicar o critério de Routh-Hurwitz. Para chegar a solução de (3.16) em termos de amplitude e fase retorna-se as variáveis originais  $q_i$ . Para obter a solução assintótica é preciso encontrar os funcionais  $U_i$  e  $V_i$

### 3.3.2 Solução Analítica para o Sistema do Rotor Não Ideal

Para aplicação do método da média considera-se que as forças de desbalanceamento do rotor e as forças de amortecimento são pequenas

$$\rho^* = \varepsilon \rho, \quad k^* = \varepsilon k \quad (3.24)$$

Também considera-se que a velocidade angular  $\dot{\phi}$  varia suavemente no tempo e por isso a expressão do torque também se torna de ordem  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon M = [L(\dot{\phi}) - q\dot{\phi}] \quad (3.25)$$

onde  $\varepsilon$  é um pequeno parâmetro.

O sistema decompõe-se então em 3 equações independentes. Duas dessas equações são:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cujas frequências naturais são idênticas e iguais a  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$  . As soluções são dadas por:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 \cos \omega t + D_1 \sin \omega t \\ y_0 &= C_2 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ou em forma mais compacta, através da substituição  $z_0 = x_0 + iy_0$  :

$$z_0 = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (3.28)$$

Essa expressão, segundo o Kononenko [30] , pode ser utilizada como base para o movimento do sistema pois a expressão (3.28) e o sistema (3.15) diferem entre si pela presença de pequenos termos de ordem  $\varepsilon$  .

Então a solução do sistema (3.15), para coordenadas  $x$  e  $y$  pode ser dada por :

$$z = A \cos \varphi + B \sin \varphi \quad (3.29)$$

$$\dot{z} = -A\omega \sin \varphi + B\omega \cos \varphi$$

onde,  $z = x + iy$  e  $i = \sqrt{-1}$ . A expressão acima é usada basicamente para expressar as coordenadas  $x$  e  $y$  e suas respectivas velocidades em termos de quantidades complexas  $A$  e  $B$  e seus conjugados  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ . Assim  $A$  e  $B$  são determinados como funções desconhecidas no tempo.

Como a velocidade angular  $\dot{\varphi}$  varia pouco no tempo é interessante a substituição abaixo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Theta \quad (3.30)$$

Após isso, assume-se que a diferença entre a frequência de rotação  $\Omega$  do sistema e a frequência natural  $\omega$  é muito pequena para não dizer ínfima, como acontece na região da ressonância, assim a análise será confinada a essa estreita região condicionada ao parâmetro  $\epsilon$  que também é chamado de *detuning frequency*. :

$$\omega - \Theta = \epsilon a_0 \quad (3.31)$$

Realizadas as transformações mencionadas acima, o sistema (3.15) torna-se :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \epsilon a_0 B - \frac{\epsilon}{m\omega} \left[ (k + \chi)(A\omega \sin \varphi - B \cos \varphi) + ik\Theta(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + c\rho e^{i\varphi} \right] \sin \varphi \\ \frac{dB}{dt} &= -\epsilon a_0 A - \frac{\epsilon}{m\omega} \left[ (k + \chi)(A\omega \sin \varphi - B \cos \varphi) + ik\Theta(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + c\rho e^{i\varphi} \right] \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\epsilon}{I} \left\{ M(\Theta) - \frac{i}{2} k\omega(\bar{A}B - A\bar{B}) - k\Theta \left[ A\bar{A} \cos^2 \varphi + B\bar{B} \sin^2 \varphi + (B\bar{A} + A\bar{B}) \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] \right\}$$

Procura-se a solução para (3.32) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + \epsilon U_1(t, A_1, B_1, \Omega) \\ B &= B_1 + \epsilon U_2(t, A_1, B_1, \Omega) \\ \Theta &= B\Omega + \epsilon U_3(t, A_1, B_1, \Omega) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Os termos  $A_1, B_1$  e  $\Omega$ , que são a solução principal, são obtidos da primeira aproximação, na qual não se considera as funções  $U_i$  de ordem  $\varepsilon$ . Os demais termos são obtidos pelo mesmo processo da média, como na primeira aproximação. A primeira aproximação consiste em executar a média das equações (3.32) em relação de  $\varphi$ , que é realizado através das equações abaixo, obtidas pela substituição dos valores de (3.33) nas equações (3.32):

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ a_0 B_1 - \frac{1}{m\omega} [(k + \chi)(A_1 \omega \sin \varphi - B_1 \omega \cos \varphi) + ikB_1 \Omega (A_1 \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + B_1 \sin \varphi) + c\rho e^{i\varphi}] \sin \varphi \right\} d\varphi \\ \frac{dB_1}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -a_0 A_1 - \frac{1}{m\omega} [(k + \chi)(A_1 \omega \sin \varphi - B_1 \omega \cos \varphi) + ikB_1 \Omega (A_1 \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + B_1 \sin \varphi) + c\rho e^{i\varphi}] \cos \varphi \right\} d\varphi\end{aligned}\tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi I} \int_0^{2\pi} \left\{ M(\Omega) - \frac{i}{2} k\omega (\bar{A}_1 B_1 - A_1 \bar{B}_1) - \frac{k\Omega}{2} [A_1 \bar{A}_1 \cos^2 \varphi + B_1 \bar{B}_1 \sin^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + (B_1 \bar{A}_1 + A_1 \bar{B}_1) \frac{1}{2} \sin 2\varphi] - \frac{c\rho}{4} [t(A_1 - \bar{A}_1) + (B_1 + \bar{B}_1) + i(A_1 + iB_1)e^{-2i\varphi} - i(\bar{A}_1 - i\bar{B}_1)e^{2i\varphi}] \right\} d\varphi\end{aligned}$$

Realizar a média do sistema em relação a  $\varphi$  significa o mesmo que a média em relação a  $t$  pois para essa aproximação  $\varphi = \Omega t$  e  $\Omega$  é considerado constante durante o período considerado.

Realizada a integração, temos o resultado:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= \varepsilon a B_1 - \frac{\varepsilon}{2m\omega} [(k + \chi)\omega A_1 + ik\Omega B_1 + icp] \\ \frac{dB_1}{dt} &= -\varepsilon a A_1 - \frac{\varepsilon}{2m\omega} [(k + \chi)\omega B_1 + ik\Omega A_1 - cp] \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\varepsilon}{I} \left\{ M(\Omega) - \frac{i}{2} k\omega (\bar{A} B - A \bar{B}) - \frac{k\Omega}{2} (A_1 \bar{A}_1 + B_1 \bar{B}_1) - \frac{c\rho}{4} [i(A - \bar{A}) + (B + \bar{B})] \right\}\end{aligned}\tag{3.35}$$



Esse sistema é também chamado de sistema de equações médias, a partir dos quais são obtidos os resultados finais para  $A_1, B_1$  e  $\Omega$ , tanto no estado estacionário quanto no não estacionário. No estado estacionário temos:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= 0 \\ \frac{dB_1}{dt} &= 0 \\ \frac{d\Omega}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{3.36}$$

Substituindo (3.36) em (3.35) procuramos a solução nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}2\omega m \varepsilon a B_1 - \frac{\varepsilon}{2m\omega} [(k + \chi)\omega A_1 + ik\Omega B_1 + icp] &= 0 \\ 2\omega m \varepsilon a A_1 - \frac{\varepsilon}{2m\omega} [(k + \chi)\omega B_1 + ik\Omega A_1 + icp] &= 0\end{aligned}\tag{3.37}$$

$$M(\Omega) + \frac{i}{2}k\omega(\bar{A}B - A\bar{B}) - \frac{k\Omega}{2}(A_1\bar{A}_1 + B_1\bar{B}_1) - \frac{cp}{4}[i(A_1 - \bar{A}_1) + B_1 + \bar{B}_1] = 0$$

Das primeiras duas equações temos:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{cp \{m(\omega^2 - \Omega^2) - i[(k + \chi)\omega - k\Omega]\}}{m^2(\omega^2 - \Omega^2)^2 + [(k + \chi)\omega - k\Omega]^2} \\ B_1 &= \frac{cp \{(k + \chi)\omega - k\Omega - im(\omega^2 - \Omega^2)\}}{m^2(\omega^2 - \Omega^2)^2 + [(k + \chi)\omega - k\Omega]^2}\end{aligned}\tag{3.38}$$

Podemos representar as expressões complexas (3.38) como :

$$A_1 = A_{11} + iA_{12}\tag{3.39}$$

$$B_1 = B_{11} + iB_{12}$$

Para escrever a solução em termos de coordenadas de amplitude e fase utilizamos a transformação para reverter a solução a coordenadas originais:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\varphi + \xi) \\ y &= a \sin(\varphi + \xi) \end{aligned} \quad (3.40)$$

A solução final para amplitude é:

$$a = \omega^2 \rho \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (3.41)$$

$$\text{onde : } h = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + [(k + \chi)\frac{\omega}{m} - k\frac{\Omega}{m}]^2$$

A expressão para coordenada de fase é:

$$\cos \xi = \frac{A_{11}}{\sqrt{A_{11}^2 + B_{11}^2}}, \quad \sin \xi = -\frac{B_{11}}{\sqrt{A_{11}^2 + B_{11}^2}} \quad (3.42)$$

Eliminando A e B da terceira equação do sistema (3.37) através da substituição de (3.38) e (3.39), teremos a expressão para a coordenada de rotação:

$$L(\Omega) - q\Omega - \chi \omega a^2 = 0 \quad (3.43)$$

### 3.4 Estudo da Estabilidade

Utilizamos a transformação  $B_1 = iA_1$  para considerar apenas a parte real das equações (3.37), obtemos então o seguinte sistema:

$$\frac{dA_{11}}{dt} = -\varepsilon a A_{12} + \frac{\varepsilon}{2m\omega} [-(k + \chi)\omega + k\Omega] A_{11}$$

$$\frac{dA_{12}}{dt} = \varepsilon a A_{11} + \frac{\varepsilon}{2m\omega} [-(k + \chi)\omega + k\Omega] - \frac{c\rho}{2m\omega} \quad (3.44)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\varepsilon}{I} \left\{ M(\Omega) + k(\omega - \Omega)(A_{12}^2 + A_{11}^2) + c\rho A_{12} \right\}$$

Na forma abreviada:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \varepsilon \Phi_1(\Omega, A_{11}, A_{12})$$

$$\frac{dA_{11}}{dt} = \varepsilon \Phi_2(\Omega, A_{11}, A_{12}) \quad (3.45)$$

$$\frac{dA_{12}}{dt} = \varepsilon \Phi_3(\Omega, A_{11}, A_{12})$$

Onde  $\Phi_1, \Phi_2$  e  $\Phi_3$  são os lados direitos das equações (3.44)

Perturba-se os valores de  $\Omega, \xi$  e de  $a$  da solução (3.41), (3.42) e (3.43):

$$\Omega = \Omega_c + \Omega_1$$

$$a = a_c + a_1 \quad (3.46)$$

$$\xi = \xi_c + \xi_1$$

Onde  $\Omega_c, a_c$  e  $\xi_c$  são os valores da solução para o estado estacionário.

Substituindo nas equações (3.41), expandindo em série e retendo os termos lineares tem-se:

$$\frac{d\Omega}{dt} = b_{11}\Omega + b_{12}A_{11} + b_{13}A_{12}$$

$$\frac{dA_{11}}{dt} = b_{21}\Omega + b_{22}A_{11} + b_{23}A_{12} \quad (3.47)$$

$$\frac{dA_{12}}{dt} = b_{31}\Omega + b_{32}A_{11} + b_{33}A_{12}$$

Monta-se a matriz Jacobiana cujos elementos são os coeficientes  $b_n$  dados pelas derivadas parciais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_1(\Omega, a, \xi) & \frac{\partial}{\partial a} \Phi_1(\Omega, a, \xi) & \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_1(\Omega, a, \xi) \\ \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_2(\Omega, a, \xi) & \frac{\partial}{\partial a} \Phi_2(\Omega, a, \xi) & \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_2(\Omega, a, \xi) \\ \frac{\partial}{\partial \Omega} \Phi_3(\Omega, a, \xi) & \frac{\partial}{\partial a} \Phi_3(\Omega, a, \xi) & \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_3(\Omega, a, \xi) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Calculando as derivadas parciais temos os seguintes valores dos coeficientes:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{I} [N(\Omega) - k(A_{11}^2 + A_{12}^2)] & b_{23} &= -a \\ b_{12} &= \frac{2k}{I} a A_{11} & b_{31} &= \frac{k}{2m\omega} A_{12} - A_{11} \\ b_{13} &= \frac{1}{I} [2ka(A_{12} + c\rho)] & b_{32} &= a \\ b_{21} &= A_{12} + \frac{k}{2\omega m} A_{11} & b_{33} &= -\frac{1}{2m\omega} [(k + \chi)\omega - k\Omega] \\ b_{22} &= -\frac{1}{2m\omega} [(k + \chi)\omega - k\Omega] & N(\Omega) &= \frac{d}{d\Omega} [L(\Omega) - q\Omega] \end{aligned} \quad (3.49)$$

A equação característica do sistema é:

$$\lambda^3 + B_1\lambda^2 + B_2\lambda + B_3 = 0 \quad (3.50)$$

A condição necessária e suficiente para a estabilidade local do sistema no estado estacionário – critério Routh-Hurwitz é:

$$B_1 > 0, \quad B_1 B_2 - B_3 > 0, \quad B_3 > 0 \quad (3.51)$$

Os valores  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  são determinados da relação:

$$B_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$$

$$B_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{32}b_{23} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31} \quad (3.52)$$

$$B_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}$$

Substituindo os valores de (3.49) em (3.52) temos:

$$B_1 = -\frac{1}{I} [N(\Omega) - k(A_{11}^2 + A_{12}^2)] + \frac{1}{m\omega} [(k + \chi)\omega - k\Omega]$$

$$B_2 = -\frac{1}{I\omega m} [N(\Omega) - k(A_{11}^2 + A_{12}^2)] [(k + \chi)\omega - k\Omega] + \frac{1}{4m^2\omega^2} [(k + \chi)\omega - k\Omega]^2 +$$

$$+ a^2 + \frac{4k}{I} aA_{11}A_{12} + \frac{k^2}{I\omega m} a(A_{11}^2 + A_{12}^2) + \frac{c\rho}{I} \left( \frac{k}{2m\omega} A_{12} - A_{11} \right) \quad (3.53)$$

$$B_3 = -\left\{ \frac{1}{4m^2\omega^2} [(k + \chi)\omega - k\Omega]^2 + a^2 \right\} \times \frac{d}{d\Omega} [L(\Omega) - q\Omega - \chi\omega a^2]$$

Como pode ser visto, os critérios de estabilidade dependem da característica da fonte de energia

$L(\Omega)$ , ou mais precisamente da inclinação  $\frac{d}{d\Omega} L(\Omega)$  dessa característica. Considerando

$\frac{d}{d\Omega} L(\Omega) < 0$  e  $\frac{d}{d\Omega} H(\Omega) > 0$ , o primeiro critério será sempre satisfeito se

$$\frac{d}{d\Omega} L(\Omega) - \frac{d}{d\Omega} H(\Omega) < 0.$$

Tanto o segundo quanto o terceiro critério são satisfeitos para  $\Omega < \omega$ . O terceiro critério em especial pode ser reescrito como:

$$B_3 = (b_{23}b_{32} - b_{22}b_{33}) \frac{d\Phi_3}{d\Omega} > 0 \quad (3.54)$$

Então o critério é:

$$\frac{d\Phi_3}{d\Omega} < 0 \quad (3.55)$$

A função  $\Phi_3$  que representa os lado direito da terceira equação de (3.44) o critério (3.55 ) pode ser reescrito como:

$$\frac{d}{d\Omega} [L(\Omega) - q\Omega - \chi\omega a^2] < 0 \quad (3.56)$$

## Capítulo 4

### Simulações Numéricas

Simulação numérica é um dos caminhos que podem levar a solução de equações diferenciais. Outro caminho é obter uma solução analítica exata para o problema através de integrações analíticas. No entanto, a solução analítica nem sempre é possível e quase sempre inviável em problemas complexos e sistemas com não linearidades presentes. Já a vantagem da solução numérica é que a integração para esse tipo de solução é realizada através de algoritmos numéricos implementados em linguagens de programação e executados em computador digital. A solução obtida numericamente pode apresentar quantitativamente o sistema com valores obtidos na solução, porém também pode transparecer a dinâmica do problema como um todo através de visualização gráfica dos resultados, apresentando assim uma visão qualitativa do problema. Foi Poincaré, no início do século XX quem primeiro introduziu essa visão qualitativa do problema percebendo que era possível investigar as características topológicas de um sistema sem a necessidade de resolvê-lo explicitamente. Assim, no lugar das técnicas que buscam fórmulas, inicia-se o uso de técnicas geométricas e topológicas no estudo de sistemas dinâmicos. A partir das técnicas qualitativas obtêm-se pistas sobre a evolução do sistema no espaço de fases, com cálculos analíticos relativamente simples que determinam o comportamento assintótico das soluções do sistema. A desvantagem destas técnicas é que parte da informação quantitativa é perdida. No entanto, a solução numérica ainda é tida como um instrumento fundamental na análise tanto quantitativa quanto qualitativa do problema.

Esse capítulo apresentará a principal contribuição deste trabalho: algumas simulações numéricas obtidas para o sistema mostrado no capítulo anterior. Primeiramente é apresentado um estudo dos parâmetros do sistema e a influência destes na sua dinâmica. Após é realizada a verificação da dinâmica caótica do sistema através de diagramas de bifurcação e expoente de Lyapunov.

#### 4.1 Simulação numérica do rotor não-ideal

O sistema (3.15) foi simulado com o integrador numérico Runge-Kutta de quarta ordem. Foram utilizados os software Matlab™ para as simulações temporais, os retratos de fase e as curvas de resposta em frequência e o software Dynamics para a investigação da dinâmica caótica: diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov. As rotinas criadas para essas finalidades se encontram em anexo 1.

Os seguintes parâmetros foram utilizados para a realização de simulações numéricas. O sistema foi simulado na sua forma dimensional e por isso todas as unidades dos parâmetros estão de acordo como Sistema Internacional, a descrição dos símbolos utilizados para cada parâmetro pode ser encontrada na lista de símbolos (no início deste trabalho).

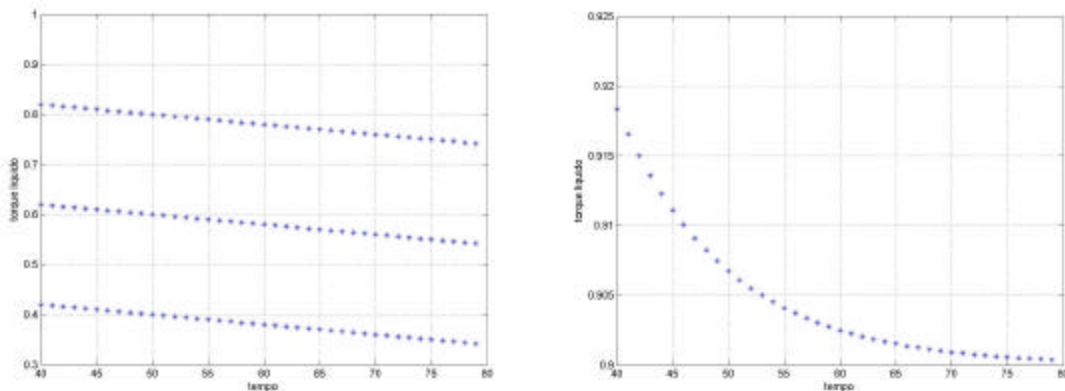
Parâmetro (S.I)	Valor
$q \text{ (Nms)}$	$7.7 \times 10^{-4}$
$c \text{ (kgm/s}^2\text{)}$	28400
$I \text{ (kgm}^2\text{)}$	$125 \times 10^{-4}$
$m \text{ (kg)}$	5.35
$\rho \text{ (m)}$	$4 \times 10^{-4}$
$\chi \text{ (Ns/m)}$	$7.5 \times 10^{-4}$
$k \text{ (Ns/m)}$	$1.5 \times 10^{-7}$
$\omega \text{ (rad/s)}$	72.86

**Tabela 1-Valores dos parâmetros de simulação numérica**



## 4.2 Energia dissipada e a curva característica do motor

Cada tipo de fonte de energia, como foi dito no item 2.6 tem a seus próprios parâmetros e sua curva característica. Geralmente em problemas práticos essa curva é conhecida, é dada pelo fabricante da fonte de energia ou ainda é obtida experimentalmente. Num estudo teórico é preciso fazer uma suposição de uma característica que seja coerente com a dinâmica do problema não-ideal. Geralmente nesse tipo de estudo utiliza-se dois tipos de curvas características a linear e a exponencial. Ambas modelam o comportamento de uma fonte de energia com relativa precisão, no entanto, a curva exponencial é a que reflete o processo de forma mais realística.



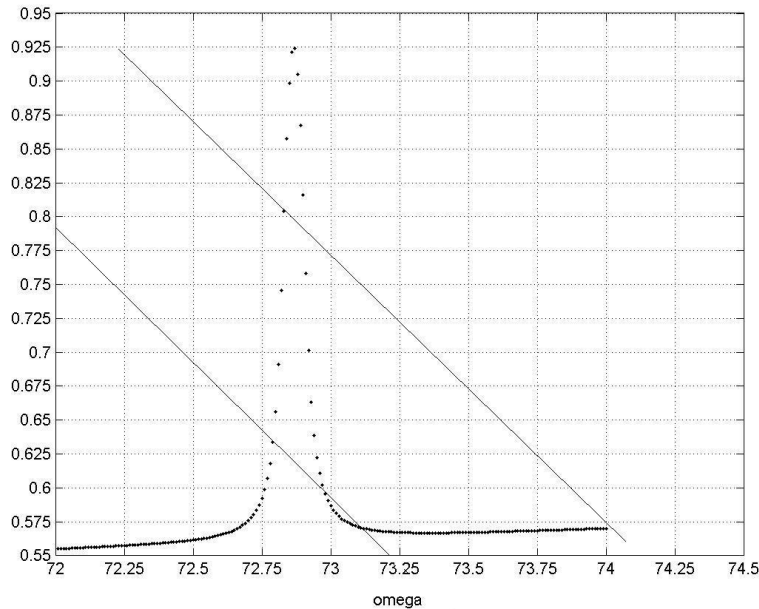
**Figura 8- Torques Líquidos: a) forma linear b) forma exponencial**

A curva linear tem a forma da Figura 8-a. Por isso é necessário obter os valores de parâmetros  $a$  e  $b$ . Para isso foi necessário construir o gráfico de energia dissipada pelo sistema, a curva S que é dada pela por:

$$S(\Omega) = H(\Omega) + \beta \omega a^2 \quad (4.1)$$

Onde  $\beta$  é um parâmetro de amortecimento do sistema. O primeiro termo é o torque resistivo e o último termo representa a energia dissipada devido ao amortecimento do sistema. Supondo a

característica do motor linear, os parâmetros do motor podem ser obtidos das interseções da curva característica  $L$  com a curva  $S$  (Figura 9):



**Figura 9:** Curva de energia dissipada  $S(\Omega)$  pelo sistema e curva característica do motor  $L(\Omega)$

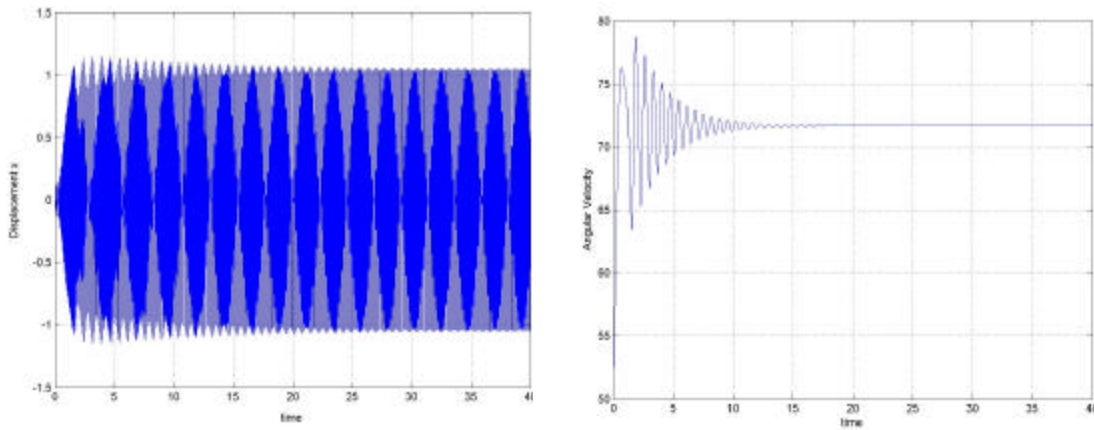
Esse procedimento permite conhecer uma região paramétrica do conjunto  $a$  e  $b$  a ser utilizado nas próximas simulações. Esse intervalo é extremamente útil para a construção da curva de resposta em frequência quando não há um domínio dos valores dos parâmetros do motor.

### 4.3 O efeito Sommerfeld

O efeito Sommerfeld tem duas manifestações o aumento da energia gasta durante a passagem pela ressonância. A energia é gasta para vibrar o sistema. A outra manifestação é o fenômeno do salto caracterizado pelo experimento do Kononenko e Korablev relatado no capítulo 3. No sistema, objeto de estudo desse trabalho, foi verificado a presença do Efeito Sommerfeld. Para isso foram realizadas simulações temporais e resposta em frequência.

A Figura 10 a) mostra a resposta do sistema no deslocamento  $x$  em função do tempo. O parâmetro de controle vale  $a = 1.25$ . Nesse caso o sistema é “absorvido” pela ressonância. Isso

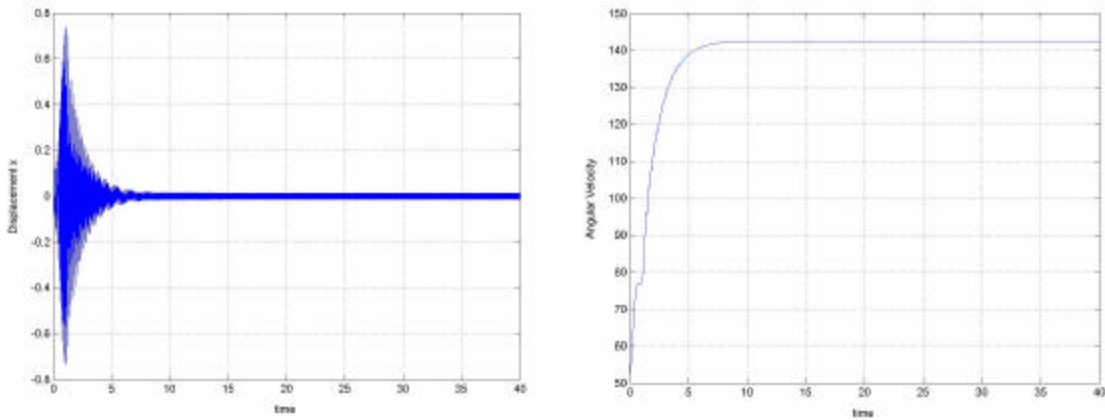
ocorre quando o motor não tem potência suficiente para vencer o torque resistivo. O sistema vibra em grandes amplitudes.



**Figura 10- a) Deslocamento  $x$  em função do tempo b) Velocidade angular em função do tempo. Sistema “absorvido” pela ressonância**

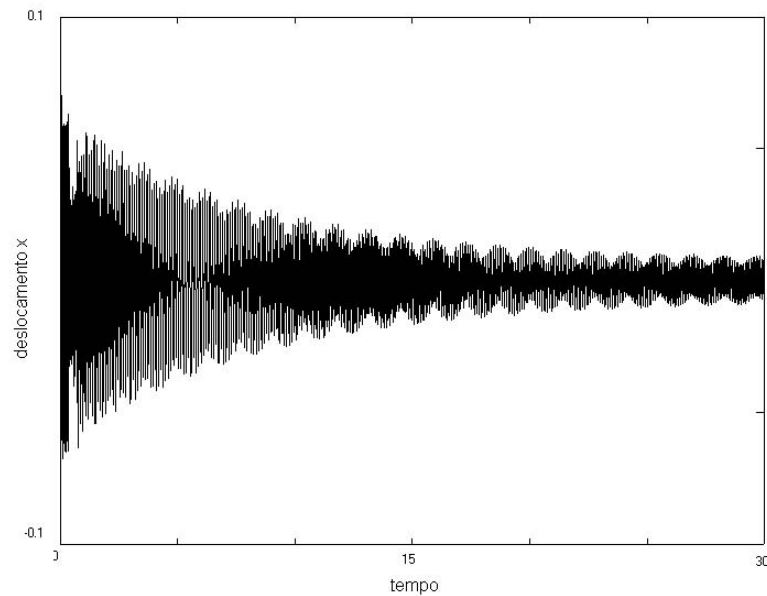
A Figura 10-b) mostra o gráfico da velocidade angular em função do tempo quando o sistema é absorvido pela ressonância, o parâmetro de controle é  $a=1.25$ . Nota-se que a velocidade angular oscila inicialmente entre os instantes 0 e 15 estacionando após esse tempo no valor que é próximo à frequência natural do sistema.

Já as Figura 11 a) e b) mostram a passagem pela ressonância do sistema com parâmetro  $a=1.27$ , o suficiente, nessas condições, para vencer as forças resistivas ao movimento e promover a passagem pela ressonância. Nesse caso nota-se o aumento de amplitude durante essa passagem e a ocorrência de movimentos irregulares, entre os instantes 0 e 5 do tempo. Além disso, nota-se, no gráfico b), uma ligeira “quebra”, na curva da velocidade angular, próximo à região da frequência natural do sistema. No entanto o rotor passa pela ressonância e a velocidade angular aumenta além do valor da frequência natural.

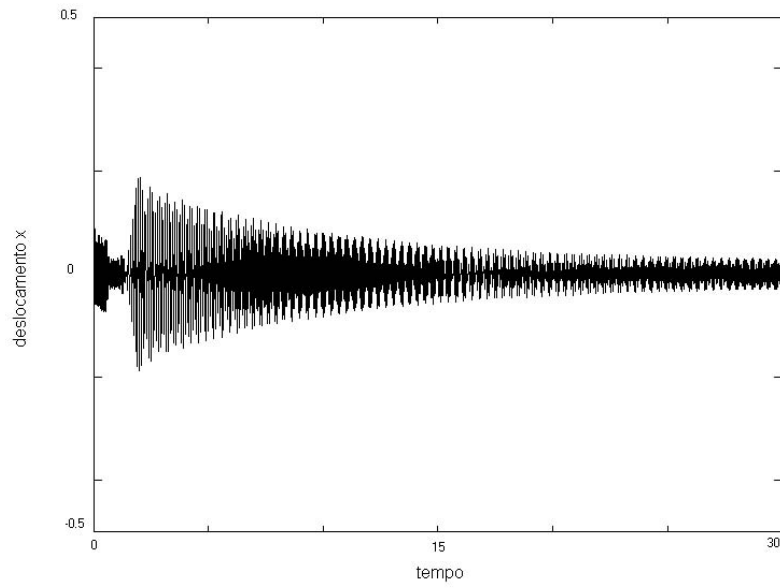


**Figura 11- a) Amplitude do deslocamento  $x$  em função do tempo b) Velocidade angular em função do tempo. Passagem pela ressonância**

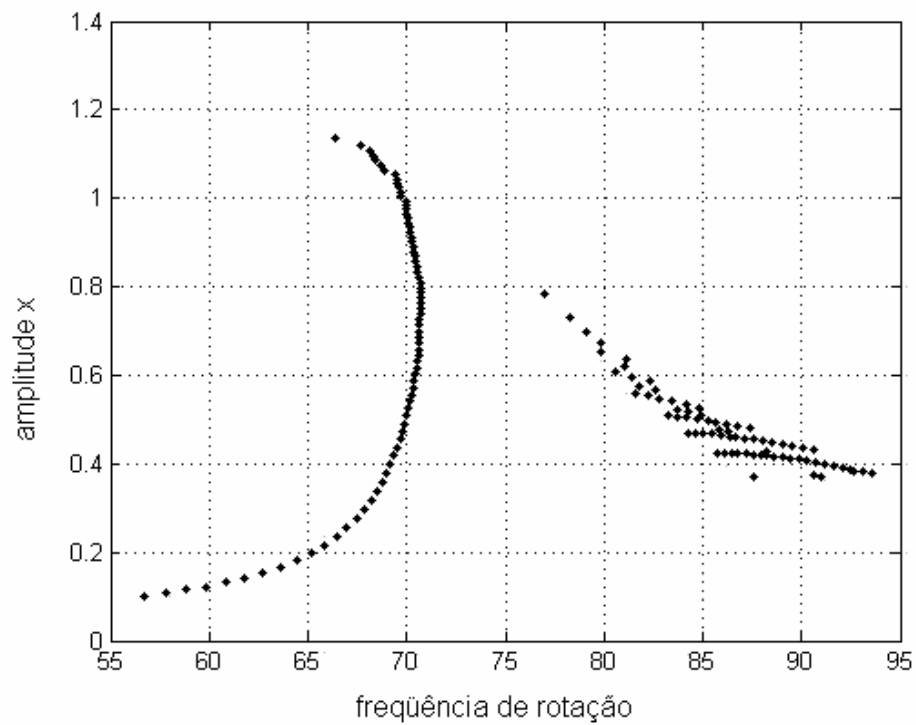
Na Figura 12, que foi obtida com os parâmetros do motor  $a=2.5$  e  $b=0.002$  evidencia-se a passagem pela ressonância com grandes amplitudes no deslocamento  $x$ . A Figura 12 mostra obtida com parâmetros  $a=2.0$  e  $b=0.002$  e também evidencia a passagem pela ressonância e grandes amplitudes, mostrando um salto em amplitude de oscilação.



**Figura 12: Diagrama temporal quando  $a=2$  e  $b=0.002$**



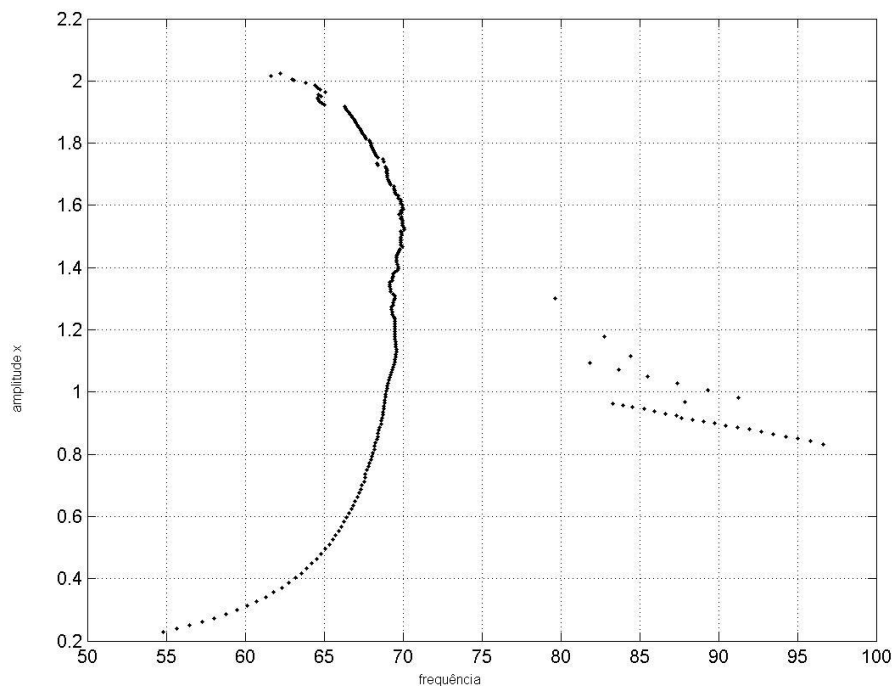
**Figura 13: Diagrama temporal quando  $a = 2.5$  e  $b = 0.002$**



**Figura 14- Resposta em frequência**

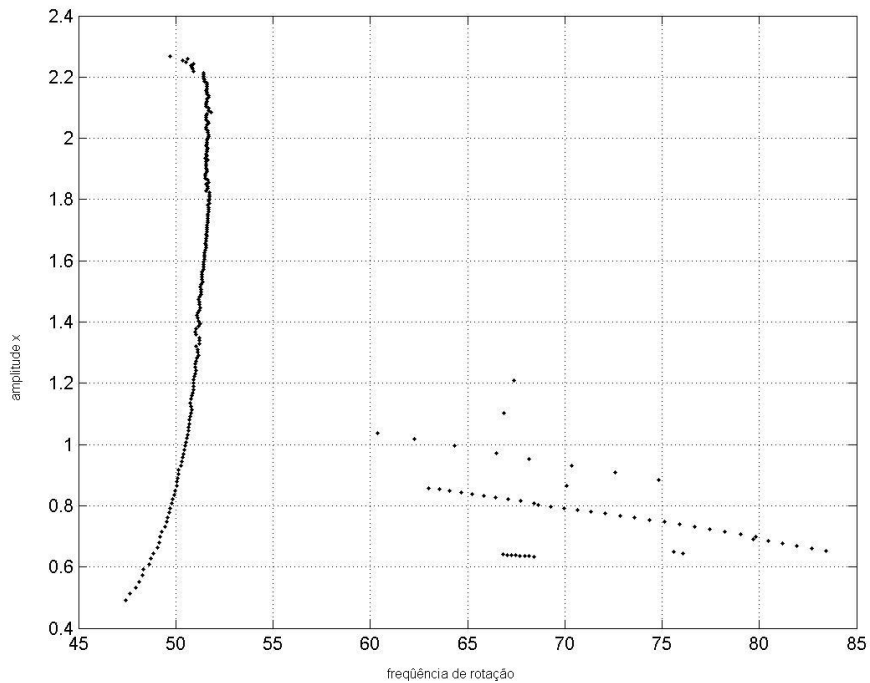
A curva de resposta em frequência para o rotor não ideal está representada na Figura 14. Nota-se que ela apresenta uma inclinação para a esquerda, pois normalmente, para um sistema

sem forças restauradoras não-lineares o gráfico sinóide (*bell-shaped*) seria totalmente vertical. A inclinação é devido a uma força restauradora não linear que se encontra na formulação, na terceira equação do sistema (3.15) e que é inclusive responsável pelo acoplamento entre as coordenadas  $xy$  do sistema com a coordenada do motor  $\varphi$ . Com o aumento da velocidade angular do rotor, há um aumento na amplitude da resposta, em especial na aproximação da frequência natural que é  $\omega = 72.86 \text{ rad/s}$ . Na proximidade dessa região ocorre um grande aumento de amplitudes e quando é atingido o ponto T que é instável. Qualquer pequena perturbação leva o sistema a executar um salto para o próximo ponto estável H. O fenômeno do salto (*jump*) está associado ao a bifurcação sela-nó cíclica, ou dobra cíclica. O ponto desse tipo de bifurcação é também conhecido como o ponto de retorno (*turning point*) que leva o sistema a executar um salto progressivo ou regressivo. Quando o sistema atinge o ponto de retorno ele pode tanto saltar de volta a amplitude anterior ou saltar para um próximo ponto estável. Essa bifurcação tem um caráter descontínuo ou catastrófico pois antes o sistema apresenta soluções periódicas e após não é possível visualizar o comportamento do sistema através de considerações locais.



**Figura 15- Resposta em frequência . Aumento de excentricidade**

Aumentando a excentricidade  $\rho$  do disco para  $\rho = 0.01$  obtém-se um aumento da amplitude das oscilações durante a passagem pela ressonância como é visto na Figura 15. Aumentando-se a massa do sistema, muda a sua frequência natural e a curva de resposta em frequência desloca para um valor mais baixo (Figura 16). Além disso, ocorre uma verticalização da inclinação da curva como é possível visualizar na Figura 16 que além do aumento de massa tem a excentricidade  $\rho = 0.01$ . A verticalização ocorre pela influência da massa através do amortecimento. Nota-se que apesar de variações em desbalanceamento e massa o sistema continua apresentando o fenômeno do salto.



**Figura 16- Resposta em frequência. Aumento de massa e da excentricidade**

#### 4.4 Análise do espaço de fase

Para uma análise mais detalhada da dinâmica do sistema foram realizadas simulações do espaço de fase do sistema. O espaço de fase do sistema é hexadimensional e de difícil representação. Deve-se lançar mão de projeções e por isso são apresentados apenas os espaços de

fase na projeção  $x$  por  $\dot{x}$ . O rotor é simétrico nas coordenadas  $x$  e  $y$  e por isso o espaço de fase  $y$  por  $\dot{y}$  são dispensáveis.

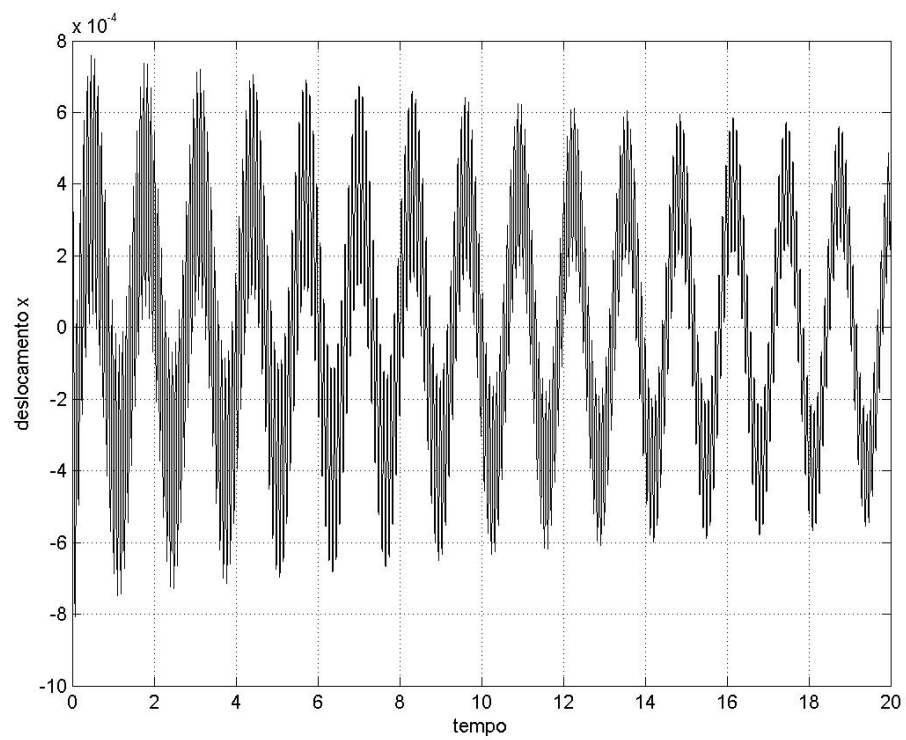
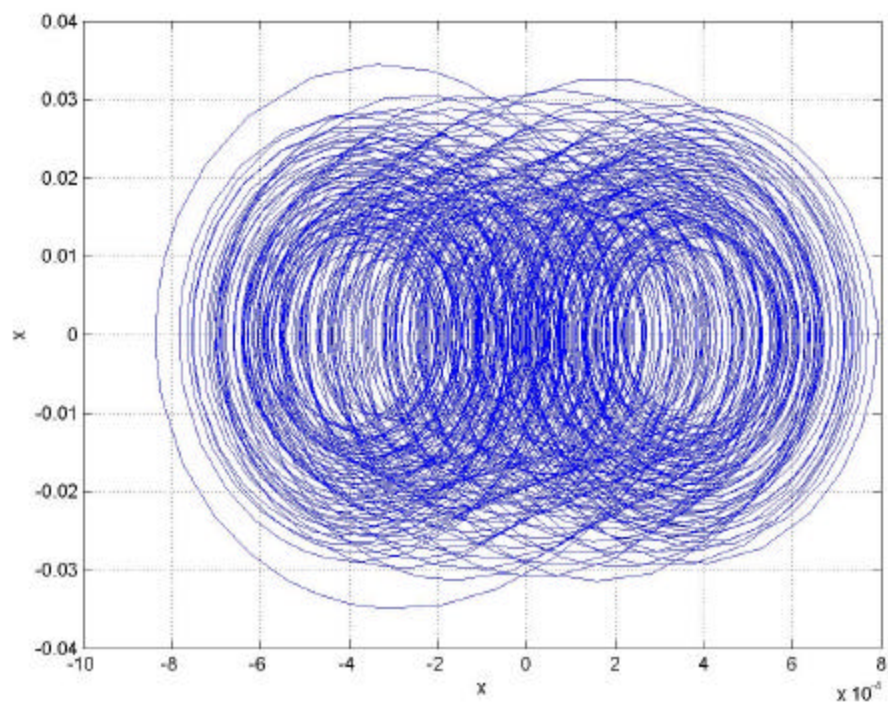
Varia-se o parâmetro de controle do motor, integra-se o sistema através do integrador numérico Runge-kutta de quarta ordem e verifica-se a dinâmica do sistema para regime transiente e permanente. As simulações a seguir foram realizadas com as condições iniciais  $x_0 = 0.0004$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$  e  $\dot{\varphi}_0 = 70$ , o que é o comportamento próximo a região de ressonância.

A Figura 17, representa a simulação do regime transiente quando os parâmetro  $a$  do motor vale  $a=0.1$ . Nota-se a presença de movimentos irregulares tanto no espaço de fase quanto na trajetória temporal. Já a Figura 18 representa o regime estacionário equivalente aos parâmetros da Figura 17, obtido após uma a simulação de 1000s. Se modificarmos o parâmetro  $b$  para  $b=0.002$ , ou seja, diminuindo  $b$  obtemos a Figura 19, após 300s, porém que ainda não caracteriza o regime estacionário obtido em Figura 20, após 1000s. Nota-se que nessa figura o movimento se regulariza a uma órbita periódica, no entanto esse processo demora 700s.

Quando aumentado o parâmetro de controle nota-se nos gráficos que representam o regime transiente ( Figura 21, Figura 22, Figura 23) apresentam ainda movimentos irregulares, no entanto o regime permanente tem a aparência semelhante ao comportamento do sistema na Figura 18, como é visto na Figura 25.

A partir de  $a=0.6$  o regime permanente modifica tanto a aparência de regime periódico embora as figuras 26, 27 e 28 indiquem irregularidades no regime não-estacionário. Em, com  $a = 0.8$ , há movimento periódico porém há também um aumento de amplitudes, atingindo até 0.015 metros. A partir desse parâmetro de controle os regimes estacionários são periódicos porém aumentam de amplitude. Na faixa de parâmetro entre 1.4 e 1.7 o rotor encontra-se em *staling*, quando o torque motivo não consegue vencer o torque resistivo. Isso pode ser comprovado no gráfico da velocidade angular em função do tempo (Figura 35, 36).





**Figura 17- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=0.1$   $b=0.02$**

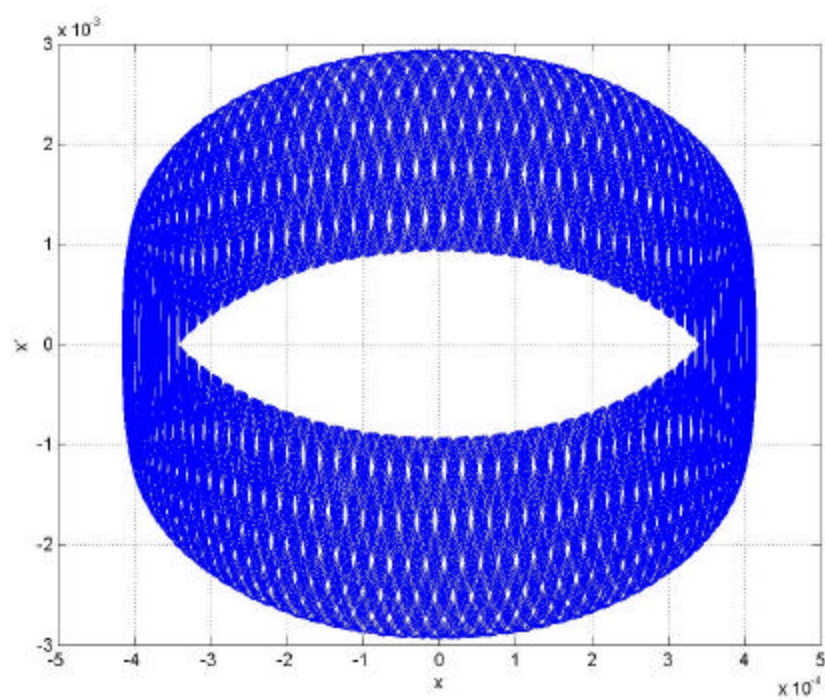
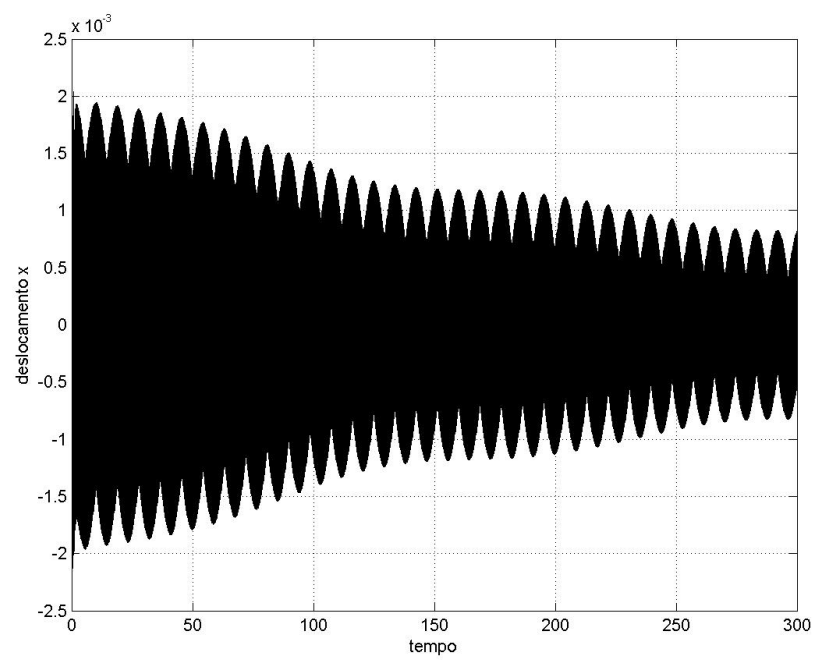
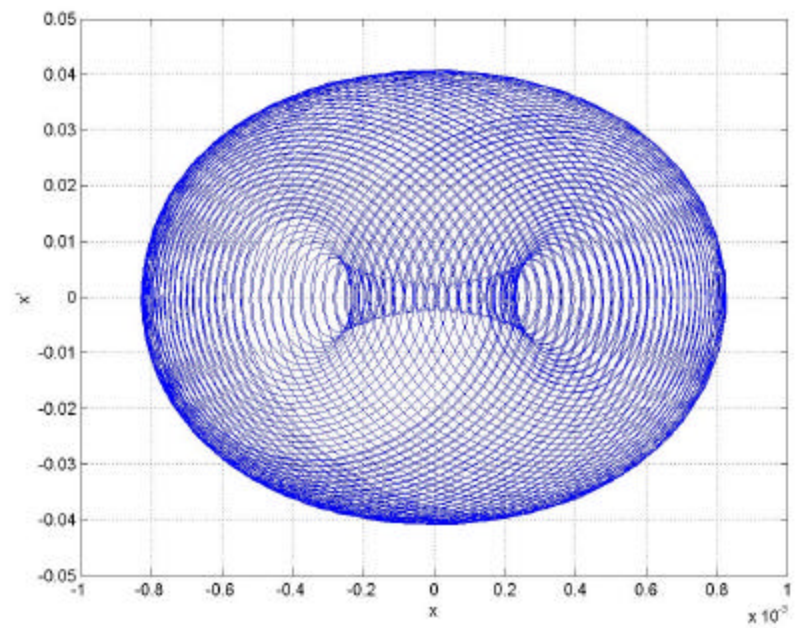
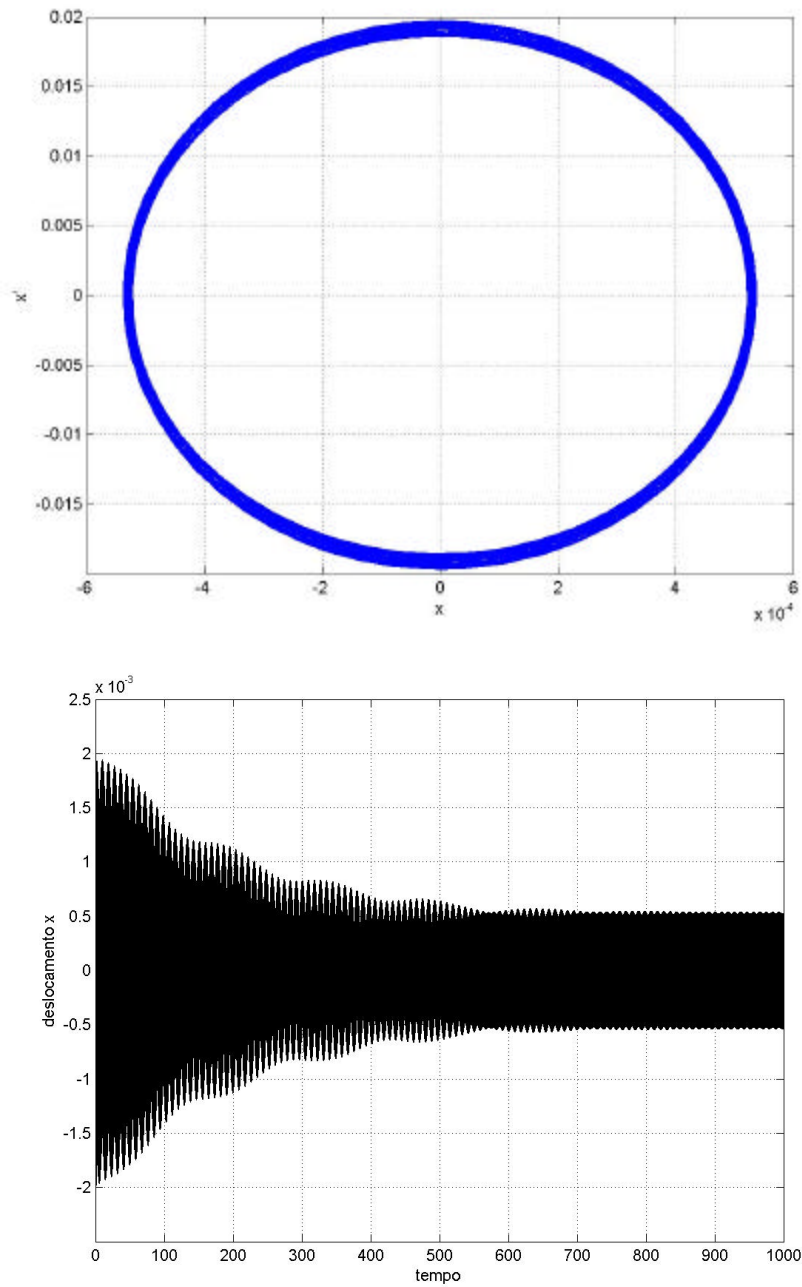


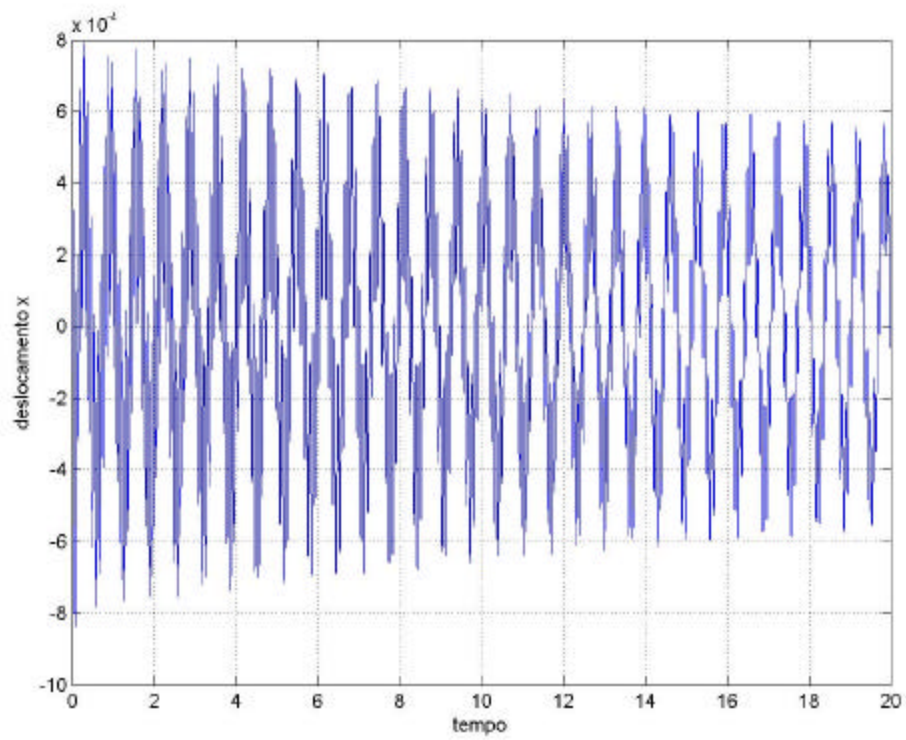
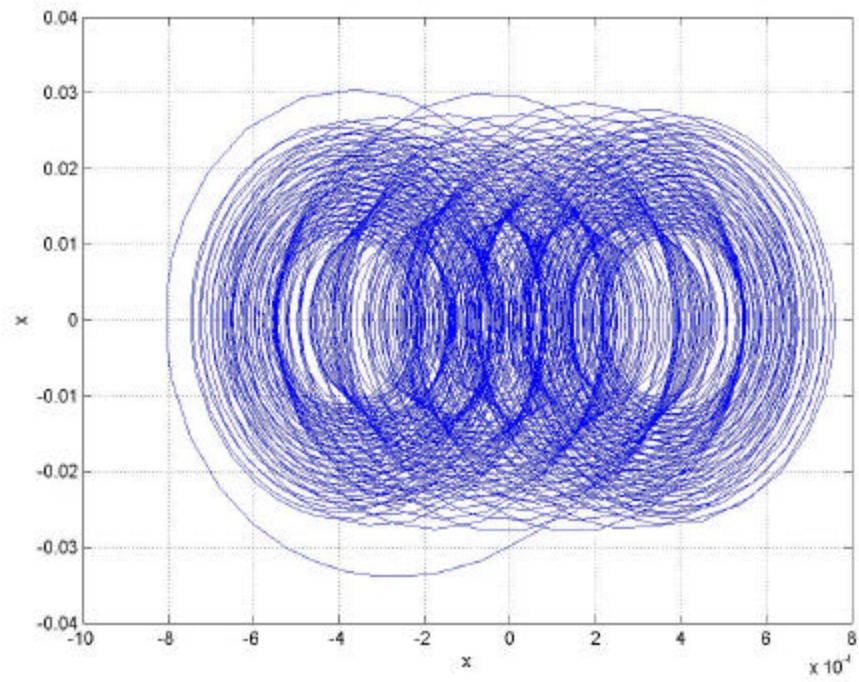
Figura 18- Regime Estacionário- Espaço de fase  $x$  em  $x'$  com  $a=0.1$  e  $b=0.02$



**Figura 19-** Transiente após 300s ,  $a=0.1$  ,  $b=0.002$  a) espaço de fase  $x$  por  $x'$  b) deslocamento  $x$  no tempo

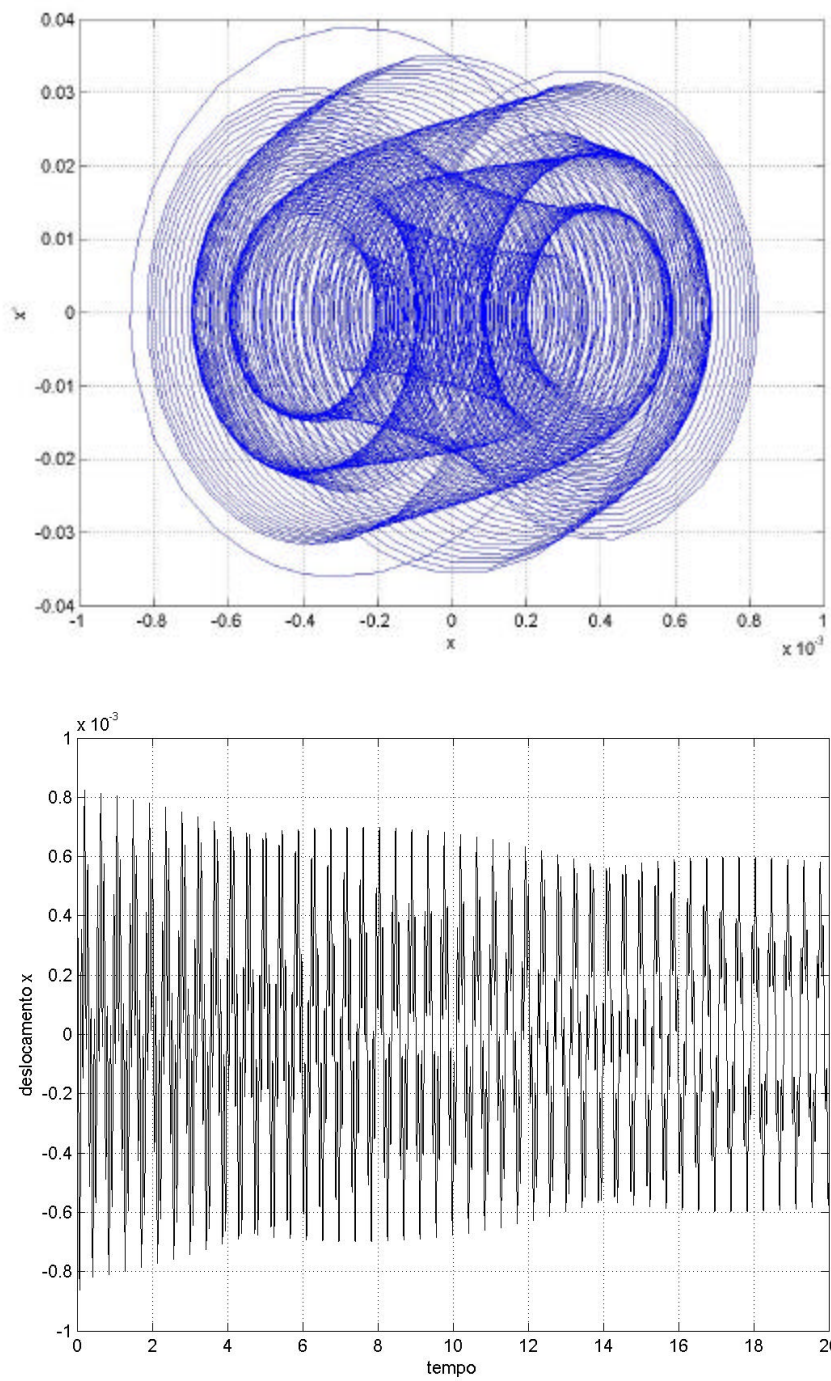


**Figura 20- Regime estacionário após 1000s ,  $a=0.1$  ,  $b=0.002$  a) espaço de fase  $x$  por  $x'$  b) deslocamento  $x$  no tempo**

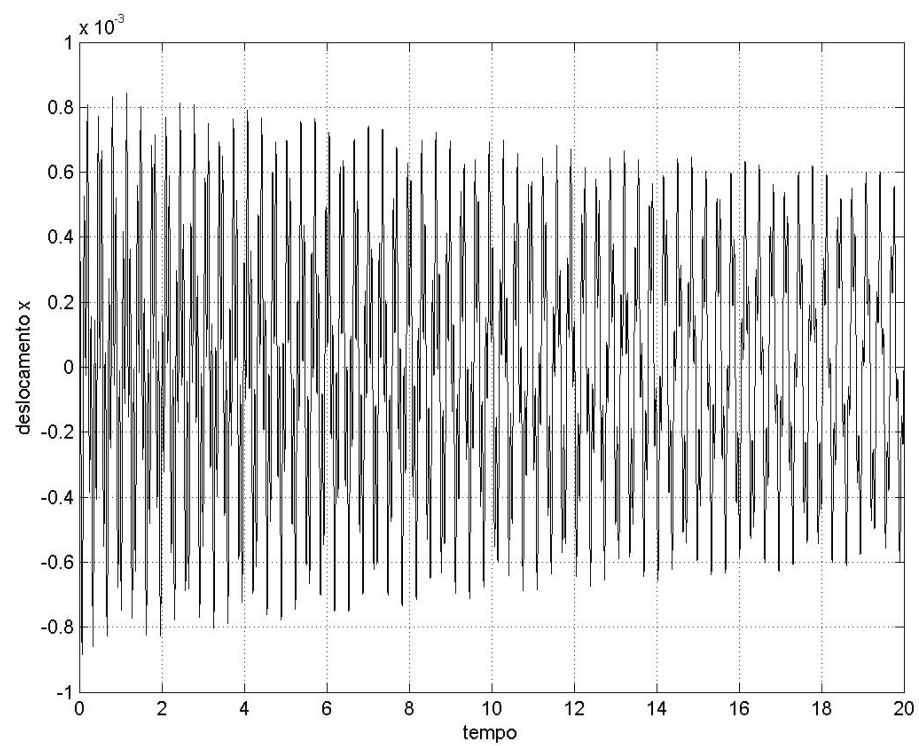
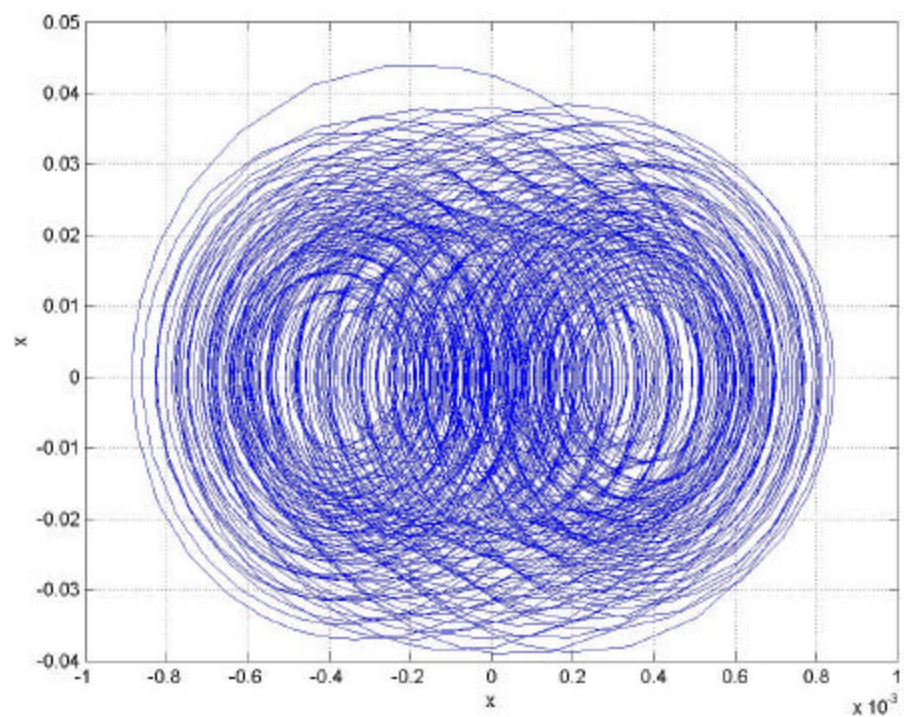


**Figura 21- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=0.2$   $b=0.02$**

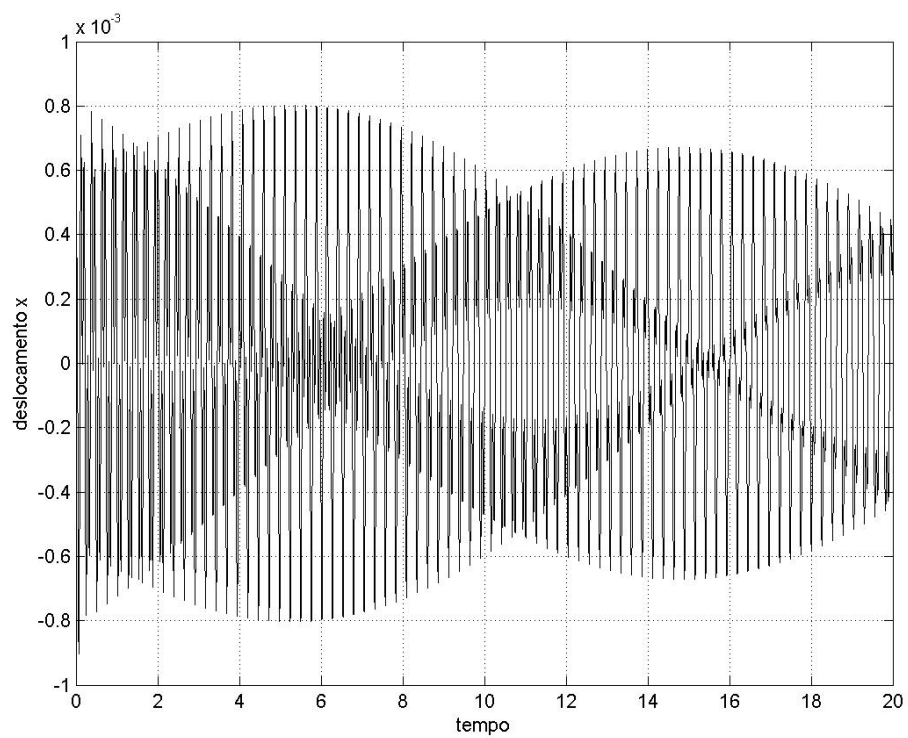
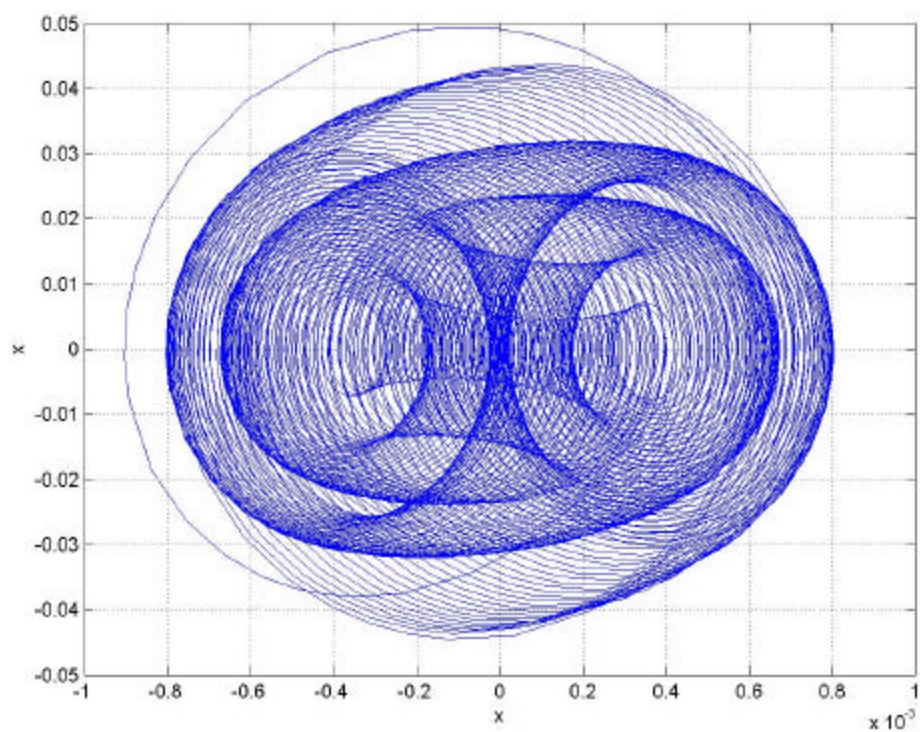




**Figura 22- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=0.3$   $b=0.02$ . Atrator quase-periódico**

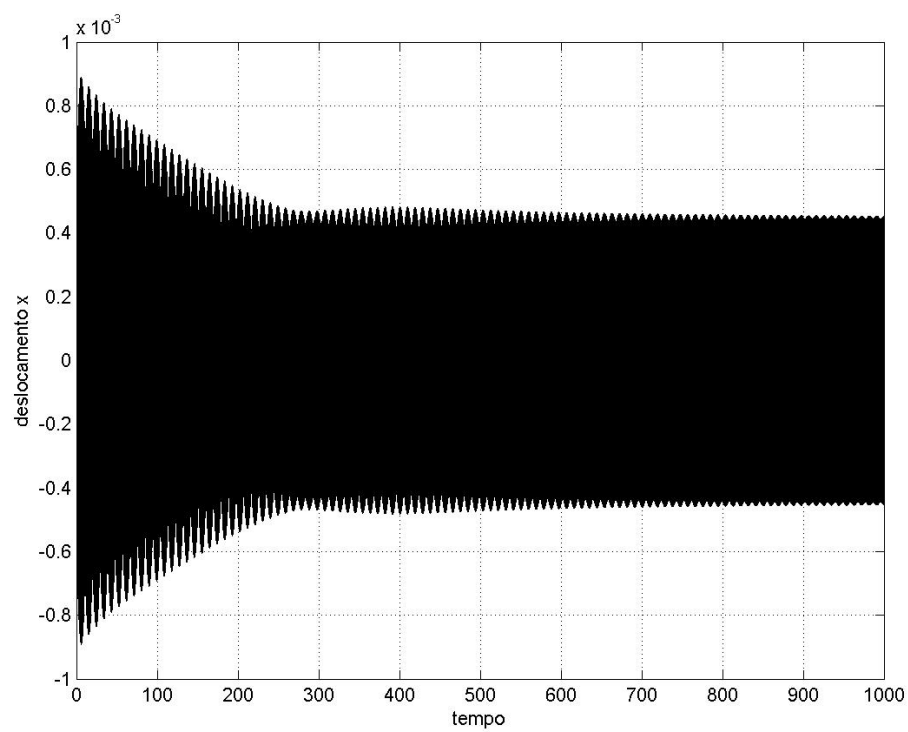
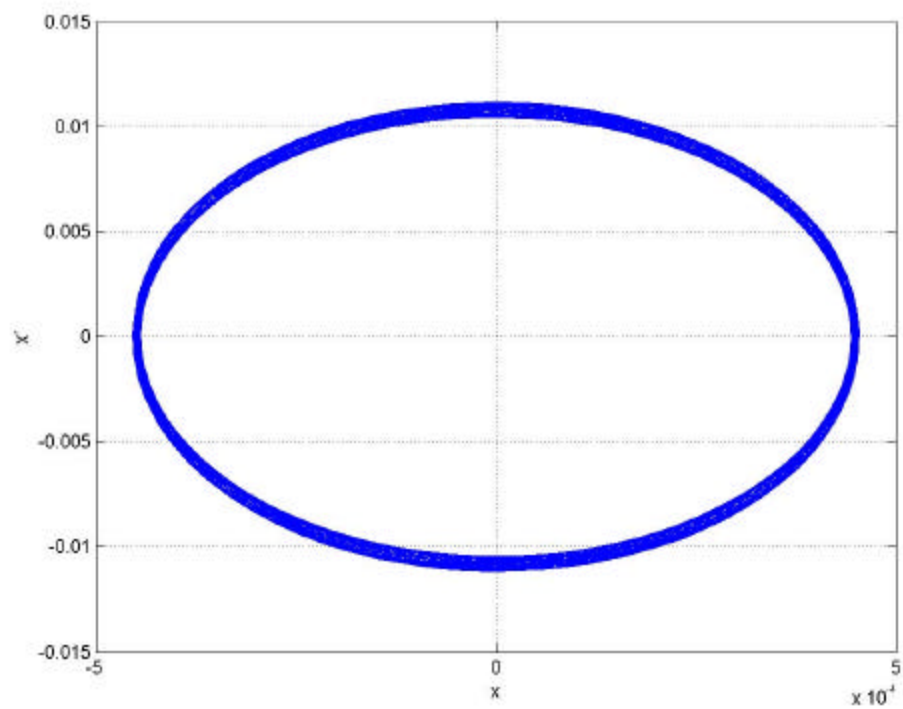


**Figura 23- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=0.4$   $b=0.02$**

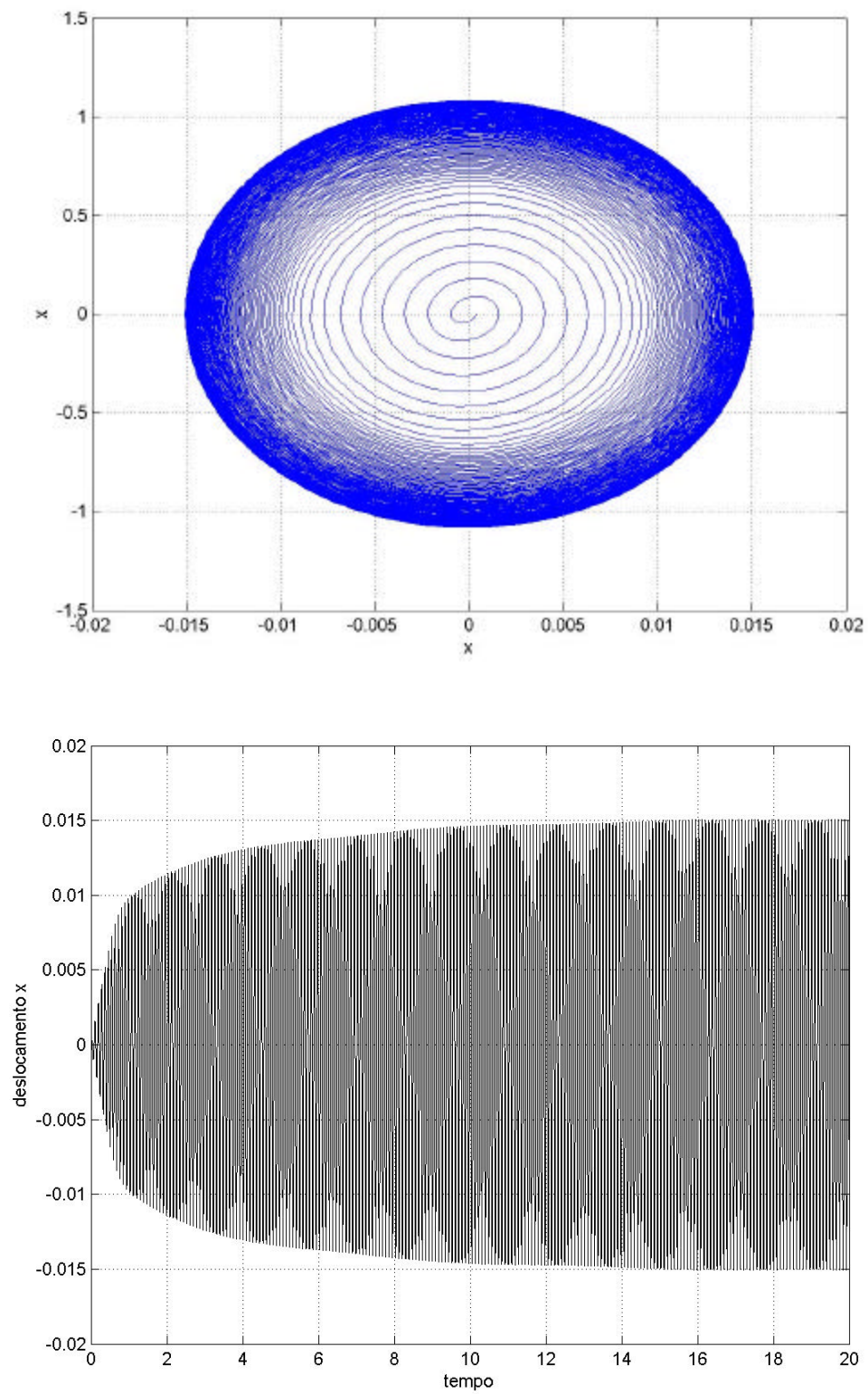


**Figura 24-Regime Transiente a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=0.5$   $b=0.02$ .**

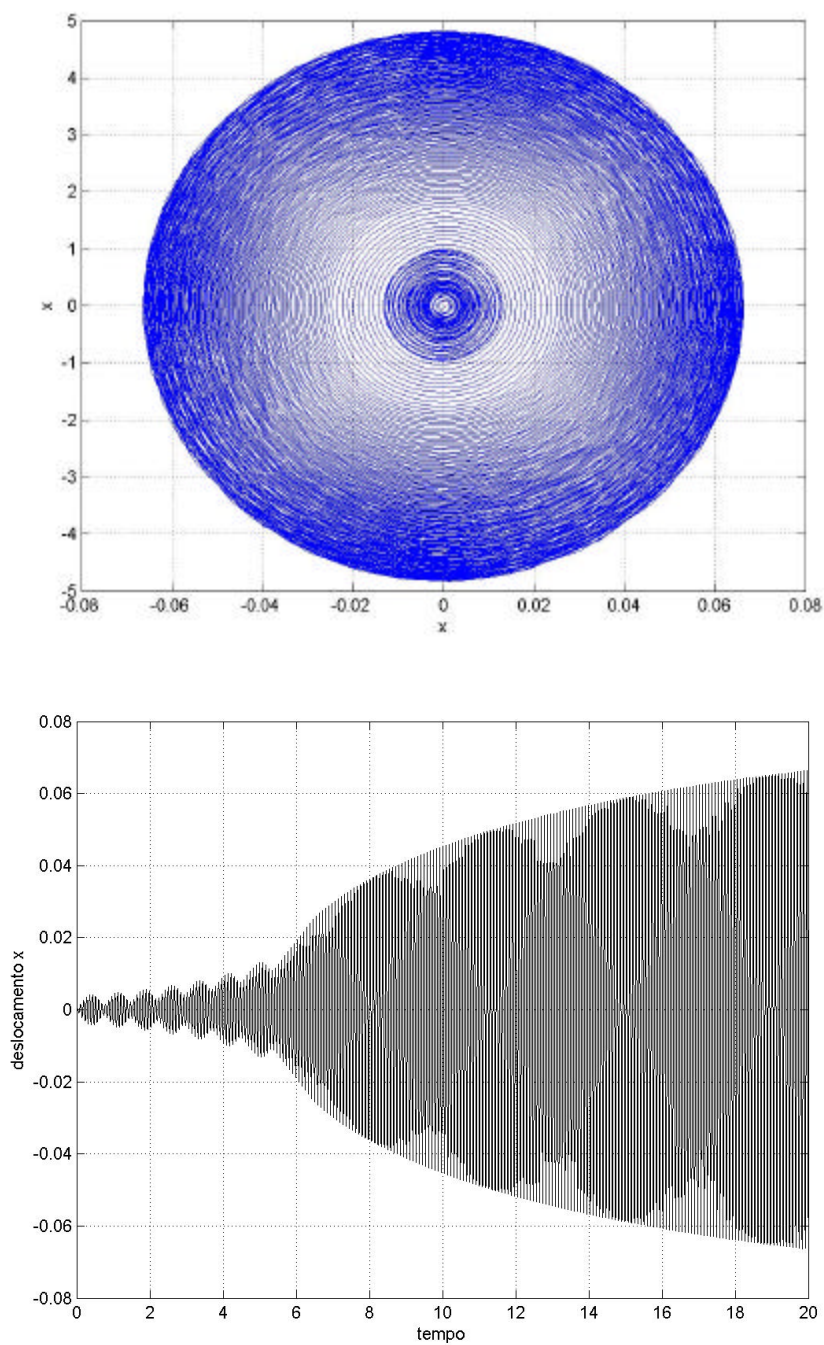




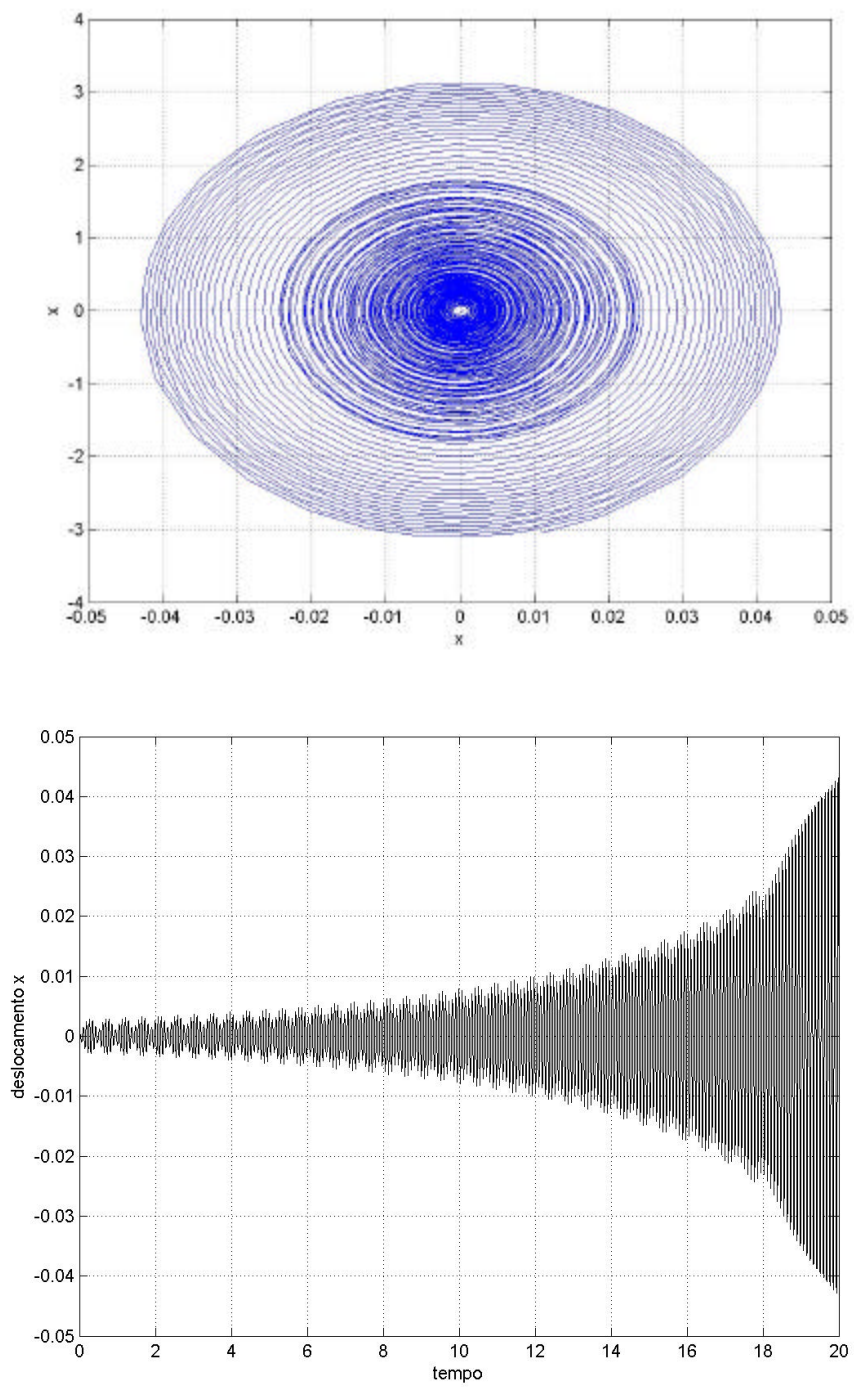
**Figura 25- Regime Permanente a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=0.5$   $b=0.02$ .**



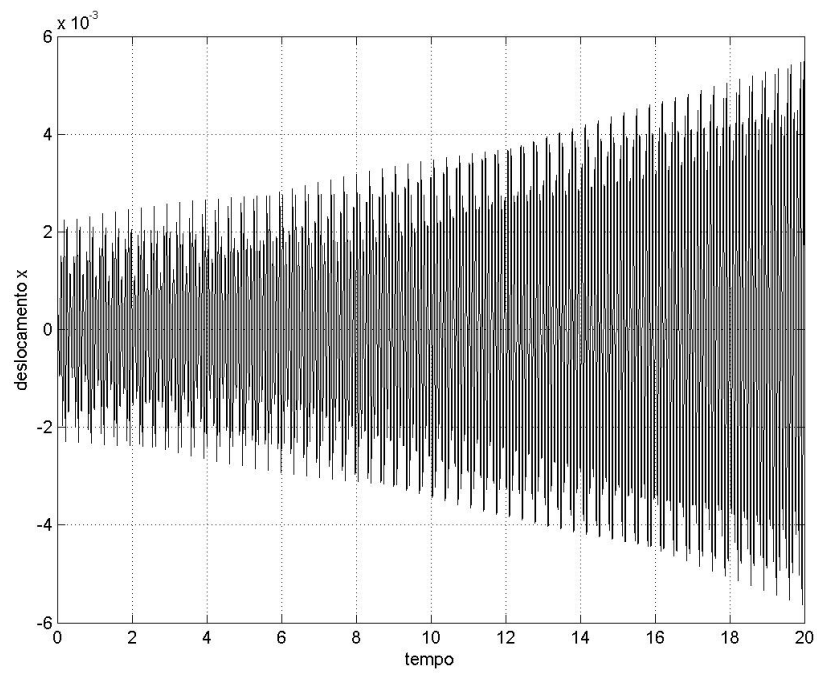
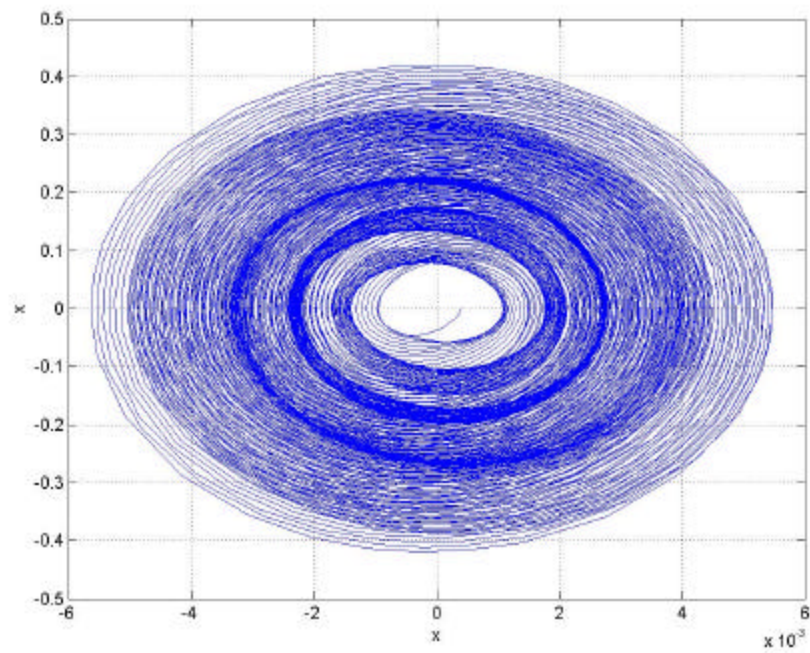
**Figura 26- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=1.5$   $b=0.02$**



**Figura 27- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=1.7$   $b=0.02$**



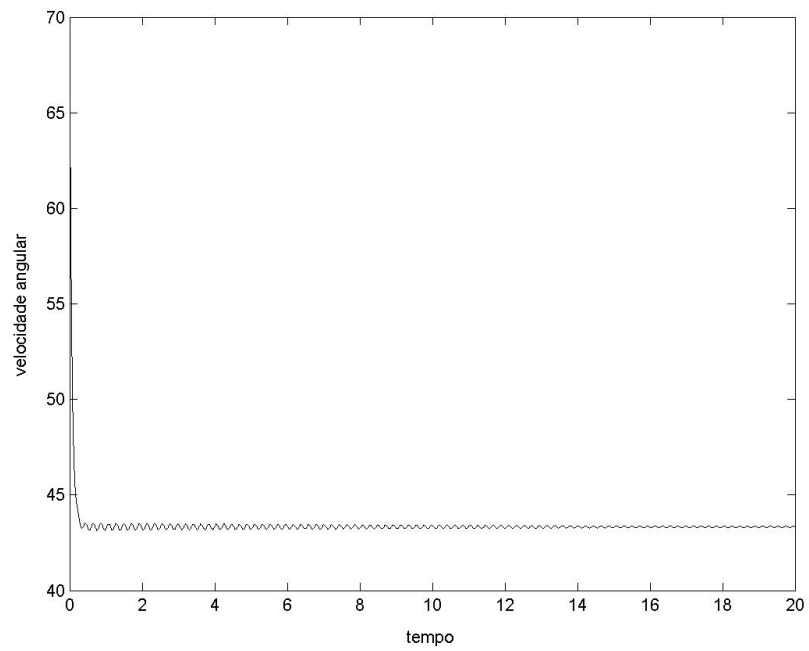
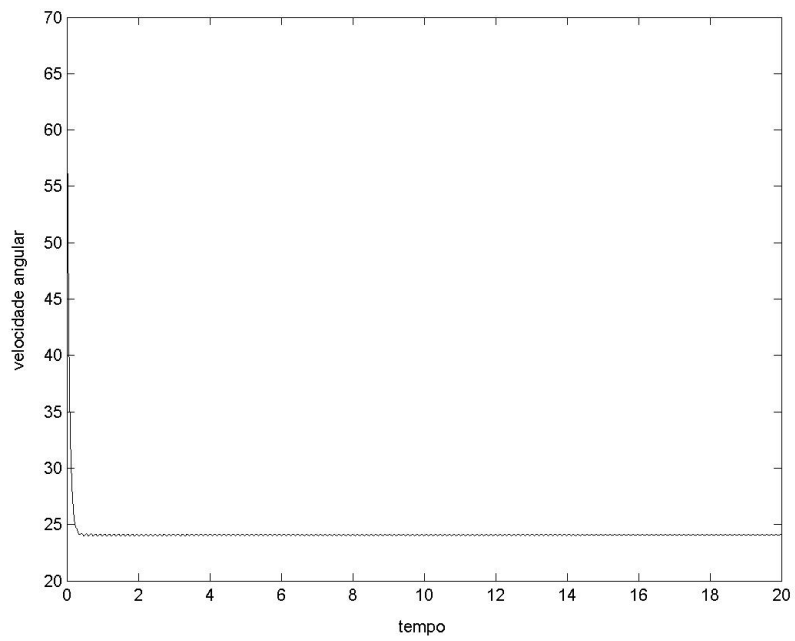
**Figura 28- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=1.8$   $b=0.02$**



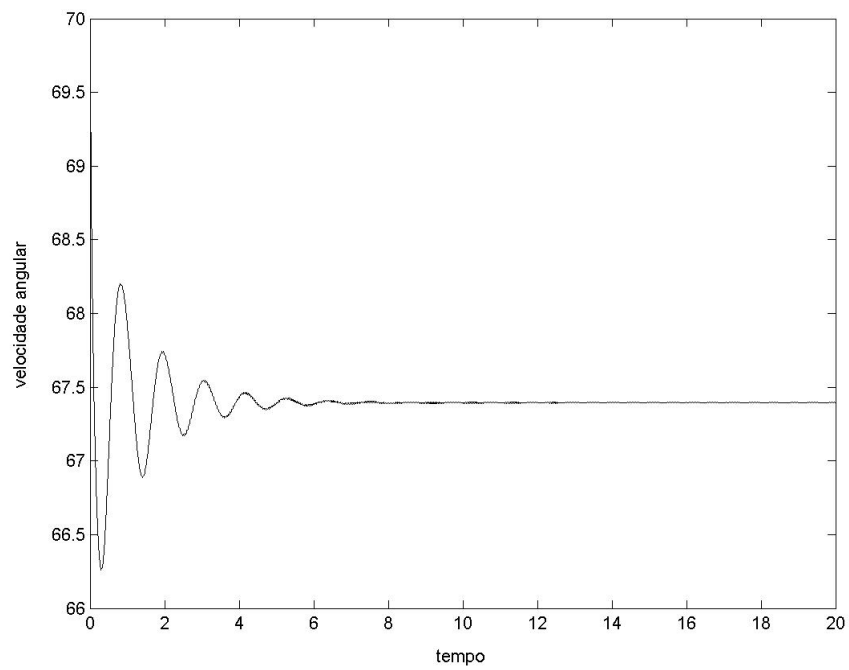
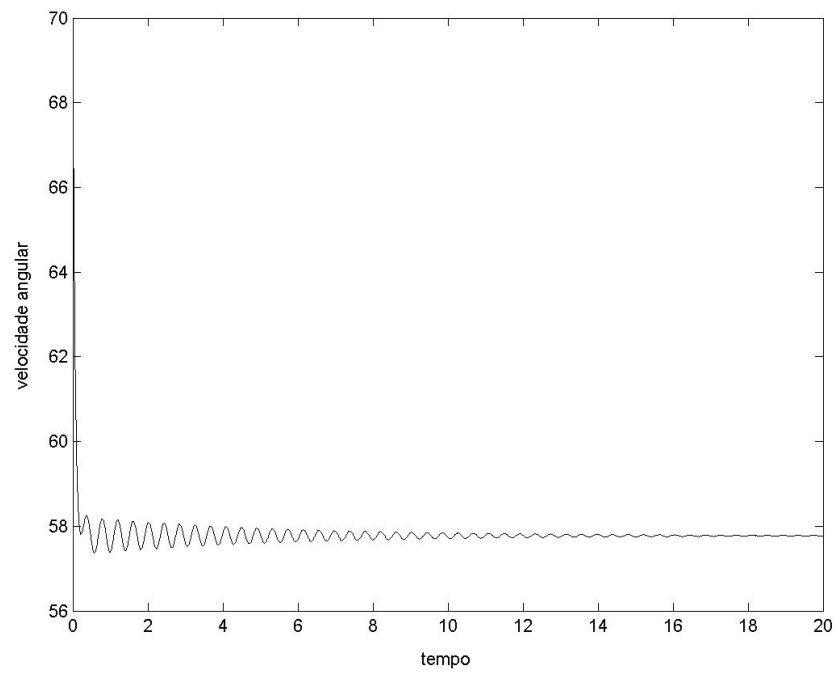
**Figura 29- a) Espaço de fase  $x$  em  $x'$ . b) Evolução temporal da amplitude  $x$  quando  $a=1.9$   $b=0.02$**

## 4.5 Velocidades angulares

A observação das velocidades angulares revela que para valores do parâmetro de controle  $a < 1.45$  o motor não tem energia suficiente para vencer as forças resistivas ao movimento e a velocidade angular fica detida abaixo do valor de frequência natural (figura 30 e 31). Para valores acima de  $a = 1.5$  a  $1.6$  a velocidade angular fica oscilando com amplitudes pequenas próximo ao valor da frequência natural (figura 32). Já para valores de  $a = 1.7$  a  $1.8$  o sistema apresenta um comportamento diferenciado em que há uma tentativa de passagem pela ressonância não concretizada, pois o sistema atinge o ponto de bifurcação sela-nó cíclica, chamado de ponto de retorno, no qual ele pode prosseguir na passagem pela ressonância ou retornar para a frequência natural ou que acontece na figura 33. Na figura 34 a) o sistema encontra-se numa zona de instabilidade com  $a = 1.9$ , é onde acontece o salto, a descontinuidade mostrada na Figura 14. Já na figura 34 b), o rotor passa pela ressonância vindo a estabilizar a velocidade angular acima da frequência natural do sistema.

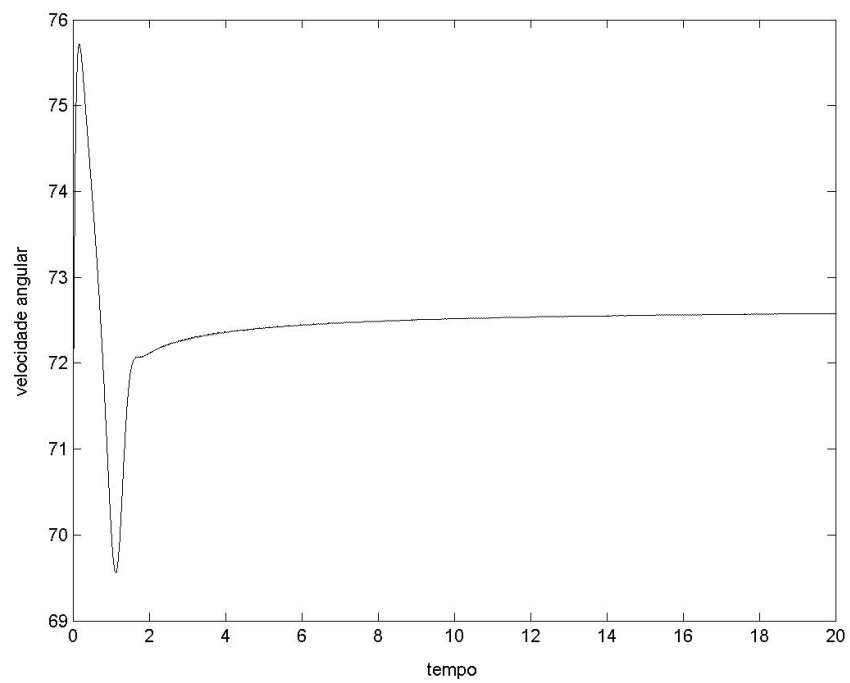
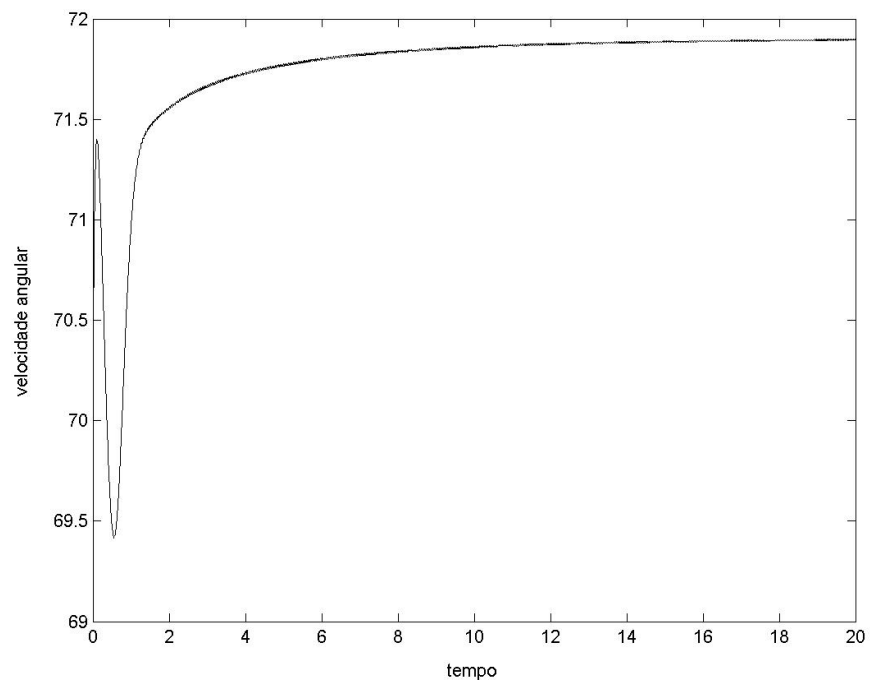


**Figura 30- Velocidade angular em função do tempo . a)  $a=0.5$  ,  $b=0.02$  e b)  $a=0.9$   $b=0.02$**

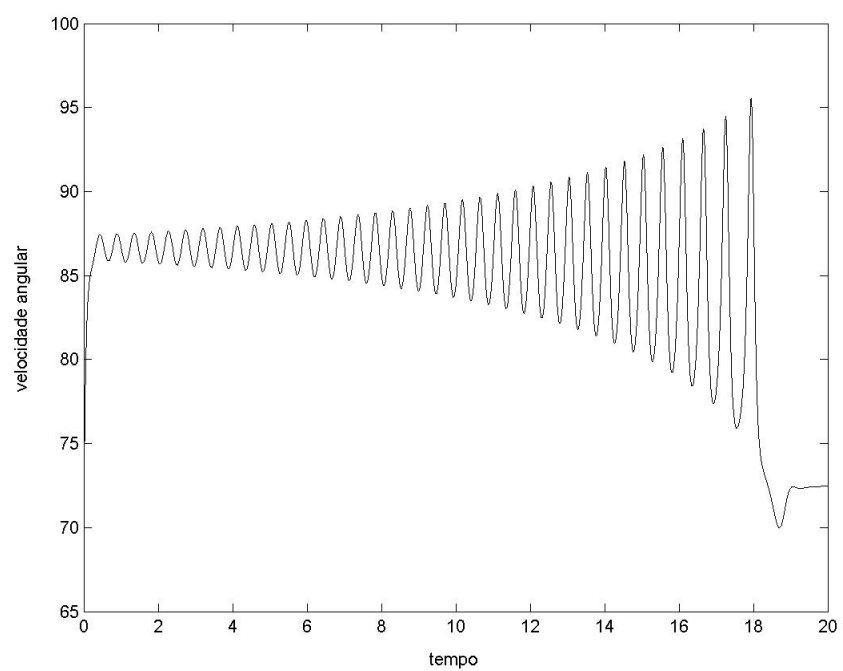
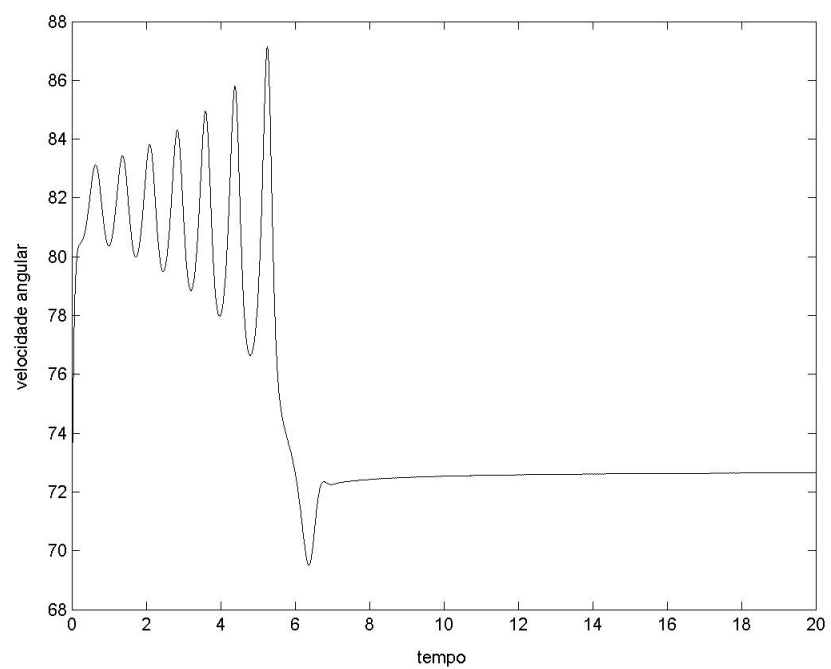


**Figura 31- Velocidade angular em função do tempo . a)  $a=1$  ,  $b=0.02$  e b)  $a=1.4$   $b=0.02$**

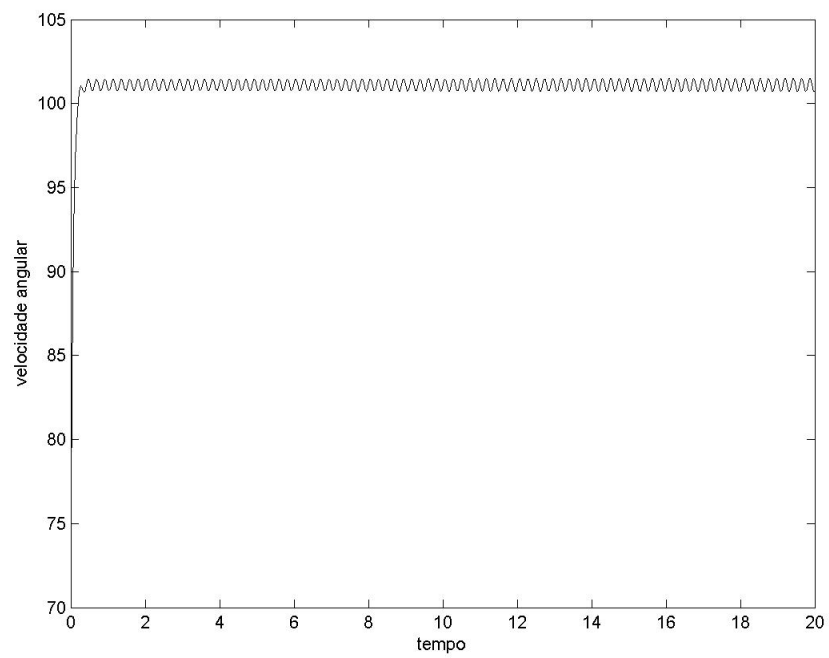
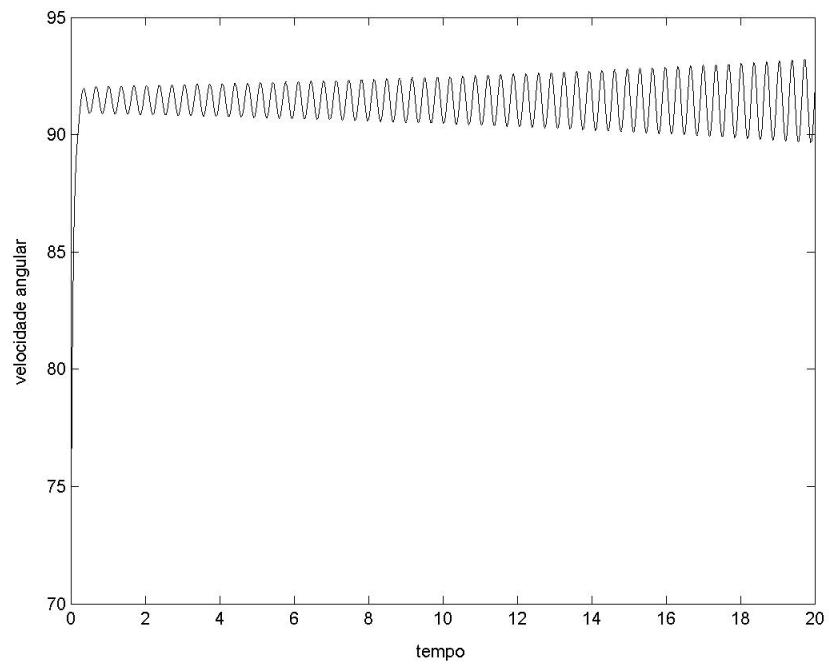




**Figura 32- Velocidade angular em função do tempo . a)  $a=1.5$  ,  $b=0.02$  e b)  $a=1.6$   $b=0.02$**



**Figura 33- Velocidade angular em função do tempo . a)  $a=1.7$   $b=0.02$  ; b)  $a=1.8$   $b=0.02$**



**Figura 34- Velocidade angular em função do tempo . a)  $a=1.9$  ,  $b=0.02$  e b)  $a=2.1$   $b=0.02$**

## 4.6 Investigação da dinâmica caótica

Neste item investiga-se a natureza caótica do sistema dinâmico não-ideal. São apresentados diagramas de bifurcação e espectros de Lyapunov para diferentes parâmetros do sistema. Na figura 35 está representado o primeiro e o maior expoente de Lyapunov do sistema. Nota-se que ele converge para um valor ligeiramente positivo com o passar do tempo.

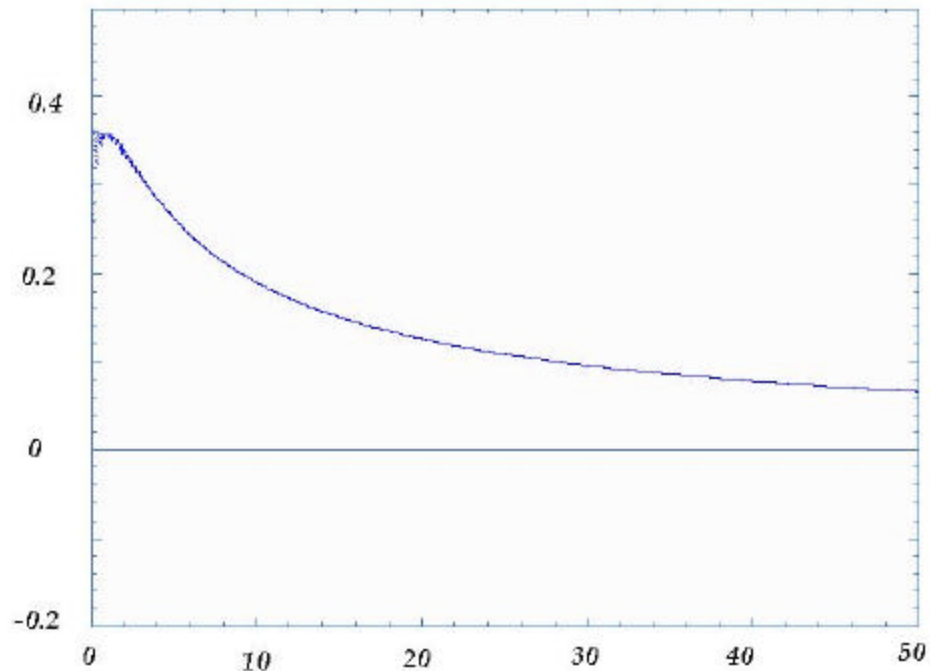
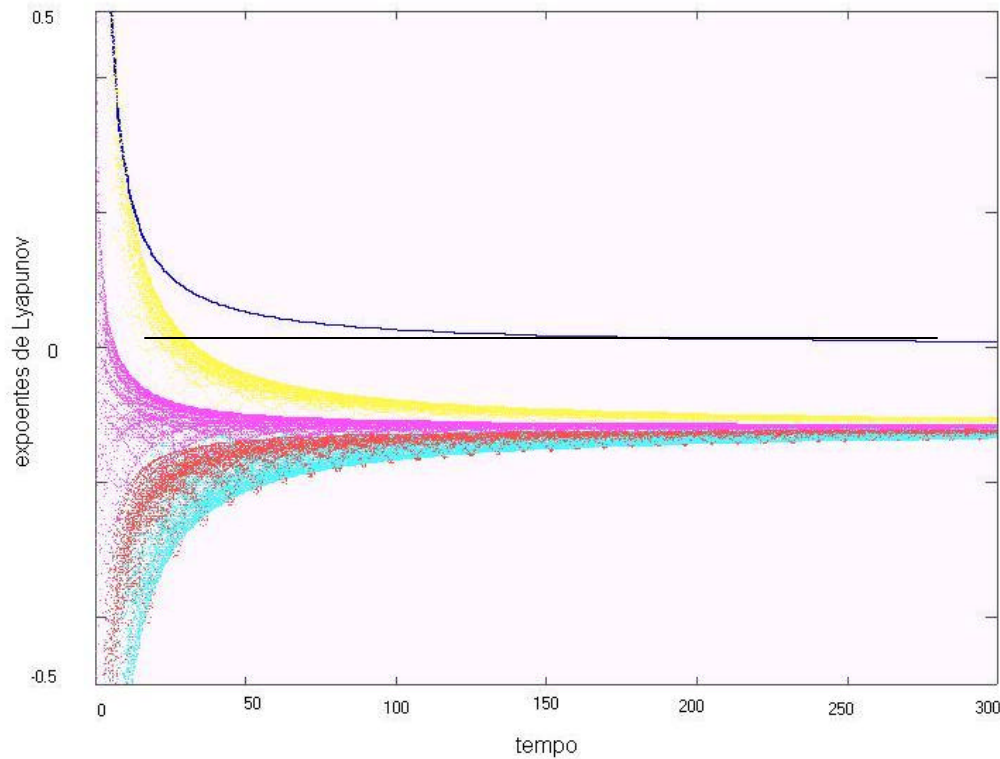


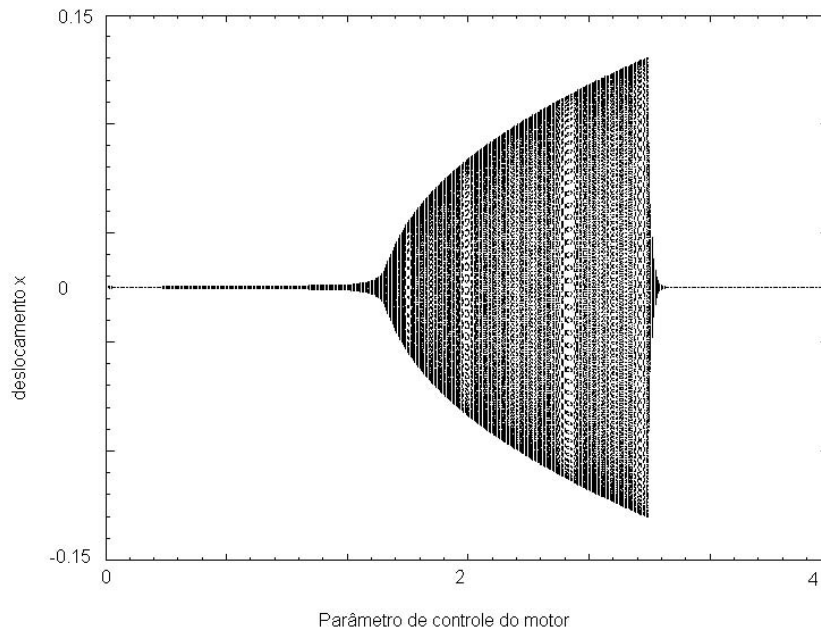
Figura 35- Espectro do Expoente de Lyapunov do sistema



**Figura 36-Espectro de Expoentes de Lyapunov**

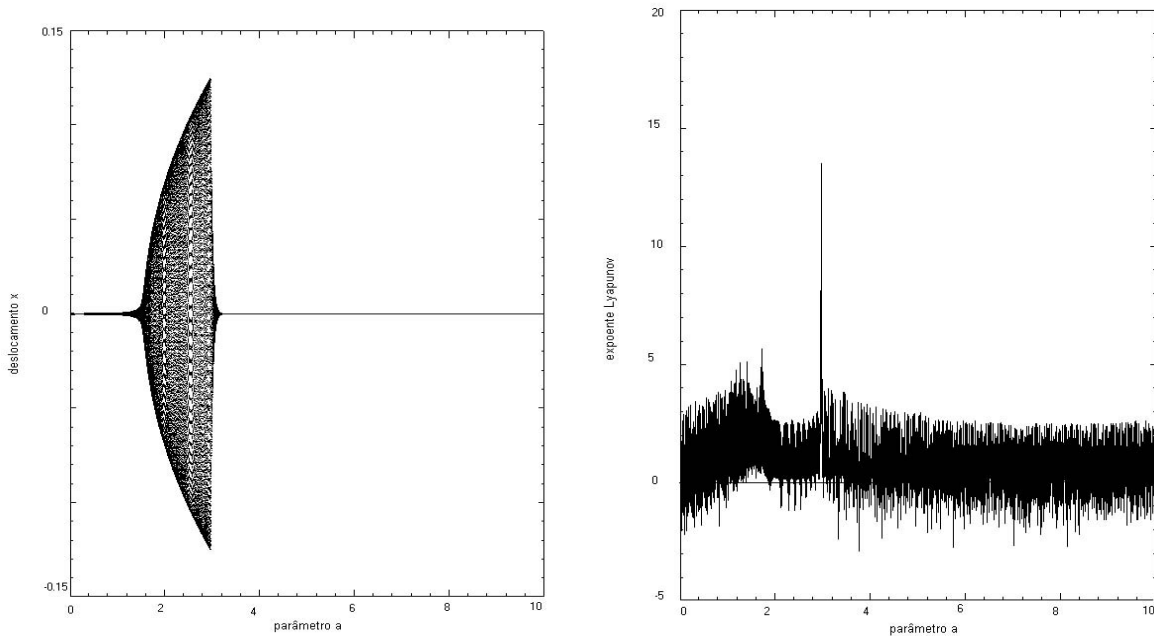
A figura 36 representa o espectro de cinco dos seis expoentes de Lyapunov que o sistema apresenta em função do tempo. A cor preta representa o maior expoente do sistema e estabiliza ao longo do tempo num valor positivo. Em amarelo, magenta, vermelho e azul claro estão representados o segundo, terceiro, quarto e o quinto expoente, respectivamente em função do tempo. Todos eles se estabilizam, ao longo do tempo, num valor negativo. O movimento quase periódico está associado ao fenômeno de *phase locking*.

O expoente de Lyapunov quantifica a sensibilidade do sistema dinâmico a condições iniciais e indica o grau em que trajetórias próximas no espaço de fase divergem. O comportamento caótico pode ser comprovado pela existência de no mínimo um expoente de Lyapunov positivo.



**Figura 37: Diagrama de bifurcação do parâmetro de controle  $\alpha$  pela resposta do sistema em amplitude  $x$**

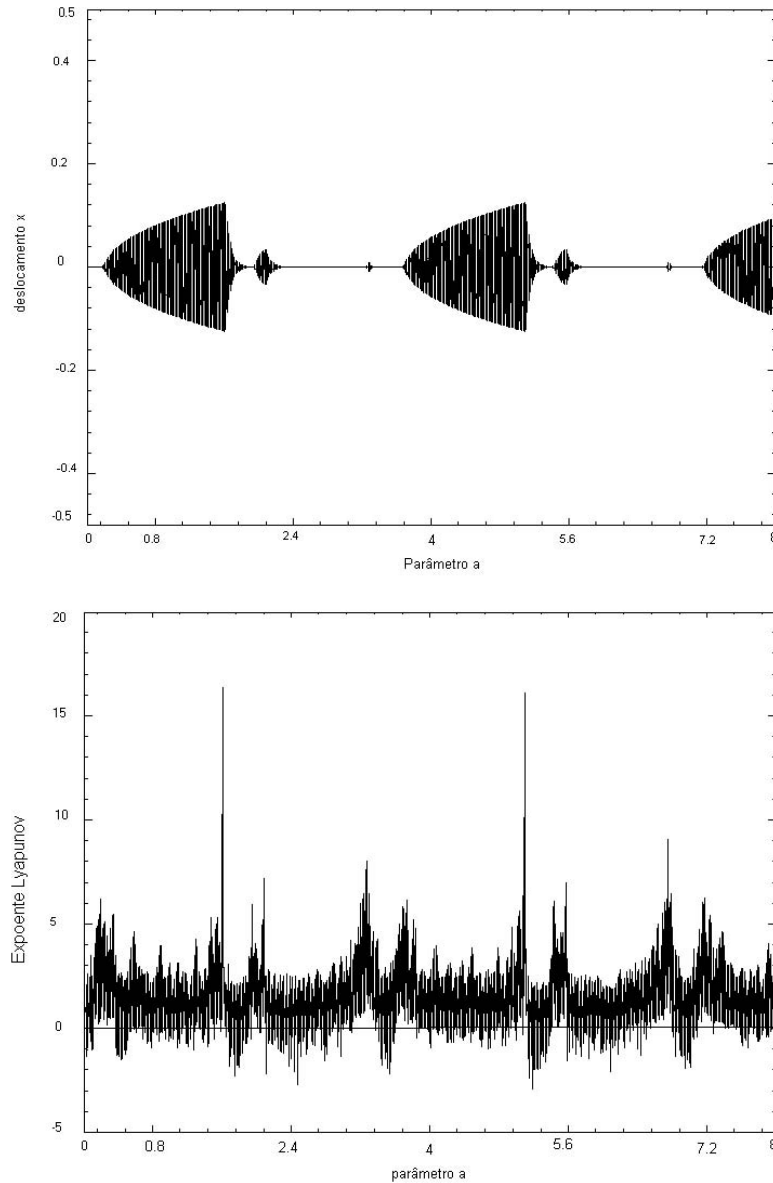
A Figura 37 representa o diagrama de bifurcação do parâmetro  $\alpha$  de controle do motor pela resposta do sistema em deslocamento  $x$ . O parâmetro de controle é variado de 0 a 4 e o parâmetro vale  $b=0.002$ . O diagrama foi realizado com 400 pontos por iteração. Na Figura 38, até o valor 1.33 do parâmetro  $\alpha$  o sistema apresenta uma resposta regular, seguida de regime irregular com aumento de amplitude. Perto do valor 1.6 ocorrem espaços em claro que caracterizam janelas periódicas na dinâmica irregular do sistema. Essas janelas voltam a aparecer próximo do valor 2 e próximo ao valor 2.5 do parâmetro de controle. A partir da proximidade do valor 3 o regime irregular cessa passando a apresentar uma resposta regular. Os movimentos irregulares existentes nas regiões escuras do diagrama, compreendidas praticamente na totalidade da região entre os valores 1.33 e 3 do parâmetro  $\alpha$ , podem ser de natureza caótica.



**Figura 38- a) digrama de bifurcação do parâmetro  $a$  do motor pela resposta do sistema b) digrama de bifurcação do parâmetro do motor pelo expoente de lyapunov**

A figura 38 b) é o diagrama de bifurcação do expoente de Lyapunov, também chamado de bifurcação do expoente de Lyapunov. Diferentemente do diagrama de bifurcação do sistema com resposta em amplitude, no eixo das ordenadas são plotados os valores para expoentes de Lyapunov. O parâmetro de controle  $a$  é variado de 0 a 10 e o parâmetro  $b=0.002$ . Para essa simulação a massa é considerada como  $m=5$  kg. As condições iniciais são:  $x_0 = 0.0004, \dot{x}_0 = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 30 \text{ rad/s}$

O diagrama de bifurcação do expoente de Lyapunov demonstra a relação entre o parâmetro do motor e a resposta do sistema em termos de expoente de Lyapunov. Para cada parâmetro testado um expoente correspondente é plotado. Na Figura 38 b) há uma relação entre os picos positivos do expoente com as regiões em preto no gráfico a). As regiões positivas em b) correspondem, em valor de  $a$ , com as regiões irregulares em a).



**Figura 39- a) diagrama de bifurcação pela resposta x b) bifurcação do parâmetro  $a$  pelo expoente de Lyapunov. Condição inicial diferente**

A figura 39 foi obtida com mesmos parâmetros citados acima. Observa-se além dos fenômenos já descritos para a figura 38, a repetição da mesma estrutura de bifurcações após o instante  $a=2.4$  e após  $a=6$ . Além disso, após o cessar das bifurcações com grandes amplitudes, perto de valor de  $a=1.9$  surge uma pequena estrutura de bifurcações com amplitudes menores, inexistente em figura 38. Em b) observa-se os picos do valor do expoente de Lyapunov quando há em a) o aparecimento de regimes irregulares indicando a caoticidade desses regimes. Ao



mesmo, tempo observa-se a diminuição dos valores do expoente em b) quando em a) a dinâmica é visivelmente mais regular como quando os valores do parâmetro  $a$  são:  $a= 1.76$ ,  $2.08 < a < 2.72$ ;  $3.36 < a < 3.65$ , em  $a = 5.28$ ;  $5.6 < a < 6.56$  e em  $a=6.88$ . A ocorrência de valores negativos de expoentes de Lyapunov em b) em locais onde não há visivelmente ocorrência de regimes regulares em a) está associada a presença de “janelas” periódicas.

As simulações numéricas deste capítulo demonstraram os regimes regulares e irregulares presentes de acordo com o parâmetro de controle do sistema. Foi visualizado o efeito Sommerfeld e o fenômeno do salto, através do diagrama de resposta em frequência. Uma análise do espaço de fase revelou variação deste quando foi variado o do parâmetro de controle.

## Capítulo 5

### Considerações Finais e Perspectivas de Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi estudado um sistema mecânico de um rotor não-ideal que consistem de um disco de massa  $m$  e com uma excentricidade  $\rho$  fixo a uma barra flexível. Considera-se que a fonte de energia do rotor tem potência limitada e o sistema apresenta formulação não-ideal, o que se denota através do acoplamento entre as coordenadas do deslocamento do sistema e a coordenada  $\varphi$  de rotação do rotor. O sistema de equações que modelam o sistema físico é, portanto, um sistema autônomo de três equações diferenciais de segunda ordem. Esse problema foi formulado em [30] onde ele é estudado através do método assintótico da média [11]. O estudo da Estabilidade, através do critério R-H revelou que o sistema será estável sempre que a característica da fonte de energia é decadente  $\frac{d}{d\Omega}L(\Omega) < 0$ .

A principal contribuição desse trabalho foi o estudo numérico. O sistema foi estudado através de simulações numéricas para visualizar a sua dinâmica não-linear. As simulações visaram entender a influência do torque na passagem pela ressonância, obter uma faixa de parâmetros do motor, visualizar bifurcações no sistema, estudar a evolução do espaço de fase com a variação do parâmetro de controle do motor e por fim, demonstrar o efeito Sommerfeld e o fenômeno do salto, presente nesse sistema não ideal. As simulações foram realizadas no software Matlab™ e Dynamics. O primeiro deles é largamente utilizado em simulações científicas e aplicações de engenharia e o segundo tem as ferramentas especiais para um estudo mais apurado de um sistema dinâmico.

Os diagramas temporais obtidos do deslocamento  $x$  e da velocidade angular  $\dot{\phi}$  mostraram oscilações regulares e irregulares de acordo com o parâmetro de controle do motor. Foram verificados: o fenômeno de *staling* quando o rotor não tem torque o suficiente para vencer as forças resistivas e a passagem pela ressonância quando há energia suficiente para vencer o torque resistivo.

Por sua vez, o diagrama de resposta em frequência demonstrou o fenômeno do salto e revelou a faixa de instabilidade no qual há descontinuidade na curva, vindo a confirmar o estudo da estabilidade realizado no capítulo 3. Notou-se também que a curva de resposta em frequência era inclinada devido as forças restauradoras não lineares e a faixa de instabilidade indicava que a fonte de energia era do tipo suave.

A investigação dos espaços de fase revelou uma dinâmica rica e intensa. A variação dos parâmetros de controle do motor revelou a evolução do espaço de fase do sistema e a modificação da sua topologia pressupõe a existência de diversos tipos de bifurcações. Constatou-se que com baixos valores de parâmetro de controle ( $\alpha < 1$ ) a dinâmica era mais rica. Com o aumento do parâmetro de controle os espaço de fases “achatava”, ou seja, percebeu-se que quanto mais limitada é a fonte de energia mais intensa era a interação entre o motor e o sistema vibrante e mais rica era a sua dinâmica.

Além disso, foram efetuadas simulações numéricas para investigar a dinâmica não linear e caótica. Foram realizados diagramas de bifurcação, mostrando a faixa de valores para os quais existia um regime regular e irregular. Os diagramas de bifurcação foram confirmados pela bifurcação dos expoentes de Lyapunov.

No campo das perspectivas para um trabalho futuro, um dos aspectos não contemplados por esse trabalho e que seria de um interesse promissor é um estudo criterioso das bifurcações presentes no sistema. Como foi mostrado a presença de bifurcações altera a topologia do espaço de fase e pode até levar um atrator a desaparecer repentinamente do espaço de fases, como ocorre por exemplo em bifurcações catastróficas. Um estudo matemático criterioso das condições de ocorrência e dos tipos de bifurcação presentes no sistema seria interessante para um trabalho futuro.

Outro ponto que mereceria uma discussão futura seria a consideração do problema com dois rotores fixos na mesma barra. Sabe-se que dois osciladores acoplados apresentam o fenômeno de sincronização que está associado a movimento quase-periódico cuja condição de ocorrência é uma bifurcação. Além disso, no sistema com dois rotores acoplados é possível realizar um estudo das ressonâncias já que aparecem duas frequências naturais distintas. Nesse caso um estudo numérico elaborado seria interessante para a visualização da dinâmica do sistema na passagem pelas ressonâncias.

Uma outra possibilidade seria a consideração do mesmo sistema de rotor estudado neste trabalho, porém, com a assimetria da barra. Tal problema já foi formulado em [28] e embora tenha sido estudado analítica e numericamente seria interessante um estudo da influência da assimetria na dinâmica não-linear do sistema.

Por fim, uma abordagem experimental do sistema estudado no presente trabalho possibilitaria um estudo prático da influência de vários parâmetros, além da fonte de energia, na dinâmica do sistema.

## Referências Bibliográficas

- [1] Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. On strange attractors and quasi-attractors. Nonlinear Dynamics and Turbulence. G.I.Barenblatt, G.Iooss, and D.D.Joseph, eds., Pitman, Marshfield, Massachusetts, 1983.
- [2] Aiba S. On a Vibration of a Rotation Shaft Passing through the Critical Speed. Bulletin of JSME, v.19, n. 128, 1976, 95 p.
- [3] Aguirre, L.A. A tutorial introduction to nonlinear dynamics and chaos. Part I: Tools. Benchmarks. *SBA Controle & Automação*, v.7, (1), pp.29-49, 1996.
- [4] Balthazar, J. M., Cheshankov, B. I., Ruschev, D. T., Barbanti, L., Weber, H. I. Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degrees of freedom, excited by a non-ideal energy source. *Journal of Sound and Vibration*, v.239, (5), pp.1075-1085, 2001.
- [5] Balthazar, J. M., Dantas, H. J. M. On the appearance of a Hopf bifurcation in a non-ideal mechanical problem. *Mechanics Research Communications*, v.30, (5), pp.493-503, 2003.
- [6] Balthazar, J. M., Mook, D. T., Reyolando, M. L. R. F., Weber, H. I., Fenili, A., Belato, D., Felix, J. L. P. Recent results on vibrating problems with limited power supply. In. 6<sup>th</sup> Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Łódź, Polonia. *Proceedings 6<sup>th</sup> Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*, 2001, v. , pp. .
- [7] Balthazar, J. M., Mook, D. T., Weber, H. I., Reyolando, M. L. R. F., Fenili, A., Belato, D., Felix, J. L. P. An overview on non-ideal vibrations. *Meccanica*, 2003
- [8] Balthazar, J. M., Reyolando, M. L. R. F., Weber, H. I., Fenili, A., Belato, D., Felix, J. L. P., Garzelli, F. J. *A review of new vibrating issues due to non-ideal energy sources*. Dynamical Systems and Control, Taylor & Francis Group, edited by: F. Udwadia, H. I. Weber, G. Leimann. ISBN: 0415309972.
- [9] Balthazar, J. M., Pontes, B. R. *On friction induced non-linear and non-ideal (regular and chaotic) vibrations: a source of fatigue*. Dynamical Systems and Control, Taylor & Francis

Group, edited by: F. Udwadia, H. Weber, G. Leitmann. ISBN: 0415309972.

- [10] Belato, D., Weber, H. I., Balthazar, J. M. Escape in a nonideal electro-mechanical system. *ABCM*, v. XXIV, pp. 235-340, 2002.
- [11] Bogoliubov, N. N. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. India: Hindustan Publishing Corporation, 1961, 487 p.
- [12] Brasil, R. M. L. R. F., Mook, D. T. Nonlinear vibrations of a portal frame excited by a nonideal motor. In. 5th Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures, Blacksburg, Virginia Tech, USA. Proceedings of 5th Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures, 1994.
- [13] Cavalca, K.L. *Estudo de um dispositivo de redução de amplitude na passagem de um rotor pela velocidade crítica*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1988, 109 p. Tese(mestrado).
- [14] Dantas M. J. H., Balthazar, J. M. Uma análise qualitativa das oscilações planas de uma estrutura aporticada: ressonâncias. II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José dos Campos, SP, Brasil. Anais do II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2003, v.2, pp. , ISBN:85-86883-15-8.
- [15] Dimentberg F.M. Flexural Vibrations of Rotating Shafts, Bitterworth, 1961.
- [16] Dimentberg F.M. Dynamic of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply. . *Nonlinear Dynamics*, v.13 p.171-187,1997
- [17] Dowel E. Chaotic oscillations in mechanical systems. *Computers & Structures*, v.30, n.1/2, p.171-184, 1988.
- [18] Evan-Iwanowski, R. M. Resonance oscillations in mechanical systems. The Netherlands, Amsterdam: Elsevier, 1976, 292 p.
- [19] Felix, J. L. P., Balthazar, J. M., Brasil, R. M. L. R. F. On non-ideal and non-linear portal frame dynamics analysis using Bogoliubov averaging method. *ABCM*, v. XXIV, ( ), pp , 2002.
- [20] Ferrara-Fiedler, N., Prado, C. P. C. *Caos: uma introdução*. São Paulo (SP), Brasil: Edgard Blücher Ltda., 1994, p.
- [21] Foale, S., Thompson, J. M. T. Geometrical concepts and computational techniques of nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 89, ( ), pp.381-394, 1991.
- [22] Ganapathy S., Parameswaran M. A. Transition over Ressonance and Power Requirements of an Unbalanced Mass-driven Vibratory System. *Mechanism and Machine Theory*, v.21, n.1, 1986. 73 p.

- [23] Golnaraghi, M. F. (1991) Chaotic Vibrations and Resonances in a Flexible-Arm Robot. CSME, v. 15, (90), pp.213-234, 1991.
- [24] Gonçalves, P. B., Prado, Z. J. G. N. Instabilidade de sistemas dinâmicos. In. 1a. Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos (SP), Brasil. Aplicações em Dinâmica e Controle, ABCM/SBMAC, 2001, v.1, pp.1-18. ISBN: 85-85769-09-2.
- [25] Guckenheimer, J., Holmes, P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York, USA: Springer-Verlag, 1980, 459 p.
- [26] Guilherme, K. L., Tsuchida, M., Balthazar, J. M., Silva, G. N. (2001) Um estudo do comportamento de um sistema dinâmico não ideal durante a passagem pela ressonância. In. I Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle, São Carlos (SP), Brasil. Aplicações em Dinâmica e Controle, ABCM/SBMAC, 2001, v.1, pp.1-18. ISBN: 85-85769-09-2.
- [27] Holmes P. Nonlinear dynamics, chaos, and mechanics. Applied Mechanics Review, v.43, n.5, pt.2, p.S23-S39, 1990.
- [28] Iwatsubo T., H.Kanki, R. Kawai. Vibration of asymmetric rotor through critical speed with limited power supply. Journal Mechanical Engineering Science. V.14 n.3 1973
- [29] Kalinshchuk A.K. Elementary methods for the study of the dynamical properties of a system. Zh.Tekhn. Fiz., 9, n.8, 1939.
- [30] Kononenko, V. O. Vibrating System of Limited Power Supply. ILife, 1969, 236 p.
- [31] Kononenko V.O., Korablev S.S. An experimental investigation of the resonance phenomena with a centrifugally excited alternating force. Tr. Mosk. Tekhn. Inst. Lekh. Prom., n 14, 1959.
- [32] Kuroiwa, T., Brasil, R. M. L. R. F., Balthazar, J. M. Controle passivo de vibrações de bases de motores não ideais. In. II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, São José dos Campos, SP, Brasil, Anais do II Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações, ABCM/SBMAC, 2003, v.2, pp.965-970. ISBN: 85-86883-15-8.
- [33] Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. Princeton University Press. Princeton, New Jersey, n.27, p.527, 1947.
- [34] Martyshkin V.S. Directions for the study of the dynamical characteristics of building materials. Dynamical properties of building materials. Stroiizdat, 1940.
- [35] Matsuura K. A study of Vibration and Velocity Characteristics an Accelerated Unbalanced Rotor. Bulletin of JSME, v.18, n.125, 1975, 1226 p.
- [36] Meirovitch, L. Methods of Analytical Dynamics. New York, USA: McGraw-Hill Book

Company, .1964.

- [37] Monteiro, L. H. A. Sistemas Dinâmicos . São Paulo, SP, Brasil: Livraria da Física, 2002, p. ISBN: 85-88325-08-X
- [38] Nayfeh, A. H. (1973) Perturbation Methods. USA: Wiley series in pure and applied mathematics, 1973, p.
- [39] Nayfeh, A. H. Nonlinear Interactions: Analytical, Computational, and Experimental Methods. USA: Wiley. Series in Nonlinear Science, 2000.
- [40] Nayfeh, A. H., Balachandran, B. Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods. USA: Wiley, 1995, 685 p.
- [41] Nayfeh, A. H., Mook, D. T. Nonlinear Oscillations. USA: Wiley, 1979.704 p.
- [42] Pai, P.F., Wen, B., Naser,A. S., Schulz, Z. M. Structural vibration control using PZT patches and non-linear phenomena. Journal of Sound and Vibration , 215, pp. 273-296, 1998.
- [43] Parker T.S., Chua L.O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer-Verlag. 1989. 341 p.
- [44] Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transitions to turbulence in dissipative dynamical systems. Commun. Math. Phys., v.74, p. 189-197, 1980.
- [45] Sado, D., Kot, M. The chaotic vibration of an autoparametrical system with non ideal source of power. 7th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications, A Lodz, Poland, Proceedings of 7th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications, 2003, pp.
- [46] Sekar ap., Narayanan S. Chaos in a mechanical systems: a review. Sādhanā, v.20, pt.2/4, p.529-582, 1995.
- [47] Sommerfeld, A. Beiträge Zum Dynamischen Ausbau der Festigkeitslehe Physikal Zeitschr. 3, pp.266-286, 1902.
- [48] Souza, S. L. T., Caldas, I. L., Balthazar, J. M., Brasil, R. M. L. R. F. Analysis of regular and irregular dynamics of nonideal gear rattling problem. ABCM, v.XXIV, pp. 235-340, 2002.
- [49] Suherman S., Plaut R.H. Use of a flexible internal support to suppress vibrations of a rotating shaft passing through a critical speed. Journal of Vibration and Control, v.3, p.213-233, 1997.
- [50] Thompson J. M. T., Bishop S. R. Nonlinearity and Chaos in Engineering Dynamics. Wiley, 1994



- [51] Tsuchida, M., Guilherme, K. L., Balthazar, J. M., Silva, G. N., Cheshankov, B. I. On regular and irregular vibrations of a non-ideal system with two degrees of freedom. 1:1 resonance. *Journal of Sound and Vibration*, v.260, pp.949-960, 2003.
- [52] Tuer, K.L., Golnaraghi, M.F., Wang. D. Development of a generalized active vibration suppression strategy for a cantilever beam using internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, 5, pp. 131-151, 1994.
- [53] Wiggins, S. *Global Bifurcation and Chaos*. Applied Mathematical Sciences, v. 73, Springer Verlag, 1980.

## Anexos

Neste anexo encontram-se as rotinas em Matlab™ que foram utilizadas para realizar simulações da curva de resposta em frequência numérica.

```
% PROGRAMA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA - CURVA DO SALTO
% Elvira Rafikova abril 2005
% Realiza a integração de um sistema nao-ideal e plota a curva do salto
```

```
clear all;
close all;
global a;

%intervalo de integracao
ti=0;
tf=20;
intt=[ti tf];
%condicoes iniciais
xo=0.04;
xlo=0;
yo=0;
ylo=0;
fio=0;
filo=50;
y0=[xo;xlo;yo;ylo;fio;filo];% condições iniciais

a=0.7;
fin=3.0;
while ( a < fin ) % laço que varia o parâmetro de controle

    a= a + 0.1;
    y0=[xo;xlo;yo;ylo;fio;filo];% condições iniciais
```

```

[t,y]=ode45('functcurva3SI',intt,y0); % integra tudo pra um parâmetro do motor
%mini=min(y(:,1));
for j=1:10 % tira o transiente
    y(j,1)=0;
end
[maiorx1,maxin1]=max(y(:,1)) % pega a amplitude máxima do vetor resultado da integração
maiorphi1=y(maxin1,6);% pega a frequencia equivalente
y(maxin1,1)=0;
[maiorx2,maxin2]=max(y(:,1)); % pega a amplitude maxima do vetor resultado da integração
maiorphi2=y(maxin2,6);% pega a frequencia equivalente
amed=(maiorx1+maiorx2)/2;
phimed=(maiorphi1+maiorphi2)/2;
figure(1);
plot(phimed,amed,'k.','markersize',5);
hold on;

end
grid;

% função que contem as equações do sistema nao-ideal de um rotor
function yprime = functrotorb(t,y)
global a;
m= 5.35; % massa kononenko
r=0.0004; %excentricidade kononenko
c=28400; % coeficiente rigidez kononenko
hi=0.00075; % kononenko
q=0.00077;% my q que usei pras energias
I=0.00125; %kononenko
b=0.02; %parâmetro do motor
k= 0.00000015; % damping kononenko

yprime =[y(2)
    (-c*y(1)+c*r*cos(y(5))-(k+hi)*y(2)-k*y(6)*y(3))/m
    y(4)
    (-c*y(3)+c*r*sin(y(5))-(k+hi)*y(4)-k*y(6)*y(1))/m
    y(6)
    (a-b*y(6)-q*y(6)-c*r*(y(1)*sin(y(5))-y(3)*cos(y(5)))-k*(y(2)*y(3)-
y(4)*y(1))+k*y(6)*(y(1)^2+y(3)^2))/I];

```