

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE, DEFENDIDA POR Denilson Marques
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 19 / 02 / 2004.
Katia Lucchesi Cavalca
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Metodologia para Ajuste e Comparação de Modelos em Confiabilidade

Autor: **Denilson Marques**
Orientador: **Katia Lucchesi Cavalca**

02/04

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
DESENVOLVIMENTO DE COLEÇÕES

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Metodologia para Ajuste e Comparação de Modelos em Confiabilidade

Autor: Denilson Marques

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2004
S.P. – Brasil**

UNIDADE	PC
Nº CHAMADA	T/11/10/04
	M348m
V	EX
TOMBO BC	61007
PROC.	16.117-04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	18-11-04
Nº CPD	

Bib Id 332064

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M348m Marques, Denilson
Metodologia para ajuste e comparação de modelos
em confiabilidade / Denilson Marques. --Campinas, SP:
[s.n.], 2004.

Orientador: Kátia Lucchesi Cavalca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Confiabilidade (Probabilidades). 2.
Verossimilhança (Estatística). 3. Estimativa de
parâmetro. 4. Mínimos quadrados. 5. Estatística –
Métodos gráficos. I. Cavalca, Kátia Lucchesi. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Metodologia para Ajuste e Comparação de
Modelos em Confiabilidade**

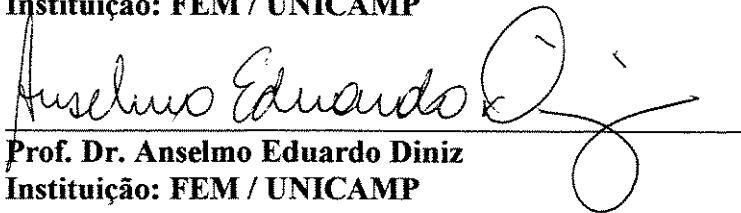
Autor: **Denilson Marques**

Orientador: **Katia Lucchesi Cavalca**



Profa. Dr. Katia Lucchesi Cavalca, Presidente

Instituição: FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Anselmo Eduardo Diniz

Instituição: FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Gilberto Francisco Martha de Souza

Instituição: Escola Politécnica / USP

Campinas, 19 de fevereiro de 2004

Dedicatória:

Dedico este trabalho à Deus, à minha família e à minha querida namorada.

Agradecimentos:

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

À minha mãe, Dona Maria, pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

À minha namorada Rosângela, pelo apoio sempre que necessário.

À minha orientadora Professora Kátia Lucchesi Cavalca, pelo apoio, compreensão e incentivo demonstrado durante este período.

À todos os professores, funcionários e colegas do Departamento de Projeto Mecânico, em especial Zilda e Juliano, que me ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Aos Srs. Alexandre Degani, da empresa Z.F. do Brasil S.A., Alexandre Masstaler, da empresa INA do Brasil, e o professor Anselmo Eduardo Diniz, do Departamento de Fabricação da Unicamp, pela colaboração e informações imprescindíveis para o trabalho.

À Capes, pela auxílio de bolsa, que fez possível o desenvolvimento da pesquisa.

“Para um homem entrar no Reino dos Céus, precisa carregar o Paraíso em sua alma.”

Henry Drummond

Resumo

MARQUES, Denilson, *Metodologia de Ajuste e Comparação de Modelos em Confiabilidade*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 126p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho apresenta uma metodologia para ajuste de modelos em confiabilidade e estudos comparativos envolvendo duas ou mais amostras. A primeira etapa é a seleção da distribuição estatística mais adequada a um determinado processo de falha. Essa seleção é realizada através de Gráficos de Probabilidade e do Coeficiente de Determinação. Em seguida, os parâmetros da distribuição são estimados através do Método de Máxima Verossimilhança. Para a distribuição Exponencial, há expressões diretas que fornecem as estimativas dos parâmetros. Para a distribuição Normal e Weibull, as equações para obtenção das estimativas dos parâmetros são resolvidas numericamente empregando-se o método de Newton-Raphson. Devido à incerteza inerente a cada estimativa, intervalos de confiança aproximados pela distribuição Normal são calculados e o tamanho aproximado da amostra é fornecido em função de um intervalo com uma magnitude e nível de confiança específico. Com os modelos completamente definidos para cada amostra, testes de hipóteses são realizados com objetivo de verificar a existência de diferenças estatisticamente significativas e o Teste da Razão de Verossimilhança é empregado. A metodologia desenvolvida foi aplicada a um exemplo da literatura consultada e três casos reais foram abordados.

Palavras Chave

Confiabilidade, Método de Máxima Verossimilhança, Teste da Razão de Verossimilhança.

Abstract

MARQUES, Denilson, *Methodology for Fitting and Comparison Models in Reliability*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 126p. Dissertação (Mestrado).

This investigation presents a methodology for fitting models in reliability and comparative studies involving two or more samples. The first stage is the selection of the most appropriate distribution to determined failure process. This selection is carried through Probability Plots and the Coefficient of Determination. After that, the parameters of the distribution are estimated through Maximum Likelihood Method. For the Exponential distribution, there are direct expressions that supply the estimates for the parameters. For the Normal and Weibull distributions, the equations to obtain the estimates for the parameters are solved numerically using the Newton-Raphson Method. Due to inherent uncertainty to each estimate, confidence intervals approached by the Normal distribution are calculated and the approximated sample size is supplied in function of an interval with a specific magnitude and confidence level. With the models completely defined for each sample, hypothesis tests are carried out with the objective to verify the existence of statically significant differences and the Likelihood Ratio Test is used. The developed methodology was applied to an example of consulted literature and three real cases had been analyzed.

Key Words

Reliability, Maximum Likelihood Method, Likelihood Ratio Test

Índice:

Lista de Figuras.....	iv
Lista de Tabelas.....	viii
Nomenclatura.....	ix
1 – Introdução.....	1
2 – Revisão Bibliográfica.....	7
3 – Conceitos Básicos e Seleção da Distribuição Estatística.....	17
3.1 – Eventos Aleatórios.....	19
3.2 – Variáveis Aleatórias.....	20
3.3 – Funções Utilizadas na Modelagem da Confiabilidade.....	21
3.3.1 – Tempo Médio Até a Falha.....	23
3.3.2 – A Função Taxa de Falha.....	24
3.3.3 – Relações entre as Funções em Confiabilidade.....	26
3.3.4 – Curva da Banheira.....	26
3.4 – Distribuições Estatísticas Utilizadas em Processos de Falha Contínuos.....	27
3.4.1 – Distribuição Exponencial.....	29
3.4.2 – Distribuição Normal.....	30
3.4.3 – Distribuição de Weibull.....	31

3.5 – Classificação dos Dados de Confiabilidade.....	33
3.6 – Estimativa Empírica da Curva de Falha Acumulada.....	35
3.7 – Seleção da Distribuição Estatística.....	36
3.7.1 – Gráfico de Probabilidade Exponencial.....	39
3.7.2 – Gráfico de Probabilidade Normal.....	40
3.7.3 – Gráfico de Probabilidade de Weibull.....	41
3.7.4 – Coeficiente de Determinação.....	42
4 – Estimação de Parâmetros e Testes de Hipóteses.....	45
4.1 – Estimação de Parâmetros.....	46
4.1.1 – Métodos de Estimação de Parâmetros.....	48
4.1.2 – Método de Máxima Verossimilhança.....	49
4.1.2.1 – Distribuição Exponencial.....	51
4.1.2.2 – Distribuição Normal.....	52
4.1.2.3 – Distribuição de Weibull.....	52
4.1.3 – Métodos Numéricos na Resolução de Sistemas de Equações Não Lineares.....	53
4.1.3.1 – Método de Newton-Raphson na Resolução de Equações de Verossimilhança.....	54
4.1.4 – Intervalos de Confiança.....	56
4.1.4.1 – Intervalos de Confiança por Aproximação Normal.....	57
4.1.4.2 – Determinação do Tamanho da Amostra.....	59
4.2 – Testes de Hipóteses.....	60
4.2.1 – Erros do Tipo I e Tipo II.....	62
4.2.2 – Procedimento Geral de Testes de Hipóteses.....	64
4.2.3 – Testes da Razão de Verossimilhança.....	65
4.2.3.1 – Comparações Envolvendo Uma Amostra.....	66
4.2.3.2 – Comparações Envolvendo Duas ou Mais Amostras.....	67
5 – Descrição da Metodologia e Implementação Computacional.....	69
5.1 – Seleção da Distribuição.....	72

5.2 – Estimação de Parâmetros.....	78
5.3 – Intervalos de Confiança.....	81
5.4 – Testes de Hipóteses.....	87
6 – Análise de Exemplos Reais.....	89
6.1 – Exemplo 1: Verificação da Variação nos Parâmetros do Modelo.....	90
6.2 – Exemplo 2: Estudo Comparativo Entre Dois Rolamentos.....	99
6.3 – Exemplo 3: Estudo Comparativo Sobre Vida de Ferramentas de Corte.....	109
7 – Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros.....	119
Referências Bibliográficas.....	125

Lista de Figuras

Figura 3.1	Função Confiabilidade.....	21
Figura 3.2	Função Distribuição Acumulada.....	22
Figura 3.3	Função Densidade de Probabilidade.....	22
Figura 3.4	Função Taxa de Falha.....	25
Figura 3.5	Curva da Banheira para Componentes Eletrônicos.....	27
Figura 3.6	Curva da Banheira para Componentes Mecânicos.....	27
Figura 3.7	Tipos de Censura Comuns em Confiabilidade.....	34
Figura 3.8	Desvios dos Dados em Relação ao Modelo Estimado de Regressão.....	37
Figura 3.9	Gráfico de Probabilidade Exponencial.....	39
Figura 3.10	Gráfico de Probabilidade Normal.....	40
Figura 3.11	Gráfico de Probabilidade de Weibull.....	41
Figura 4.1	Relação entre População e Amostra.....	46
Figura 4.2	Distribuição Amostral de Dois Estimadores Não Tendenciosos.....	48
Figura 4.3	Região Crítica e Região de Aceitação.....	62
Figura 4.4	Distribuição de Qui-Quadrado.....	66
Figura 5.1	Fluxograma Geral do Programa.....	70
Figura 5.2	Fluxograma de Entrada de Dados.....	72
Figura 5.3	Tela de Apresentação do Programa.....	73
Figura 5.4	Tela de Entrada de Dados do Programa.....	73
Figura 5.5	Fluxograma de Seleção da Distribuição Estatística.....	74
Figura 5.6	Gráfico de Probabilidade Exponencial Amostra 1.....	75
Figura 5.7	Gráfico de Probabilidade Exponencial Amostra 2.....	75

Figura 5.8	Gráfico de Probabilidade Normal Amostra 1.....	76
Figura 5.9	Gráfico de Probabilidade Normal Amostra 2.....	76
Figura 5.10	Gráfico de Probabilidade de Weibull Amostra 1.....	77
Figura 5.11	Gráfico de Probabilidade de Weibull Amostra 2.....	77
Figura 5.12	Fluxograma: Estimação de Parâmetros.....	79
Figura 5.13	Modelo Ajustado: Amostra 1.....	80
Figura 5.14	Modelo Ajustado: Amostra 2.....	80
Figura 5.15	Fluxograma: Intervalos de Confiança e Tamanho da Amostra.....	81
Figura 5.16	Intervalos de Confiança: Seleção do Nível de Confiança.....	82
Figura 5.17	Intervalo de Confiança Para os Parâmetros e MTTF: Amostra 1.....	83
Figura 5.18	Intervalo de Confiança Para os Parâmetros e MTTF: Amostra 2.....	83
Figura 5.19	Intervalo de Confiança Falha Acumulada: Amostra 1.....	84
Figura 5.20	Intervalo de Confiança Falha Acumulada: Amostra 2.....	84
Figura 5.21	Intervalo de Confiança Falha Acumulada: Todas as Amostras.....	85
Figura 5.22	Tamanho da Amostra em Função de um Intervalo Específico: Amostra 1.....	86
Figura 5.23	Tamanho da Amostra em Função de um Intervalo Específico: Amostra 2.....	86
Figura 5.24	Fluxograma: Testes de Hipóteses.....	87
Figura 5.25	Tela de Testes de Hipóteses.....	88
Figura 6.1	Gráfico de Probabilidade Exponencial: Lote Produzido em Janeiro de 2001...	90
Figura 6.2	Gráfico de Probabilidade Exponencial: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.....	91
Figura 6.3	Gráfico de Probabilidade Normal: Lote Produzido em Janeiro de 2001.....	91
Figura 6.4	Gráfico de Probabilidade Normal: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.....	92
Figura 6.5	Gráfico de Probabilidade de Weibull: Lote Produzido em Janeiro de 2001.....	92
Figura 6.6	Gráfico de Probabilidade de Weibull: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.	93
Figura 6.7	Modelo Ajustado: Lote Produzido em Janeiro de 2001.....	94
Figura 6.8	Modelo Ajustado: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.....	94
Figura 6.9	Intervalos de Confiança MTTF: Lote Produzido em Janeiro de 2001.....	95
Figura 6.10	Intervalos de Confiança MTTF: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.....	95
Figura 6.11	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Lote Produzido em Janeiro de 2001.....	96

Figura 6.12	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.....	96
Figura 6.13	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Lotes Produzidos em Jan. e Fev. / 2001.....	97
Figura 6.14	Tamanho da Amostra: Lote Produzido em Janeiro de 2001.....	97
Figura 6.15	Tamanho da Amostra: Lote Produzido em Fevereiro de 2001.....	98
Figura 6.16	Testes de Hipóteses: Lotes Produzidos em Janeiro e Fevereiro de 2001.....	98
Figura 6.17	Bancada de Teste de Durabilidade.....	99
Figura 6.18	Gráfico de Probabilidade Exponencial: Rolamento 1.....	100
Figura 6.19	Gráfico de Probabilidade Exponencial: Rolamento 2.....	101
Figura 6.20	Gráfico de Probabilidade Normal: Rolamento 1.....	101
Figura 6.21	Gráfico de Probabilidade Normal: Rolamento 2.....	102
Figura 6.22	Gráfico de Probabilidade de Weibull: Rolamento 1.....	102
Figura 6.23	Gráfico de Probabilidade de Weibull: Rolamento 2.....	103
Figura 6.24	Modelo Ajustado: Rolamento 1.....	104
Figura 6.25	Modelo Ajustado: Rolamento 2.....	104
Figura 6.26	Intervalos de Confiança MTTF: Rolamento 1.....	105
Figura 6.27	Intervalos de Confiança MTTF: Rolamento 2.....	105
Figura 6.28	Intervalos de Confiança Falha Acum.: Rolamento 1.....	106
Figura 6.29	Intervalos de Confiança Falha Acum.: Rolamento 2.....	106
Figura 6.30	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Rolamentos 1 e 2.....	107
Figura 6.31	Tamanho da Amostra: Rolamento 1.....	108
Figura 6.32	Tamanho da Amostra: Rolamento 2.....	108
Figura 6.33	Testes de Hipóteses: Rolamentos 1 e 2.....	109
Figura 6.34	Gráfico de Probabilidade Exponencial: TiN.....	110
Figura 6.35	Gráfico de Probabilidade Exponencial: TiCN + TiN.....	110
Figura 6.36	Gráfico de Probabilidade Normal: TiN.....	111
Figura 6.37	Gráfico de Probabilidade Normal: TiCN + TiN.....	111
Figura 6.38	Gráfico de Probabilidade de Weibull: TiN.....	112
Figura 6.39	Gráfico de Probabilidade de Weibull: TiCN + TiN.....	112
Figura 6.40	Modelo Ajustado: TiN.....	113

Figura 6.41	Modelo Ajustado: $TiCN + TiN$	114
Figura 6.42	Intervalos de Confiança MTTF: TiN	114
Figura 6.43	Intervalos de Confiança MTTF: $TiCN + TiN$	115
Figura 6.44	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: TiN	115
Figura 6.45	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: $TiCN + TiN$	116
Figura 6.46	Intervalos de Confiança Falha Acumulada: TiN e $TiCN + TiN$	116
Figura 6.47	Tamanho da Amostra: TiN	117
Figura 6.48	Tamanho da Amostra: $TiCN + TiN$	117
Figura 6.49	Teste de Hipóteses: TiN e $TiCN + TiN$	118

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Relações entre as Funções em Confiabilidade.....	26
Tabela 3.2	Principais Distribuições Estatísticas e suas Aplicações.....	28
Tabela 3.3	Curva de Falha Acumulada pelo Método Ranking.....	36
Tabela 4.1	Decisões em Testes de Hipóteses.....	63
Tabela 5.1	Dados de Falha: Retentor de uma Torradeira Elétrica.....	71
Tabela 5.2	Resultados do Coeficiente de Determinação.....	78
Tabela 6.1	Resultados do Coeficiente de Determinação: Exemplo 1.....	93
Tabela 6.2	Resultados do Coeficiente de Determinação: Exemplo 2.....	103
Tabela 6.3	Resultados do Coeficiente de Determinação: Exemplo 3.....	113

Nomenclatura

Letras Latinas

A	- Evento.
B	- Evento.
$A \cap B$	- Intersecção dos Eventos A e B .
$A \cup B$	- União dos Eventos A e B .
$Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$	- Covariância Entre as Estimativas de Dois Parâmetros.
d	- Intervalo de Confiança Específico.
e	- Número de Elementos Testados.
E	- Evento.
E^c	- Evento Complementar.
$E(T)$	- Valor Médio Esperado da Variável Aleatória T .
\hat{E}	- Estimativa de um Parâmetro de uma Distribuição.
f	- Número de Falhas.
$f(t)$	- Função Densidade de Probabilidade.
$F(t)$	- Função Distribuição Acumulada.
g	- Graus de Liberdade.
$h(t)$	- Taxa de Risco Instantânea ou Função Taxa de Falha.
H_0	- Hipótese Nula.
H_1	- Hipótese Alternativa.
I	- Incremento do Número de Ordem Rank.

j	- Número de Ordem Rank.
k	- Número de Parâmetros de uma Distribuição.
l	- Limite Inferior de Confiança.
L	- Função Verossimilhança.
n	- Tamanho da Amostra.
N_e	- Número de Ocorrência do Evento E em n triagens
$p(E)$	- Frequência Relativa do Evento E .
$P(E)$	- Probabilidade de Ocorrência do Evento E .
$P(A B)$	- Probabilidade de Ocorrência do Evento A Dado que Ocorreu o Evento B .
$R(t)$	- Função Confiabilidade.
R^2	- Coeficiente de Determinação.
se	- Erro Padrão de um Estimador do Parâmetro de uma Distribuição.
S	- Espaço Amostral.
t	- Tempo de Falha.
T	- Variável Aleatória Contínua Denotando o Tempo Até a Falha ou Estatística de Teste da Razão de Verossimilhança.
u	- Limite Superior de Confiança.
$Var(\hat{\theta})$	- Variância de um Estimador do Parâmetro de uma Distribuição.
w	- Variável Auxiliar no Cálculo de Intervalo de Confiança.
x	- Variável Explanatória de um Modelo de Regressão.
X	- Variável Aleatória
y	- Variável de Resposta de um Modelo de Regressão.
\bar{y}	- Média Geral de um Modelo de Regressão.
z	- Escore Padronizado da Distribuição Normal.

Letras Gregas

α	- Parâmetro de Escala ou Vida Característica da Distribuição de Weibull.
β	- Parâmetro de Forma da Distribuição de Weibull.
δ	- Probabilidade de Erro do Tipo II.

ε	- Termo de Erro Aleatório de um Modelo de Regressão.
γ_0	- Coeficiente de Regressão ou Intercepção da Reta Ajustada por Mínimos Quadrados.
γ_1	- Coeficiente de Regressão ou Inclinação da Reta Ajustada por Mínimos Quadrados.
Γ	- Função Gama.
λ	- Parâmetro de Escala ou Taxa de Falha da Distribuição Exponencial.
μ	- Parâmetro de Localização ou Média da Distribuição Normal.
η	- Nível de Significância ou Probabilidade de Erro do Tipo I.
$\hat{\Sigma}$	- Matriz de Variância-Covariância.
σ	- Desvio Padrão ou Parâmetro de Escala da Distribuição Normal.
σ^2	- Variância.
$\varphi(z)$	- Função Densidade de Probabilidade da Distribuição Normal Padronizada.
$\Phi(z)$	- Função Distribuição Acumulada da Distribuição Normal Padronizada.
θ	- Parâmetro de uma Distribuição.
$\hat{\theta}$	- Estimador do Parâmetro de uma Distribuição.
χ^2	- Distribuição de Qui-Quadrado.

Subscritos

a	- Número de Amostras.
e	- Evento.
med	- Mediana.
i	- Falha.
j	- Suspensão.
l	- Inferior.
k	- Parâmetro.
n	- Número de Triagens.
t	- Tempo.
u	- Superior.

Superescritos

- c* - Complementar
- r* - Falhas.
- s* - Suspensões.

Abreviações

- CFR* - Constant Failure Rate (Taxa de Falha Constante).
- DFR* - Decreasing Failure Rate (Taxa de Falha Decrescente).
- ENTVM* - Estimador Não Tendencioso de Variância Mínima.
- IFR* - Increasing Failure Rate (Taxa de Falha Crescente).
- MTTF* - Mean Time To Failure (Tempo Médio Até a Falha).
- SQ_R - Soma Quadrática da Regressão.
- SQ_E - Soma Quadrática dos Erros.
- SQ_T - Soma Quadrática Total Corrigida.

Capítulo 1

Introdução

O crescente desenvolvimento tecnológico, a intensa competição global acirrada pela abertura de mercado e o aumento das expectativas do cliente por melhor desempenho em um período de tempo maior têm impulsionado as indústrias a despender grandes esforços com o objetivo de fornecer produtos com melhor qualidade e mais confiáveis. Nesse contexto, alta confiabilidade é um diferencial importante e sua demanda cresce continuamente devido a custos e inúmeros problemas gerados por falhas ou funcionamento precário de sistemas.

A confiabilidade é definida como a probabilidade de um dispositivo desempenhar suas funções adequadamente, por um determinado período de tempo, sob condições de operação estabelecidas. Um exemplo de enunciado para a confiabilidade de um item será: o componente opera com 90% de confiabilidade, a 95% de sua capacidade de carga, durante 1000 horas, a temperatura ambiente e umidade inferior a 70%.

As falhas de sistemas e equipamentos causam efeitos que vão desde uma inconveniência menor até impactos severos sobre a sociedade e o ambiente, causando perdas econômicas significativas e até mesmo a morte em alguns casos. As responsabilidades legais e contratuais incorridas obrigam os fabricantes a oferecer produtos mais confiáveis e literalmente pagar pelas consequências do não atendimento a essa exigência. Portanto, a confiabilidade deve ser considerada um critério de projeto pelos engenheiros e técnicos responsáveis pelo projeto do produto.

No período compreendido entre as duas guerras, as indústrias aeronáutica, química e de geração de energia experimentaram um crescente desenvolvimento. Os primeiros estudos sobre confiabilidade com o objetivo de aumentar a disponibilidade de equipamentos ganharam impulso. Os avanços proporcionados pela indústria bélica durante e após a segunda guerra permitiram o amadurecimento da teoria e conceitos relacionados à confiabilidade. A partir da metade do século passado, a aviação com fins comerciais e o desenvolvimento da indústria nuclear exigiram um tratamento mais profundo devido aos riscos à segurança envolvendo esses sistemas.

O aumento na complexidade de sistemas eletrônicos e o advento da era espacial contribuíram significativamente para a aplicação dos conceitos de confiabilidade, devido aos altos custos envolvidos decorrentes de eventuais falhas. A popularização dos computadores durante as duas últimas décadas e o desenvolvimento de novas formas de armazenamento e comunicação em massa difundiu e aumentou a necessidade de produtos com maior confiabilidade. Em um cenário de economia globalizada a confiabilidade passou a ser um parâmetro decisivo para a aquisição de um produto.

A avaliação de riscos e responsabilidades, a previsão de custos de garantia, a elaboração de políticas de manutenção, os estudos comparativos envolvendo produtos ou processos de manufatura alternativos e uma série de outras aplicações passam pela avaliação quantitativa da confiabilidade, onde é necessário um tratamento estatístico para análise dos dados. Em alguns casos, uma análise simples é suficiente, em outros, o uso de métodos estatísticos especiais é requerido. A aplicação de um ou outro método dependerá da complexidade e dos riscos econômicos e de segurança inerentes ao caso em estudo.

Entretanto, devido às características especiais dos dados de confiabilidade, uma resposta mais realista e consistente somente é possível através da aplicação de métodos estatísticos mais avançados, tornando o ajuste de modelos em confiabilidade uma tarefa algumas vezes complexa e trabalhosa. Especialmente na presença de dados censurados, em que os tempos de falha exatos não são conhecidos, e em inferências e previsões envolvendo extrapolação da distribuição de falhas, a implementação de métodos especiais e o uso de computadores para o processamento dos dados são necessários.

O processo de falha pode ser modelado através de duas aproximações gerais. A primeira deriva a distribuição de falhas diretamente dos dados da amostra e nenhuma suposição acerca de um modelo teórico é realizada. Esses são chamados de *métodos empíricos ou não paramétricos* e são livres da especificação de uma distribuição. A segunda opção é o ajuste de uma família paramétrica particular e a obtenção das estimativas de seus parâmetros. Esses são chamados de *métodos paramétricos* e não são livres de distribuição. A especificação do modelo teórico é o ponto de partida para a aplicação desses métodos.

Os métodos empíricos são mais fáceis de serem aplicados, porém os métodos paramétricos são usualmente preferidos, por produzirem resultados mais consistentes no ajuste de modelos, especialmente em casos onde o tamanho da amostra é reduzido. A distribuição de falhas pode ser extrapolada e previsões além dos dados da amostra podem ser realizadas, permitindo uma análise mais complexa do fenômeno em estudo. Além disso, a tomada de decisões em estudos comparativos é facilitada pela utilização de uma distribuição teórica, desde que ela forneça um ajuste satisfatório aos dados da amostra.

Freqüentemente, é necessário utilizar também, a experiência prévia ou conhecimento científico como informação importante para a caracterização do processo de falha e análise dos dados. Em vários casos, a falha pode ser resultado de algum fenômeno físico que pode ser associado a uma distribuição particular, favorecendo a sua utilização. Componentes eletrônicos com longa vida útil são relacionados à distribuição Exponencial. Sistemas sujeitos a falhas por desgaste ou fadiga podem ser associados à distribuição normal. Para desgaste em componentes mecânicos a distribuição de Weibull pode fornecer um bom ajuste.

Porém, em diversas aplicações, grande parte dos procedimentos de inferência estatística parte da suposição de normalidade. A inferência envolvendo uma ou duas populações e a tradicional *análise de variância* supõem que a distribuição normal é adequada para as populações em estudo. O engenheiro ou o analista deve sempre colocar em dúvida essa suposição e analisá-la com cuidado, especialmente em confiabilidade, em que a presença de dados censurados e a diversidade de modelos exigem uma análise mais criteriosa. Conclusões estabelecidas acerca de uma ou mais populações são prejudicadas caso uma distribuição inadequada seja selecionada.

Com o intuito de considerar o fator mencionado anteriormente e obter respostas mais realistas, é necessário recorrer a um conjunto de técnicas que permitam selecionar a distribuição estatística mais adequada ao fenômeno em estudo. E, após a seleção, estimar parâmetros do modelo que sejam mais consistentes ou que maximizem a probabilidade de ocorrência dos dados da amostra. Com o modelo ajustado, testes estatísticos sobre o mesmo e estudos comparativos envolvendo uma ou mais populações podem ser realizados.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma metodologia constituída de um conjunto de técnicas para a seleção da distribuição teórica, obtenção das estimativas dos parâmetros da distribuição e procedimentos para a comparação de modelos ajustados. A seleção da distribuição teórica é realizada através de técnicas gráficas e não paramétricas. Em seguida os parâmetros são ajustados utilizando métodos baseados em verossimilhança da amostra. Estes métodos são versáteis, aplicáveis à maioria dos modelos teóricos e permitem a inclusão de dados censurados. Finalmente, testes estatísticos de hipóteses são formulados com o intuito de estabelecer conclusões acerca dos modelos ajustados.

O capítulo 2 apresenta uma revisão dos trabalhos publicados relacionados ao ajuste e comparação de modelos em confiabilidade. No capítulo 3, são apresentados termos e definições básicas de teoria estatística, além da modelagem matemática e classificação dos dados de confiabilidade. Algumas das principais distribuições estatísticas utilizadas em confiabilidade e suas aplicações são também discutidas, porém ênfase maior é dada às distribuições Exponencial, Normal e Weibull. São apresentadas também as técnicas para a seleção da distribuição estatística mais adequada aos dados de uma amostra.

No capítulo 4 os procedimentos de inferência estatística baseada em verossimilhança são tratados. Para a obtenção das estimativas dos parâmetros é utilizado o *método de máxima verossimilhança*, e para realizar os estudos comparativos o *teste da razão de verossimilhança* é empregado. Medidas que associam um nível de confiança às estimativas são também discutidas. Os métodos baseados em verossimilhança têm a vantagem de proporcionar resultados mais consistentes com os dados da amostra, quando distribuições não normais proporcionam um melhor ajuste.

Para o processamento dos dados, foi necessário a implementação computacional dos métodos apresentados, e um programa elaborado em *Visual Basic 5* foi proposto para esta finalidade. O capítulo 5 apresenta uma descrição da estrutura do programa e aplica a metodologia em um exemplo obtido da literatura consultada. O programa oferece ferramentas gráficas para a seleção da distribuição, estimativas dos parâmetros dos modelos ajustados e também intervalos de confiança para esses parâmetros. Testes com o objetivo de determinar diferenças estatisticamente significativas entre populações são demonstrados.

No capítulo 6, alguns casos reais são discutidos. Estudos comparativos envolvendo dados de falha provenientes de ensaios de rolamentos da empresa INA do Brasil são apresentados. A mesma análise é realizada para dados de falha de componentes de caixas de câmbio de tratores da empresa ZF do Brasil. Para finalizar, é analisado um exemplo da área de fabricação da UNICAMP, em que é realizado um estudo sobre vida de ferramentas de corte. O capítulo 7 apresenta as conclusões e as sugestões para os próximos trabalhos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O desenvolvimento da teoria de confiabilidade esteve inicialmente associado às aplicações da indústria aeronáutica. Até a 1ª guerra mundial, conforme Ramakumar (1993), a avaliação da confiabilidade era conseguida de forma qualitativa e subjetiva, através da experiência dos engenheiros de projeto e aplicação. Com o aumento do número de motores aeronáuticos em 1930, a confiabilidade passou a ser quantificada em termos de taxa média de falhas e número médio de falhas em aeroplanos e dirigíveis.

No final da década de 30 e durante a década de 40, os primeiros trabalhos sobre tempo de vida de um material em relação à fadiga são publicados e a distribuição de Valores Extremos ou distribuição de Gumbel foi empregada nesses casos. Em 1939, W. Weibull apresentou a distribuição de probabilidade que leva o seu nome, sendo aplicada em testes de vida de rolamentos.

Porém, somente após a 2ª guerra mundial, a confiabilidade tornou-se assunto de grande interesse, devido à baixa disponibilidade e altas taxas de falha de equipamentos militares. Durante a década de 60, os conceitos de confiabilidade foram empregados no projeto de reatores de usinas nucleares, e também na indústria de fornecimento de eletricidade, com o objetivo de evitar falhas locais ou blecautes de larga escala. Conforme Ramakumar (1993), o grande blackout de 1965 nos Estados Unidos, impulsionou a aplicação mais séria desses conceitos no projeto e expansão de sistemas de energia elétrica.

Os primeiros livros sobre confiabilidade incluem Bazovsky (1961), Barlow e Proschan (1967), Mann, Schafer e Singpurwalla (1974), Smith (1976) e Kapur e Lamberson (1977). Estes textos abordam os aspectos matemáticos e físicos relacionados aos processos de falha. Durante a década de 70, o foco mudou-se para a análise de confiabilidade de sistemas complexos através de árvores de falhas, e na década de 80, programas de confiabilidade e manutenção ganharam ênfase. Nesse período, destacam-se os livros de Nelson (1982), Lawless (1982) e Sinha (1986), até hoje bastante conceituados na análise estatística de dados de confiabilidade.

Durante a década de 90, vários trabalhos que abordam o ajuste de modelos e estudos comparativos foram publicados. Métodos para seleção da distribuição mais adequada a uma amostra de dados e procedimentos de inferência estatística, para estimação de parâmetros e testes de hipóteses, foram extensivamente tratados. Esses conceitos são abordados nas obras de Nelson (1982), Doty (1989), Ramakumar (1993), Lewis (1996), Ebeling (1997), Meeker e Escobar (1998), os quais serviram de base para o desenvolvimento do trabalho. A análise estatística de dados provenientes de ensaios acelerados é abordada pelos trabalhos de Nelson (1990) e Colmenero (1999).

Conforme Ebeling (1997), o ajuste de uma distribuição teórica pode ser visto como um processo de três etapas, consistindo da identificação de distribuições que hipoteticamente são adequadas aos dados da amostra, a estimação de parâmetros e a realização dos testes de aderência. O entendimento sobre o processo de falha, o conhecimento das características das distribuições teóricas e os gráficos de probabilidade auxiliam na seleção de um modelo adequado. As técnicas gráficas são extensivamente tratadas por Nelson (1982) e Lewis (1996), que discutem outras aplicações e limitações desses métodos.

Processos de estimação de parâmetros são abordados por vários textos estatísticos, e dentro do contexto da confiabilidade, o *método de mínimos quadrados* é muito difundido. Através de uma relação, supostamente linear, entre os tempos de falha e a estimativa não paramétrica da curva de falha acumulada, este método fornece estimativas que minimizam os desvios verticais entre os valores observados e ajustados em um gráfico de probabilidade. A aplicação do método de mínimos quadrados é abordada por Doty (1989) e Lewis (1996).

Wang e Keats (1995) apresentaram um método simples e robusto de estimação de parâmetros da distribuição de Weibull. O método calcula pontos percentuais tais que a estimativa do parâmetro de forma seja um valor ótimo. A sua vantagem é a facilidade de implementação computacional e pode ser aplicado para amostras com dados completos e censurados. Porém, os resultados indicaram que em relação ao erro quadrático médio, este método não supera o método da máxima verossimilhança. Watkins (1996) examinou os resultados apresentados e concluiu que os estimadores de máxima verossimilhança são assintoticamente não tendenciosos e apresentam baixa tendência em amostras de tamanho pequeno e moderado.

Lawson, Keats e Montgomery (1997) publicaram um artigo sobre estimação de parâmetros através de algoritmos de regressão robusta em conjunto com os gráficos de probabilidade. Embora de fácil utilização, em comparação com o método de máxima verossimilhança, a estimação de parâmetros através do ajuste por mínimos quadrados é fortemente afetada pela presença de observações influentes (*outliers*). Os algoritmos de regressão robusta são insensíveis à presença de observações com grandes resíduos, amortecendo o efeito dessas observações. Uma outra vantagem é a disponibilidade de pacotes de software, que oferecem a opção de ajuste através de mínimos quadrados ponderados e algoritmos de regressão robusta.

Ling e Pan (1998) apresentaram um novo método estimação de parâmetros de uma distribuição. O método utiliza a distância de Kolmogorov-Smirnov como objetivo e é demonstrado através de exemplos, assumindo que a distribuição de Weibull com três parâmetros é adequada para a modelagem. Partindo de valores iniciais, obtidos de análises gráficas, este método procura por parâmetros que minimizem a distância absoluta entre os valores observados e os valores esperados.

Comparado com outros métodos de estimação de parâmetros, o método de otimização proposto apresentou a menor distância entre as curvas de falha acumulada observada e a esperada. Porém, nos exemplos analisados não havia a presença de dados censurados que afetam a estimativa empírica da curva de falha acumulada, reduzindo a aplicabilidade e a eficiência do método. A própria estatística de Kolmogorov-Smirnov, conforme Lewis (1996), é aplicável somente em amostras com dados completos.

Balakrishnan, Kanan, Lin e Ng (2003) apresentaram um método alternativo ao método de máxima verossimilhança para estimação de parâmetros e intervalos de confiança para a distribuição de Weibull, considerando amostras com dados progressivamente censurados do tipo 2. O método proposto produz estimativas dos parâmetros quase tão eficientes, em termos de variância, quanto as estimativas de máxima verossimilhança e são calculadas a partir de uma aproximação da função taxa de falha.

Embora o método de mínimos quadrados seja bastante aplicado em confiabilidade, conforme Ebeling (1997) e Meeker e Escobar (1998), as estimativas de mínimos quadrados não são as melhores, principalmente quando a amostra contém dados censurados. Para distribuições não Normais e na presença de censura, o mais indicado é o *método de máxima verossimilhança*, cujo objetivo é fornecer parâmetros que maximizam a probabilidade de ocorrência dos dados da amostra. Este método é bem tratado pelas obras de Nelson (1982), Sinha (1986), Ebeling (1997) e Meeker e Escobar (1998), onde são mostradas as aplicações para os modelos estatísticos mais utilizados em confiabilidade.

Em muitas situações, uma estimativa de um parâmetro não fornece informação completa para o engenheiro. É improvável que o valor verdadeiro do parâmetro seja exatamente igual ao valor estimado. Portanto, é necessário fornecer o grau de incerteza associado à estimativa e isso é conseguido através dos intervalos de confiança, onde um limite inferior e superior englobam o valor verdadeiro desconhecido do parâmetro. Em confiabilidade, há uma série de métodos para o cálculo dos intervalos de confiança e dentre os quais, os mais utilizados, conforme Meeker e Escobar (1998) são os baseados em: aproximação Normal, razão de verossimilhança e simulação *bootstrap*.

Jeng e Meeker (2000) apresentaram um estudo comparativo entre diferentes procedimentos de cálculo de intervalos de confiança, para as distribuições de Weibull e Lognormal, considerando amostras com dados censurados do tipo 1. Os métodos de cálculo de intervalos de confiança utilizados foram os relacionados anteriormente, sendo que a simulação do tipo bootstrap foi utilizada para calibrar os intervalos de confiança por aproximação normal e os baseados na estatística da razão entre funções verossimilhança.

O estudo demonstrou que a aproximação Normal fornece bons resultados apenas para amostras de grande tamanho. Os que utilizam a estatística da razão de verossimilhança são mais precisos para amostras de tamanho moderado, e melhoram sua eficiência quando calibrados através da simulação *bootstrap*. Entretanto, essas técnicas são de difícil implementação computacional, fazendo com que a aproximação Normal seja o procedimento mais largamente utilizado para cálculo de intervalos de confiança. Doganaksoy e Schmee (2000) comentam os aspectos práticos relacionados aos intervalos baseados na razão de verossimilhança.

Wong e Wu (2000) forneceram um procedimento de inferência de terceira ordem, baseado em verossimilhança, para o cálculo de intervalos de confiança de parâmetros de modelos com estrutura localização-escala. O método proposto é uma extensão do trabalho desenvolvido por Fraser e Reid (1995) onde foram analisados somente casos de amostras com dados completos. As vantagens do novo método são: maior facilidade de implementação computacional que os métodos baseados na razão entre funções verossimilhança e uma melhor taxa de convergência.

Os testes de aderência são procedimentos estatísticos para verificar e confirmar ou não a adequação do modelo ajustado e são bem abordados por Ebeling (1997). Entretanto, conforme Lewis (1996), muitos desses procedimentos não são diretamente aplicáveis em amostras com dados censurados. Nelson (1982), Meeker e Escobar (1998) sugerem que os gráficos de probabilidade são uma excelente ferramenta para verificar a adequação da distribuição. Aliado às técnicas gráficas, Lewis (1996) sugere o cálculo do coeficiente de determinação, que é uma medida percentual da relação existente entre tempo de falha e probabilidade de falha acumulada. Montgomery e Runger (2003) abordam a teoria relacionada ao coeficiente de determinação.

Os estudos comparativos envolvendo uma ou mais amostras são realizados através de testes de hipóteses, os quais são extensivamente tratados por diversos textos estatísticos. Bohoris (1995), apresentou uma revisão e discussão sobre a aplicabilidade e eficácia das técnicas estatísticas paramétricas, para análise comparativa de dados censurados de confiabilidade, em problemas envolvendo duas amostras. Alguns dos testes de hipóteses são fortemente afetados pelas suposições que devem ser atendidas, reduzindo sua eficiência e levando a conclusões dúbias.

Uma das principais dificuldades envolvendo estes testes é a especificação de uma distribuição que adequadamente descreva os dados da amostra. Além disso, alguns procedimentos comparativos envolvendo distribuições com mais de um parâmetro partem da suposição que um deles seja igual para as duas populações. Os testes t e F partem da suposição de normalidade e variância igual entre as populações, outros testes aplicáveis à distribuição de Weibull supõem a igualdade entre parâmetros de forma, situações muitas vezes não encontradas na prática.

O'Connor (1985) mostrou a aplicação da Análise de Variância em confiabilidade, supondo distribuição Normal e dados completos. Quando os dados não são normalmente distribuídos, foi sugerida a Análise de Variância não paramétrica, baseada no teste de Kruskal Wallis. Porém, o mesmo é aplicável somente a amostras com dados completos. Maiores detalhes sobre o teste de Kruskal Wallis e outros procedimentos da estatística não paramétrica podem ser encontrados em Conover (1999) e Montgomery e Runger (2003).

Aminzadeh (1991) apresenta um estudo comparativo entre dois tipos de bateria, utilizando um modelo de efeitos aleatórios ANOVA com um fator. O objetivo é determinar um intervalo de confiança aproximado para a confiabilidade, $R = Pr\{X > Y | X, Y\}$. Neste artigo, algumas suposições são feitas e a principal delas é que as populações sejam normalmente distribuídas, reduzindo a aplicabilidade do método. Além disso, não há a presença de dados censurados no experimento conduzido.

Doganaksoy (1995) conduziu ensaios de vida, com o objetivo de comparar dois projetos de isoladores sólidos, um padrão e outro modificado. Durante o teste, todos os itens da amostra com isoladores padrão falharam, enquanto alguns itens da amostra com isoladores modificados não falharam. Portanto, o engenheiro suspeitou que o projeto modificado apresentava melhorias em relação ao padrão. Entretanto, os testes de hipóteses demonstraram que não havia diferença estatisticamente significativa entre os parâmetros de escala de uma distribuição de Weibull, utilizada para modelagem do processo de falha. Um outro objetivo foi determinar a duração de teste necessária, para que fosse observada diferença estatisticamente significativa entre os projetos padrão e modificado.

Thiagarajah (1995) apresentou um teste de homogeneidade de parâmetros de escala, baseado em uma aproximação condicional, para distribuições exponenciais com parâmetros de localização não especificados e dados censurados do tipo 1. Vários testes estatísticos foram derivados e o estudo concluiu que a eficiência do teste baseado na razão entre verossimilhanças é maior que a eficiência das estatísticas baseados na aproximação condicional.

Hamada (1995) publicou um artigo sobre experimentos estatisticamente projetados, com o objetivo de melhoria da confiabilidade do produto e identificação de fatores importantes. Vários métodos foram discutidos e em especial o de Taguchi. A metodologia apresentada também leva em conta a presença de dados censurados e modelos de regressão com parâmetros estimados através do método de máxima verossimilhança.

Lui (1997) publicou um artigo para testar a hipótese de igualdade entre distribuições exponenciais, fazendo uso de experimentos emparelhados. Quando a taxa de falha de um equipamento depende fortemente de fatores externos: temperatura, umidade, operadores, etc, a eficiência estatística do teste aumenta através do uso de projetos emparelhados. Estes têm o objetivo de eliminar a influência das fontes de variabilidade.

Coit e Dey (1999) apresentaram um artigo para análise de dados agrupados de sistemas em operação, onde é verificada a adequação da distribuição Exponencial para a amostra analisada. As condições ambientais e de operação estão implícitas nos dados de campo e essa é uma das principais vantagens de sua utilização. Porém, a perda de detalhes associados a esses dados, resultado de políticas de manutenção inadequadas, prejudica a análise e a validação de conclusões.

Hisada e Arizino (2002) propõem um teste estatístico para avaliar o MTTF de populações, supondo que a distribuição de Weibull é adequada aos dados da amostra. O atrativo do método proposto é a possibilidade de análise de populações com diferentes parâmetros de forma, sendo eles especificados através de intervalos de confiança. Planos de amostragem para determinação do tamanho mais efetivo de amostra são fornecidos. Entretanto, o teste é limitado a amostras contendo somente dados completos.

A aproximação paramétrica mais geral, segundo Nelson (1982), Meeker e Escobar (1998) e Bohoris (1995), é o teste baseado na razão entre funções verossimilhança das amostras ou o *teste da razão de verossimilhança*. Uma das principais vantagens é a possibilidade de inclusão de dados de censura múltipla e a comparação de curvas de falha acumulada de diferentes distribuições. A principal desvantagem é que, em alguns casos, a forma da função verossimilhança é complexa e há necessidade de cálculos iterativos trabalhosos para a obtenção das estimativas dos parâmetros da distribuição. Porém essa dificuldade pode ser contornada através do uso de computadores para realizar os cálculos.

As estimativas de máxima verossimilhança para distribuição Exponencial são obtidas por expressões diretas. Para distribuições com mais de um parâmetro, Normal e Weibull e dados censurados, não há expressões diretas para o cálculo das estimativas, podendo ser obtidas somente através de métodos numéricos iterativos para resolução de equações não lineares. O método mais utilizado, e frequentemente recomendado por estatísticos, é o Newton Raphson. Mathews (1992) e Gerald e Wheatley (1999) abordam a teoria relacionada a este e outros métodos utilizados para esta finalidade. Nelson (1982) descreve a teoria e demonstra a aplicação do método de Newton Raphson em dados de confiabilidade.

O cálculo das estimativas de máxima verossimilhança, para a distribuição Normal, envolve também a utilização das funções densidade de probabilidade e probabilidade de falha acumulada padronizadas. A integral da função densidade de probabilidade, a própria função probabilidade de falha acumulada, não pode ser resolvida por métodos de integração tradicionais, sendo necessário recorrer aos valores tabelados ou resolver a integral por métodos numéricos.

Devido à limitação das tabelas, a alternativa numérica, não só para a distribuição Normal, como também para as distribuições t de Student e Qui-Quadrado quando utilizados em testes de hipóteses, é uma solução melhor. Brandt (1998) apresentou uma série de algoritmos, baseados em expansões em série de funções especiais, eliminando a necessidade do uso de tabelas. Outra referência sobre o assunto é Press, Flannery, Teukolsky e Vetterling (1986), no capítulo referente às funções especiais.

Com o objetivo de realizar estudos comparativos envolvendo produtos ou processos, inúmeros trabalhos sobre análise estatística de dados de confiabilidade, envolvendo métodos de estimação de parâmetros e testes de hipóteses, foram desenvolvidos. A aplicação de um ou outro método dependerá da complexidade do problema e do nível de precisão requerido. Métodos gráficos e estimação por mínimos quadrados são muito utilizados em confiabilidade, mas não produzem resultados satisfatórios quando comparados com os métodos baseados em verossimilhança, conforme Ebeling (1997) e Meeker e Escobar (1998).

Procedimentos baseados em verossimilhança, embora sejam de implementação computacional mais difícil, são versáteis no ajuste de modelos aos dados da amostra, permitindo a inclusão de dados censurados e análise de distribuições não normais. Conforme exposto pelos trabalhos citados anteriormente, o método de máxima verossimilhança e o teste da razão de verossimilhança são procedimentos gerais e fornecem resultados mais consistentes com os dados da amostra. Este trabalho visa aplicar técnicas gráficas para a seleção da distribuição teórica mais adequada aos dados da amostra e procedimentos baseados em verossimilhança para a estimação de parâmetros e testes de hipóteses.

Capítulo 3

Conceitos Básicos e Seleção da Distribuição Estatística

O aumento da complexidade e sofisticação de sistemas, a crescente exigência por produtos confiáveis e com maior qualidade, novas leis e regulamentos envolvendo responsabilidades, requerimentos contratuais com o objetivo de alcançar o desempenho especificado, programas de garantia, entre outros fatores, aumentaram o interesse pelo estudo e quantificação da confiabilidade de produtos e processos.

Para avaliar quantitativamente a confiabilidade, é necessário decidir que método utilizar e os índices requeridos. Em essência, todas as técnicas têm como objetivo prever o comportamento futuro do componente ou sistema, e em todos os casos, o problema não pode ser definido como determinístico e sim estocástico, variando aleatoriamente com o tempo. A avaliação de um processo estocástico é conseguida através da utilização da teoria de probabilidade e métodos estatísticos para o tratamento dos dados.

Entretanto, somente a teoria de probabilidade não pode prever a confiabilidade ou a segurança de um sistema. O conhecimento sobre o seu funcionamento, o entendimento do processo de falha, as condições ambientais e de operação a que o sistema está sujeito, são também necessárias para uma avaliação mais realista da confiabilidade. Portanto, a teoria de probabilidade e os métodos estatísticos empregados são somente ferramentas para a previsão do comportamento futuro do sistema.

A confiabilidade é definida por Ebeling (1997) como sendo “a probabilidade de um componente ou sistema realizará uma função requerida, por um dado período de tempo, quando utilizado sob determinadas condições de operação”. Condra (1993) enfatiza que “confiabilidade é a qualidade no tempo”. Definições similares em sua essência são encontradas em Billinton e Allan (1983), Ramakumar (1993), Lewis (1996) e Meeker e Escobar (1998).

Para determinar a confiabilidade em um sentido operacional, os quatro aspectos implícitos em sua definição: probabilidade, função a ser desempenhada, unidade de tempo e condições de operação devem ser analisados de uma forma mais específica. A probabilidade fornece um índice percentual para avaliação da confiabilidade ou adequação do sistema. Embora seja o índice mais significativo, essa adequação pode ser expressa por outros parâmetros como: número esperado de falhas em um período específico de tempo, tempo médio até a falha, tempo médio entre falhas, etc.

Os outros três aspectos são parâmetros de engenharia, em que somente o responsável pelo sistema pode fornecer alguma informação. Em primeiro lugar, a falha deve ser definida relativamente à função a ser desempenhada. Segundo, a unidade de tempo mais adequada à situação deve ser especificada. Dependendo do caso a confiabilidade pode ser definida em horas de operação ou ciclos. Em sistemas de produção, o número de lotes produzidos é a unidade mais adequada para expressar a confiabilidade. Terceiro, o sistema deve apresentar um desempenho adequado considerando fatores como carregamento (peso, tensão, pressão), condições ambientais (temperatura, umidade, vibração) e operacionais (armazenamento, manutenção, transporte).

A modelagem através de conceitos de probabilidade pode ser feita através de duas aproximações gerais. A primeira e mais simples faz uso do conceito de eventos definidos dentro de um espaço amostral, e expressa a probabilidade em função da ocorrência desses eventos ou de suas combinações. O segundo método é baseado no conceito de variável aleatória e uma distribuição de probabilidades associada. Através da especificação de uma distribuição de probabilidades para uma variável aleatória, o processo aleatório fica completamente caracterizado. Pode-se definir um evento como sendo a falha de um componente e uma variável aleatória como sendo o tempo até a falha do mesmo componente.

3.1 Eventos Aleatórios

Uma falha pode ser descrita como um evento aleatório E . Se esse mesmo evento ocorre N_e vezes em n triagens, a frequência relativa $p(E) = N_e/n$. A probabilidade de ocorrência do evento E será:

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{N_e}{n} \right) \quad 3.1$$

Onde $0 \leq P(E) \leq 1$. Quando n torna-se suficientemente grande, $p(E)$ aproxima-se de $P(E)$ e essa aproximação é denominada de aproximação por frequência relativa. $P(E) = 0$ descreve um evento impossível, e $P(E) = 1$ denota um evento certo. A coleção de todos os resultados ou eventos possíveis relativos a um processo aleatório é chamado de espaço amostral S , onde $S = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ e $P(S) = 1$. Todo o evento E tem associado a ele o evento complementar E^c , o qual é a negação de E . Se E representa uma falha, então E^c é a não ocorrência de uma falha. A relação entre os dois eventos em termos de probabilidade é: $P(E) + P(E^c) = 1$.

Há duas operações básicas realizadas com eventos. A primeira é definida é a intersecção de dois eventos A e B e é escrita como $A \cap B$. A intersecção é o evento consistindo dos resultados comuns a ambos os eventos A e B . A segunda operação é a união de dois eventos A e B e é escrita como $A \cup B$. A união é o evento consistindo dos resultados no evento A ou no evento B ou os resultados comuns a ambos.

Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um exclui a ocorrência do outro. Um evento e seu complementar são mutuamente exclusivos. Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ e $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. Onde $P(\emptyset)$ é o evento impossível ou nulo. Dois eventos são independentes, se e somente se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Se dois eventos não são independentes, a probabilidade de sua intersecção deve ser definida em termos de probabilidade condicional. A probabilidade condicional é definida como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad 3.2$$

$P(A|B)$ é a probabilidade de ocorrência do evento A dado que ocorreu o evento B .

3.2 Variáveis Aleatórias

O conceito de evento aleatório é útil na descrição de processos aleatórios. Em alguns casos, descrições de resultados são suficientes, porém em outros, é útil associar um número de acordo com algum modelo ou distribuição de probabilidades, a cada resultado do espaço amostral. Nesse sentido, a modelagem do processo de falha através de variáveis aleatórias é mais apropriada. Conforme Ebeling (1997), “*variável aleatória* é uma variável que assume valores numéricos de acordo com alguma distribuição de probabilidades”.

Uma variável aleatória é classificada como *contínua* ou *discreta*. Variáveis aleatórias discretas assumem valores dentro de um conjunto finito de valores possíveis, e as variáveis aleatórias contínuas podem assumir valores dentro de uma faixa ou intervalo infinito de valores possíveis. Exemplos de variáveis aleatórias discretas são: giro de uma moeda, lançamento de um dado, número de falhas, etc. Exemplos de variáveis aleatórias contínuas: comprimento de uma peça, corrente elétrica, tempo de falha, etc. As variáveis aleatórias são denotadas por letras maiúsculas.

A maioria dos processos de falha são modelados através de variáveis aleatórias contínuas e podem ser caracterizados por quatro funções relacionadas entre si: a função confiabilidade, a função distribuição acumulada, a função densidade de probabilidade e a função taxa de falha. Cada uma delas fornece uma perspectiva diferente para o cálculo da confiabilidade, sendo que basta o conhecimento de uma delas para que sejam obtidas as outras três funções. O presente trabalho tratará apenas de processos de falha modelados em escala contínua.

3.3 Funções Utilizadas na Modelagem da Confiabilidade

A confiabilidade de um componente ou sistema é a probabilidade que o mesmo opere satisfatoriamente em um período de tempo t . Sendo T , uma variável aleatória contínua denotando o tempo até a falha, a *função confiabilidade* $R(t)$ é expressa matematicamente como:

$$R(t) = P\{T \geq t\} \quad 3.3$$

Onde $R(t) \geq 0$, $R(0) = 1$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$. Para um dado valor de t , $R(t)$ é a probabilidade que o tempo de falha seja maior ou igual a t . Graficamente a função confiabilidade é mostrada na figura 3.1, utilizando uma distribuição de Weibull com $\alpha = 83,55$ horas e $\beta = 4,97$:

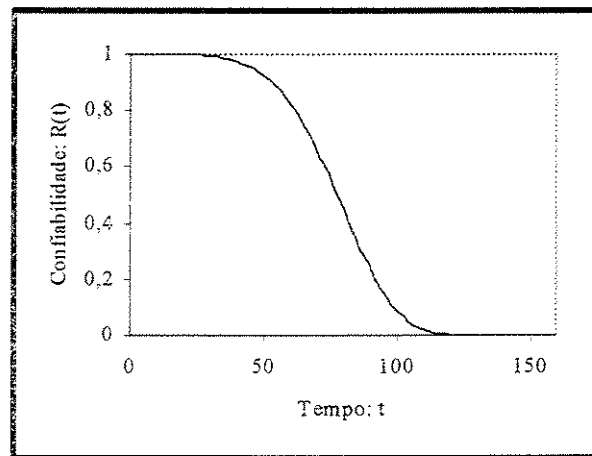


Figura 3.1 – Função Confiabilidade de Weibull, $\alpha = 83,55$ horas e $\beta = 4,97$

A probabilidade que a falha ocorra antes do tempo t é dada pela *função distribuição acumulada* $F(t)$ expressa como:

$$F(t) = P\{T < t\} = 1 - R(t) \quad 3.4$$

Onde $F(0) = 0$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$. O gráfico da função distribuição acumulada é mostrado na figura 3.2:

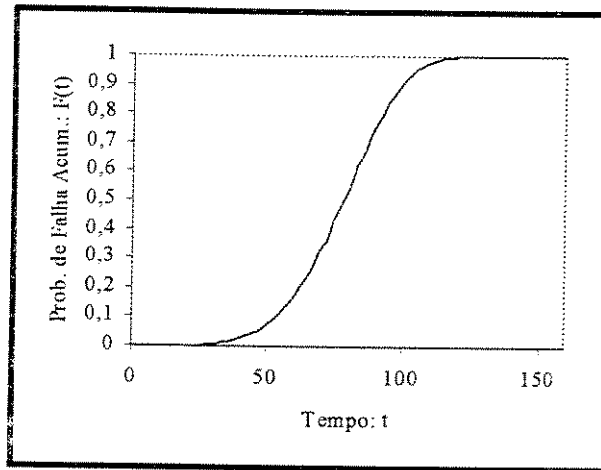


Figura 3.2 – Função Distribuição Acumulada de Weibull, $\alpha=83,55$ horas e $\beta=4,97$

Uma terceira função é definida matematicamente como:

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}R(t) \quad 3.5$$

Esta é a *função densidade de probabilidade* e descreve a forma da distribuição de falhas. O gráfico dessa função é ilustrado na figura 3.3:

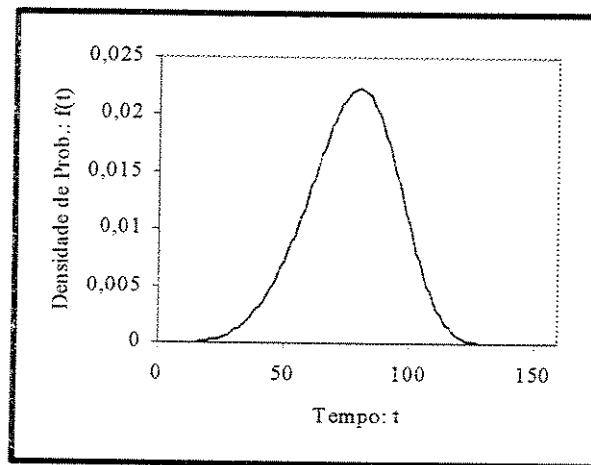


Figura 3.3 – Função Densidade de Probabilidade de Weibull, $\alpha=83,55$ horas e $\beta=4,97$

A função densidade de probabilidade tem as seguintes propriedades: $f(t) \geq 0$ e $\int_0^{\infty} f(t) dt = 1$

Dada a função densidade de probabilidade $f(t)$, então:

$$F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \quad 3.6$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(\xi) d\xi \quad 3.7$$

Portanto a função confiabilidade e a função distribuição acumulada representam áreas abaixo da curva da função densidade de probabilidade. Se a área total abaixo da curva da função densidade de probabilidade é igual a 1, então $0 \leq R(t) \leq 1$ e $0 \leq F(t) \leq 1$.

3.3.1 Tempo Médio Até a Falha

O tempo médio até a falha, *mean time to failure (MTTF)*, é definido por:

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt \quad 3.8$$

Portanto, o *MTTF* é a média ou valor médio esperado da distribuição de probabilidade definida por $f(t)$ e pode também ser expresso através da função confiabilidade:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad 3.9$$

A média é uma das medidas de tendência central de uma distribuição de falhas, uma outra é a mediana:

$$R(t_{med}) = 0,5 = P\{T \geq t\} \quad 3.10$$

A mediana divide a distribuição em duas partes cada uma com 50% de probabilidade. Quando a distribuição é acentuadamente assimétrica, a mediana é preferível em relação à média.

O MTTF e a mediana não são as únicas medidas que caracterizam uma distribuição de falhas. Medidas de variabilidade também são necessárias, e, frequentemente, a medida utilizada é a variância:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - (MTTF)^2 \quad 3.11$$

A variância representa o desvio quadrático médio do tempo de falha em relação ao MTTF. Uma medida mais fácil de interpretar que a variância é a raiz quadrada da mesma ou o desvio padrão σ .

3.3.2 A Função Taxa de Falha

Além das funções definidas anteriormente, a *função taxa de falha* é bastante utilizada em confiabilidade. A probabilidade de falha dentro de um intervalo de tempo é dado por:

$$P\{t \leq T \leq t + \Delta t\} = R(t) - R(t + \Delta t) \quad 3.12$$

Utilizando o conceito de probabilidade condicional, a probabilidade de ocorrência de falha no intervalo que vai de t até $t + \Delta t$, dado que o sistema sobreviveu até o instante de tempo t é:

$$P\{t \leq T \leq t + \Delta t | T \geq t\} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \quad 3.13$$

Então $\frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t) \Delta t}$, é a probabilidade condicional de falha por unidade de tempo ou a própria taxa de falha. Portanto:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} - \frac{[R(t + \Delta t) - R(t)]}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = - \frac{d}{dt} R(t) \frac{1}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad 3.14$$

Onde $h(t)$ é a taxa de risco instantânea ou função taxa de falha.

O gráfico da função taxa de falha é ilustrado na figura 3.4:

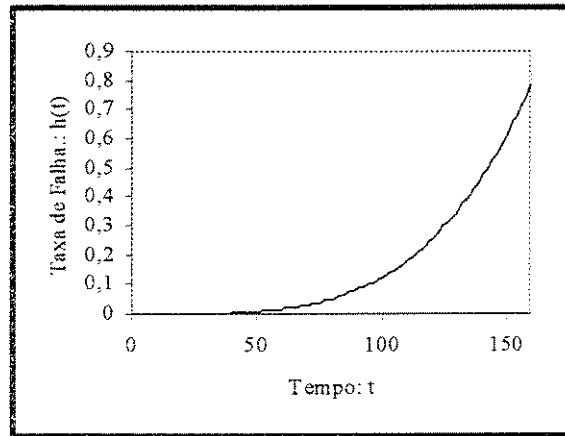


Figura 3.4 – Função Taxa de Falha de Weibull, $\alpha=83,55$ horas e $\beta=4,97$

Uma função taxa de falha particular determinará a função confiabilidade:

$$h(t)dt = -\frac{d}{R(t)}R(t) \quad 3.15$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int_0^t h(\xi)d\xi = \int_1^{R(t)} -\frac{d}{R(\xi)}R(\xi) \quad 3.16$$

Onde $R(0)=1$ é o limite inferior da integral do lado direito da equação, então:

$$-\int_0^t h(\xi)d\xi = \ln R(t) \quad 3.17$$

Portanto:

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t h(\xi)d\xi\right] \quad 3.18$$

3.3.3 Relações entre as Funções em Confiabilidade

Ramakumar (1993) apresenta um quadro resumindo as relações existentes entre as funções utilizadas em confiabilidade.

	$f(t)$	$h(t)$	$F(t)$	$R(t)$
$f(t)$	$f(t)$	$h(t)\exp\left[-\int_0^t h(\xi)d\xi\right]$	$\frac{d}{dt}F(t)$	$-\frac{d}{dt}R(t)$
$h(t)$	$\frac{f(t)}{1-\int_0^t f(\xi)d\xi}$	$h(t)$	$\frac{1}{1-F(t)}\frac{d}{dt}F(t)$	$-\frac{d}{dt}[\ln R(t)]$
$F(t)$	$\int_0^t f(\xi)d\xi$	$1-\exp\left[-\int_0^t h(\xi)d\xi\right]$	$F(t)$	$1-R(t)$
$R(t)$	$1-\int_0^t f(\xi)d\xi$	$\exp\left[-\int_0^t h(\xi)d\xi\right]$	$1-F(t)$	$R(t)$

Tabela 3.1 – Relações entre as Funções em Confiabilidade

3.3.4 Curva da Banheira

A curva da banheira fornece um modelo conceitual útil para a função taxa de falha de alguns produtos e é caracterizada por três regiões distintas. A *região I* corresponde às falhas no início de funcionamento ou falhas de juventude. Processos de manufatura inadequados, componentes fora de tolerância, danos provenientes de embarque são alguns dos problemas que podem causar altas taxas de falha iniciais de equipamentos.

Medidas de controle de qualidade na *produção* proporcionam uma redução na variabilidade, diminuindo a propensão à falhas por mortalidade infantil. Se essas medidas são insuficientes, a *região I* é eliminada submetendo os produtos a um processo de queima ou desgaste inicial (*burn-in*). Este processo é controlado de tal forma que defeitos ou falhas atribuíveis à manufatura são provavelmente detectados, sem danos ou perdas financeiras significativas.

Na *região II*, durante a vida útil do produto, a taxa de falha é aproximadamente constante, sendo que as falhas são causadas por choques externos que ocorrem aleatoriamente, ou provenientes de condições de carregamento que podem assumir uma larga variedade de formas. Essas falhas aleatórias podem ser reduzidas através de melhorias de *projeto*, tornando-os insensíveis ou mais robustos em relação às condições ambientais e de operação as quais estão sujeitos.

A *região III* corresponde à fase de desgaste ou fadiga, onde ocorrem falhas por velhice e a taxa de falha é crescente. Componentes e materiais mais duráveis, inspeção e procedimentos de *manutenção* preventiva, além de controle adequado das condições ambientais e operacionais são algumas das medidas que podem ser adotadas com o intuito de prolongar o tempo de vida de equipamentos.

As figuras 3.5 e 3.6, conforme Lewis (1996), mostram, respectivamente, a curva da banheira para componentes eletrônicos e mecânicos, destacando cada uma das regiões comentadas anteriormente. Componentes eletrônicos possuem longa vida útil, com a taxa de falha constante. Em sistemas mecânicos, os desgastes inerentes, fadiga, corrosão e outros efeitos cumulativos já colocam o equipamento em um processo de degradação.

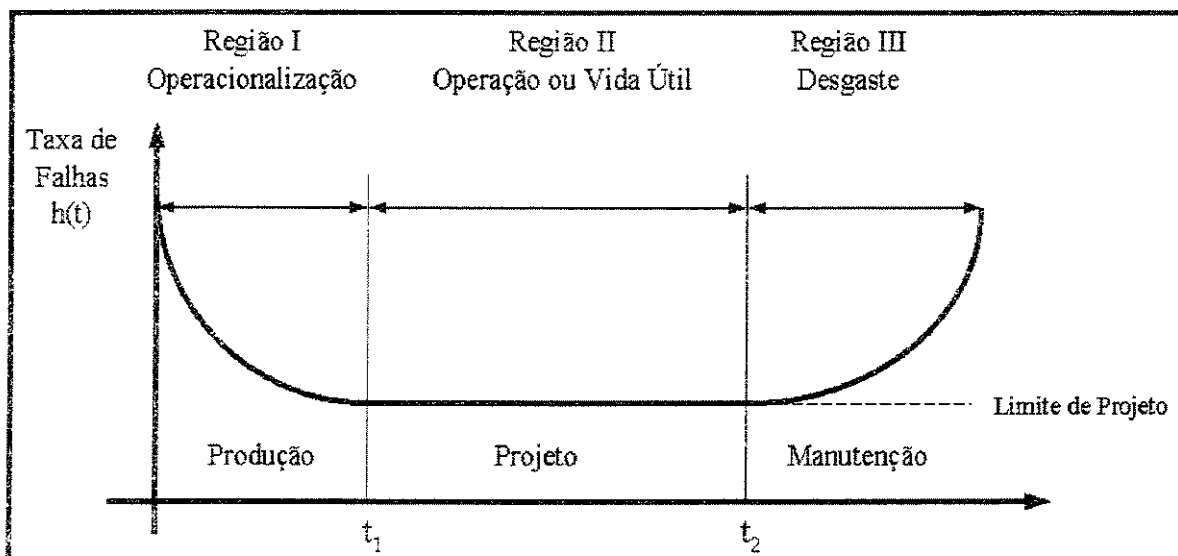


Figura 3.5 – Curva da Banheira para Componentes Eletrônicos

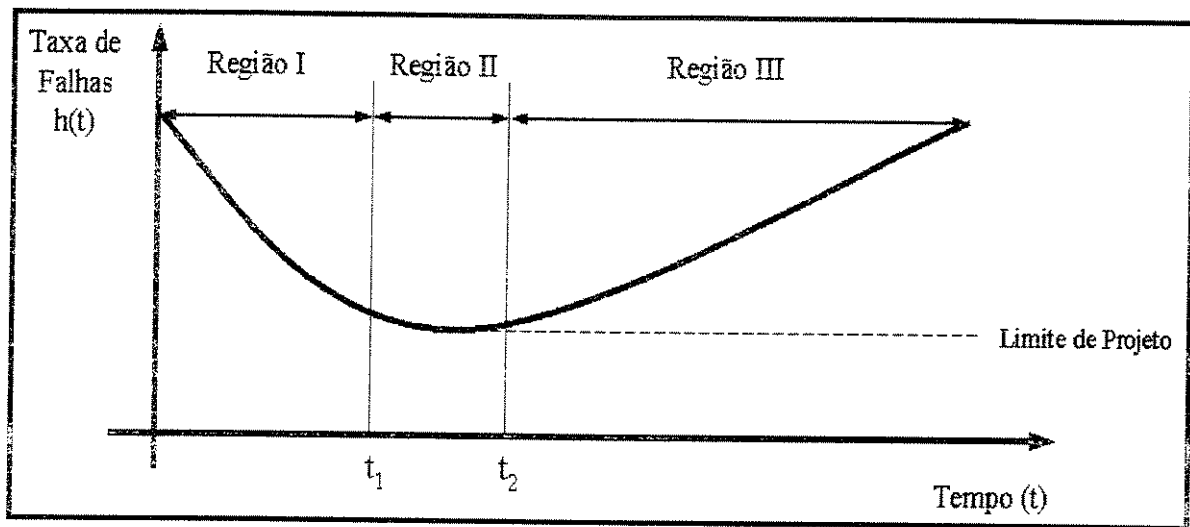


Figura 3.6 – Curva da Banheira para Componentes Mecânicos

3.4 Distribuições Estatísticas Utilizadas em Processos de Falha Contínuos

A análise de dados de confiabilidade é facilitada pela utilização de uma distribuição teórica. Dentre outras vantagens, os modelos paramétricos podem ser descritos concisamente com poucos parâmetros, diferentemente das técnicas não paramétricas, onde é necessária a estimativa total da curva de falha acumulada. Além disso, é possível extrapolar um modelo paramétrico além dos dados da amostra, obtendo a extremidade inferior e superior da distribuição, as quais são importantes na análise de confiabilidade. Frequentemente, a aplicação conjunta de técnicas não paramétricas para a seleção da distribuição, e paramétricas, para a estimação de parâmetros, fornece melhores resultados.

Assim como as variáveis aleatórias, as distribuições estatísticas são classificadas em discretas e contínuas. Para o caso discreto, as principais distribuições são: Binomial e Poisson. Conforme Meeker e Escobar (1998), as distribuições estatísticas mais utilizadas para modelagem de processos de falha contínuos são: Exponencial, Normal, Lognormal e Weibull. Com exceção da distribuição Lognormal, um estudo mais aprofundado dessas distribuições é mostrado nas próximas seções. Mojena (1999) fornece uma tabela descrevendo as aplicações de onze das principais distribuições utilizadas em confiabilidade, a qual é reproduzida na tabela 3.2.

Distribuições Estatísticas	Aplicações
Binomial	Aplicada para número elevado de amostras no controle de qualidade. Modela o número de falhas em relação ao tamanho inicial da amostra.
Poisson	Aplicada no controle de qualidade e modela o número de falhas em relação ao tempo de produção.
Exponencial	Modela o número de falhas durante o período de vida útil de componentes eletrônicos.
Retangular	Aplicações restritas, casos em que a densidade de probabilidade é constante num intervalo de tempo.
Rayleigh	Modela as regiões da curva da banheira para o caso de falhas iniciais e desgaste, por uma progressão linear.
Normal	Analisa produtos durante o início de vida e na fase de degradação natural. Modela as falhas por fadiga ou desgaste.
Weibull	Modela falhas por fadiga ou desgaste.
Gamma	Modela tempo de falha em componentes com reparo ideal.
Lognormal	Caracteriza o tempo de reparo para uma manutenção normal de falhas por desgaste.
Beta	Aplicações Especiais.
Valores Extremos	Normalmente utilizada em situações em que o número de variáveis, dos quais os dados são obtidos, são muito grandes.

Tabela 3.2 – Principais Distribuições Estatísticas e suas Aplicações

3.4.1 Distribuição Exponencial

Uma das distribuições estatísticas mais utilizadas em confiabilidade é a Exponencial. Também conhecida como modelo com taxa de falha constante (*CFR – Constant Failure Rate*), é empregada na modelagem de tempos de falha de componentes eletrônicos livres de processos de degradação e com longa vida útil (capacitores, circuitos integrados de alta qualidade), além de ser uma das distribuições com análise estatística mais simples.

Uma outra propriedade importante da distribuição Exponencial é sua falta de memória (*memorylessness*), pois o tempo de falha de um componente não depende do tempo de operação decorrido. A probabilidade de falha nas próximas horas será a mesma, sendo o componente novo ou já em operação. Além disso, a natureza independente e completamente aleatória caracteriza o processo de falha modelado através dessa distribuição.

Sendo $h(t) = \lambda$, $t \geq 0$ e $\lambda > 0$, são fornecidas abaixo as expressões das outras três funções de confiabilidade para a distribuição Exponencial.

1. Função Confiabilidade:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad 3.19$$

2. Função Distribuição Acumulada:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad 3.20$$

3. Função Densidade de Probabilidade:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad 3.21$$

O MTTF e a Variância para a distribuição Exponencial são:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \quad 3.22$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad 3.23$$

3.4.2 Distribuição Normal

A distribuição Normal tem uma larga aplicação em diversas áreas. Utilizada para modelagem de vida à fadiga e fenômenos de desgaste, é caracterizada por uma taxa de falha crescente (*IFR – Increasing Failure Rate*) que aumenta rapidamente quando o componente aproxima-se de sua vida média. Também conhecida como distribuição Gaussiana, aplica-se a fenômenos naturais e medições características de grandes amostras e populações. É uma distribuição bi-paramétrica, onde μ é o parâmetro de localização ou o próprio MTTF e σ é o parâmetro de escala ou desvio padrão.

As funções para a modelagem da confiabilidade utilizando a distribuição Normal são:

1. Função Densidade de Probabilidade:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad 3.24$$

Sendo que $z = \frac{t-\mu}{\sigma}$, a função densidade de probabilidade para a distribuição Normal padronizada com média zero e desvio padrão unitário será:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad 3.25$$

2. Função Distribuição Acumulada:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad 3.26$$

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(\xi) d\xi \quad 3.27$$

3. Função Confiabilidade:

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad 3.28$$

4. Função Taxa de Falha:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)} \quad 3.29$$

3.4.3 Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull é amplamente utilizada em confiabilidade em virtude de sua versatilidade no ajuste aos dados experimentais. A variação na forma da função densidade de probabilidade é conseguida através da estimação dos parâmetros de escala ou vida característica α e de forma β , tornando esta distribuição mais flexível que as outras e podendo ser utilizada para processos de falha que apresentam taxa de falha crescente ou também decrescente.

A distribuição Exponencial é um caso especial da distribuição de Weibull em que o parâmetro de forma é igual a 1. Quando $\beta < 1$ a taxa de falha é decrescente (*DFR – Decreasing Failure Rate*). Se $\beta = 2$, a distribuição de Weibull reduz-se à distribuição de Rayleigh e se $3 \leq \beta \leq 4$, a distribuição Normal fornece uma boa aproximação.

As expressões das funções de confiabilidade para a distribuição de Weibull:

1. Função Confiabilidade:

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad 3.30$$

2. Função Distribuição Acumulada:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad 3.31$$

3. Função Densidade de Probabilidade:

$$f(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad 3.32$$

4. Função Taxa de Falha:

$$h(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \quad 3.33$$

O MTTF e a variância para a distribuição de Weibull são dados pelas expressões abaixo:

$$MTTF = \alpha \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad 3.34$$

$$\sigma^2 = \alpha^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right\} \quad 3.35$$

Sendo que $\Gamma(x)$ é a função gama:

$$\Gamma(x) = \int_0^x y^{x-1} e^{-y} dy \quad 3.36$$

Se x for inteiro pode ser utilizada a seguinte relação:

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

3.37

3.5 Classificação dos Dados de Confiabilidade

Conforme Ebeling (1997), os dados de confiabilidade são classificados nas seguintes formas:

- Ensaios e operacionais.
- Agrupados e não agrupados.
- Amostras grandes e pequenas.
- Completos e censurados.

Os dados *completos* consistem de tempos de falha exatos para cada unidade da amostra. Porém, muitos ensaios são interrompidos ou censurados antes que todas as unidades falhem. As unidades da amostra que não falharam até o final do ensaio ou foram removidas antes do término do mesmo são denominadas *suspensões*. Os tempos de falha dessas unidades são desconhecidos e os dados relativos são denominados *censurados*.

Quanto à classificação, a censura é *simples do tipo I* quando as unidades removidas possuem um tempo comum de suspensão predeterminado e o número de falhas obtido é aleatório. Por outro lado, quando o número de falhas no ensaio é predeterminado a censura é *simples do tipo II* e o tempo comum de suspensão para as unidades sobreviventes, neste caso o tempo correspondente à última falha ocorrida no ensaio, é aleatório.

Os dados são de *censura múltipla* quando possuem tempos de suspensão diferentes misturados aos tempos de falha. Isto ocorre porque algumas unidades foram colocadas em teste em tempos diferentes, devido a falhas em equipamentos utilizados no ensaio ou quando uma ou mais unidades falharam por outras causas que não sejam o objeto do estudo. A *censura múltipla* pode também ser classificada como *tipo I* ou *tipo II*.

Os dados provenientes de ensaios censurados podem ainda ser classificados como: *censurados à direita*, *censurados à esquerda*. A *censura à direita* ocorre para unidades que não falharam até o tempo de suspensão. Observações são *censuradas à esquerda*, quando uma ou mais unidades falharam antes do tempo de suspensão ou inspeção e os seus tempos de falha não foram registrados.

Nelson (1982) fornece um quadro esquematizando os tipos de censura comentados anteriormente e os casos mais comuns são ilustrados na figura 3.7:

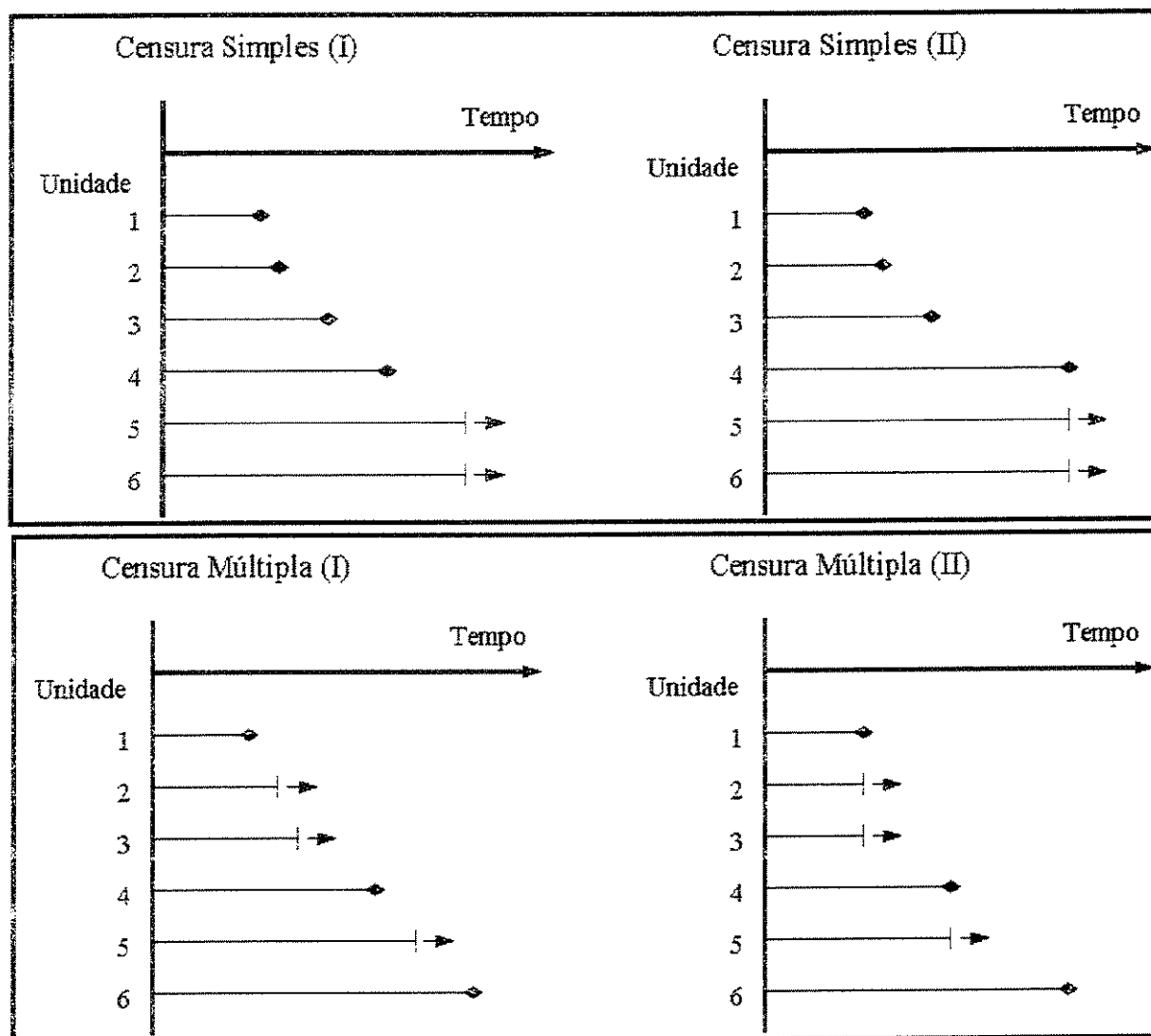


Figura 3.7 – Tipos de Censura Comuns em Confiabilidade

3.6. Estimativa Empírica da Curva de Falha Acumulada

Métodos empíricos de análise são também chamados de não paramétricos ou livres da especificação de uma distribuição estatística. O objetivo é derivar diretamente dos dados de falha uma curva de falha acumulada. Lewis (1996) e Ebeling (1997) apresentam uma série de métodos para estimativa empírica da curva de falha acumulada, levando-se em conta se há ou não a presença de dados censurados e se os mesmos são ou não agrupados.

Bompas e Smith (1973) abordam o método *Ranking* para ajuste da curva de falha acumulada, o qual pode ser aplicado para amostras com dados completos, censura simples ou múltipla. No método Ranking, os tempos de falha são ordenados do menor para o maior estabelecendo uma ordem de ocorrência das falhas conhecida como *número de ordem rank* ou *rank mediano*. A estimativa de probabilidade de falha acumulada é calculada pela expressão seguinte:

$$\hat{F}(t_i) = \frac{j_i - 0,3}{n + 0,4} \quad 3.38$$

Sendo que j_i é o número de ordem rank e n é o tamanho da amostra. O número de ordem rank referente ao i -ésimo tempo de falha é calculado somando-se um incremento ao número de ordem rank referente ao tempo de falha anterior.

$$j_i = j_{i-1} + I_i \quad 3.39$$

Este incremento é calculado levando-se em conta o tamanho da amostra no início do ensaio, o número de falhas, o número de elementos testados e o número de ordem rank anterior:

$$I_i = f_i \frac{n - j_{i-1}}{e_i} \quad 3.40$$

Sendo que f é o número de falhas, e e o número de elementos testados.

Através da estimativa da curva de falha acumulada é possível também, através das relações existentes entre as funções de confiabilidade, calcular a própria confiabilidade, taxa de falha, MTTF e variância. Bompas e Smith (1973) mostram um exemplo aplicando o método Ranking para estimativa empírica da curva de falha acumulada, o qual é reproduzido na tabela 3.3:

Tempo de Falha	Número de Falhas	Número de Elementos	Número de Falhas Esperado	Número de Ordem Rank	Curva de Falha Acumulada (%)
141	1	202	1	1	0,346
337	1	177	$1 \times \frac{202-1}{177} = 1,135$	2,135	0,907
364	1	176	$1 \times \frac{202-2,135}{176} = 1,135$	3,270	1,467
542	1	165	$1 \times \frac{202-3,270}{165} = 1,200$	4,470	2,060
716	1	156	$1 \times \frac{202-4,470}{156} = 1,270$	5,740	2,638
765	1	153	$1 \times \frac{202-5,740}{153} = 1,280$	7,020	3,320
940	1	144	$1 \times \frac{202-7,020}{144} = 1,350$	8,370	3,987
986	1	143	$1 \times \frac{202-8,370}{143} = 1,350$	9,720	4,654

Tabela 3.3 – Curva de Falha Acumulada pelo Método Ranking

3.7 Seleção da Distribuição Estatística

Após a estimativa empírica da curva de falha acumulada, uma distribuição estatística deve ser selecionada para a modelagem do processo de falha. Uma das maneiras de verificar se os dados de uma amostra obedecem a uma distribuição hipotética é através do exame visual de *gráficos de probabilidade*. Os gráficos de probabilidade são comuns na análise de dados de confiabilidade, devido à sua simplicidade e praticidade, embora algumas vezes sua análise seja subjetiva.

O objetivo dos gráficos de probabilidade é obter uma relação linear entre o tempo de falha e a probabilidade empírica de falha acumulada, obtida anteriormente pelo método Ranking. Essa relação linear é conseguida transformando-se a função distribuição acumulada em um modelo de regressão linear simples, com dois coeficientes de regressão: a inclinação e a intercepção da reta ajustada. As estimativas dos coeficientes de regressão são calculados através do *método de mínimos quadrados*, e são aquelas que minimizam a distância entre os valores observados e os ajustados pela linha de regressão, mostrados na figura 3.8:

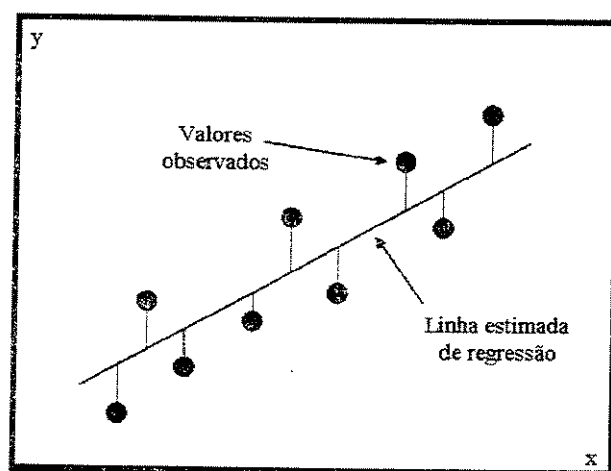


Figura 3.8 – Desvios dos Dados em Relação ao Modelo Estimado de Regressão

Seja o modelo de regressão linear simples:

$$y_i = \gamma_0 + \gamma_1 x_i + \varepsilon_i \quad 3.41$$

Onde: γ_0 e γ_1 são os coeficientes do modelo de regressão, ε_i é o termo de erro aleatório ou resíduo, y_i corresponde aos dados de falha acumulada empírica e x_i aos tempos de falha. Estes dados são transformados de acordo com a distribuição estatística assumida.

Seja a função L :

$$L = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \gamma_0 - \gamma_1 x_i)^2 \quad 3.42$$

As estimativas de mínimos quadrados de γ_0 e γ_1 , $\hat{\gamma}_0$ e $\hat{\gamma}_1$ devem satisfazer às seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_0} L = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \gamma_0 - \gamma_1 x_i) = 0 \quad 3.43$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_1} L = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \gamma_0 - \gamma_1 x_i) x_i = 0 \quad 3.44$$

A simplificação das equações anteriores resulta nas equações normais de mínimos quadrados:

$$n\gamma_0 + \gamma_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad 3.45$$

$$\gamma_0 \sum_{i=1}^n x_i + \gamma_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad 3.46$$

A solução das equações acima resulta nos estimadores de mínimos quadrados:

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{\gamma}_1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad 3.47$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad 3.48$$

A linha estimada ou ajustada de regressão é:

$$\hat{y}_i = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 x_i \quad 3.49$$

3.7.1 Gráfico de Probabilidade Exponencial

Devido à sua simplicidade, a distribuição Exponencial, um modelo especificado através de um parâmetro (MTTF ou a taxa de falha), freqüentemente é a primeira tentativa de ajuste. O gráfico de probabilidade Exponencial é mostrado na figura 3.9:

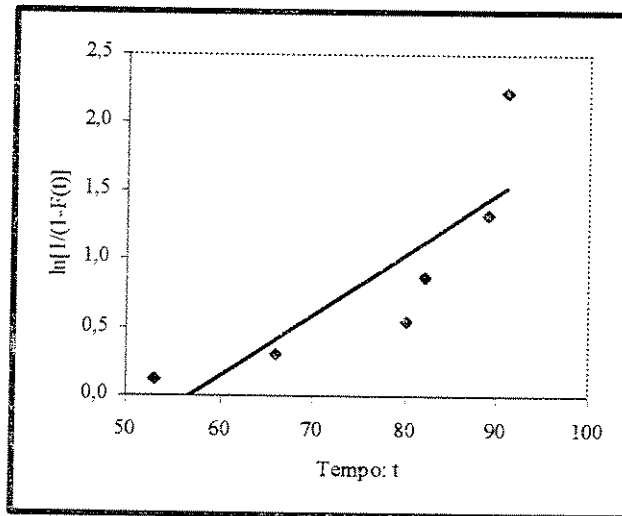


Figura 3.9 – Gráfico de Probabilidade Exponencial

Para obter a relação linear entre o tempo de falha e a probabilidade de falha acumulada nesta distribuição, a função distribuição acumulada deve ser escrita como:

$$1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad 3.50$$

Extraindo o logaritmo natural de ambos os lados da equação:

$$\ln \left[\frac{1}{1 - F(t)} \right] = \lambda t \quad 3.51$$

Sendo que: $x_i = t_i$, $y_i = \ln \left[\frac{1}{1 - \hat{F}(t)} \right]$ e a estimativa de mínimos quadrados para a taxa de falha da distribuição exponencial é $\hat{\lambda} = \gamma_1$.

$\hat{F}(t_i)$ é a probabilidade de falha acumulada empírica, calculada através do método Ranking, para o tempo t_i . Nota-se que para a distribuição exponencial apenas a escala vertical é transformada.

3.7.2 Gráfico de Probabilidade Normal

Para a distribuição Normal:

$$F(t) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right) \quad 3.52$$

A escala transformada é a vertical e a função inversa da distribuição Normal é:

$$z_i = \Phi^{-1}[\hat{F}(t_i)] = \frac{1}{\sigma}t_i - \frac{1}{\sigma}\mu \quad 3.53$$

Os pontos assinalados no gráfico são: $x_i = t_i$ e $y_i = z_i$. $\gamma_1 = \frac{1}{\sigma}$ e $\gamma_0 = \frac{1}{\sigma}\mu$, portanto as estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros da distribuição normal são: $\hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{\gamma}_1}$ e $\hat{\mu} = \frac{\hat{\gamma}_0}{\hat{\gamma}_1}$.

O gráfico de probabilidade Normal é ilustrado na figura 3.10:

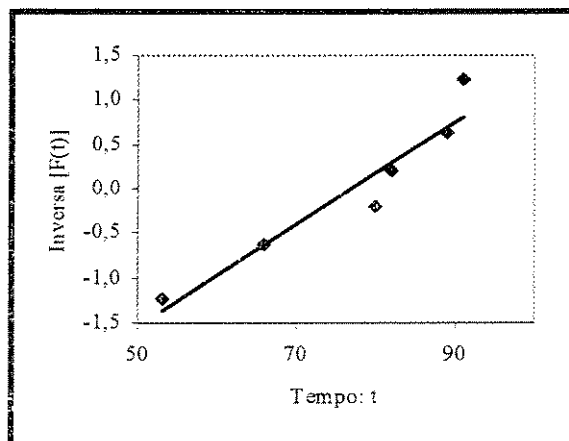


Figura 3.10 – Gráfico de Probabilidade Normal

3.7.3 Gráfico de Probabilidade de Weibull

Esta distribuição é mais abrangente que as demais, sendo amplamente utilizada em confiabilidade devido a sua versatilidade no ajuste aos dados da amostra. O gráfico de probabilidade de Weibull é ilustrado na figura 3.11:

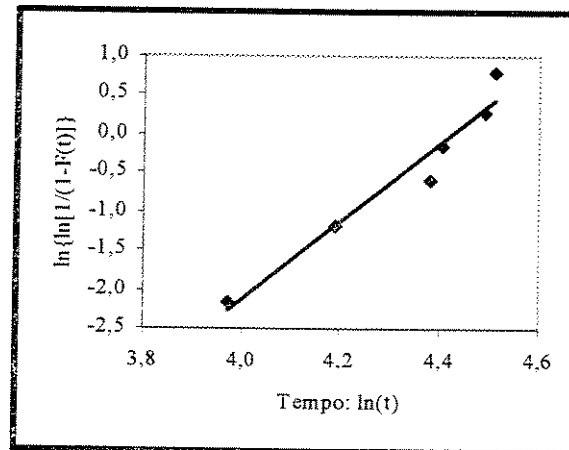


Figura 3.11 – Gráfico de Probabilidade de Weibull

Na distribuição de Weibull a função distribuição acumulada é escrita como:

$$1 - F(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad 3.54$$

Extraindo o logaritmo natural da expressão acima:

$$\ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right] = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \quad 3.55$$

Novamente, extraindo o logaritmo natural de ambos os lados da equação:

$$\ln\ln\left[\frac{1}{1 - F(t)}\right] = \beta \ln t - \beta \ln \alpha \quad 3.56$$

Sendo que: $x_i = \ln t_i$ e $y_i = \ln \ln \left[\frac{I}{I - \hat{F}(t_i)} \right]$. As estimativas de mínimos quadrados para os parâmetros da distribuição de Weibull são: $\hat{\beta} = \hat{\gamma}_1$ e sendo que $\gamma_0 = -\beta \ln \alpha$, então $\hat{\alpha} = \exp \left(-\frac{\hat{\gamma}_0}{\hat{\beta}} \right)$.

3.7.4 Coeficiente de Determinação

Conforme Lewis (1996), além da inspeção visual dos gráficos de probabilidade, a comparação de *coeficientes de determinação* é um dos critérios mais objetivos para selecionar a distribuição que ofereça o melhor ajuste aos dados da amostra. O coeficiente de determinação é freqüentemente utilizado para julgar a adequação e expressa a quantidade de variabilidade explicada ou considerada pelo modelo de regressão.

A variabilidade total é dividida em duas parcelas, uma referente ao modelo de regressão adotado e a outra referente à variação residual proveniente dos termos de erros aleatórios do modelo.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad 3.57$$

Sendo que: y_i é a estimativa da curva de falha acumulada, \bar{y} é a média, e \hat{y}_i é o valor ajustado, todos em escala transformada conforme a distribuição assumida.

A primeira parcela do lado direito da equação é geralmente chamada de soma quadrática da regressão SQ_R e a segunda parcela é a soma quadrática dos erros SQ_E . O lado esquerdo da equação é a soma quadrática total corrigida SQ_T . Portanto:

$$SQ_T = SQ_R + SQ_E \quad 3.58$$

O coeficiente de determinação é definido como:

$$R^2 = \frac{SQ_R}{SQ_T} \quad 3.59$$

Métodos mais formais para avaliar o ajuste de uma distribuição teórica existem, mas a maioria deles, conforme Lewis (1996), não são diretamente aplicáveis em confiabilidade. Em sua forma padrão eles assumem que a distribuição foi escolhida e que os parâmetros foram estimados. Além disso, esses testes são aplicáveis somente em amostras com dados completos.

Uma vez que a distribuição estatística mais adequada aos dados da amostra foi selecionada, baseando-se na inspeção visual dos gráficos de probabilidade e o cálculo do coeficiente de determinação, os parâmetros devem ser estimados para a completa definição do modelo. A estimação de parâmetros e os testes de hipóteses são abordados no capítulo 4.

Capítulo 4

Estimação de Parâmetros e Testes de Hipóteses

A avaliação da confiabilidade de processos ou produtos, a previsão de custos de garantia, o estudo de efeitos devidos a modificações de projeto, a comparação entre componentes de dois ou mais fabricantes diferentes, a avaliação do atendimento aos requisitos de um determinado cliente, e uma série de outras aplicações são freqüentes em confiabilidade. Para realizar estes estudos, é necessário aplicar métodos de *inferência estatística*, utilizados para ajustar parâmetros de modelos, estabelecer conclusões e tomar decisões sobre uma ou mais populações, a partir de dados contidos em amostras.

O campo da inferência estatística é dividido em duas grandes áreas: a *estimação de parâmetros* e o *teste de hipóteses*. Adotando uma abordagem paramétrica, em que uma distribuição teórica é selecionada para modelar um processo de falha, a tarefa de ajuste de modelos é realizada através de métodos de *estimação de parâmetros*. O objetivo é encontrar valores ou *estimativas* que sejam razoavelmente próximas dos valores verdadeiros dos parâmetros da distribuição teórica utilizada.

Os estudos comparativos envolvendo uma ou mais amostras podem ser formulados como um *teste de hipóteses*, onde é necessário decidir qual dentre duas hipóteses sobre algum parâmetro é a mais plausível. Através da comparação entre uma *estatística de teste* e um *valor crítico*, verifica-se se há evidência suficiente para rejeitar a hipótese sobre um ou mais parâmetros da distribuição.

4.1 Estimação de Parâmetros

Em problemas de inferência estatística, é necessário utilizar uma amostra de observações a partir de uma população de interesse, de modo a estabelecer conclusões relativas à população. A relação entre uma população e uma amostra é ilustrada na figura 4.1.

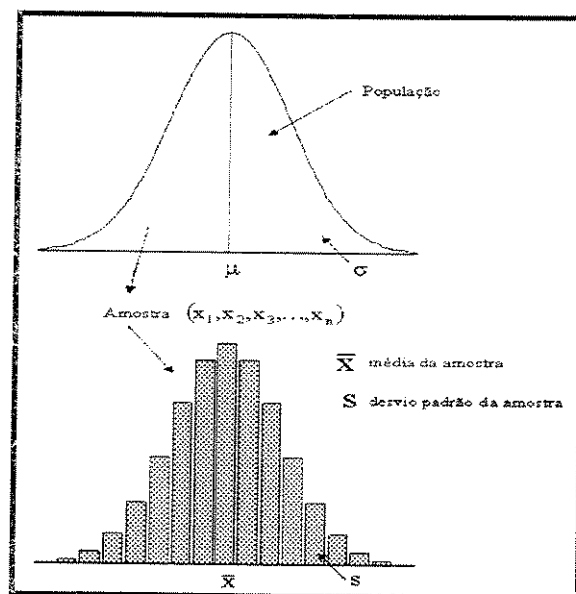


Figura 4.1 – Relação entre População e Amostra

A seguir são dadas as definições formais de população e amostra, além de outros conceitos relacionados à estimação de parâmetros:

- **População:** Uma população consiste na totalidade das observações em que estamos interessados.
- **Amostra:** Uma amostra é um subconjunto de observações selecionadas a partir de uma população.
- **Amostra Aleatória:** As variáveis aleatórias (X_1, X_2, \dots, X_n) são uma amostra aleatória de tamanho n , se: (a) todos os X_i 's forem variáveis aleatórias independentes; (b) cada X_i tiver a mesma distribuição de probabilidades.
- **Estatística:** Uma estatística é qualquer função das observações em uma amostra aleatória. A média, a variância e o desvio padrão da amostra são estatísticas.

- Distribuição Amostral: Sendo a estatística uma função de variáveis aleatórias, então ela também é uma variável aleatória e terá uma distribuição de probabilidades. A distribuição de probabilidades de uma estatística é uma distribuição amostral.
- Estimador: Se X for uma variável aleatória com distribuição de probabilidades $f(x)$, caracterizada por um parâmetro desconhecido θ , e se (X_1, X_2, \dots, X_n) for uma amostra aleatória de tamanho n de X , então a estatística $\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um estimador de θ .
- Estimativa: Uma estimativa pontual de algum parâmetro θ da população é um único valor numérico \hat{E} de uma estatística ou estimador $\hat{\theta}$.

O objetivo da estimação de parâmetros é encontrar estimadores para os valores verdadeiros dos parâmetros da distribuição teórica que sejam os mais consistentes com os dados da amostra retirada da população. Há várias escolhas diferentes para o estimador pontual de um parâmetro. Com o objetivo de decidir qual estimador de um parâmetro particular é melhor, devem ser analisadas algumas propriedades estatísticas desejáveis nesses estimadores. Essas propriedades são:

- Estimador Não Tendencioso: Um estimador deve estar próximo do valor verdadeiro desconhecido do parâmetro. $\hat{\theta}$ é um estimador não tendencioso de θ , se o valor esperado de $\hat{\theta}$ for igual a θ .
- Estimador Não Tendencioso de Variância Mínima: Se forem considerados todos os estimadores não tendenciosos de θ , aquele com menor variância será chamado de estimador não tendencioso de variância mínima (ENTVM). Dentre todos os estimadores não tendenciosos, o ENTVM produzirá uma estimativa \hat{E} que estará mais próxima do valor verdadeiro de θ .
- Erro-Padrão: A medida geralmente utilizada para reportar a precisão de um estimador é o erro-padrão do estimador. O erro-padrão de um estimador $\hat{\theta}$ é o seu desvio padrão, sendo dado por $se_{\hat{\theta}} = \sqrt{Var(\hat{\theta})}$.

O conceito de variância mínima é ilustrado pela figura 4.2:

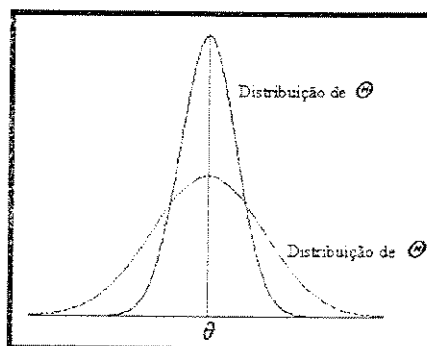


Figura 4.2 – Distribuição Amostral de Dois Estimadores Não Tendenciosos

4.1.1 Métodos de Estimação de Parâmetros

Durante o processo de seleção da distribuição estatística mais adequada aos dados da amostra, os gráficos de probabilidades e o método de mínimos quadrados são utilizados com o objetivo de ajustar uma relação linear entre o tempo de falha e a probabilidade de falha acumulada empírica. Além da avaliação da adequação de uma distribuição teórica, desse processo resultam também estimativas dos parâmetros dos coeficientes de regressão da reta ajustada e, indiretamente, estimativas dos parâmetros da distribuição utilizada na modelagem.

Dentre os métodos de estimação de parâmetros, o método gráfico aliado ao ajuste por mínimos quadrados é muito utilizado em confiabilidade, devido à facilidade de interpretação e implementação computacional. Entretanto, conforme Ebeling (1997), Meeker e Escobar (1998), esse procedimento não é o mais adequado para estimar parâmetros de distribuições não normais e em casos em que há a presença de dados censurados. Nestes casos, o método mais indicado é o *método de máxima verossimilhança*.

O método de máxima verossimilhança é um dos métodos mais versáteis para ajuste de modelos estatísticos aos dados da amostra. Pode ser aplicado em uma grande variedade de distribuições teóricas e tipos de dados (contínuos, discretos, categóricos, censurados, etc.), produzindo resultados mais precisos e satisfatórios que as estimativas gráficas ajustadas por mínimos quadrados.

Segundo Meeker e Escobar (1998), a teoria estatística afirma que, sob certas condições de regularidade, os estimadores de máxima verossimilhança são consistentes e assintoticamente eficientes. Isto significa que a eficiência cresce com o aumento no tamanho da amostra. Além disso, dentre todos os estimadores consistentes, os de máxima verossimilhança possuem a menor variância.

O objetivo do método da máxima verossimilhança é utilizar uma distribuição paramétrica e obter estimativas que maximizem a probabilidade de ocorrência dos dados da amostra, através de combinações das funções utilizadas em confiabilidade. Isto significa encontrar as estimativas dos parâmetros do modelo mais consistentes com os dados observados, levando-se em conta a distribuição estatística selecionada.

Bohoris (1995) cita as desvantagens do método de máxima verossimilhança, ressaltando que embora seja uma técnica geral e versátil, envolve, em alguns casos, o emprego de funções verossimilhança complexas, resultando em cálculos iterativos laboriosos. Entretanto, devido ao crescente desenvolvimento de computadores e à disponibilidade de softwares comerciais, esses problemas podem ser considerados não significativos.

4.1.2 Método de Máxima Verossimilhança

O primeiro passo para estimação dos parâmetros do modelo através do método de máxima verossimilhança é a determinação da *função verossimilhança*. A função verossimilhança é igual ou proporcional à probabilidade conjunta de ocorrência dos dados da amostra e sua forma dependerá do modelo selecionado e do tipo de dados que a amostra contém. Para processos de falha modelados por uma distribuição de probabilidades com k parâmetros e dados completos, a função verossimilhança será:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad 4.1$$

O tempo de falha exato para uma unidade censurada não é conhecido. Dados censurados à esquerda surgem quando uma determinada unidade da amostra falhou antes de ser inspecionada e o tempo de falha não foi registrado. Para unidades censuradas à direita, comuns em confiabilidade, sabe-se apenas que o tempo de falha é maior que o tempo de suspensão e a forma da função verossimilhança será:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^r 1 - F(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{j=1}^s R(t_j; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad 4.2$$

Para uma amostra composta por dados completos e dados de censura simples ou múltipla à direita em um processo de falha modelado por uma distribuição com k parâmetros, a função verossimilhança total será:

$$L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \prod_{j=1}^s R(t_j; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad 4.3$$

Por razões computacionais, utiliza-se o logaritmo da função verossimilhança. Portanto:

$$\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \sum_{i=1}^r \ln[f(t_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)] + \sum_{j=1}^s \ln[R(t_j; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)] \quad 4.4$$

Os valores que maximizam o logaritmo da função verossimilhança são as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros e também constituem a solução das equações de verossimilhança abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_k} &= 0 \end{aligned} \quad 4.5$$

Quando a distribuição estatística selecionada possui apenas um parâmetro, como é o caso da distribuição Exponencial, a estimativa é obtida de forma direta, através de manipulações algébricas da equação de verossimilhança. Para modelos com mais de um parâmetro, distribuições Normal e de Weibull, as soluções das equações de verossimilhança são obtidas através de métodos numéricos iterativos para resolução de sistemas de equações não lineares.

4.1.2.1 Distribuição Exponencial

Para uma amostra com dados completos e dados provenientes de censura múltipla à direita, a função verossimilhança para a distribuição exponencial será:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^r \lambda \exp(-\lambda t_i) \prod_{j=1}^s \exp(-\lambda t_j) \quad 4.6$$

O logaritmo da função verossimilhança é:

$$\ln L(\lambda) = r \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^r t_i - \lambda \sum_{j=1}^s t_j \quad 4.7$$

Maximizando a função verossimilhança em relação ao parâmetro de interesse, obtém-se a equação de verossimilhança:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = \frac{r}{\lambda} - \sum_{i=1}^r t_i - \sum_{j=1}^s t_j = 0 \quad 4.8$$

O estimador de máxima verossimilhança de λ é a solução da equação de verossimilhança anterior:

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad 4.9$$

4.1.2.2 Distribuição Normal

A função verossimilhança para a distribuição normal é:

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^r \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right) \prod_{j=1}^s 1 - \Phi\left(\frac{t_j - \mu}{\sigma}\right) \quad 4.10$$

Extraindo o logaritmo da função verossimilhança:

$$\ln L(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^r \ln \left[\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right) \right] + \sum_{j=1}^s \ln \left[1 - \Phi\left(\frac{t_j - \mu}{\sigma}\right) \right] \quad 4.11$$

As equações de verossimilhança para a distribuição normal são:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^r z_i + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^s h(z_j) = 0 \quad 4.12$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ln L(\mu, \sigma) = -\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^r z_i^2 + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^s z_j h(z_j) = 0 \quad 4.13$$

Onde $z_i = \frac{t_i - \mu}{\sigma}$ e $h(z_i)$ é a função taxa de falha. As equações de verossimilhança acima são resolvidas através de métodos numéricos.

4.1.2.3 Distribuição de Weibull

A função verossimilhança para amostras de Weibull é:

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^r \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^\beta\right] \prod_{j=1}^s \exp\left[-\left(\frac{t_j}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad 4.14$$

Por razões computacionais, os cálculos são realizados com o logaritmo da função verossimilhança:

$$\ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \ln \beta - \beta \ln \alpha + (\beta - 1) \ln t_i - \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta + \sum_{j=1}^s \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta \quad 4.15$$

As equações de verossimilhança para a distribuição de Weibull são:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \left[-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \right] + \sum_{j=1}^s \left[\frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta \right] = 0 \quad 4.16$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{1}{\beta} + \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) - \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right] - \sum_{j=1}^s \left[\left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_j}{\alpha} \right) \right] = 0 \quad 4.17$$

Os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros da distribuição são obtidos através métodos numéricos iterativos que serão abordados na seção seguinte.

4.1.3 Métodos Numéricos na Resolução de Sistemas de Equações Não Lineares

Para modelos com mais que um parâmetro a ser estimado, muitas vezes não existem formas diretas para o cálculo das estimativas de máxima verossimilhança. Deve-se recorrer a métodos numéricos iterativos para a resolução de sistemas de equações não-lineares. Nelson (1982) sugere e discute uma série de métodos numéricos que podem ser aplicados para a resolução das equações de verossimilhança:

- Procura direta (tentativa e erro): envolve o cálculo de $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ para uma estimativa próxima à que produz o maior valor de $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. O método não utiliza as derivadas de $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ e converge vagarosamente, porém com segurança, mesmo partindo de valores não muito próximos das estimativas de máxima verossimilhança.

- Método de Powell sem derivadas: maximiza diretamente $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ sem utilizar as derivadas parciais. Converge rapidamente e com relativa segurança, ainda que os valores de partida não estejam muito próximos das estimativas de máxima verossimilhança.
- Método da ascendente de maior inclinação (*steepest ascent*): envolve os passos seguintes: (1) para as estimativas $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, determinar a direção da ascendente de maior inclinação (onde $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ aumenta mais rapidamente). (2) Ao longo da linha reta, na direção determinada anteriormente, encontrar $\theta_{1+i}, \theta_{2+i}, \dots, \theta_{k+i}$ que maximizam $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Repetir os passos (1) e (2) até que as novas estimativas estejam próximas das estimativas de máxima verossimilhança. A procura nessa direção pode ser feita por tentativa e erro. O método requer as derivadas parciais primeiras de $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$.
- Método de Newton-Raphson: utiliza as derivadas parciais primeira e segunda de $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ para aproximar as equações de verossimilhança com equações lineares e resolvê-las. O método pode não convergir se os valores de partida não são próximos das estimativas de máxima verossimilhança, porém quando converge, é mais rápido que os outros métodos.
- Método da secante: segue os mesmos princípios do método de Newton-Raphson, mas utilizando somente as derivadas parciais primeira de $\ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Converge mais vagarosamente que o método de Newton-Raphson.

4.1.3.1 Método de Newton-Raphson na Resolução de Equações de Verossimilhança

Dentre alguns dos métodos mais utilizados para resolver as equações de verossimilhança destaca-se o método de Newton-Raphson. Este assume que uma função quadrática, uma série de Taylor, aproxima adequadamente o logaritmo da função verossimilhança:

$$\ln L(\theta) \approx \ln L(\hat{\theta}_i) + \frac{d}{d\theta} \ln L(\theta - \hat{\theta}_i) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln L(\theta - \hat{\theta}_i)^2 \right] \quad 4.18$$

Freqüentemente recomendado por estatísticos, o método de Newton-Raphson requer as derivadas primeira e segunda do logaritmo da função verossimilhança. O método converge satisfatoriamente se os valores de partida são próximos das estimativas de máxima verossimilhança. Os valores de partida utilizados serão as estimativas de mínimos quadrados obtidas dos gráficos de probabilidade.

O método é ilustrado para a distribuição de Weibull com dois parâmetros, mas ele também pode ser aplicado a distribuições com maior número de parâmetros. Supondo que $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i$ são as estimativas aproximadas dos parâmetros após a i -ésima iteração:

- Avaliar $\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L(\alpha, \beta)$ e $\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\alpha, \beta)$ para $\alpha = \hat{\alpha}_i$ e $\beta = \hat{\beta}_i$.
- Avaliar $\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln L(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln L(\alpha, \beta)$ e $\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \ln L(\alpha, \beta)$ para $\alpha = \hat{\alpha}_i$ e $\beta = \hat{\beta}_i$.
- Resolver os sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L(\alpha, \beta) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln L(\alpha, \beta) \right) a_i + \left(-\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \ln L(\alpha, \beta) \right) b_i \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\alpha, \beta) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} \ln L(\alpha, \beta) \right) a_i + \left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln L(\alpha, \beta) \right) b_i \end{aligned} \quad 4.19$$

- Calcular as novas estimativas: $\hat{\alpha}_{i+1} = \hat{\alpha}_i + a_i$ e $\hat{\beta}_{i+1} = \hat{\beta}_i + b_i$.
- Repetir os passos anteriores até atingir um critério de parada.

Os estatísticos chamam a matriz de derivadas parciais segunda negativas de matriz de informação de Fisher. Em análise numérica a matriz de derivadas parciais segundas positivas é a matriz Hessiana. Essas derivadas parciais para a distribuição de Weibull são:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \left[\frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^2} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta - \frac{\beta^2}{\alpha} \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^{\beta-1} \left(\frac{t_i}{\alpha^2} \right) \right] - \sum_{j=1}^s \left[\frac{\beta}{\alpha^2} \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta^2}{\alpha} \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^{\beta-1} \left(\frac{t_j}{\alpha^2} \right) \right] \quad 4.20$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \left\{ -\frac{1}{\beta^2} - \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \left[\ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right]^2 \right\} - \sum_{j=1}^s \left\{ \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta \left[\ln \left(\frac{t_j}{\alpha} \right) \right]^2 \right\} \quad 4.21$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \left[-\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{t_i}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_i}{\alpha} \right) \right] + \sum_{j=1}^s \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right) \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{t_j}{\alpha} \right)^\beta \ln \left(\frac{t_j}{\alpha} \right) \right] \quad 4.22$$

Para a distribuição Normal:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L(\mu, \sigma) = -\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^s h^2(z_j) - z_j h(z_j) \quad 4.23$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L(\mu, \sigma) = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^3} \sum_{i=1}^r z_i^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^s z_j h(z_j) + z_j^2 h^2(z_j) - z_j^3 h(z_j) \quad 4.24$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \ln L(\mu, \sigma) = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^r z_i + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^s h(z_j) - z_j h^2(z_j) + z_j^2 h(z_j) \quad 4.25$$

4.1.4 Intervalos de Confiança

É necessário também expressar o grau de incerteza associado às estimativas. Uma das maneiras de expressar essa incerteza é através do erro-padrão da estimativa. Uma outra abordagem é através dos intervalos de confiança. Um intervalo de confiança quantifica a incerteza devida a erros de amostragem surgidos de tamanhos de amostras limitados, porém não quantificam erros provenientes de suposições inadequadas sobre o modelo.

Especificados por um nível de confiança e um nível de significância, esses intervalos podem ser bilaterais, quando são expressos por um limite inferior e outro superior que englobam o valor verdadeiro desconhecido do parâmetro da população, ou unilaterais, quando somente através de um de seus limites.

Matematicamente, intervalos de confiança bilaterais são expressos conforme abaixo:

$$P(l \leq \theta \leq u) = 1 - \eta \quad 4.26$$

Onde η é o nível de significância e o seu complementar o nível de confiança, l e u são os limites inferior e superior de confiança. Em amostras que contem somente dados completos há procedimentos que fornecem intervalos de confiança exatos. Porém, na maioria dos problemas práticos, há a presença de dados censurados na amostra e não existem intervalos de confiança exatos para esses casos. A aproximação mais utilizada é a construção de intervalos de confiança baseados na distribuição normal.

4.1.4.1 Intervalos de Confiança por Aproximação Normal

Conforme Meeker e Escobar (1998), a obtenção dos intervalos de confiança por aproximação normal é clássica por sua facilidade de implementação computacional. São baseados na suposição que a estatística $Z_{\hat{\theta}} = (\theta - \hat{\theta}) / se_{\hat{\theta}}$ tenha uma distribuição normal padrão com média zero e desvio padrão unitário. Essa aproximação é usualmente melhor para amostras com grande número de falhas e poucos itens censurados. Segue que:

$$P(z_{\eta/2} \leq Z_{\hat{\theta}} \leq z_{(1-\eta/2)}) \approx 1 - \eta \quad 4.27$$

Isso implica que:

$$P(\hat{\theta} - z_{(1-\eta/2)} se_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + z_{(1-\eta/2)} se_{\hat{\theta}}) \approx 1 - \eta \quad 4.28$$

Os intervalos de confiança por aproximação normal utilizam as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo e a estimativa do erro padrão é extraída da matriz de variância-covariância, cuja ordem será igual ao número de parâmetros estimados da distribuição.

Um intervalo de confiança $100(1-\eta)\%$ para o parâmetro λ da distribuição exponencial será:

$$[\lambda_l, \lambda_u] = \hat{\lambda} \pm z_{(1-\eta/2)} se_{\hat{\lambda}} \quad 4.29$$

Onde $se_{\hat{\lambda}}$ é erro padrão da estimativa do parâmetro λ , sendo obtido pela expressão:

$$se_{\hat{\lambda}} = \sqrt{\left[-\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln L \right]^{-1}} \quad 4.30$$

Para a distribuição normal, a matriz de variância-covariância é:

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\mu}) & Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) \\ Cov(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) & Var(\hat{\sigma}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L(\mu, \sigma) & -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \ln L(\mu, \sigma) \\ -\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} \ln L(\mu, \sigma) & -\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L(\mu, \sigma) \end{bmatrix}^{-1} \quad 4.31$$

Onde as derivadas parciais são avaliadas para $\mu = \hat{\mu}$ e $\sigma = \hat{\sigma}$. O erro padrão da estimativa do parâmetro de localização $se_{\hat{\mu}}$ é igual à raiz quadrada de sua variância que pode ser extraída da matriz anterior e o mesmo vale para o parâmetro de escala. Um intervalo de confiança $100(1-\eta)\%$ para μ será:

$$[\mu_l, \mu_u] = \hat{\mu} \pm z_{(1-\eta/2)} se_{\hat{\mu}} \quad 4.32$$

Devido a σ ser um parâmetro positivo, para obter o intervalo de confiança pode ser utilizada a estatística $Z_{\log(\hat{\sigma})} = (\log(\hat{\sigma}) - \log(\sigma)) / se_{\log(\hat{\sigma})}$ aproximando-se também sua distribuição por uma normal com média zero e desvio padrão unitário. Portanto:

$$[\sigma_l, \sigma_u] = [\hat{\sigma}/w, \hat{\sigma} \times w] \quad 4.33$$

Onde $w = \exp[z_{(1-\eta/2)} se_{\hat{\sigma}} / \hat{\sigma}]$ e $se_{\hat{\sigma}} = \sqrt{Var(\hat{\sigma})}$. Para obter um intervalo de confiança unilateral para um parâmetro particular basta substituir $z_{(1-\eta/2)}$ por $z_{(1-\eta)}$ e utilizar o limite apropriado do intervalo bilateral.

Modelando o processo de falha através da distribuição de Weibull a matriz de variância-covariância é:

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\alpha}) & Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & Var(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln L(\alpha, \beta) & -\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \ln L(\alpha, \beta) \\ -\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \ln L(\alpha, \beta) & -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln L(\alpha, \beta) \end{bmatrix}^{-1} \quad 4.34$$

Os intervalos de confiança para os parâmetros de escala e forma são:

$$[\alpha_l, \alpha_u] = [\hat{\alpha}/w, \hat{\alpha} \times w] \quad 4.35$$

$$[\beta_l, \beta_u] = [\hat{\beta}/w, \hat{\beta} \times w] \quad 4.36$$

4.1.4.2 Determinação do Tamanho da Amostra

Freqüentemente, é necessário determinar o tamanho de amostra adequado a um determinado ensaio, com o objetivo de conseguir a precisão desejada na estimação dos parâmetros e intervalos de confiança. Usualmente, deseja-se que a estimativa de um parâmetro esteja dentro de um intervalo específico $\pm d$, com $100\eta\%$ de probabilidade. Nelson (1982) apresenta um critério para determinar o tamanho da amostra, baseado na suposição de que a distribuição do estimador do parâmetro de interesse é aproximadamente Normal.

$$n \approx Var(\hat{\theta}) \left[\frac{z_{(1-\eta/2)}}{d} \right]^2 \quad 4.37$$

4.2 Testes de Hipóteses

Há situações em que é necessário demonstrar que a vida média, taxa de falha ou qualquer outro parâmetro iguala ou ultrapassa um valor específico, resultado de conhecimento prévio sobre o processo de falha ou determinado por alguma teoria ou ainda proveniente de obrigações contratuais. Em outras situações, o objetivo é verificar se há diferença significativa entre dois produtos ou selecionar o melhor deles.

É muito freqüente nas mais diversas áreas de conhecimento e também em engenharia de confiabilidade deparar-se com experimentos comparativos, em que é necessário decidir entre aceitar ou rejeitar uma afirmação sobre algum parâmetro. Em inferência estatística, a afirmação é chamada de *hipótese* e o procedimento para decidir entre aceitá-la ou rejeitá-la é o *teste de hipóteses*.

Formalmente, *uma hipótese estatística é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações*. Alguns exemplos típicos de hipóteses estatísticas em confiabilidade são:

- A média de uma distribuição exponencial excede um valor específico (comum em testes de demonstração de confiabilidade de hardware);
- A confiabilidade de um produto em um dado instante de tempo excede um valor específico;
- O parâmetro de forma de uma distribuição de Weibull é igual a 1 (a vida do produto tem uma distribuição exponencial);
- A média de uma distribuição normal excede a de outra distribuição normal (comum em comparações envolvendo projetos, materiais, métodos de manufatura, períodos de manufatura, etc.);
- As médias das distribuições normais são iguais (uma hipótese comum na análise de variância utilizada para comparar um certo número de projetos, materiais, fornecedores, períodos de produção, etc.).

Para toda a afirmação, também chamada *hipótese nula* H_0 , há uma *hipótese alternativa* H_1 contrária. Alguns exemplos são:

- A média de uma distribuição exponencial está abaixo de um valor específico;
- A confiabilidade de um produto em um dado instante de tempo está abaixo de um valor específico;
- O parâmetro de forma de uma distribuição de Weibull não é igual a 1;
- A média de uma distribuição normal não excede a de outra distribuição normal;
- Duas ou mais médias de distribuições normais de um grupo em estudo são diferentes.

Os testes de hipóteses que tem como objetivo demonstrar que um parâmetro de um produto ultrapassa um valor específico (inferência sobre uma amostra) ou ultrapassa valores de parâmetros de outros produtos (inferência sobre duas ou mais amostras) são chamados de *testes de hipóteses unilaterais*. Aqueles em que a meta é avaliar se um parâmetro de um produto é consistente com um valor específico ou se os parâmetros de um certo número de produtos são comparáveis ou iguais são chamados de *testes de hipóteses bilaterais*.

Expressando matematicamente cada um dos casos em comparações envolvendo uma única amostra:

- Hipótese unilateral:
 - $H_0 : \theta = \theta_0$
 - $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta > \theta_0$
- Hipótese bilateral:
 - $H_0 : \theta = \theta_0$
 - $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Em procedimentos de inferência envolvendo duas ou mais amostras:

- Hipótese unilateral:
 - $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_a$
 - H_1 : Pelo menos em uma das amostras o parâmetro θ é maior ou menor que o parâmetro θ das outras amostras.
- Hipótese bilateral:
 - $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_a$
 - H_1 : Pelo menos em uma das amostras o parâmetro θ difere do parâmetro θ das outras amostras.

Em situações práticas os parâmetros de uma população não são conhecidos, portanto as ações a serem tomadas devem ser baseadas em dados provenientes de uma amostra aleatória retirada dessa população. Um teste de hipóteses envolve a utilização desses dados e o cálculo de uma *estatística de teste*, a qual é uma função dos dados da amostra utilizada para tomar alguma decisão acerca da hipótese nula.

4.2.1 Erros do Tipo I e Tipo II

A figura 4.3 ilustra o teste de hipóteses bilateral comentado na seção anterior destacando a região crítica e a região de aceitação (falhar em rejeitar a hipótese nula):

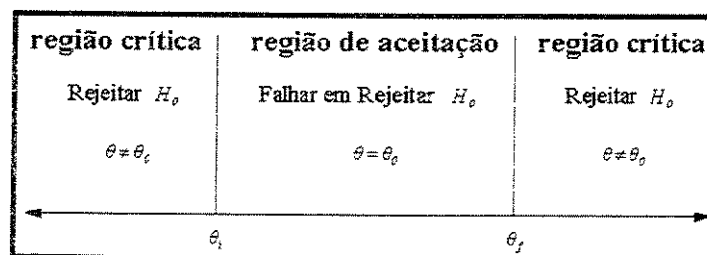


Figura 4.3 – Região Crítica e Região de Aceitação

A estimativa do parâmetro θ pode assumir muitos valores. Se $\theta_l \leq \theta \leq \theta_u$, não há evidência estatisticamente significativa para rejeitar a hipótese nula. Se $\theta < \theta_l$ ou $\theta > \theta_u$, rejeita-se a hipótese nula em favor da hipótese alternativa. Os valores de $\hat{\theta}$ menores que θ_l e maiores que θ_u constituem a *região crítica* do teste, enquanto que os valores de $\hat{\theta}$ compreendidos entre θ_l e θ_u formam a região para a qual falha-se em rejeitar a hipótese nula ou a *região de aceitação*. Os limites são chamados de *valores críticos* do teste.

O procedimento de teste de hipóteses pode conduzir a uma de duas conclusões erradas. Supondo que $\theta = \theta_0$ e o valor da estatística de teste cair na região crítica, a hipótese nula é rejeitada quando, de fato, ela é verdadeira. Esse tipo de conclusão errada é chamada de *erro do tipo I*. Se $\theta \neq \theta_0$ e o valor da estatística de teste encontra-se na região de aceitação, a hipótese nula não é rejeitada quando, de fato, ela é falsa. Esse tipo de conclusão é denominada de erro do tipo II.

A tabela a seguir resume as quatro situações diferentes, determinando se a decisão é correta ou errada.

Decisão	H_0 é verdadeira.	H_0 é falsa.
Falhar em rejeitar ou aceitar H_0 .	Nenhum erro.	Erro do tipo II.
Rejeitar H_0 .	Erro do tipo I.	Nenhum erro.

Tabela 4.1 – Decisões em Testes de Hipóteses

A decisão está baseada em variáveis aleatórias, portanto, podem ser associadas probabilidades a cada um dos tipos de erro possíveis em um teste de hipóteses. A probabilidade de cometer erro do tipo I é chamada de *nível de significância* do teste:

$$\eta = P(\text{erro do tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0, \text{ quando } H_0 \text{ for verdadeira}) \quad 4.38$$

A probabilidade de cometer erro do tipo II é denotada por δ :

$$\delta = P(\text{erro do tipo II}) = P(\text{falhar em rejeitar } H_0, \text{ quando } H_0 \text{ for falsa}) \quad 4.39$$

A probabilidade de erro do tipo I pode ser facilmente controlada através da seleção de valores críticos adequados para o teste. Uma vez que pode-se controlar a probabilidade de rejeitar erroneamente a hipótese nula H_0 , a própria rejeição de H_0 é considerada *uma conclusão forte*.

Por outro lado, para controlar ou determinar a probabilidade de erro do tipo II, seria necessário conhecer o valor verdadeiro do parâmetro. Uma vez que não é possível conhecer o valor verdadeiro do parâmetro da população, a aceitação de H_0 , quando, de fato, ela é falsa, é considerada uma *conclusão fraca*.

A terminologia “falhar em rejeitar H_0 ” é preferível em relação à terminologia “aceitar H_0 ” porque implica que não foi encontrada evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula ou para estabelecer uma conclusão forte. Portanto, a rejeição da hipótese nula não significa que a probabilidade de que ela seja verdadeira é alta, mas apenas que mais dados são requeridos para atingir uma conclusão forte.

4.2.2 Procedimento Geral de Testes de Hipóteses

Montgomery e Runger (2003) sugerem uma sequência de etapas na aplicação de testes de hipóteses:

1. A partir do contexto do problema, identificar o parâmetro de interesse.
2. Estabelecer a hipótese nula H_0 .
3. Especificar uma hipótese alternativa apropriada H_1 .
4. Escolher um nível de significância η .
5. Estabelecer a estatística de teste apropriada.

6. Estabelecer a região de rejeição para a estatística.
7. Calcular qualquer grandeza amostral necessária, substituindo-a na equação para a estatística de teste e calcular aquele valor.
8. Decidir se H_0 deve ou não ser rejeitada e reportar isso no contexto do problema.

As etapas 1 a 4 devem ser completadas antes de examinar os dados da amostra.

4.2.3 Testes da Razão de Verossimilhança

O teste de hipóteses é uma das técnicas mais importantes da inferência estatística e amplamente utilizado em diversas áreas de conhecimento. Sua importância dentro do contexto da confiabilidade também foi destacada anteriormente, ressaltando as inúmeras situações em que é útil a formulação do problema através dessa técnica.

Os procedimentos de testes de hipóteses para comparação de médias e variâncias populacionais, e comumente utilizados em engenharia e outras áreas, fazem uso de estatísticas de teste baseadas na suposição de distribuição Normal para as populações em estudo. Entretanto, essa suposição em muitas situações não é razoável devido a grande parte dos processos de falha não serem satisfatoriamente modelados pela distribuição Normal.

Em confiabilidade, procedimentos mais gerais e versáteis devem ser empregados, não só para levar em conta a distribuição utilizada para modelagem do processo de falha, como também a presença de dados censurados na amostra. Os testes baseados em um princípio geral chamado de *princípio da razão da verossimilhança* são adequados nessas situações. Eles podem ser aplicados à maioria das distribuições estatísticas e tipos de dados, inclusive os de censura múltipla.

Segundo Montgomery e Runger (2003) testes desenvolvidos por esse método são os melhores procedimentos de teste pelo fato de minimizarem a probabilidade de erro do tipo II, dentre todos os testes que tem a mesma probabilidade de erro do tipo I.

4.2.3.1 Comparações Envolvendo Uma Amostra

Supondo que o valor do parâmetro θ é θ_0 . A hipótese nula de igualdade é $\theta = \theta_0$ e a hipótese alternativa é $\theta \neq \theta_0$. Quando $\theta = \theta_0$, $\ln L(\theta_0)$ é maximizado. Da mesma forma, se $\theta = \hat{\theta}$, a estimativa de máxima verossimilhança de θ , $\ln L(\hat{\theta})$ é maximizado. A estatística de teste da razão entre as funções verossimilhança é:

$$T = -2 \ln \left[\frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})} \right] \quad 4.40$$

Podendo ser escrita na forma:

$$T = 2 \left[\ln \hat{L}(\hat{\theta}) - \ln \hat{L}(\theta_0) \right] \quad 4.41$$

A aplicação do teste da razão de verossimilhança supõe que a estatística de teste acima segue, aproximadamente, uma distribuição de Qui-Quadrado, cujo número de graus de liberdade é igual ao número de parâmetros estimados da distribuição. Uma distribuição de Qui-Quadrado com g graus de liberdade é ilustrada na figura 4.4:

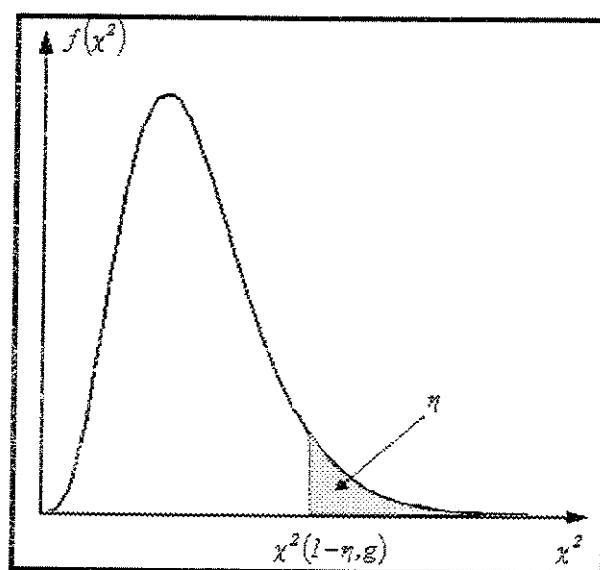


Figura 4.4 – Distribuição de Qui-Quadrado

A região destacada na figura anterior é a região crítica ou região de rejeição. A estatística de teste é comparada com o valor crítico:

- Se $T \leq \chi^2_{(1-\eta,1)}$, não há evidência para a rejeição da hipótese nula.
- Se $T > \chi^2_{(1-\eta,1)}$, a hipótese nula é rejeitada.

Onde $\chi^2_{(1-\eta,1)}$, é o $100(1-\eta)$ -ésimo percentual de uma distribuição Qui-Quadrado com 1 grau de liberdade. Testes unilaterais podem ser feitos substituindo η por 2η e rejeitando a hipótese nula se θ está abaixo ou acima de θ_0 .

4.2.3.2 Comparações Envolvendo Duas ou Mais Amostras

As comparações envolvendo duas ou mais amostras através de testes da razão de verossimilhança podem ser realizadas de três formas, considerando a formulação da hipótese nula:

- Um dos k parâmetros é igual entre todas amostras.
- Um dos k parâmetros é igual entre todas as amostras assumindo que os outros parâmetros são iguais.
- Todos os k parâmetros são iguais entre todas as amostras ou as distribuições são idênticas.

Neste trabalho, o teste aplicado verifica se as distribuições são idênticas ou homogêneas. Para que isso ocorra, todos os parâmetros em todas as amostras devem ser iguais. Considerando “ a ” amostras modeladas pela distribuição de Weibull, a hipótese nula será: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a$ e $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_a$. A hipótese alternativa é de que algum α_i e/ou algum β_i seja diferente das demais amostras. A estatística de teste:

$$T = 2 \left[\ln \hat{L}_1 + \dots + \ln \hat{L}_a - \ln \hat{L}_{\alpha\beta} \right] \quad 4.42$$

Onde a é o número de amostras, $\ln \hat{L}_i$ é o logaritmo da função verossimilhança avaliado para as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i$. O logaritmo da função verossimilhança combinado quando todos os $\alpha_a = \alpha$ e todos os $\beta_a = \beta$ é $\ln L_{a\beta}(\alpha, \beta) = \ln L_1(\alpha, \beta) + \dots + \ln L_a(\alpha, \beta)$. O seu máximo ocorre quando $\ln \hat{L}_{a\beta}$ é avaliado para as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ da amostra conjunta.

Sob a hipótese nula, T segue, aproximadamente, uma distribuição Qui-Quadrado com $2a-2$ graus de liberdade. Portanto:

- Se $T \leq \chi^2_{(1-\eta, 2a-2)}$, não há evidência para a rejeição da hipótese nula.
- Se $T > \chi^2_{(1-\eta, 2a-2)}$, a hipótese nula é rejeitada.

O teste é aplicável também à distribuição Normal e outras distribuições comumente utilizadas em confiabilidade.

Capítulo 5

Descrição da Metodologia e Implementação Computacional

A metodologia, em sua fase de ajuste de modelos, propõe uma combinação de métodos não paramétricos e paramétricos. Na primeira etapa é selecionada uma distribuição teórica através de gráficos de probabilidade construídos a partir de uma estimativa não paramétrica da curva de falha acumulada. Através da verificação visual dos gráficos, seleciona-se a distribuição mais adequada ao caso em estudo. Aliado aos gráficos de probabilidade, uma medida quantitativa de ajuste, o coeficiente de determinação, expressa o percentual de variabilidade dos dados explicada pelo modelo adotado.

Na segunda etapa, o modelo é completamente determinado através da obtenção das estimativas dos parâmetros da distribuição utilizando o método de máxima verossimilhança. O método é direto para a distribuição Exponencial. Para a distribuição Normal e Weibull as estimativas dos parâmetros somente podem ser calculadas numericamente. O método de Newton-Raphson, o qual necessita de um valor de partida para a sua aplicação, é utilizado para esta finalidade. Os valores de partida são as estimativas de mínimos quadrados.

Gráficos com as quatro funções utilizadas na modelagem da confiabilidade e estimativas da média, mediana, variância e desvio padrão são apresentados utilizando os parâmetros ajustados por máxima verossimilhança. Através desses gráficos é possível estimar a probabilidade de falha acumulada ou confiabilidade para um intervalo de tempo específico e também verificar o comportamento da taxa de falha.

É necessário também expressar o grau de incerteza associado às estimativas. Uma das maneiras de expressar essa incerteza é através do erro-padrão da estimativa. Uma outra abordagem é através dos intervalos de confiança, fornecendo um limite inferior e outro superior que engloba o valor verdadeiro desconhecido do parâmetro da população, com um grau de confiança associado. Os intervalos de confiança baseados na teoria de aproximação normal, por sua facilidade de implementação, são apresentados.

Concluída a fase de ajuste de modelos, os estudos comparativos são realizados através de testes de hipóteses estatísticas. Por ser um procedimento mais geral, o teste da razão de verossimilhança pode ser utilizado em casos em que as distribuições não sejam normais, permitindo também a inclusão dos dados censurados, tão comuns em estudos de confiabilidade. A figura 5.1 mostra um fluxograma geral do programa elaborado em *Visual Basic 5.0* para a realização de todos os cálculos.

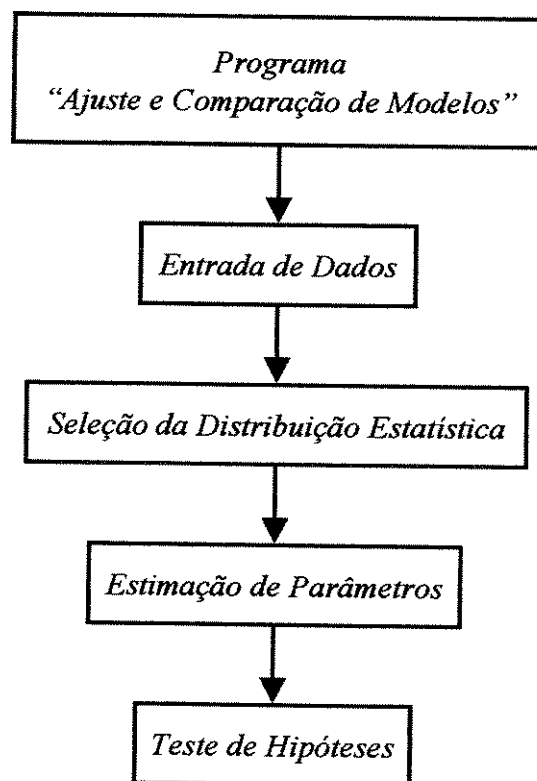


Figura 5.1 – Fluxograma Geral do Programa

Os passos da metodologia são ilustrados através de um exemplo, conforme Meeker e Escobar (1998), em que são comparados dois projetos de um componente de uma torradeira elétrica. Os dados de falha e censura dos dois projetos são mostrados na tabela 5.1:

Projeto A			Projeto B		
Horas	Falhas	Suspensões	Horas	Falhas	Suspensões
90	2	1	45	0	1
190	0	1	47	1	0
218	0	2	73	1	0
241	0	1	136	0	5
268	1	0	145	1	0
349	0	1	190	0	2
378	0	2	281	0	1
410	2	1	311	1	0
485	1	0	417	1	0
508	1	0	485	0	2
600	0	4	490	1	0
631	3	0	569	0	1
635	1	0	571	1	1
658	1	1	575	1	0
731	1	0	608	2	12
739	1	4	630	1	0
790	1	11	670	2	0
855	1	0	731	0	1
980	2	5	838	1	0
			964	2	0
			1164	0	7
			1198	1	1
			1300	0	3

Tabela 5.1 – Dados de Falha: Retentor de uma Torradeira Elétrica

5.1 Seleção da Distribuição

Após a coleta dos dados, estes são carregados através de um arquivo texto ou digitados diretamente na tela de entrada. Os dados de entrada necessários são o número da amostra e o tempo de falha ou suspensão correspondente à amostra. Em seguida, uma distribuição estatística é escolhida e na fase seguinte é verificada sua adequação aos dados da amostra. O fluxograma da etapa de entrada de dados é mostrado na figura 5.2 e as telas de apresentação e entrada de dados são mostrados nas figuras 5.3 e 5.4:

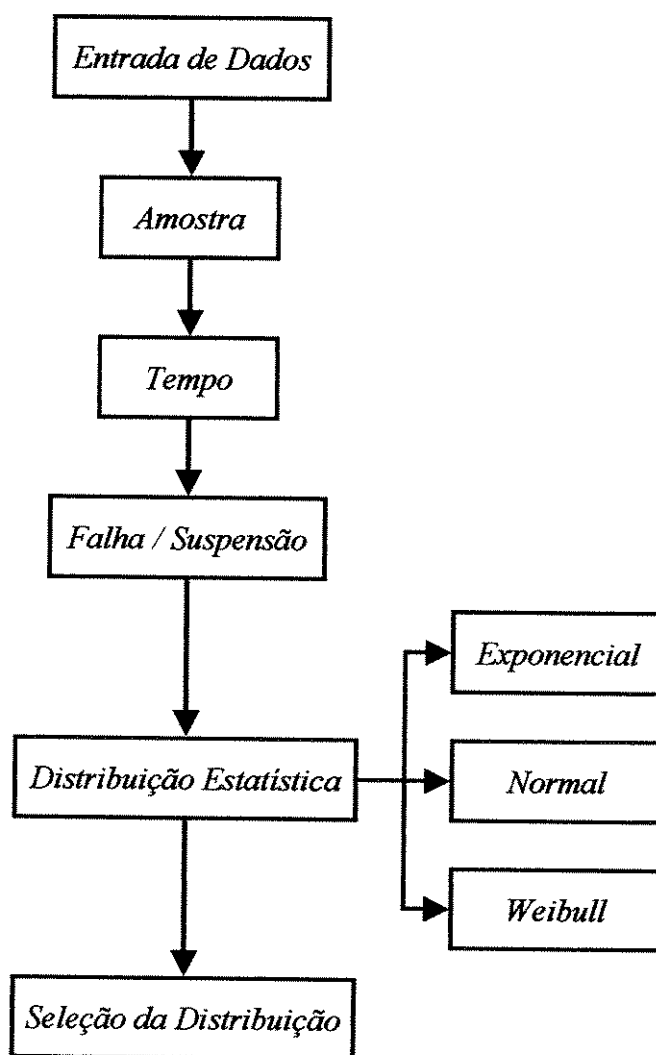


Figura 5.2 – Fluxograma de Entrada de Dados

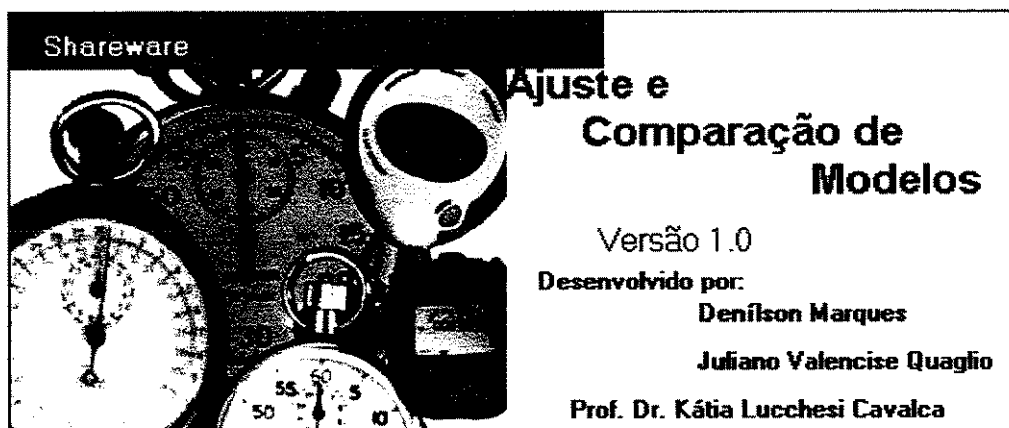


Figura 5.3 – Tela de Apresentação do Programa

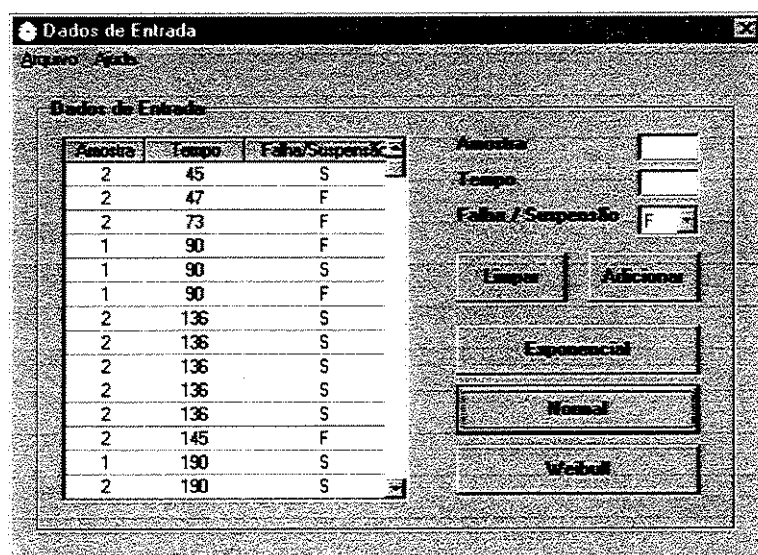


Figura 5.4 – Tela de Entrada de Dados do Programa

A verificação da adequação da distribuição escolhida é através de gráficos de probabilidade e do coeficiente de determinação. A curva de falha acumulada é derivada empiricamente através do método Ranking. Esses dados de falha acumulada empírica, e possivelmente também os tempos de falha, são transformados com o objetivo de ajustar uma relação linear. Estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros são obtidas e serão utilizadas como valores de partida na fase de estimação de parâmetros por máxima verossimilhança. Através do coeficiente de determinação é possível quantificar a parcela inerente ao modelo de regressão linear adotado e a parcela proveniente de erros aleatórios.

Na figura 5.5, o fluxograma da etapa de seleção da distribuição. As telas dos gráficos de probabilidade, para cada amostra e para cada distribuição estatística que faz parte do escopo do trabalho, são mostradas nas figuras 5.6 a 5.11:

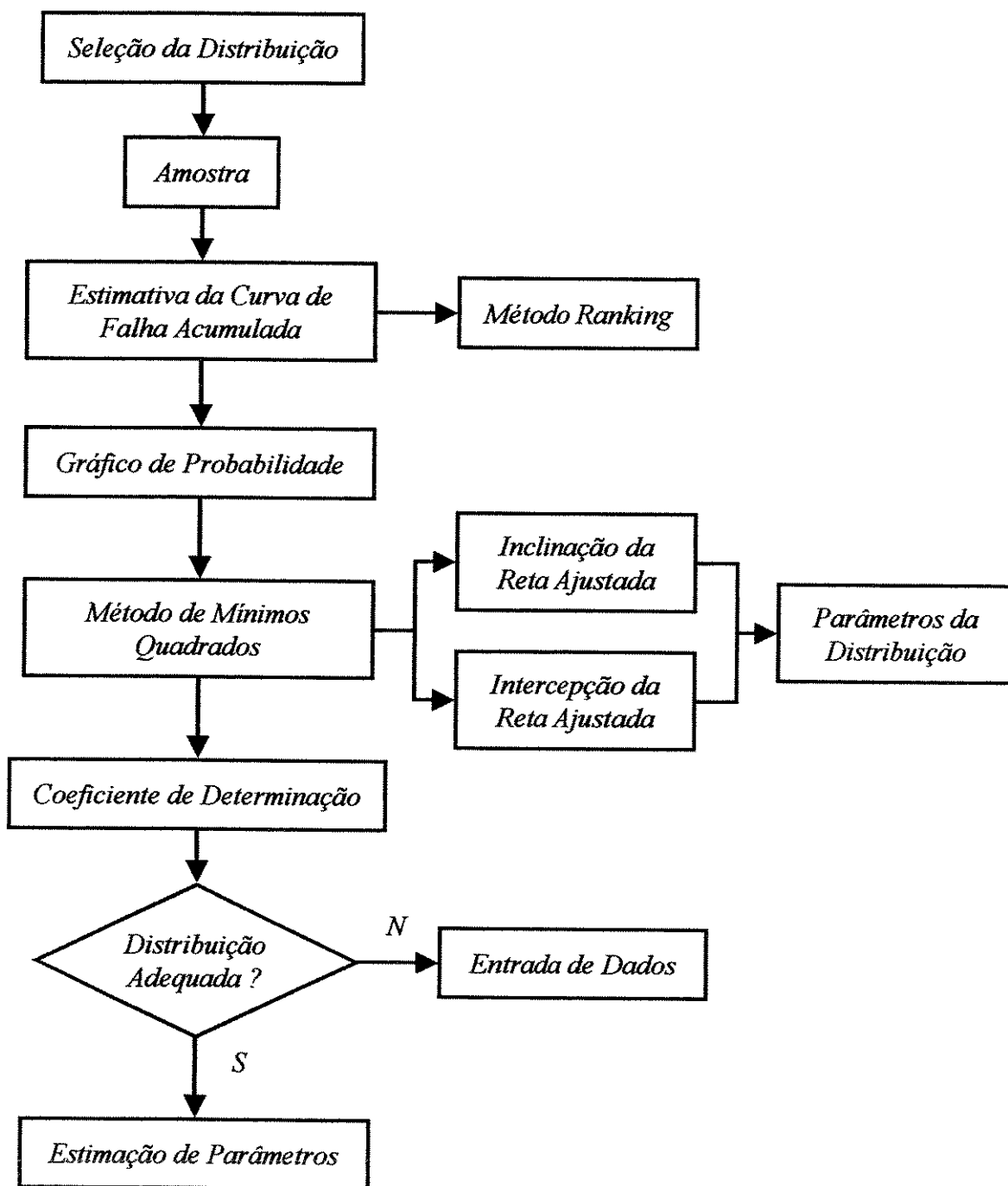


Figura 5.5 – Fluxograma de Seleção da Distribuição Estatística

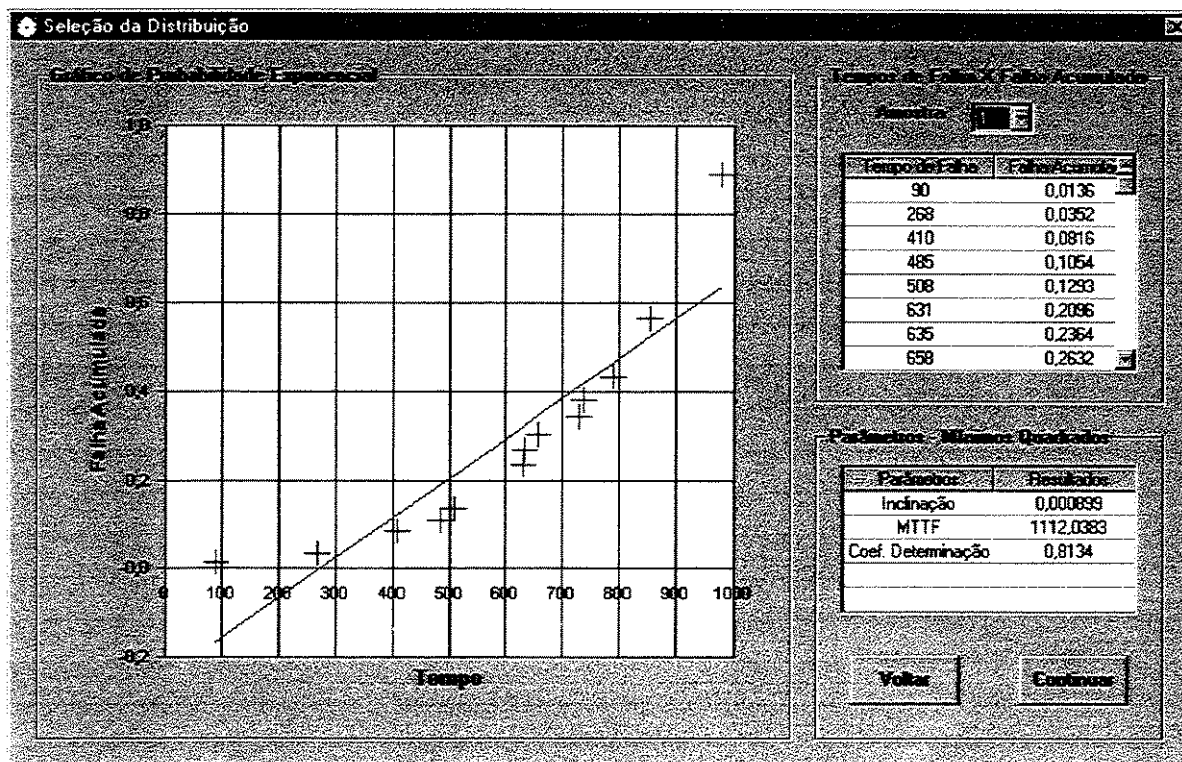


Figura 5.6 – Gráfico de Probabilidade Exponencial Amostra 1

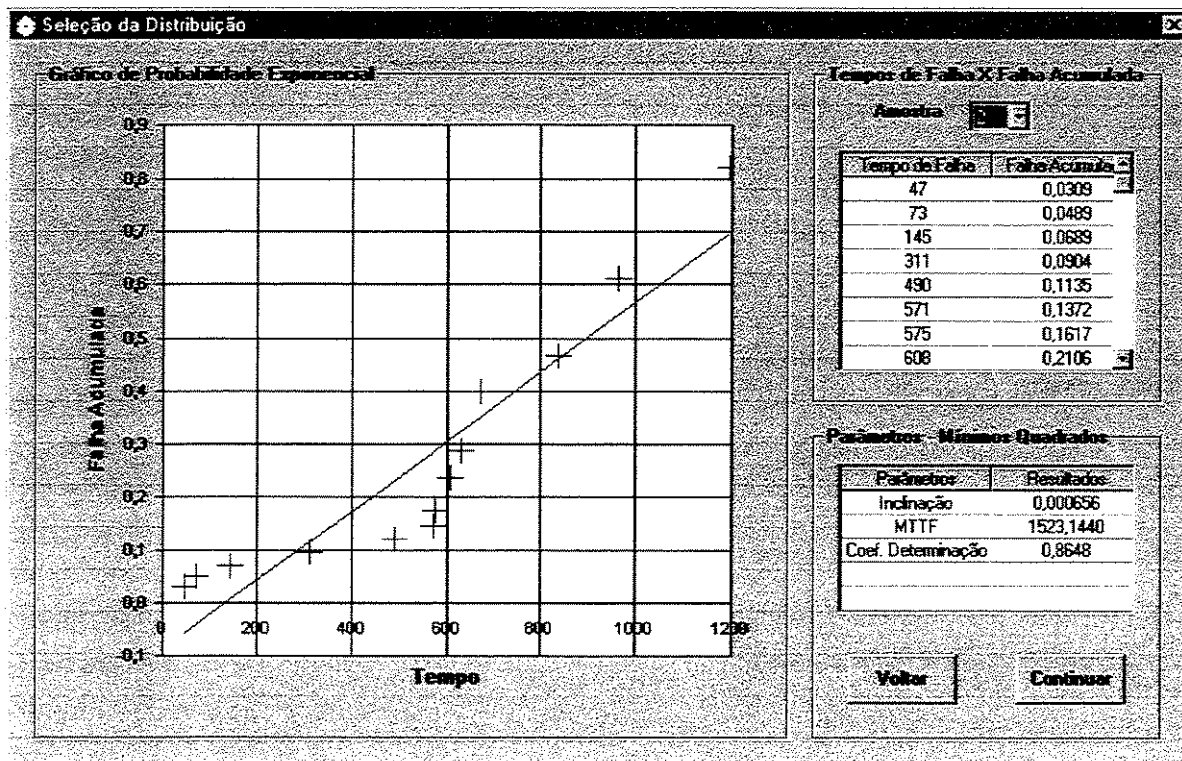


Figura 5.7 – Gráfico de Probabilidade Exponencial Amostra 2

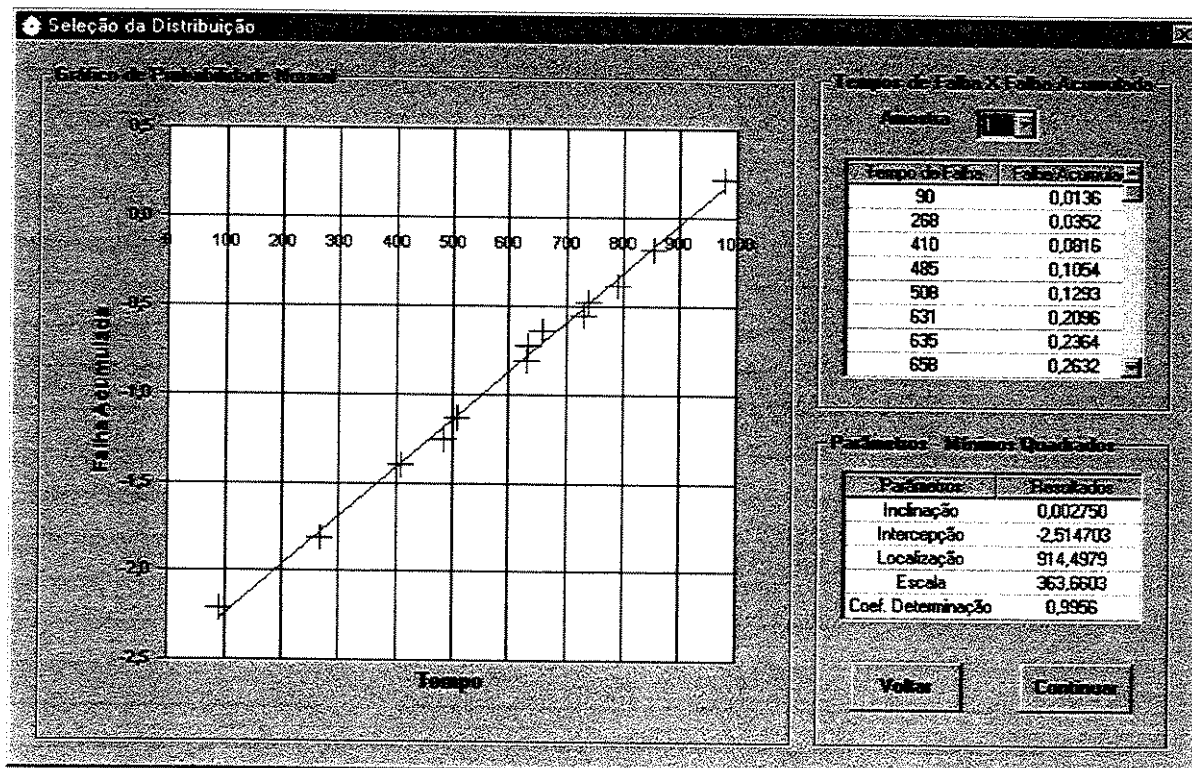


Figura 5.8 – Gráfico de Probabilidade Normal Amostra 1

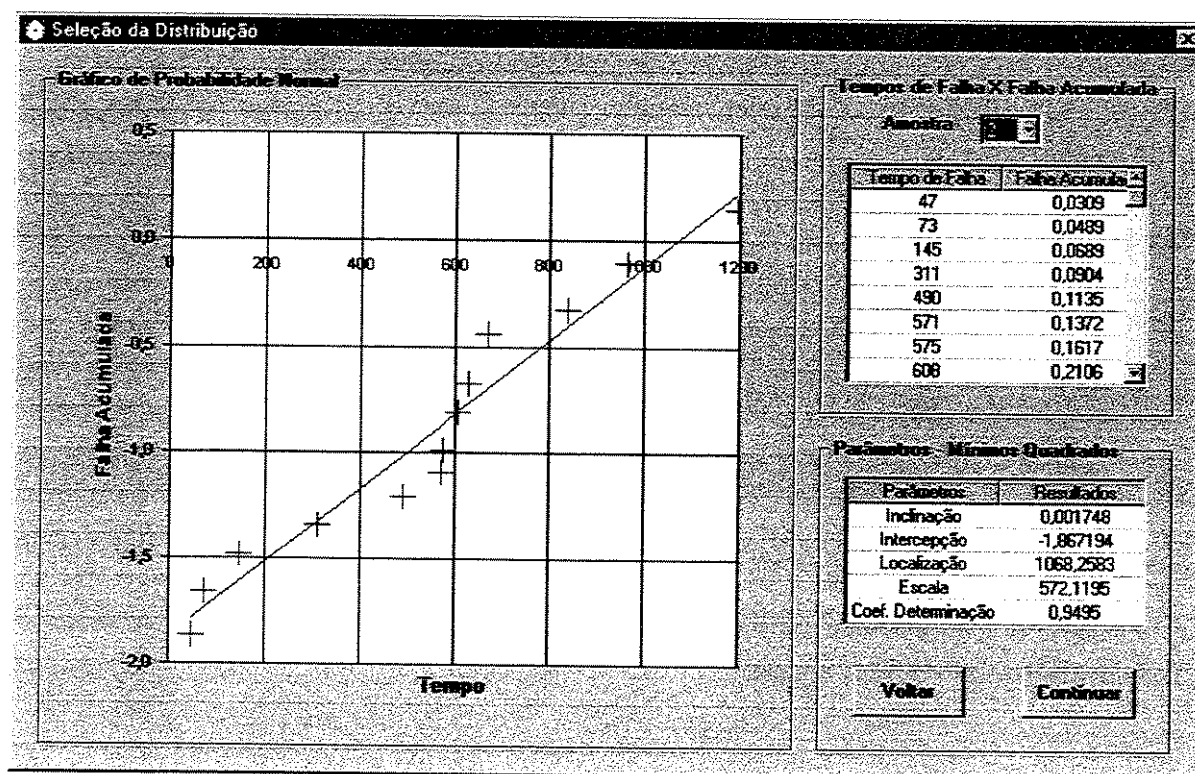


Figura 5.9 – Gráfico de Probabilidade Normal Amostra 2

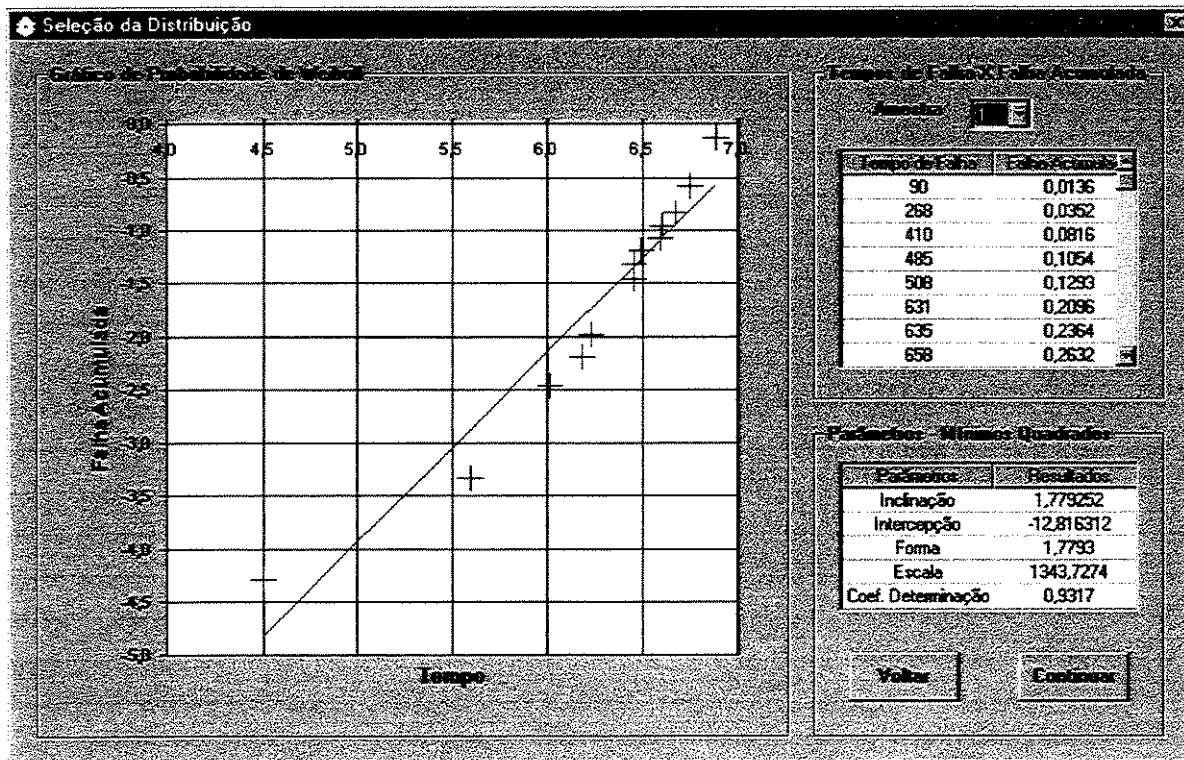


Figura 5.10 – Gráfico de Probabilidade de Weibull Amostra 1

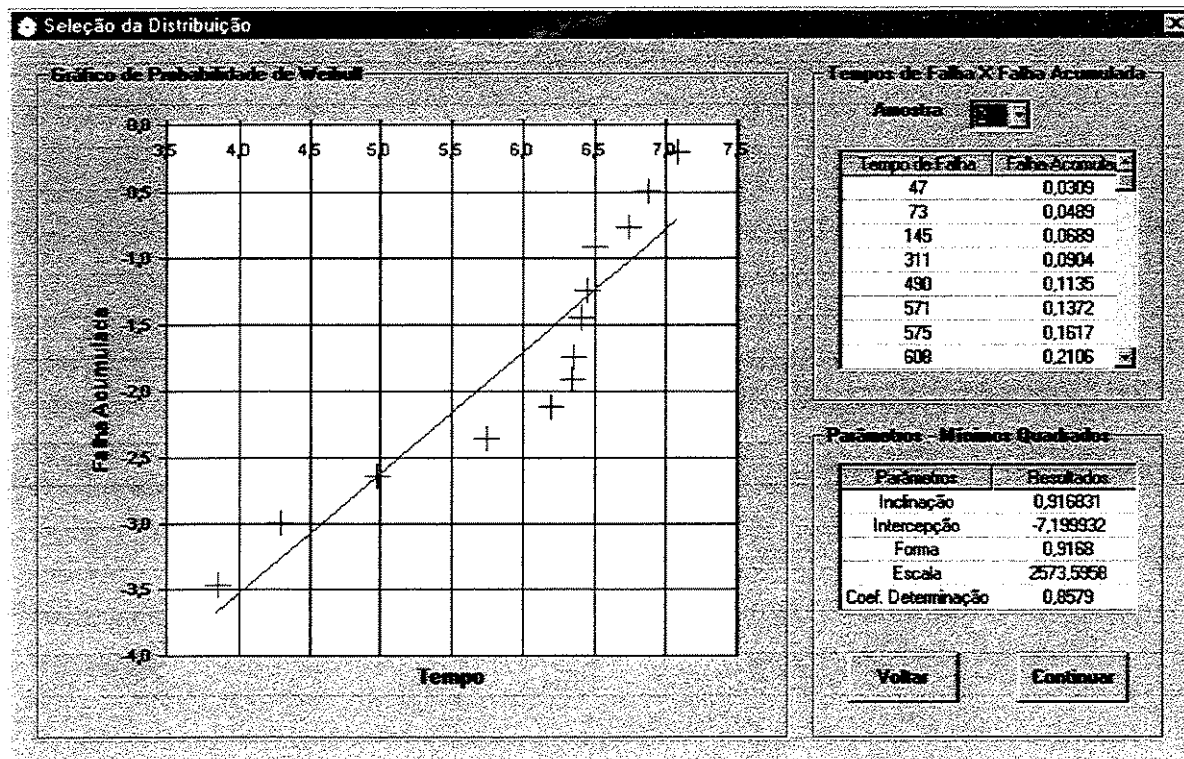


Figura 5.11 – Gráfico de Probabilidade de Weibull Amostra 2

Um quadro resumindo os resultados em relação ao coeficiente de determinação é mostrado na tabela 5.2:

Amostra	Exponencial	Normal	Weibull
1	0,8134	0,9956	0,9317
2	0,8648	0,9495	0,8579

Tabela 5.2 – Resultados do Coeficiente de Determinação

Através da inspeção visual dos gráficos de probabilidade e o cálculo do coeficiente de determinação, verificamos que a distribuição estatística mais adequada aos dados da amostra 1 e também da amostra 2, é a distribuição Normal. Esta será utilizada para a modelagem do processo de falha na próxima etapa, quando serão estimados os parâmetros da distribuição para que os modelos sejam completamente especificados.

5.2 Estimação de Parâmetros

Após a seleção da distribuição mais adequada aos dados de cada amostra, o próximo passo é a obtenção das estimativas dos parâmetros. Esta fase é dividida em duas etapas: estimação pontual e estimação de intervalos de confiança. O método utilizado para estimar os parâmetros da distribuição é o método de máxima verossimilhança. Para a distribuição Exponencial, há expressões analíticas diretas que fornecem as estimativas dos parâmetros, tanto para amostras com dados completos, como também para dados censurados. O mesmo ocorre para a distribuição Normal com dados completos.

Para processos de falha modelados pela distribuição Normal com dados censurados e distribuição de Weibull, não há expressões diretas para o cálculo das estimativas dos parâmetros. Estas são calculadas iterativamente através de métodos numéricos e o método de Newton Raphson é utilizado para esta finalidade. Os valores de partida utilizados para aplicar este método são as estimativas de mínimos quadrados dos gráficos de probabilidade.

Estimados os parâmetros do modelo, este fica completamente determinado, e previsões envolvendo a confiabilidade ou probabilidade de falha podem ser realizadas. O programa fornece as estimativas dos parâmetros da distribuição, o MTTF, a Variância, o Desvio-Padrão e a Mediana. Além disso, gráficos das quatro funções utilizadas para a modelagem da confiabilidade são mostrados e é possível verificar o comportamento da taxa de falha. A figura 5.12 mostra o fluxograma da fase de ajuste de parâmetros. As figuras 5.13 e 5.14 mostram telas com os resultados para cada amostra.

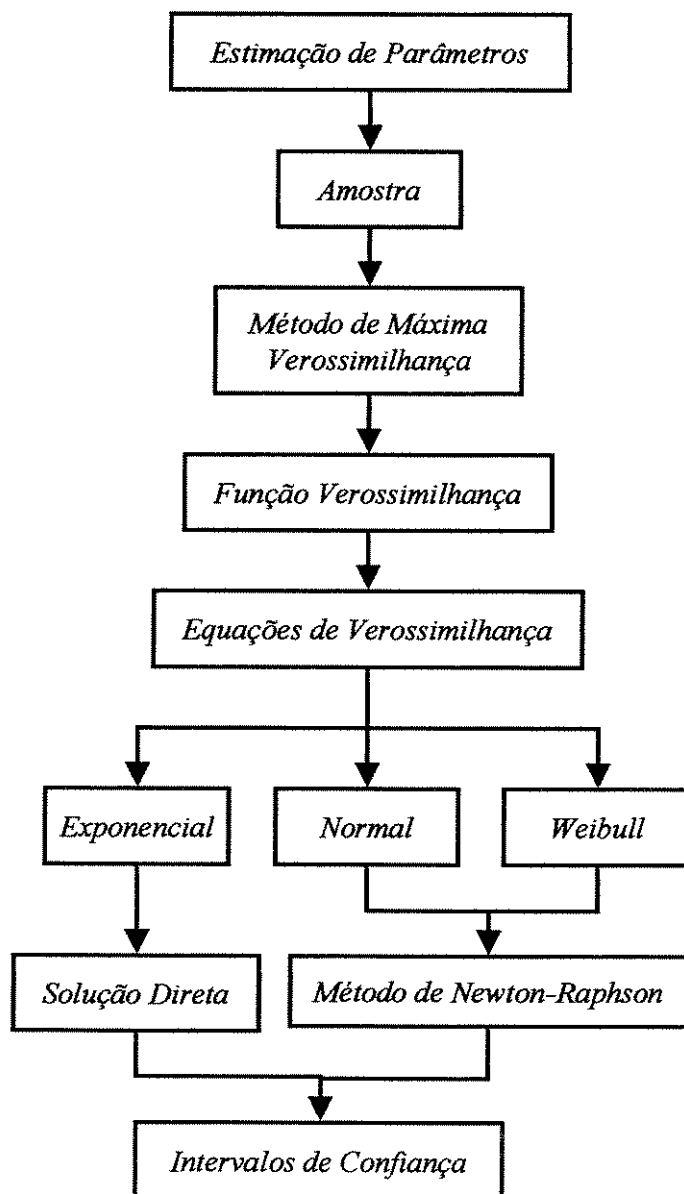


Figura 5.12 – Fluxograma: Estimação de Parâmetros

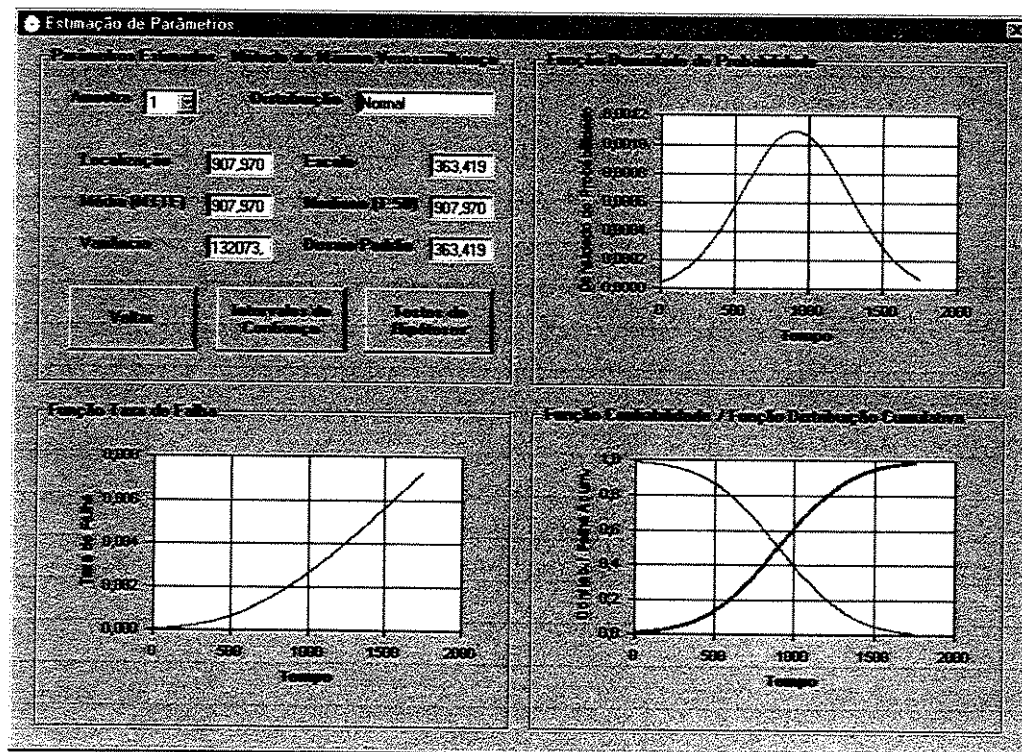


Figura 5.13 – Modelo Ajustado: Amostra 1

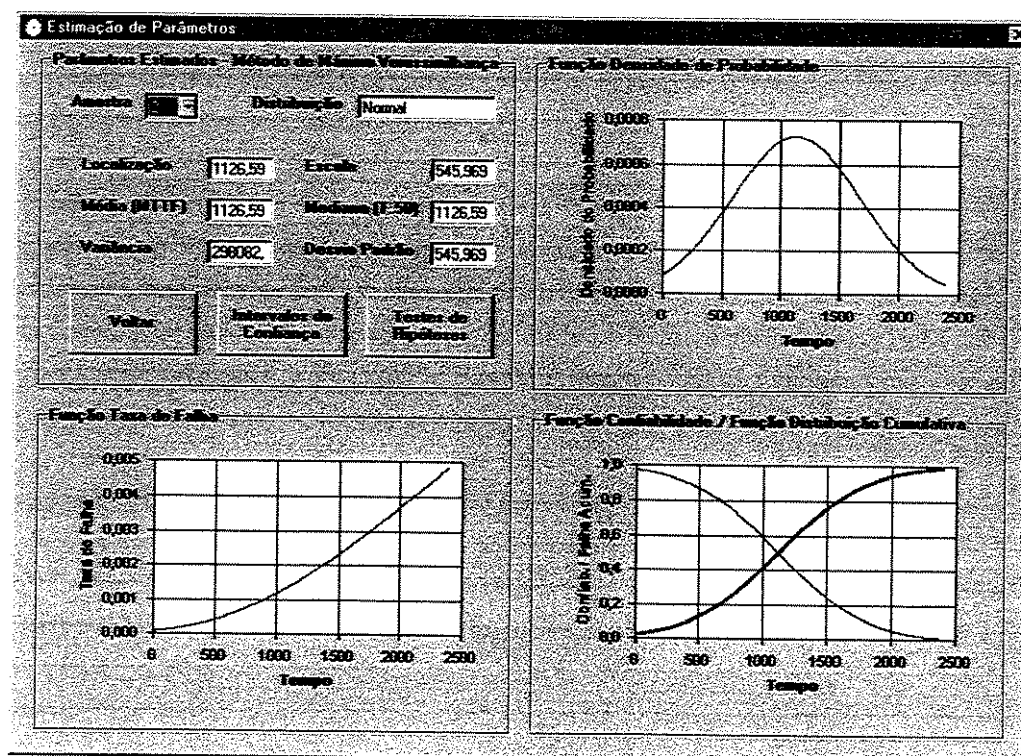


Figura 5.14 – Modelo Ajustado: Amostra 2

5.3 Intervalos de Confiança

O grau de incerteza associado a uma estimativa é quantificado através de intervalos de confiança. Estes são constituídos de um limite inferior e outro superior que englobam o valor verdadeiro do parâmetro da distribuição ou uma função do parâmetro, com um grau ou nível de confiança associado. O fluxograma dessa etapa é mostrado na figura 5.15:

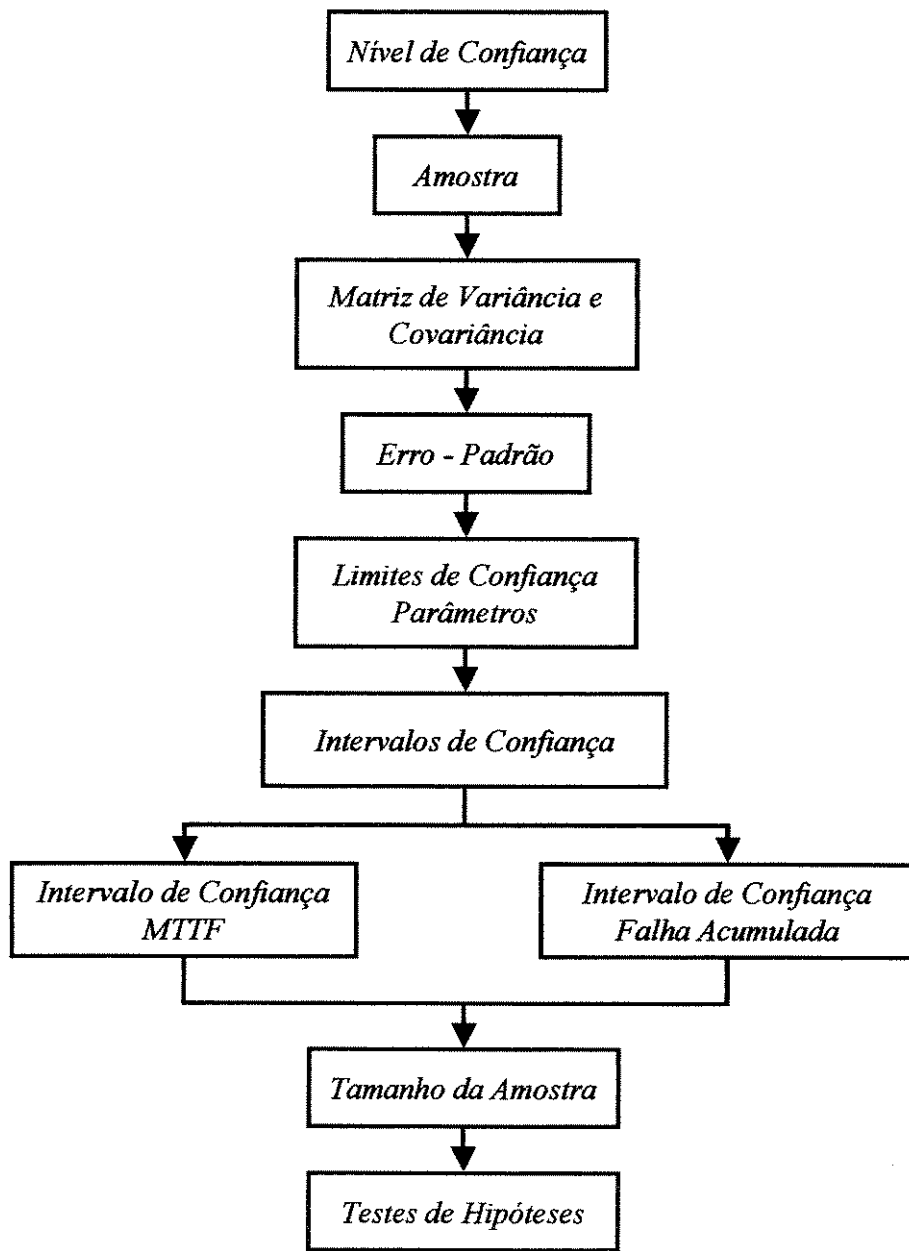


Figura 5.15 – Fluxograma: Intervalos de Confiança e Tamanho da Amostra

O programa apresenta gráficos de intervalos de confiança para o MTTF, quando o processo de falha é modelado pela distribuição Exponencial ou Normal, e para a Vida Característica ou parâmetro de Escala, quando modelados pela distribuição de Weibull. Verifica-se que aumentando o nível de confiança, o intervalo de confiança dos parâmetros também será maior. Gráficos de Probabilidade e tabelas são utilizados para mostrar os intervalos de confiança para a falha acumulada. Nas tabelas encontram-se os valores estimados, limite inferior e superior para alguns pontos do gráfico.

O tamanho aproximado de amostra é determinado em função do nível de confiança requerido e da tolerância percentual em torno do valor estimado, utilizado como largura do intervalo de confiança. Assim, desejando-se um intervalo de confiança mais estreito que o estimado, será necessário um tamanho de amostra maior, realizar novos ensaios e ajustar novamente um modelo apropriado. O programa calcula o tamanho de amostra aproximado para diferentes magnitudes de intervalos de confiança.

As figuras 5.16 até 5.20 mostram as telas referentes aos cálculos relacionados à intervalos de confiança e também a determinação do tamanho da amostra:

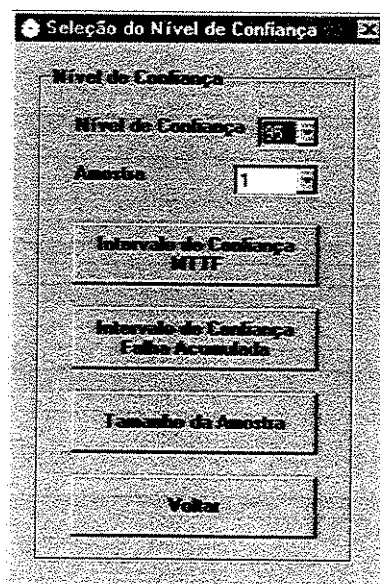


Figura 5.16 – Intervalos de Confiança: Seleção do Nível de Confiança

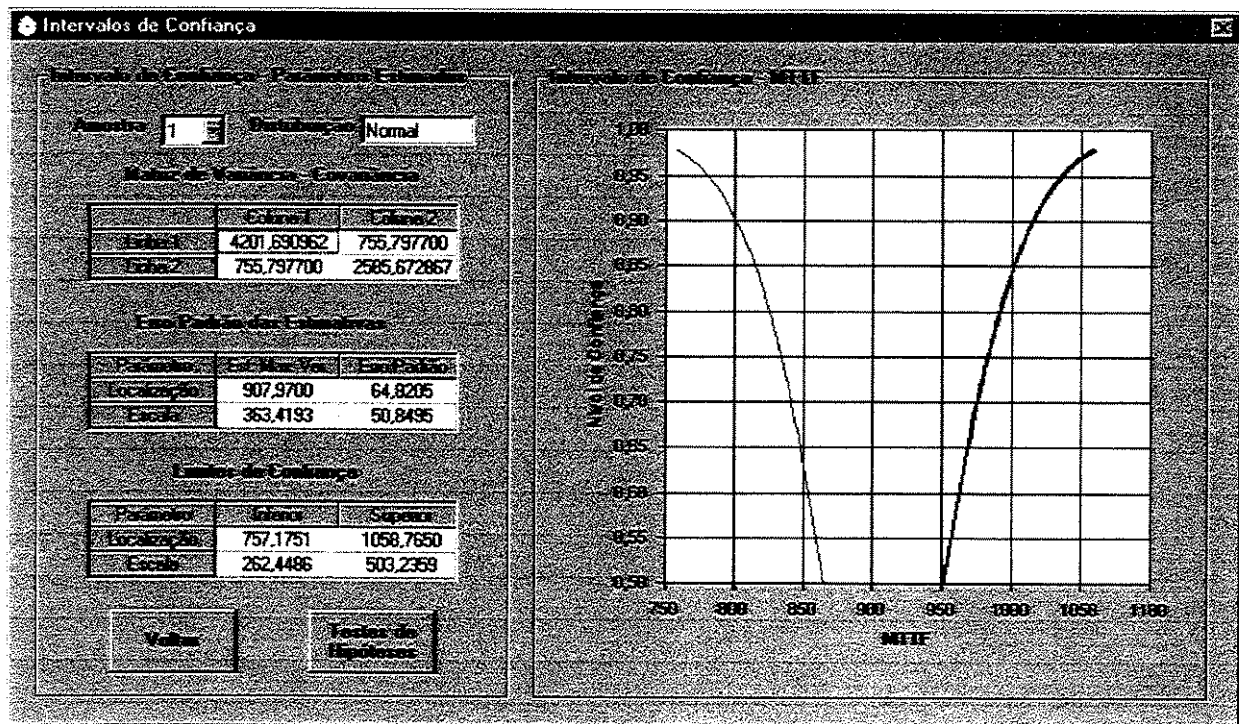


Figura 5.17 – Intervalo de Confiança Para os Parâmetros e MTTF: Amostra 1

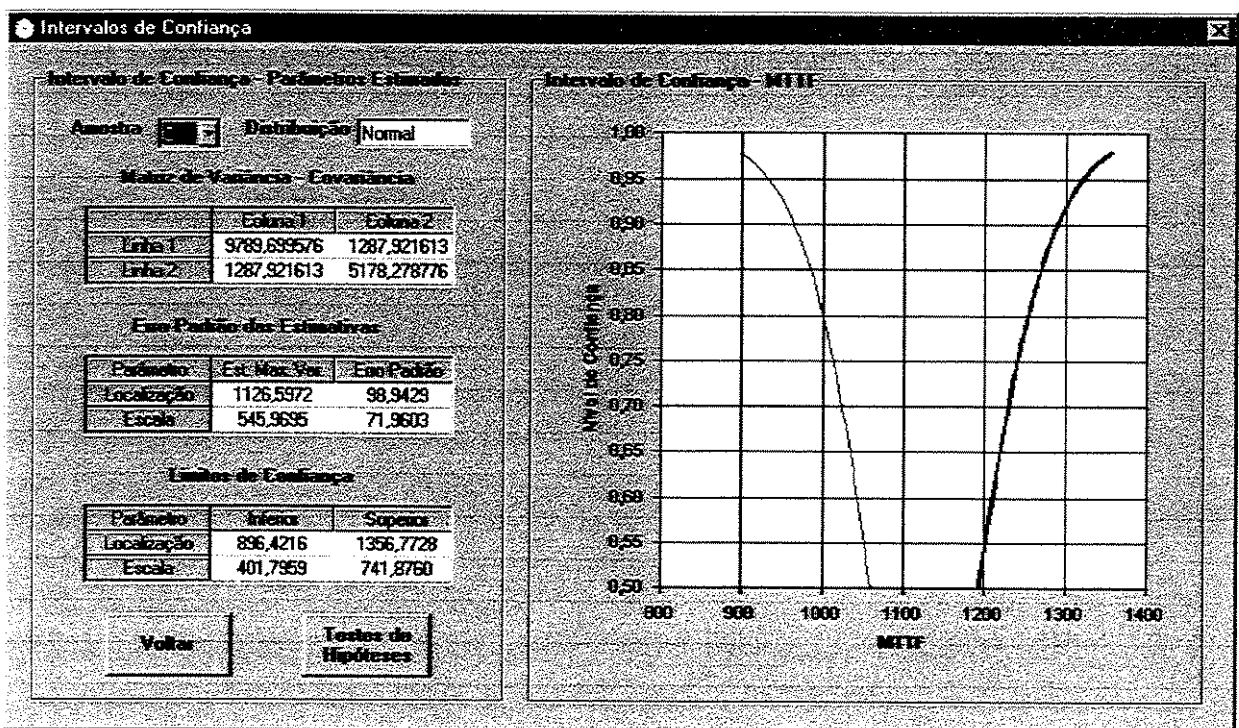


Figura 5.18 – Intervalo de Confiança Para os Parâmetros e MTTF: Amostra 2

Para a amostra 1, pode-se afirmar que o valor verdadeiro do parâmetro de localização encontra-se, aproximadamente, entre 757 e 1059 horas, com 95% de confiança. Para a amostra 2, o mesmo parâmetro encontra-se entre 896 e 1357 horas, considerando o mesmo nível de confiança.

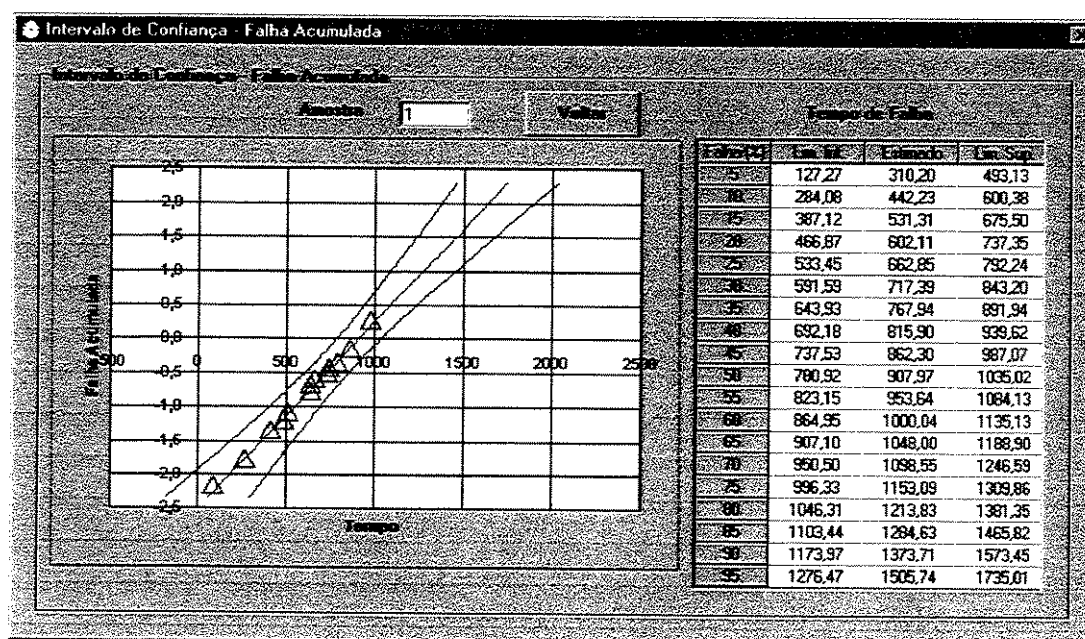


Figura 5.19 – Intervalo de Confiança Falha Acumulada: Amostra 1

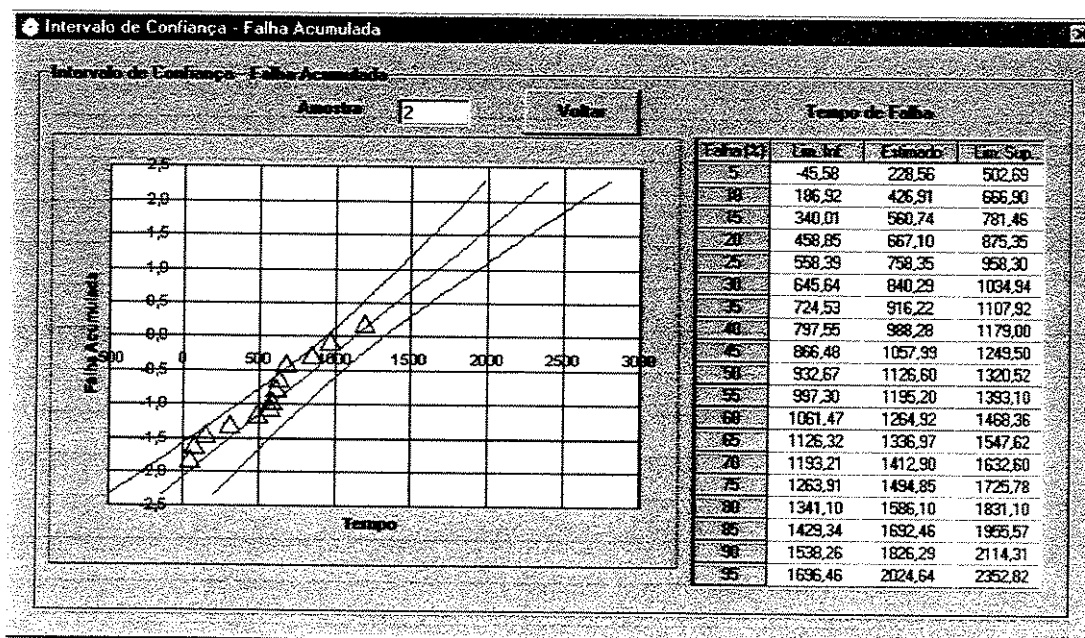


Figura 5.20 – Intervalo de Confiança Falha Acumulada: Amostra 2

É importante calcular intervalos de confiança para funções dos parâmetros da distribuição. As telas apresentadas anteriormente mostram os intervalos de confiança para a falha acumulada. Pode-se afirmar, com 95% de confiança, que a probabilidade de falha entre 284 e 600 horas é de 10% para a amostra 1. Para a amostra 2, a mesma situação é verificada no intervalo de 187 a 667 horas, aproximadamente.

É útil também a verificação dos modelos ajustados no mesmo gráfico de probabilidade. Ocorrendo a sobreposição, é razoável estabelecer uma hipótese de igualdade entre eles. Na próxima seção, essa hipótese será verificada formalmente através do teste da razão de verossimilhança. A figura 5.21 mostra os modelos ajustados em um mesmo gráfico de probabilidade:

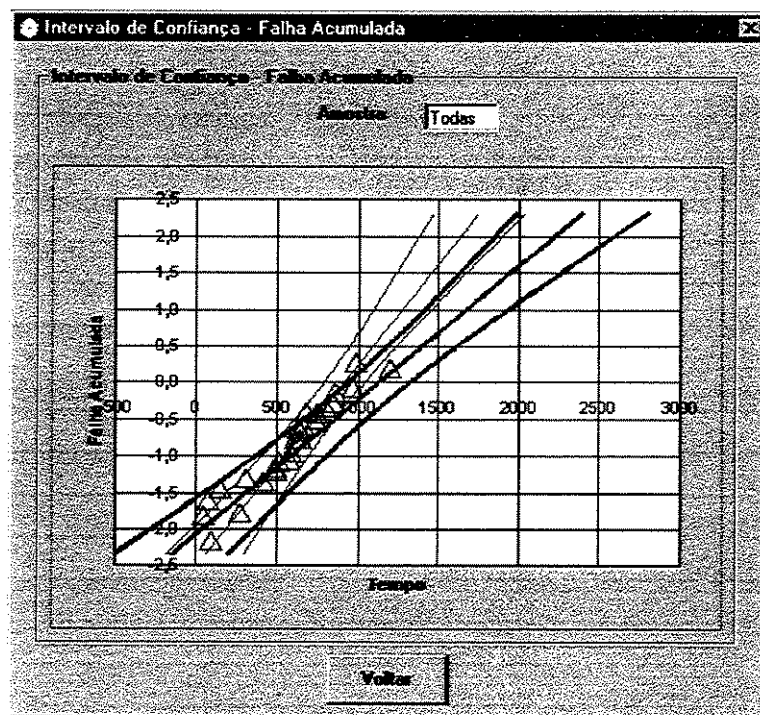


Figura 5.21 – Intervalo de Confiança Falha Acumulada: Todas as Amostras

Com o objetivo de conseguir a precisão desejada na estimação dos parâmetros e nos casos em que o parâmetro deve estar dentro de um intervalo específico, o tamanho de amostra mais adequado deve ser estimado. As telas mostradas nas figuras 5.22 e 5.23 apresentam o tamanho de amostra necessário para diferentes valores de intervalos com 95% de confiança:

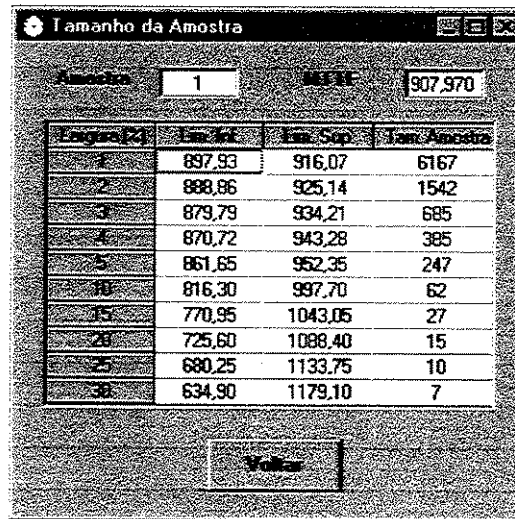


Figura 5.22 – Tamanho da Amostra em Função de um Intervalo Específico: Amostra 1

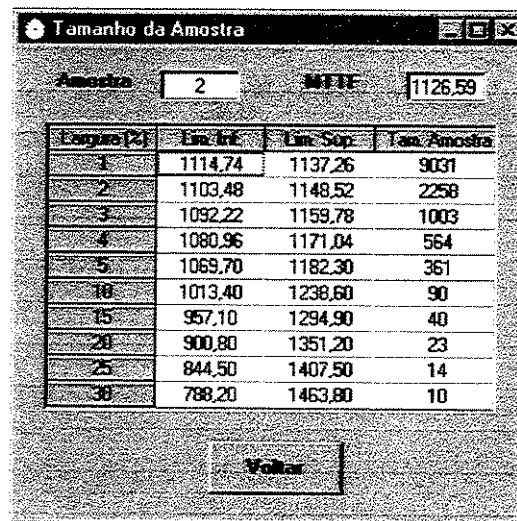


Figura 5.23 – Tamanho da Amostra em Função de um Intervalo Específico: Amostra 2

Para a amostra 1, a estimativa para o MTTF é aproximadamente 908 horas. O intervalo de confiança tem limite inferior igual 780 horas e limite superior de 1035 horas, com 95 % de confiança. Isso corresponde à uma largura aproximada de $\pm 14\%$ da estimativa do MTTF. Caso seja necessário um intervalo com uma banda de $\pm 5\%$ do valor estimado, necessita-se de uma amostra maior para obter a mesma precisão nas estimativas. Com essa magnitude de intervalo, a amostra 1 deveria ter 247 itens e a amostra 2, 361 itens.

5.4 Testes de Hipóteses

O teste aplicado é o teste da razão de verossimilhança e o objetivo é verificar se é válida a hipótese de igualdade entre os modelos ajustados ou se todos os parâmetros das duas amostras são iguais entre si. O fluxograma de testes de hipóteses segue o procedimento geral apresentado na seção 4.2.2 sendo mostrado na figura 5.24:

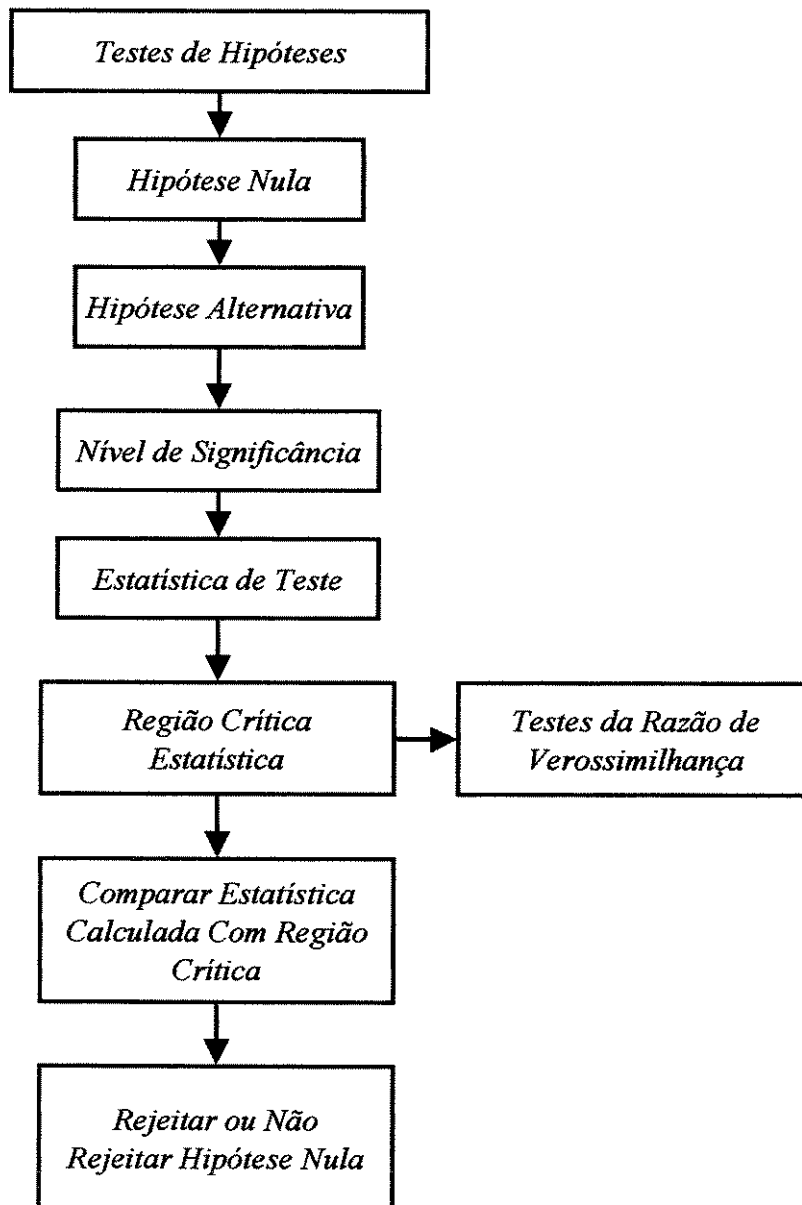


Figura 5.24 – Fluxograma: Testes de Hipóteses

O nível de confiança considerado no exemplo é 95%, portanto o nível de significância é 5%. Nessa condição a hipótese nula é aceita e pode-se afirmar que não existe diferença estatisticamente significativa entre os projetos A e B. É mostrada na figura 5.25 a aplicação do teste para diferentes níveis de significância e em quais deles a hipótese nula é rejeitada.

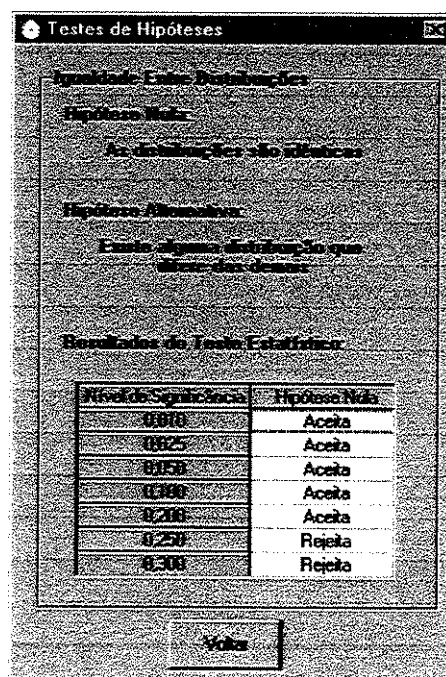


Figura 5.25 – Tela de Testes de Hipóteses

Verifica-se que para um nível de significância igual a 25% ou maior, a hipótese nula é rejeitada. Conforme pode ser visto na figura 4.4 do capítulo anterior, níveis de significância maiores implicam em áreas de rejeição maiores, portanto maior probabilidade de rejeição da hipótese nula.

Capítulo 6

Análise de Exemplos Reais

No capítulo anterior a metodologia empregada foi descrita em detalhes e aplicada em um exemplo da literatura consultada. Neste capítulo, alguns casos reais serão apresentados. Em cada um deles, o primeiro passo é ajustar o modelo mais adequado aos dados da amostra, através da seleção da distribuição estatística, e em seguida, estimar os parâmetros do modelo.

Em segundo lugar, deve-se comparar conjuntamente intervalos de confiança e realizar testes de hipóteses, com o objetivo de verificar a existência de diferenças estatisticamente significativas entre as amostras. Todos os exemplos apresentados envolvem comparações entre duas amostras.

Em todos os três casos, a hipótese nula afirma que as distribuições são idênticas ou homogêneas. Se a hipótese nula não é rejeitada, pode-se afirmar que não existe diferença estatisticamente significativa entre cada um dos parâmetros das amostras analisadas. Se a hipótese nula é rejeitada em favor da hipótese alternativa, pelo menos um dos parâmetros de alguma amostra difere das demais.

Uma comparação conjunta de intervalos de confiança para a falha acumulada também fornece informação visual sobre a hipótese de homogeneidade entre as distribuições. Dependendo do grau de sobreposição verificado neste gráfico conjunto, é razoável admitir que a hipótese nula é verdadeira.

6.1 Exemplo 1: Verificação da Variação nos Parâmetros do Modelo

O primeiro caso é um estudo envolvendo a falha ou quebra de uma mola de compressão utilizada na montagem de caixas de câmbio de tratores produzidos pela empresa ZF do Brasil. O objetivo é verificar se lotes produzidos em diferentes períodos são iguais, demonstrando se houve ou não variação no modelo ajustado ao processo de falha de um período ao outro. Essa análise utiliza dados de campo separados por região ou estado onde o conjunto é utilizado.

No exemplo apresentado, foram comparados lotes produzidos em janeiro e fevereiro de 2001 considerando uma mesma região, no caso o estado de São Paulo. A unidade de medida utilizada é milhares de Km rodados. Os tempos de falha para a amostra 1 (janeiro / 2001) são: 12, 23, 31, 36, 40, 48, 49, 59, 62, 73, 84 e os tempos de falha para amostra 2 (fevereiro / 2001) são: 13, 24, 29, 30, 31, 39, 40, 40, 48, 48, 50, 52, 56, 56, 66, 71, 77, 83. As telas de apresentação e entrada de dados desse e dos próximos exemplos não serão apresentadas, partindo-se diretamente para a verificação dos gráficos de probabilidade, mostrados nas figuras 6.1 até 6.6.

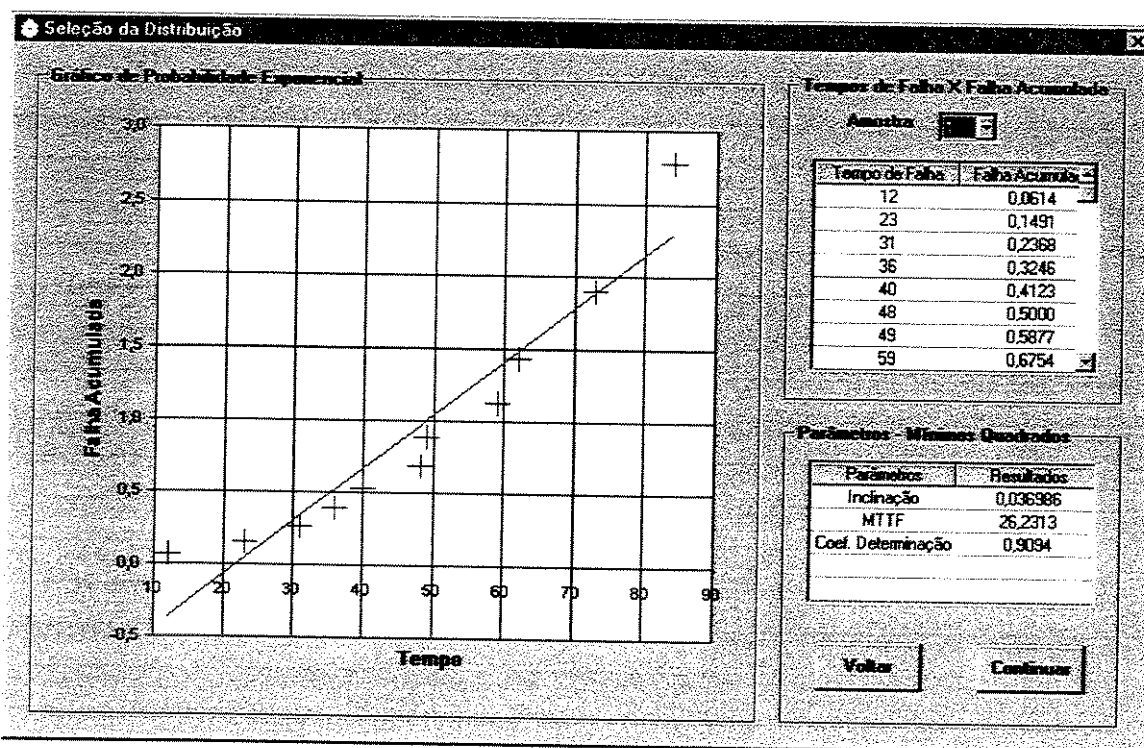


Figura 6.1 – Gráfico de Probabilidade Exponencial: Lote Produzido em Janeiro de 2001

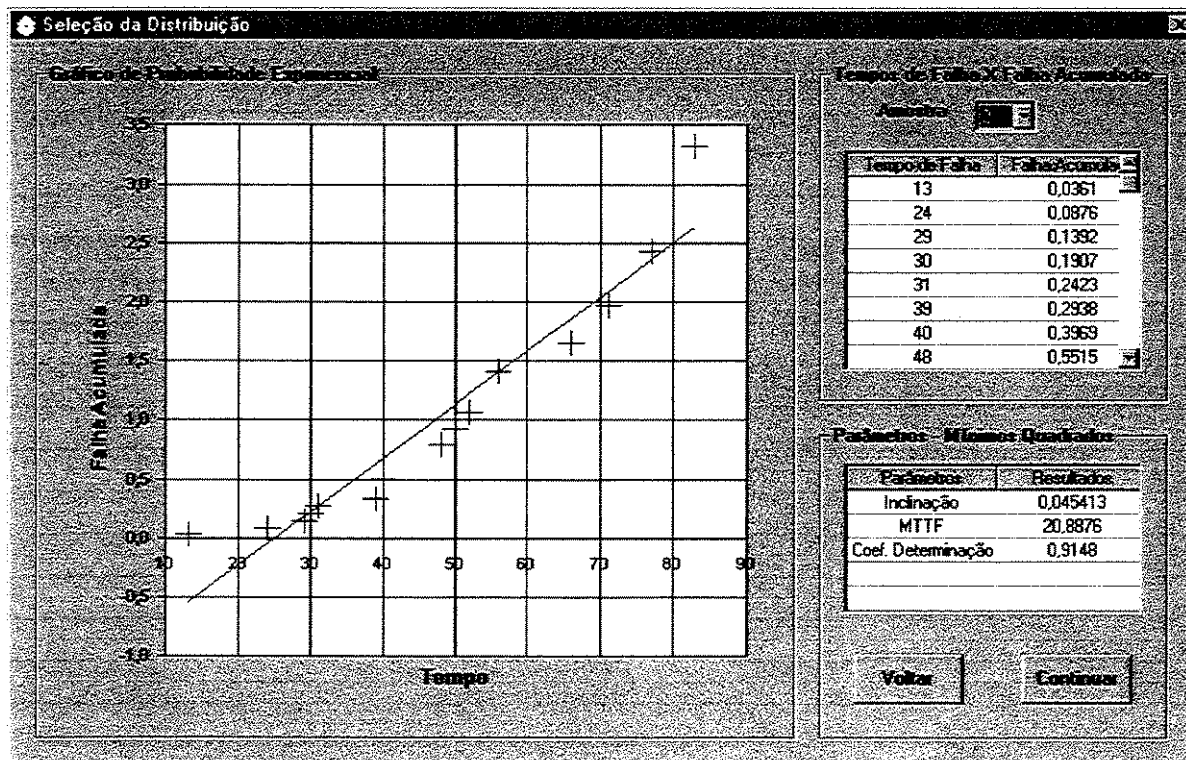


Figura 6.2 – Gráfico de Probabilidade Exponencial: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

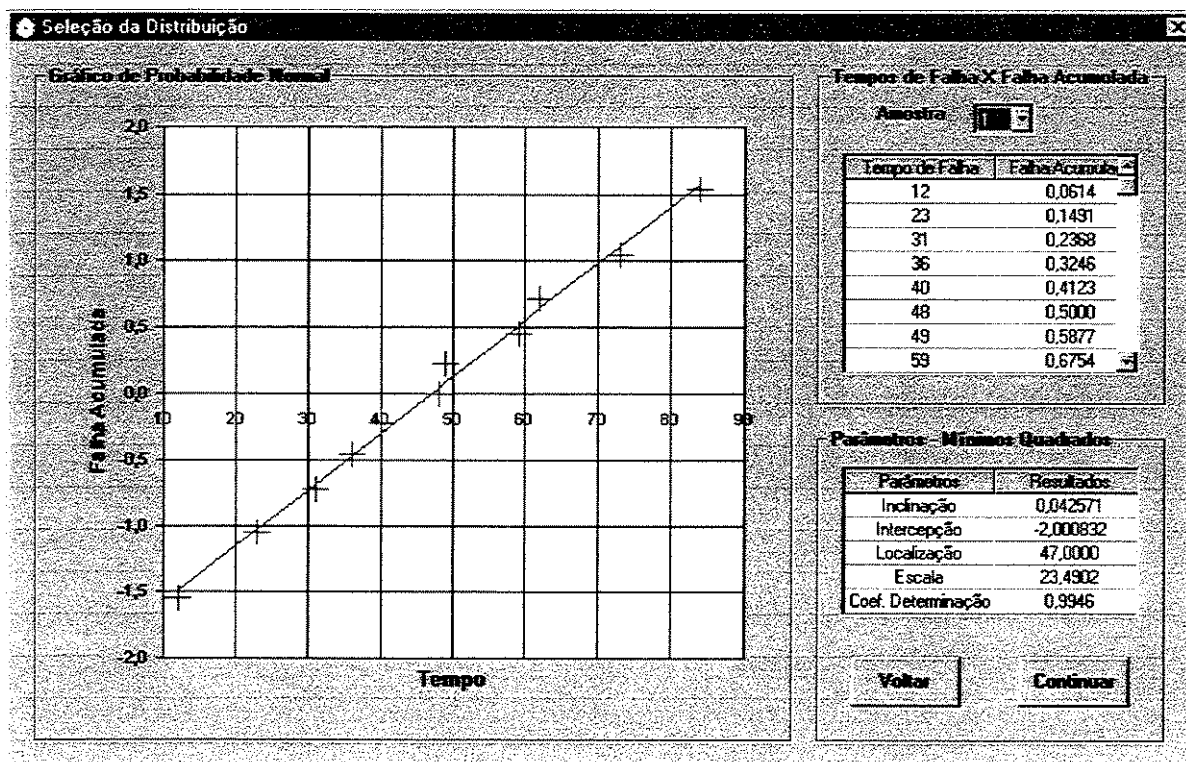


Figura 6.3 – Gráfico de Probabilidade Normal: Lote Produzido em Janeiro de 2001

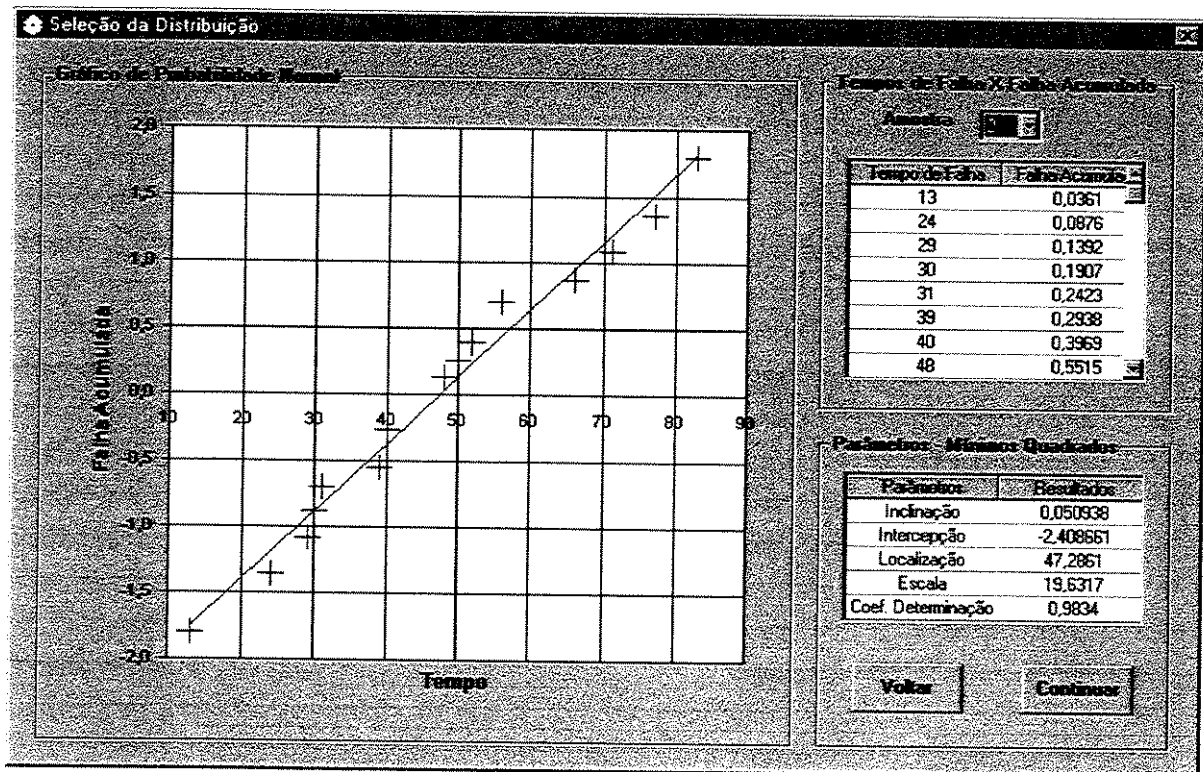


Figura 6.4 – Gráfico de Probabilidade Normal: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

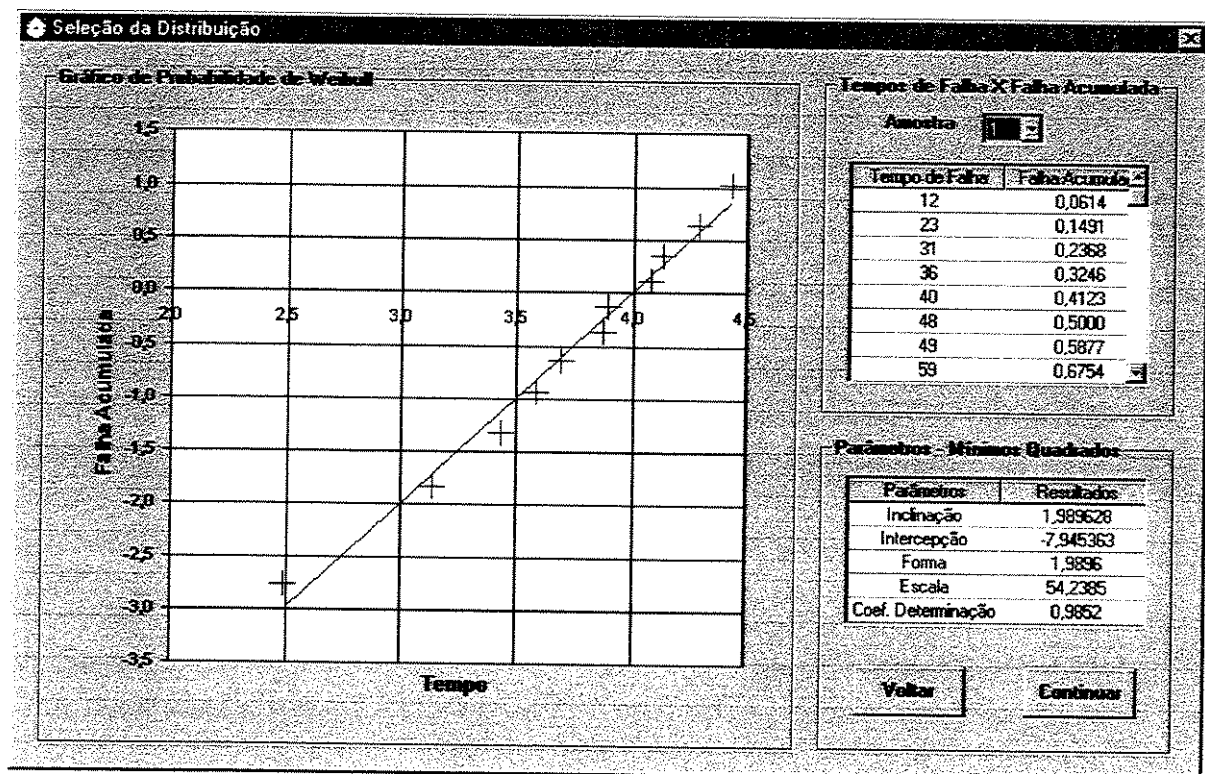


Figura 6.5 – Gráfico de Probabilidade de Weibull: Lote Produzido em Janeiro de 2001

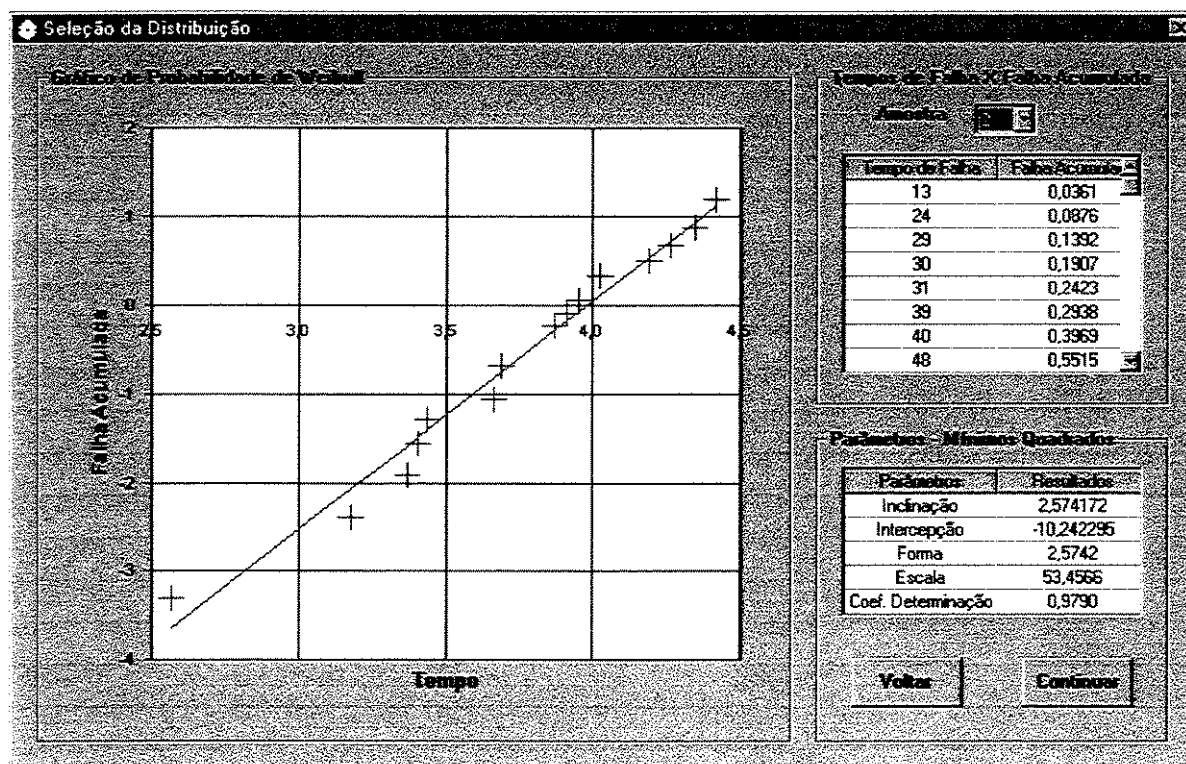


Figura 6.6 – Gráfico de Probabilidade de Weibull: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

A inspeção visual dos gráficos de probabilidade sugere que tanto a distribuição Normal quanto a distribuição de Weibull fornece um bom ajuste para as duas amostras. Um quadro resumindo o cálculo do coeficiente de determinação é mostrado na tabela 6.1:

Lote	Exponencial	Normal	Weibull
Janeiro / 2001	0,9094	0,9946	0,9852
Fevereiro / 2001	0,9148	0,9834	0,9790

Tabela 6.1 – Resultados do Coeficiente de Determinação: Exemplo 1

Os resultados do coeficiente de determinação demonstram que a distribuição Normal é ligeiramente mais adequada que a distribuição de Weibull, portanto esta será utilizada para a modelagem do processo de falha. A seguir, os parâmetros da distribuição estatística selecionada serão estimados, fornecendo os gráficos das quatro funções utilizadas em confiabilidade, mostrados nas figuras 6.7 e 6.8.

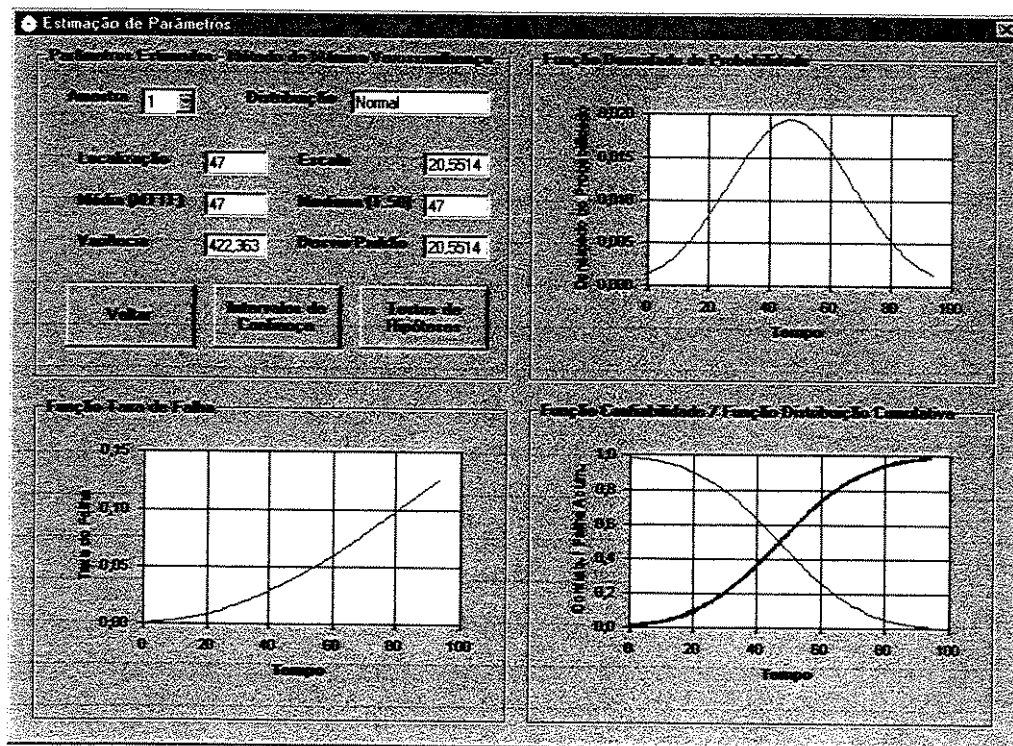


Figura 6.7 – Modelo Ajustado: Lote Produzido em Janeiro de 2001

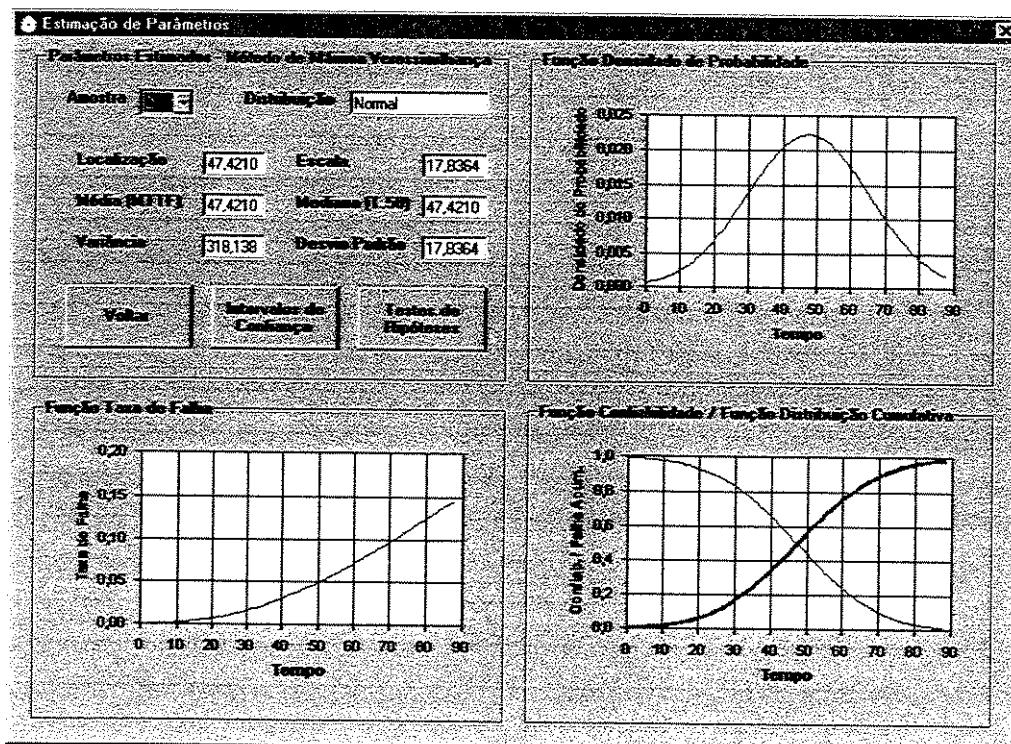


Figura 6.8 – Modelo Ajustado: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

A seguir, são calculados os intervalos de confiança para os parâmetros da distribuição e o gráfico de intervalo de confiança para o MTTF. O nível de confiança selecionado para os intervalos de confiança 95%. Os resultados são apresentados nas figuras 6.9 e 6.10.

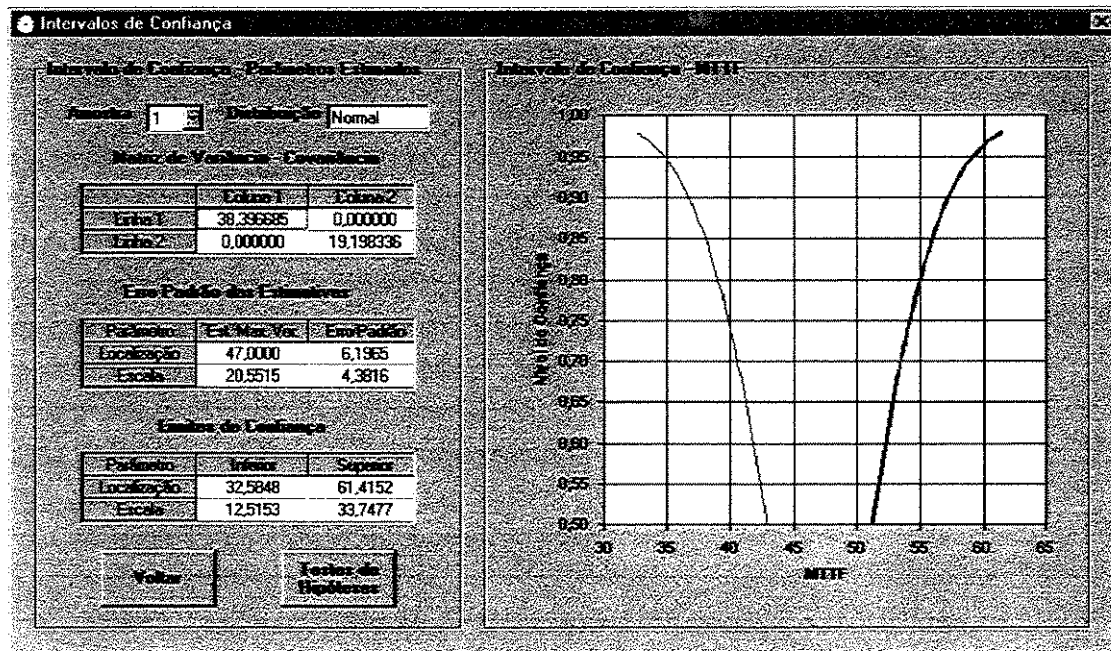


Figura 6.9 – Intervalos de Confiança MTTF: Lote Produzido em Janeiro de 2001

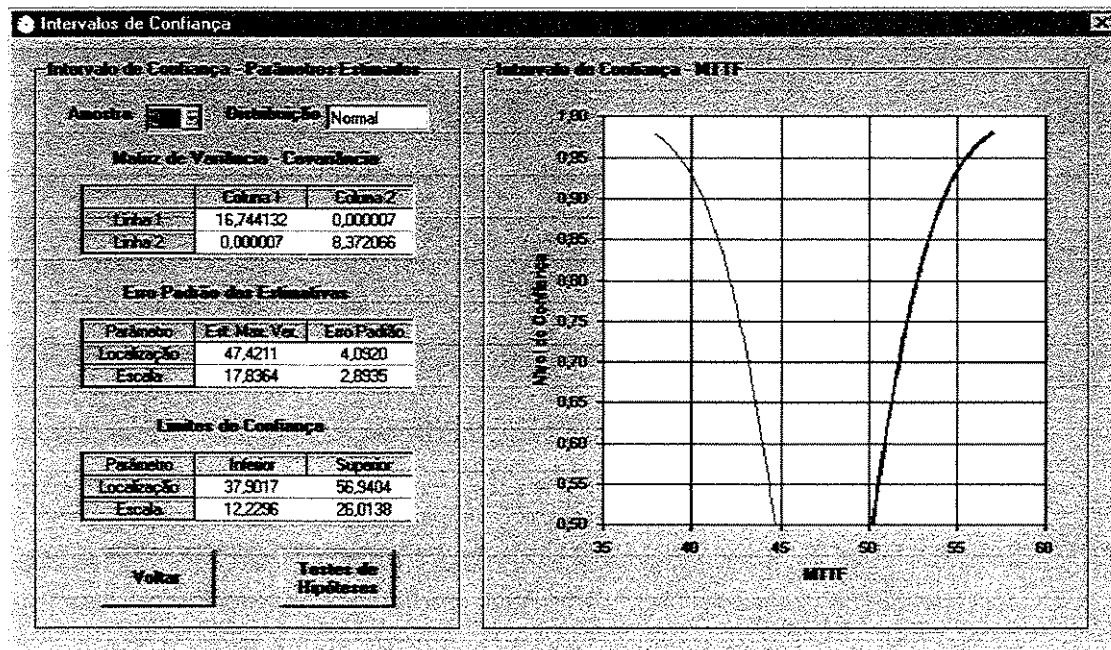


Figura 6.10 – Intervalos de Confiança MTTF: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

As figuras 6.11 e 6.12 mostram gráficos de probabilidade e tabelas utilizados para mostrar os intervalos de confiança para a falha acumulada para cada lote. Um gráfico conjunto é mostrado na figura 6.13, onde é possível avaliar visualmente a igualdade ou sobreposição dos modelos ajustados.

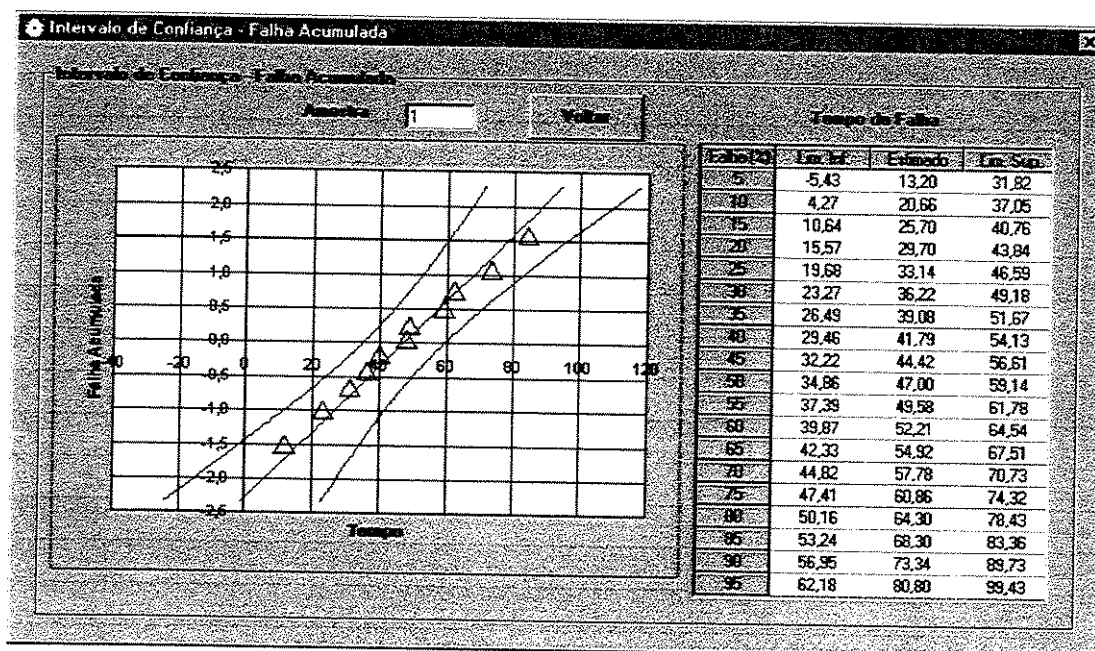


Figura 6.11 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Lote Produzido em Janeiro de 2001

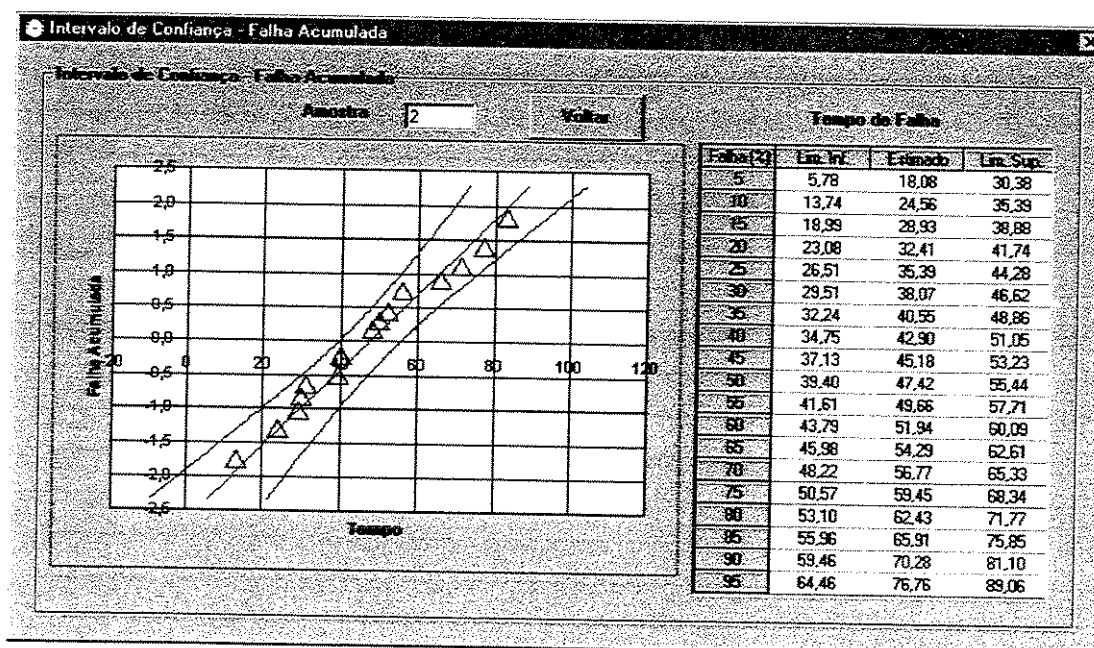


Figura 6.12 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

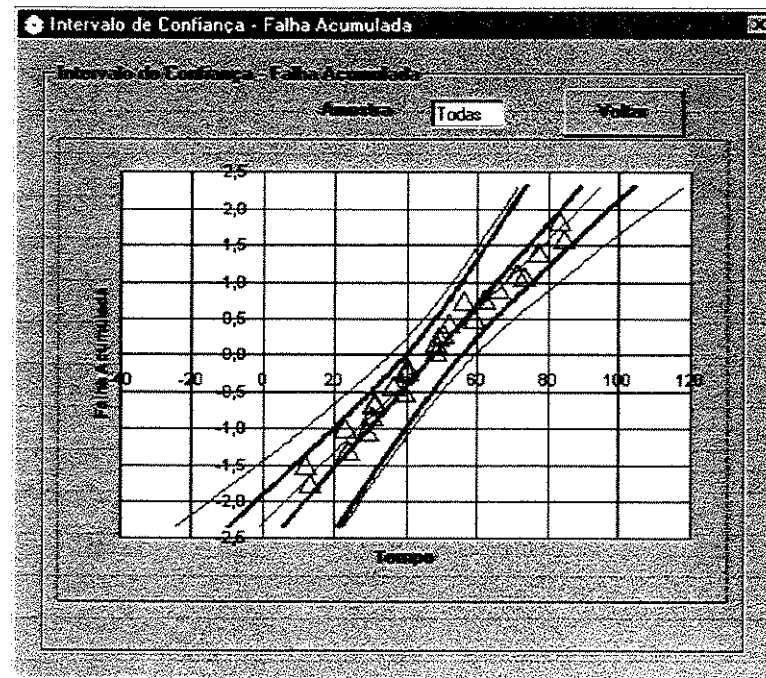


Figura 6.13 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Lotes Produzidos em Jan. e Fev. / 2001

Verifica-se que há sobreposição dos gráficos de intervalos de confiança para a falha acumulada, sugerindo que não há diferença estatisticamente significativa entre os lotes ou não houve variação no modelo ajustado ao processo de falha. Para verificar formalmente esta hipótese são mostrados na figura 6.16 os resultados do teste da razão de verossimilhança. Caso o parâmetro deva estar dentro de um intervalo específico, o tamanho de amostra mais adequado deve ser estimado. As figuras 6.14 e 6.15 mostram os cálculos do tamanho da amostra.

Tamanho da Amostra			
Amostra	1		MTF
			47
Logano(2)	Lim. Inf.	Lim. Sup.	Tam. Amostra
1	46,53	47,47	7345
2	46,06	47,94	1836
3	45,59	48,41	816
4	45,12	48,88	459
5	44,65	49,35	294
10	42,30	51,70	73
15	39,95	54,05	33
20	37,60	56,40	18
25	35,25	58,75	12
30	32,90	61,10	8

Figura 6.14 – Tamanho da Amostra: Lote Produzido em Janeiro de 2001

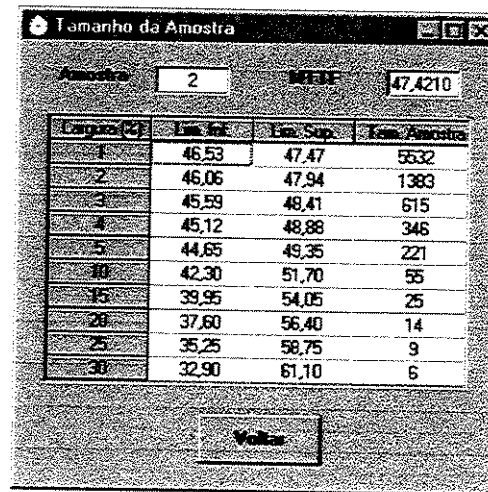


Figura 6.15 – Tamanho da Amostra: Lote Produzido em Fevereiro de 2001

Para o lote produzido em janeiro de 2001, a estimativa para o MTTF é aproximadamente 47000 Km rodados. O intervalo de confiança tem limite inferior igual 32584 Km e limite superior de 61415 horas, com 95 % de confiança. Isso corresponde à uma largura aproximada de $\pm 30\%$. Caso seja necessário um intervalo com uma largura de $\pm 10\%$ do valor estimado, necessita-se de uma amostra maior para obter a mesma precisão nas estimativas. Com essa largura de intervalo, a amostra 1 deveria ter 73 itens e a amostra 2, 55 itens.

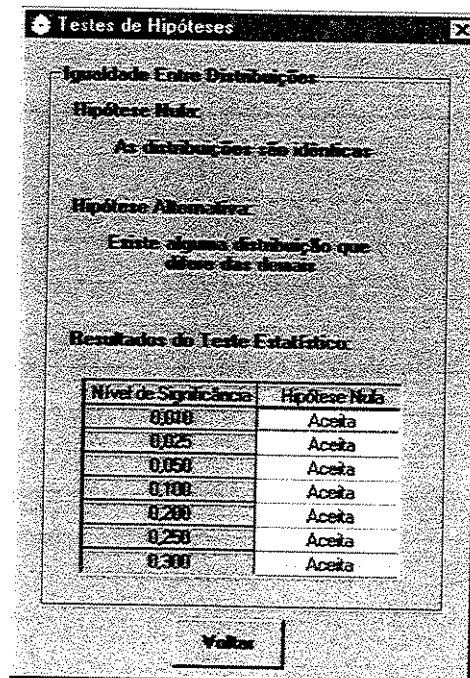


Figura 6.16 – Testes de Hipóteses: Lotes Produzidos em Janeiro e Fevereiro de 2001

Pelos resultados do teste da razão de verossimilhança não há diferença estatisticamente significativa entre os lotes para todos os níveis de significância considerados no teste. Isso demonstra que não houve variação no modelo ajustado ao processo de falha nos períodos considerados.

6.2 Exemplo 2: Estudo Comparativo Entre Dois Rolamentos

O segundo exemplo é um teste de durabilidade para rolamentos da empresa INA do Brasil cujo objetivo era estabelecer a vida útil, limites de carga e rotação e a lubrificação adequada. Neste estudo, para cada tipo de rolamento é ajustado o modelo mais adequado. Um estudo comparativo é realizado para verificar a existência ou não de diferenças estatisticamente significativas entre os rolamentos quanto à vida útil.

Os rolamentos são montados na bancada de teste e submetidos a uma carga axial e radial através de uma combinação de molas prato e sistema de alavanca com pesos, respectivamente. O tempo de teste é determinado, ou testa-se até a falha, conforme a necessidade. A temperatura ambiente do teste pode ser controlada. Para cada falha há 3 suspensões. Portanto, para cada rolamento há 4 falhas e 12 suspensões. As figuras 6.18 até 6.23 mostram os gráficos de probabilidade para este exemplo. A bancada de teste é mostrada na figura 6.17:

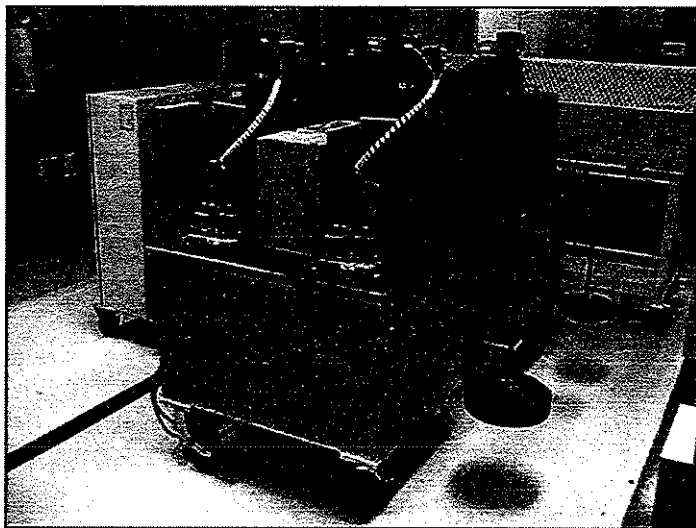


Figura 6.17 - Bancada de Teste de Durabilidade

As especificações da bancada são:

- Rotação máxima: 13.000 rpm
- Posições de teste: 4
- Carga radial / axial máximas: 2.000 N/ 1.000 N
- Temperatura ambiente: ajustável até 120°C

Os parâmetros controlados são: temperatura ambiente, temperatura do anel externo, tempo de teste carga radial e axial. A unidade de medida é horas de operação.

As especificações de teste são:

- Carga Radial: 1200N
- Carga Axial: 100N
- Rotação: 6500rpm
- Temperatura Ambiente: 110°C
- Tempo de Teste: Até a Falha

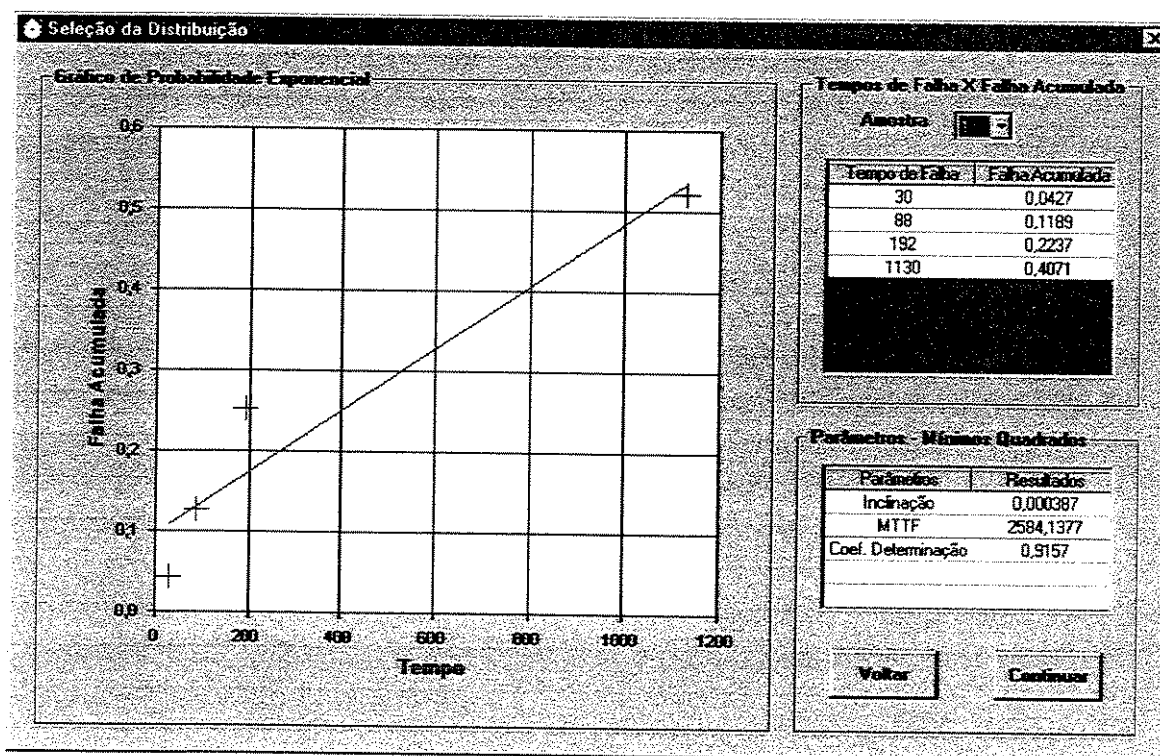


Figura 6.18 – Gráfico de Probabilidade Exponencial: Rolamento 1

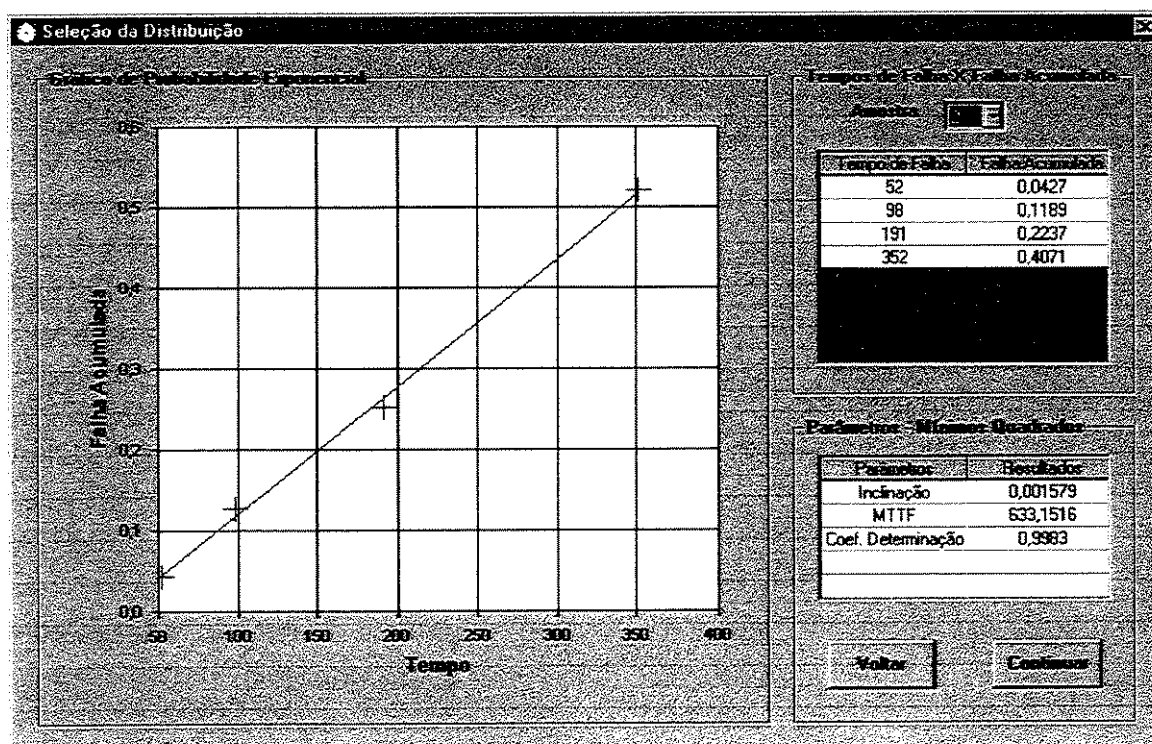


Figura 6.19 – Gráfico de Probabilidade Exponencial: Rolamento 2

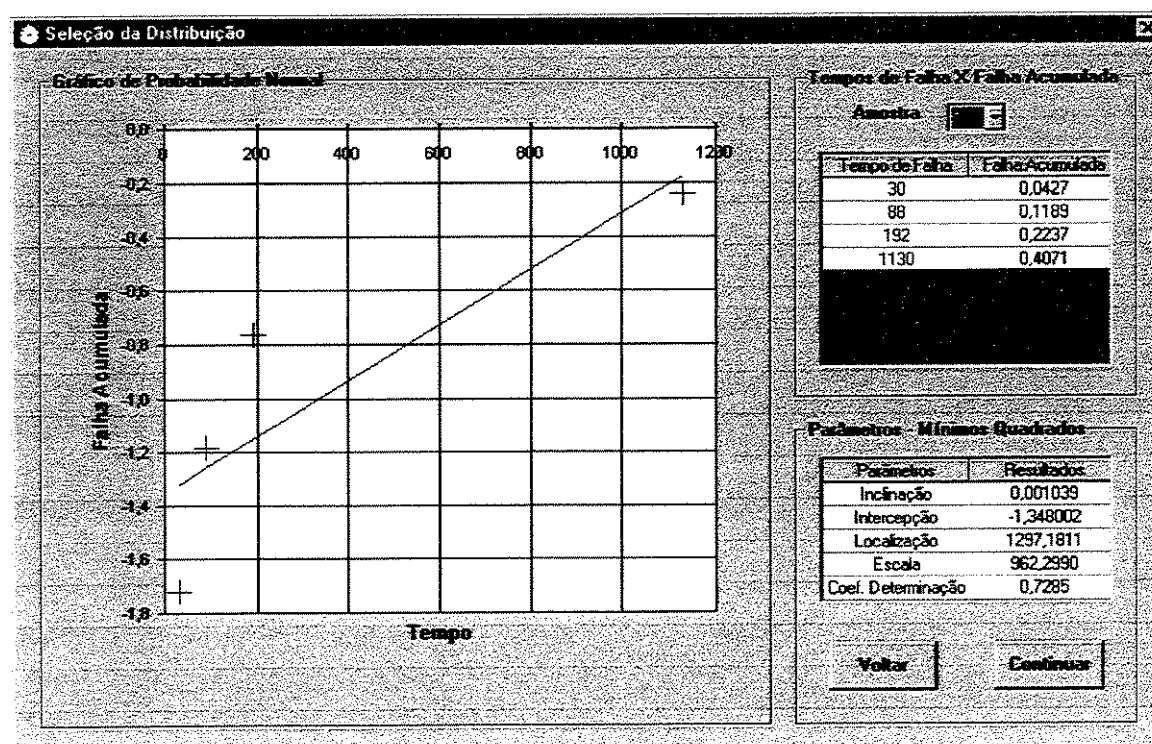


Figura 6.20 – Gráfico de Probabilidade Normal: Rolamento 1

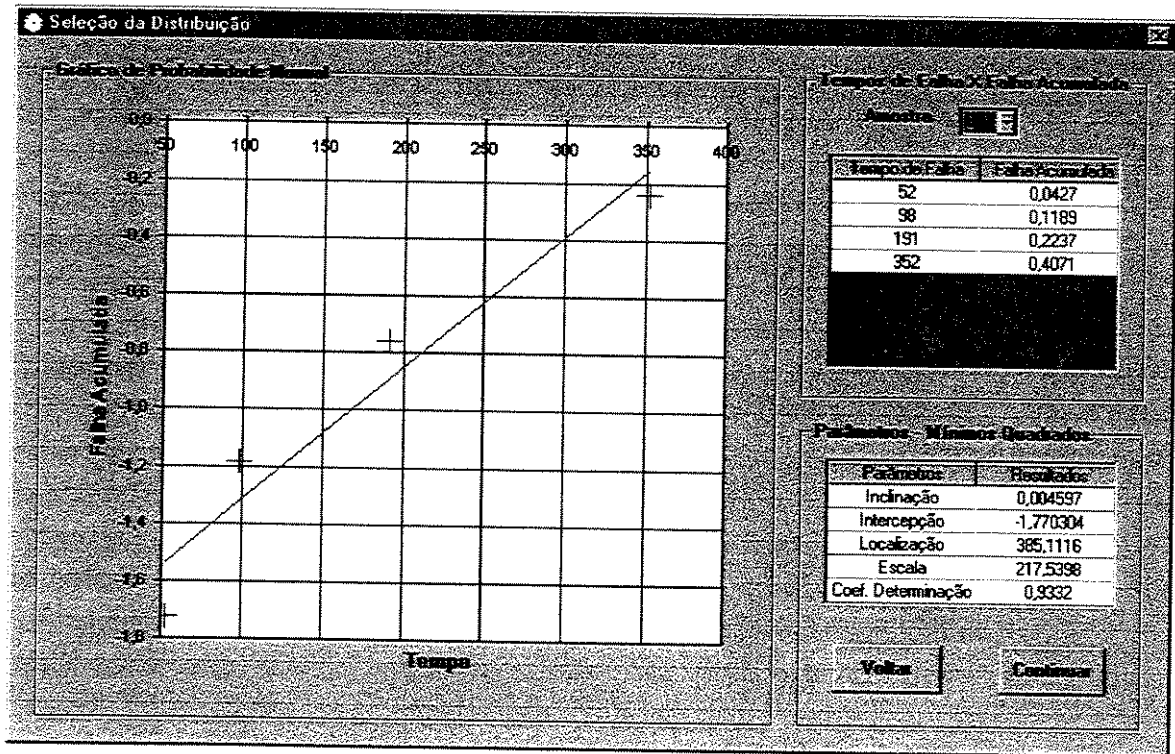


Figura 6.21 – Gráfico de Probabilidade Normal: Rolamento 2

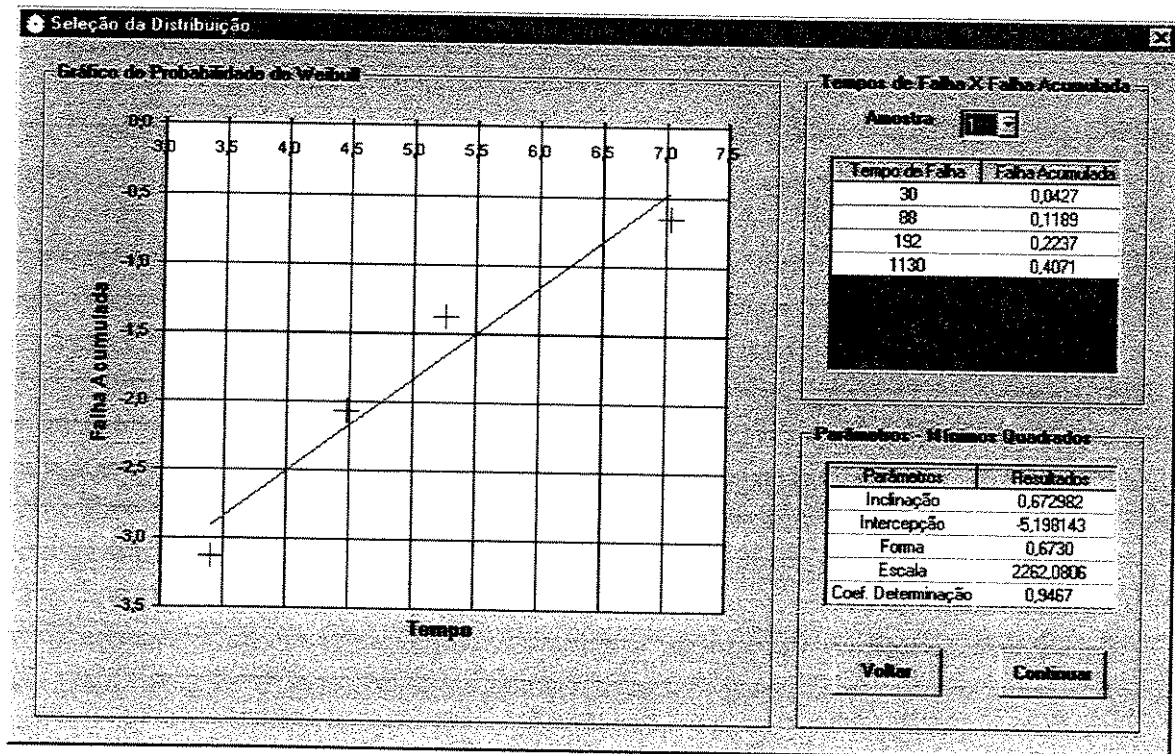


Figura 6.22 – Gráfico de Probabilidade de Weibull: Rolamento 1

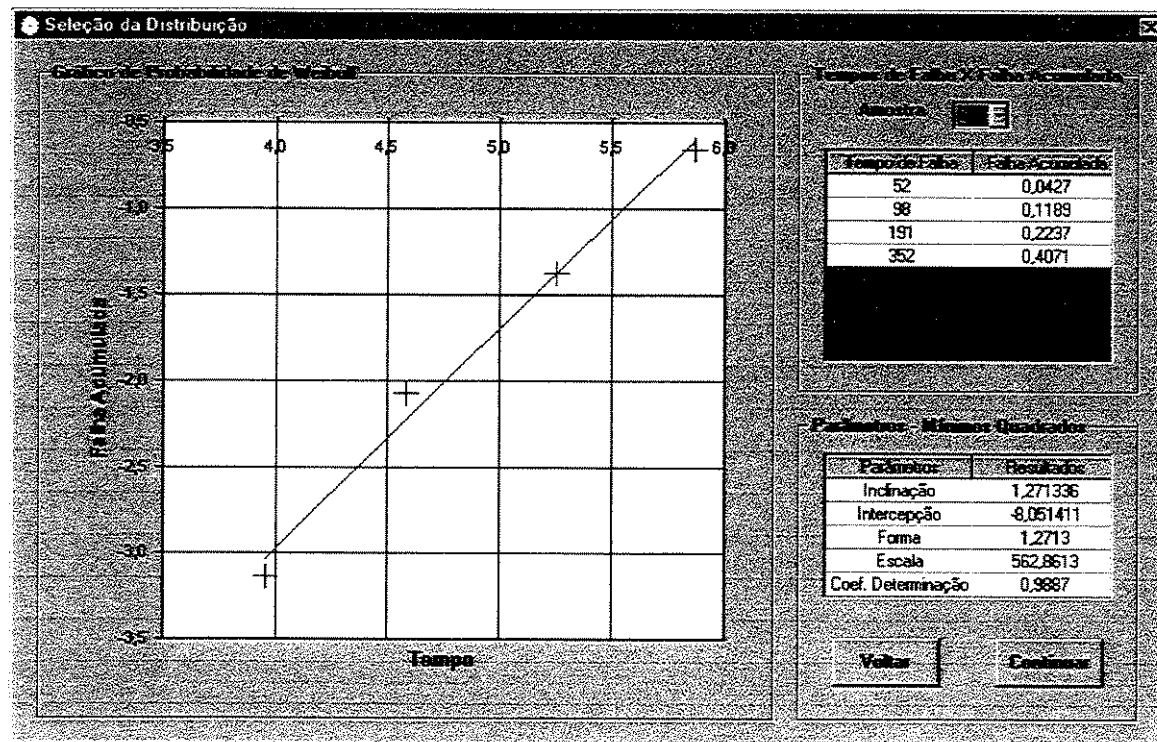


Figura 6.23 – Gráfico de Probabilidade de Weibull: Rolamento 2

Os resultados do coeficiente de determinação estão resumidos na tabela 6.2:

Rolamento	Exponencial	Normal	Weibull
1	0,9157	0,7285	0,9467
1	0,9903	0,9332	0,9887

Tabela 6.2 – Resultados do Coeficiente de Determinação: Exemplo 2

Os resultados demonstram que a distribuição de Weibull é a mais adequada para a modelagem do processo de falha do rolamento 1. Para o rolamento 2 tanto a distribuição de Weibull quanto a distribuição Exponencial fornecem um bom ajuste. Será utilizada a distribuição de Weibull para ambos os casos porque esta é a mais adequada para fenômenos de desgaste em componentes mecânicos. Os modelos ajustados para cada rolamento são mostrados nas figuras 6.24 e 6.25.

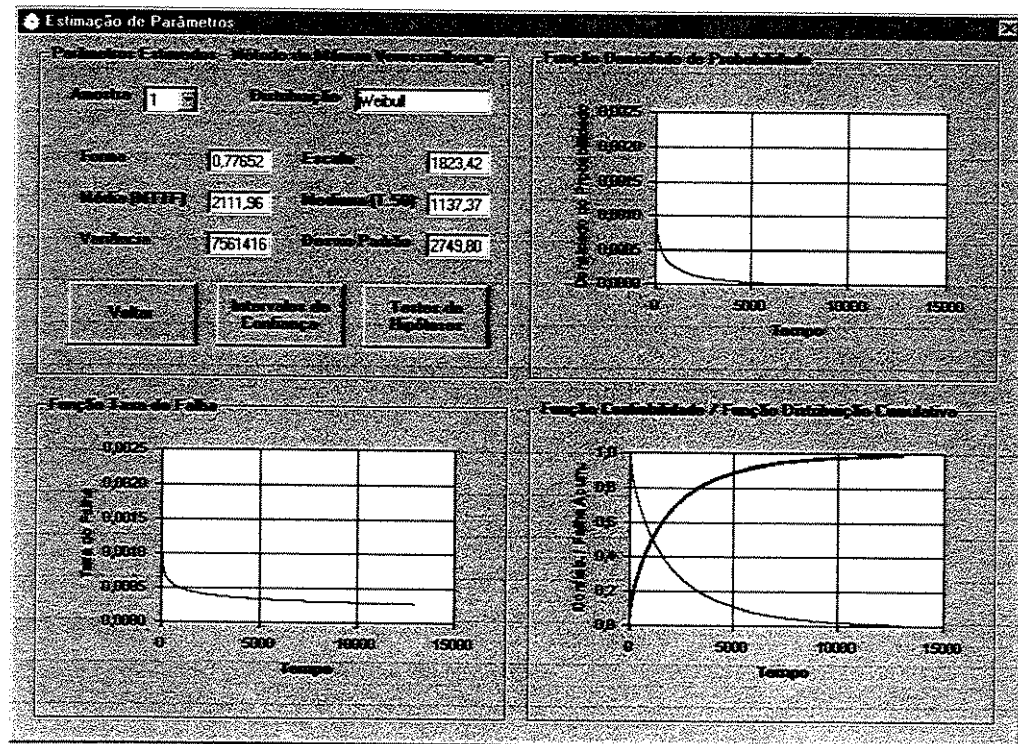


Figura 6.24 – Modelo Ajustado: Rolamento 1

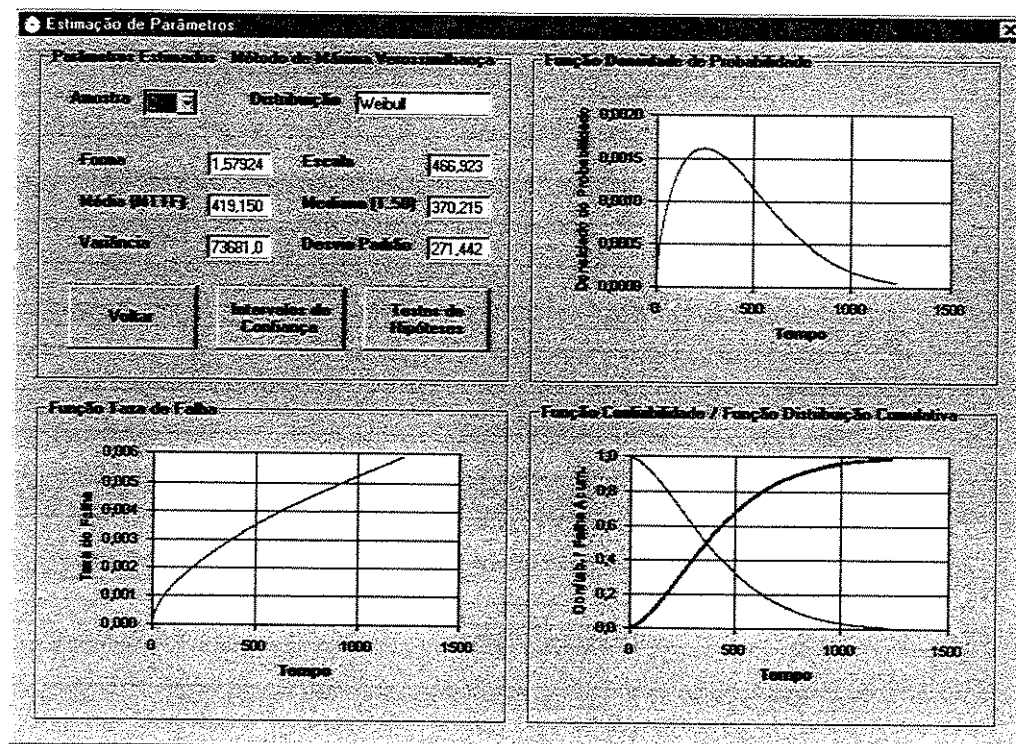


Figura 6.25 – Modelo Ajustado: Rolamento 2

As figuras 6.26 e 6.27 mostram os gráficos de intervalo de confiança para a Vida Característica:

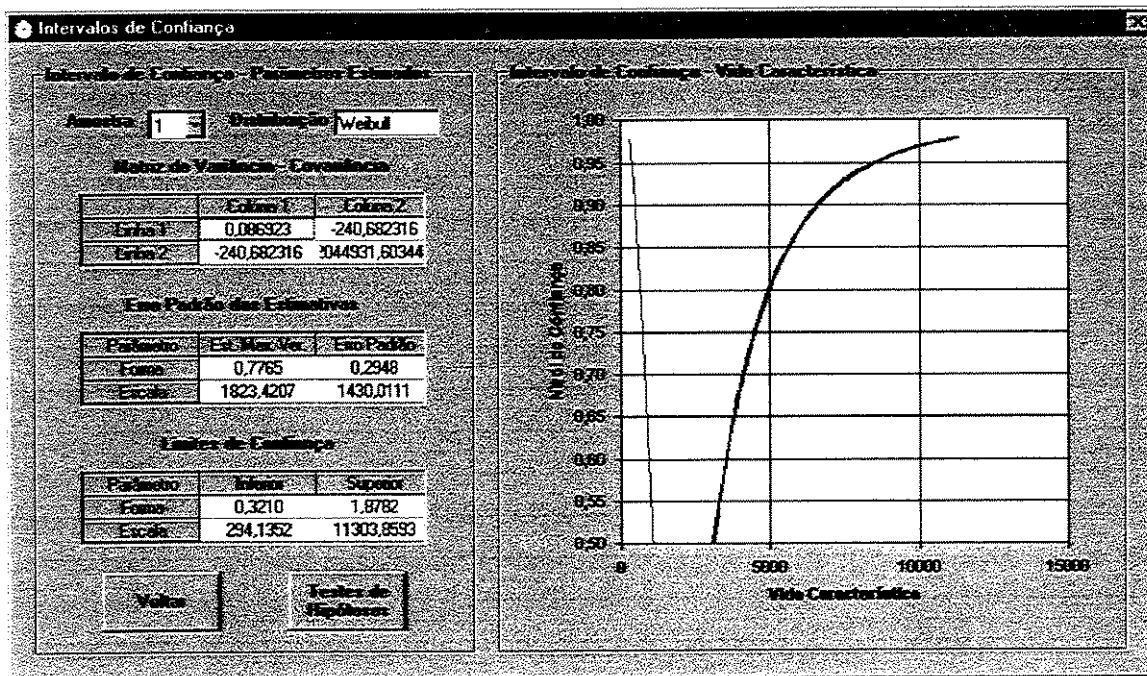


Figura 6.26 – Intervalos de Confiança MTTF: Rolamento 1

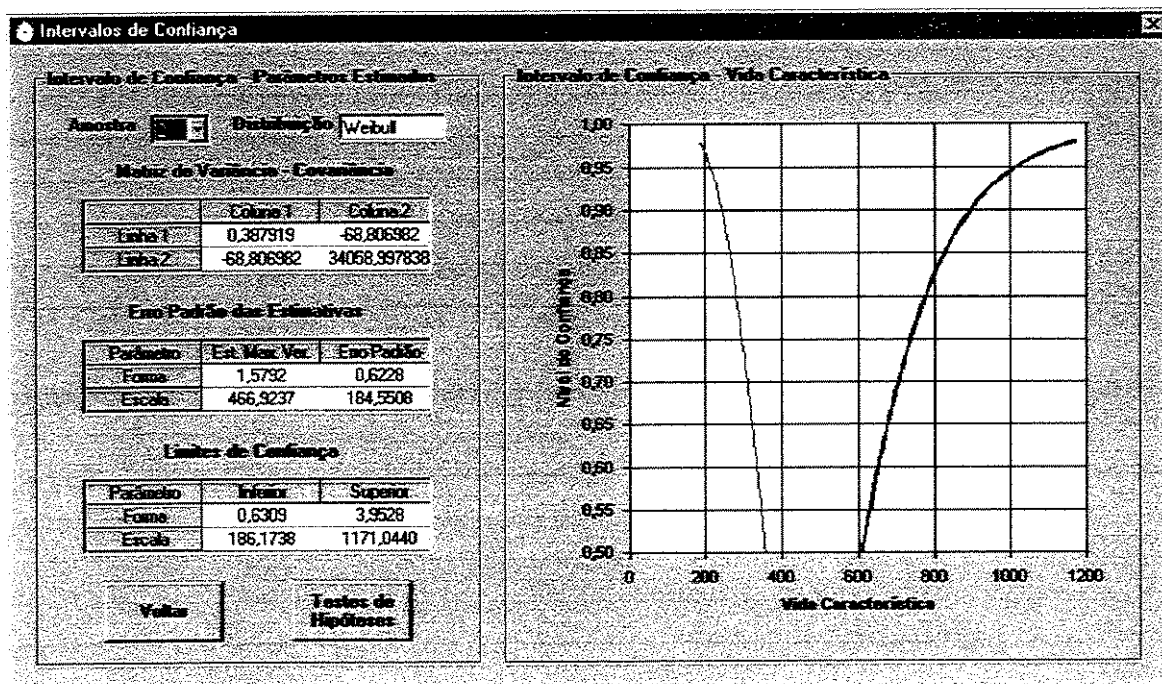


Figura 6.27 – Intervalos de Confiança MTTF: Rolamento 2

Os intervalos de confiança para a falha acumulada são mostrados nas figuras 6.28 e 6.29:

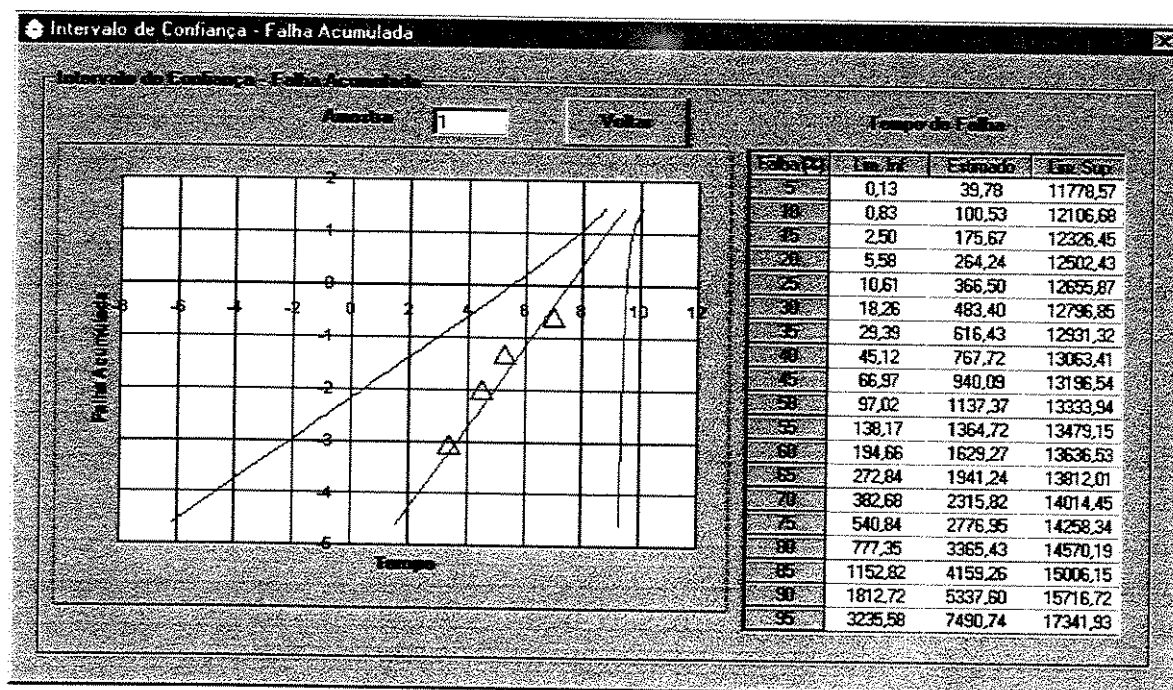


Figura 6.28 – Intervalos de Confiança Falha Acum.: Rolamento 1

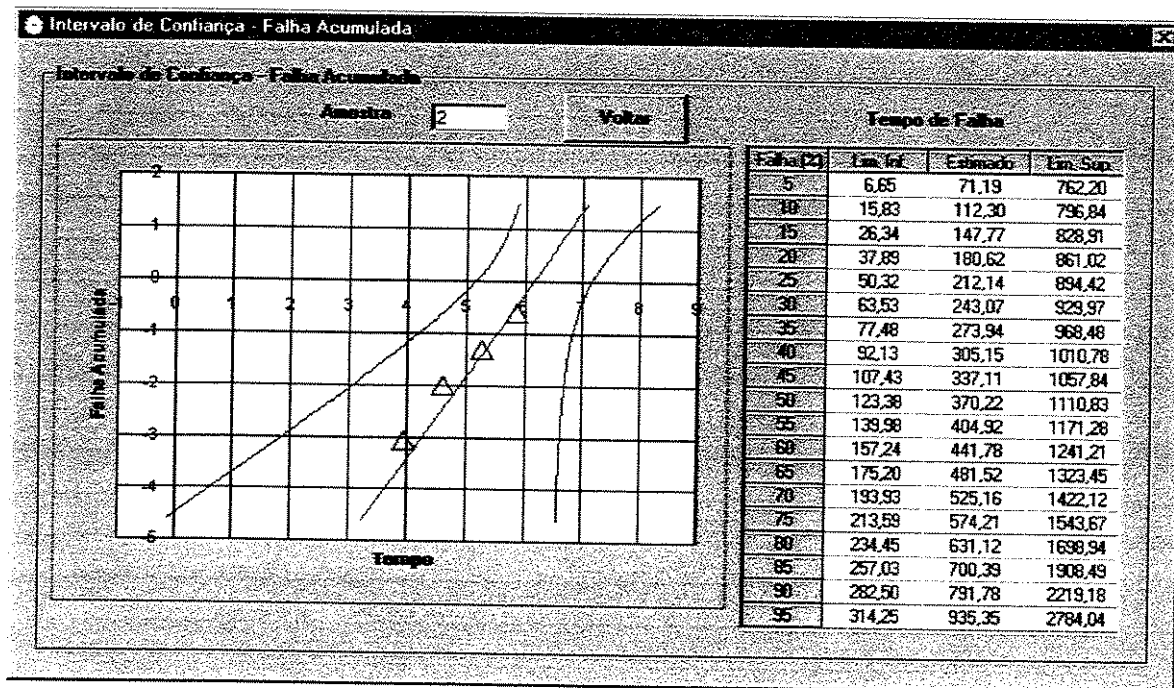


Figura 6.29 – Intervalos de Confiança Falha Acum.: Rolamento 2

Através dos gráficos e as tabelas anteriores, nota-se que a diferença entre o limite inferior e superior, a largura do intervalo de confiança, é grande, devido à alta variabilidade presente nos dados das amostras. Conforme figuras 6.31 e 6.32, para intervalos de confiança mais precisos e que tenha algum significado prático, é necessário conduzir novamente o experimento com amostras de tamanho maior. Isso será demonstrado no cálculo do tamanho da amostra em função de uma largura de intervalo específica. A figura 6.30 mostra conjuntamente os gráficos de intervalos de confiança para a falha acumulada para as duas amostras.

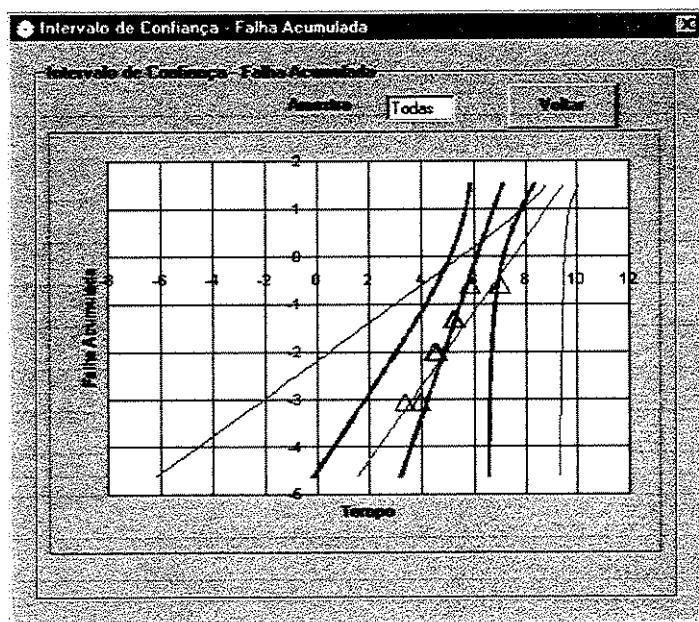


Figura 6.30 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: Rolamentos 1 e 2

Há uma relativa sobreposição dos gráficos de intervalos de confiança para a falha acumulada, sugerindo que não há diferença estatisticamente significativa entre os modelos ajustados para cada rolamento. Porém, deve ser ressaltado que esses resultados são afetados pelo tamanho de cada amostra utilizada no ensaio e a alta variabilidade presente nos dados das amostras.

Tamanhos de amostra maiores tendem a produzir intervalos de confiança mais fechados e resultados mais consistentes e práticos na estimação de parâmetros. Uma verificação formal da hipótese de homogeneidade entre os modelos é mostrada mais adiante na figura 6.33 aplicando o teste da razão de verossimilhança.

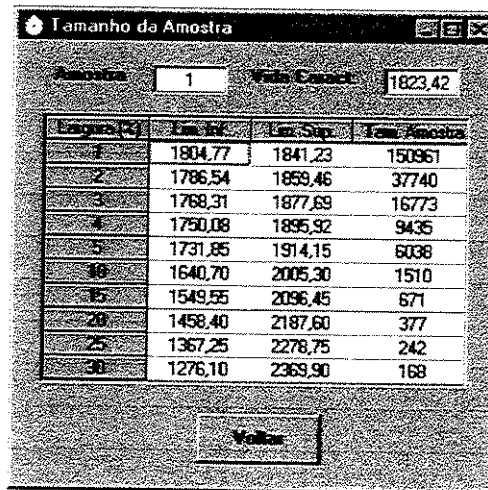


Figura 6.31 – Tamanho da Amostra: Rolamento 1

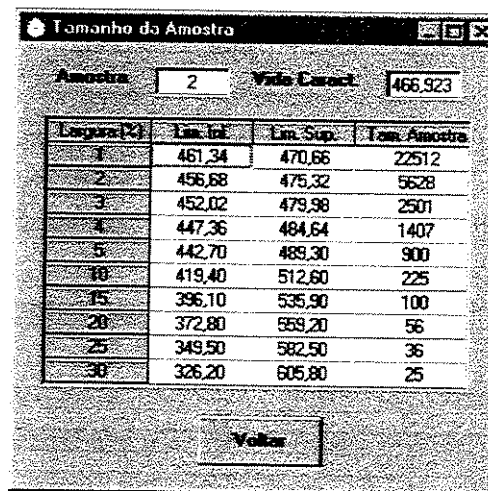


Figura 6.32 – Tamanho da Amostra: Rolamento 2

Os resultados demonstram que para obter estimativas de intervalos de confiança mais precisas ou fechadas seriam necessárias amostras com tamanho muito maior que as empregadas no ensaio. Embora a incerteza tenha sido quantificada pelos intervalos de confiança, ficou demonstrado que estes algumas vezes não tem um significado prático. Para a amostra 1, a Vida Característica encontra-se entre 294 e 11304 horas com 95 % de confiança. Basta verificar que para afirmar com o mesmo nível de confiança, que o parâmetro de escala ou Vida Característica da amostra 1, está entre 1276 e 2370 horas, $\pm 30\%$ aproximadamente, é necessário reconduzir o ensaio com uma amostra com 168 itens.

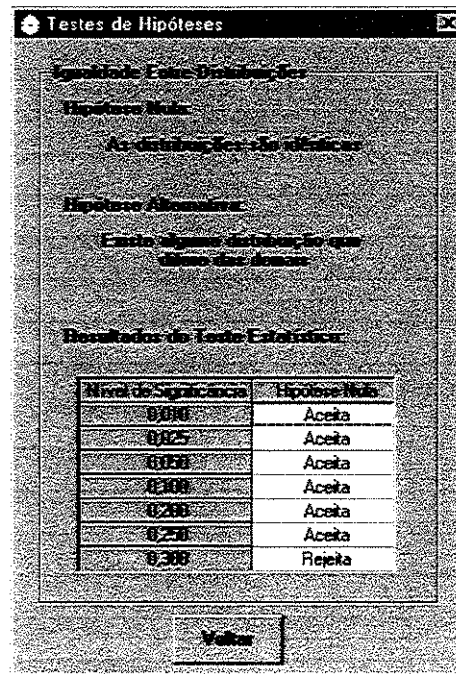


Figura 6.33 – Testes de Hipóteses: Rolamentos 1 e 2

Os resultados do teste da razão de verossimilhança revelam que há diferença estatisticamente significativa somente quando o nível de significância considerado é 30% ou maior.

6.3 Exemplo 3: Estudo Comparativo Sobre Vida de Ferramentas de Corte

O terceiro caso envolve um estudo comparativo para verificar o efeito de dois tipos diferentes de cobertura para ferramentas de corte sobre o número de peças produzidas. O número de peças produzidas para cada ferramenta é:

- Ferramenta com cobertura TiN: 78, 80, 78, 67
- Ferramenta com cobertura TiCN + TiN: 80, 107, 87, 72

Para cada amostra é ajustado um modelo utilizando a distribuição estatística mais adequada. Um gráfico de intervalo de confiança conjunto e o teste da razão de verossimilhança determina se há ou não diferenças estatisticamente significativas entre os modelos.

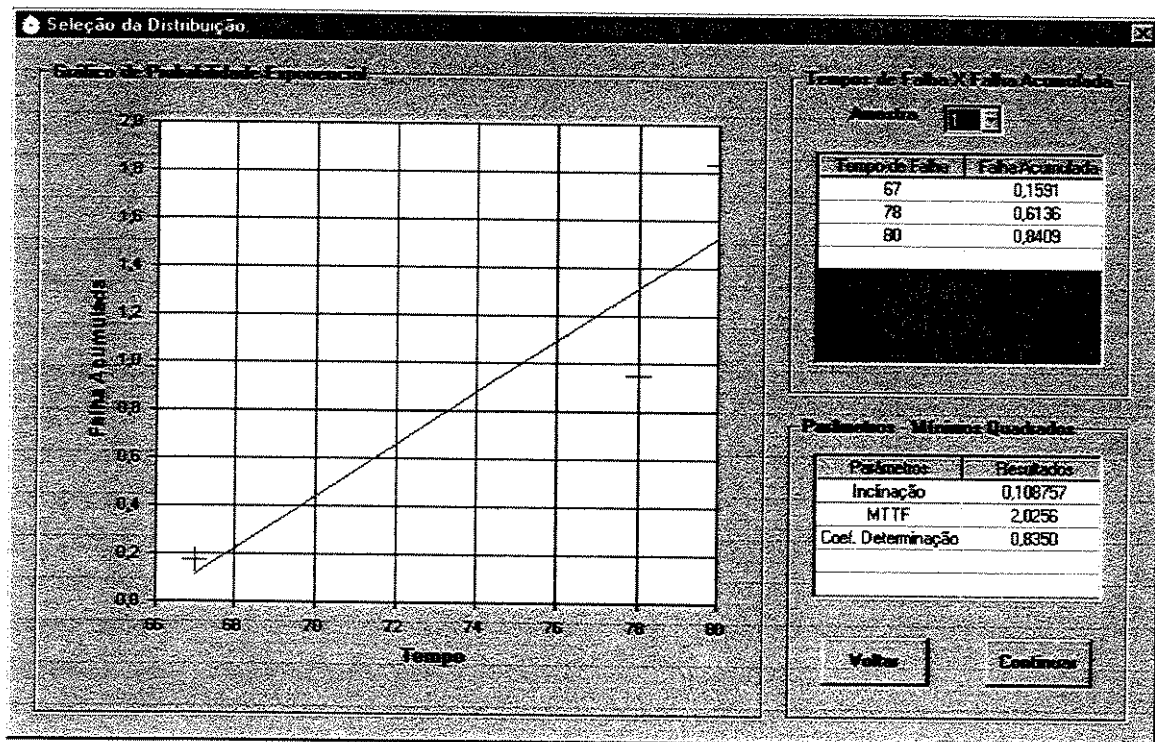


Figura 6.34 – Gráfico de Probabilidade Exponencial: TiN

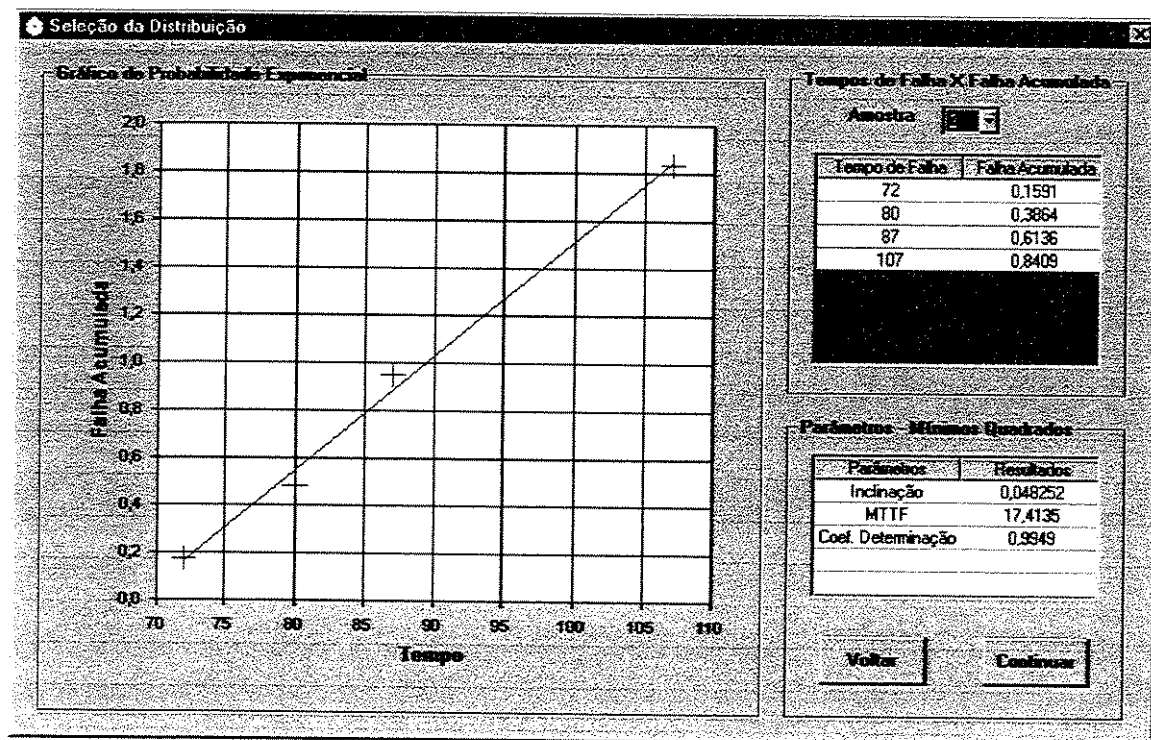


Figura 6.35 – Gráfico de Probabilidade Exponencial: TiCN + TiN

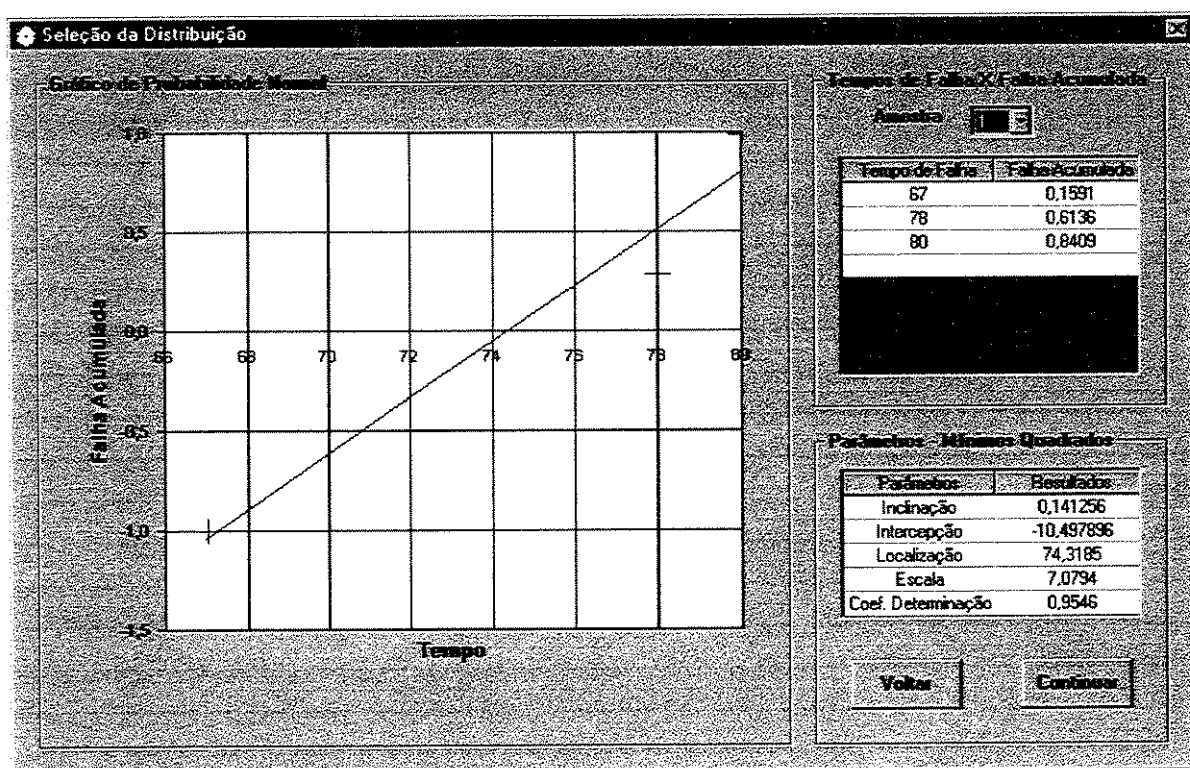


Figura 6.36 – Gráfico de Probabilidade Normal: TiN

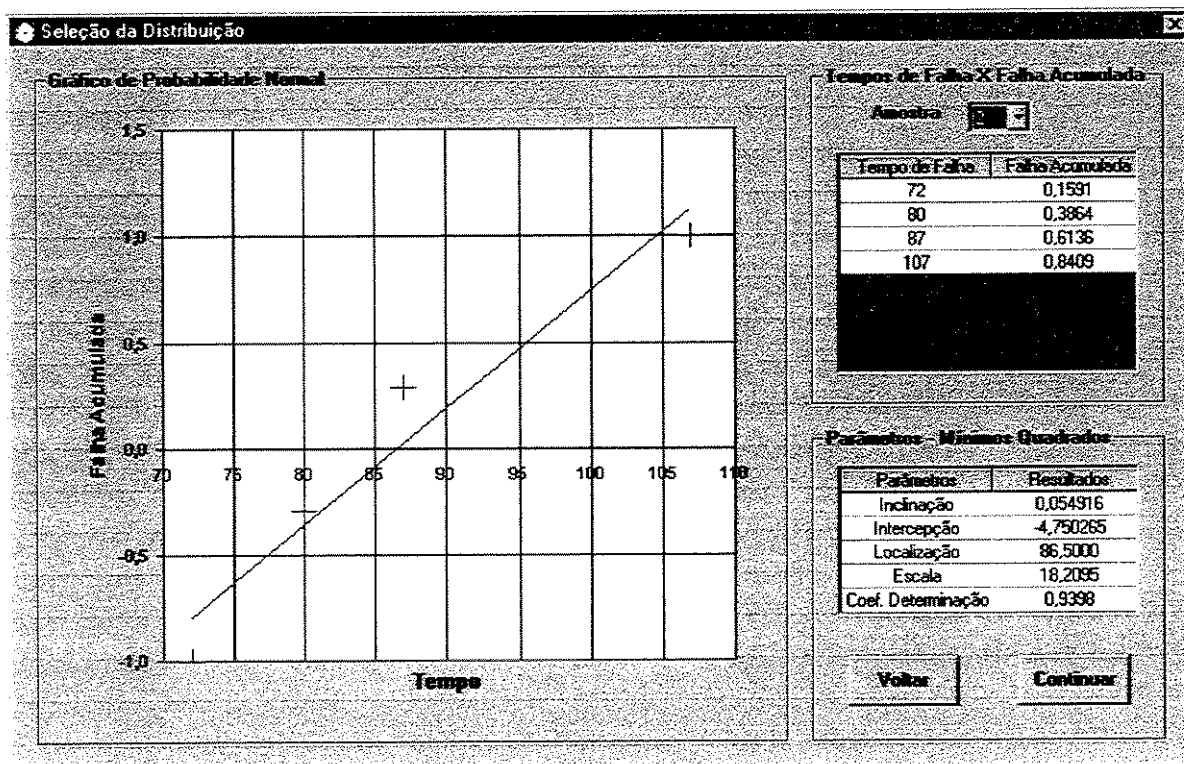


Figura 6.37 – Gráfico de Probabilidade Normal: TiCN + TiN

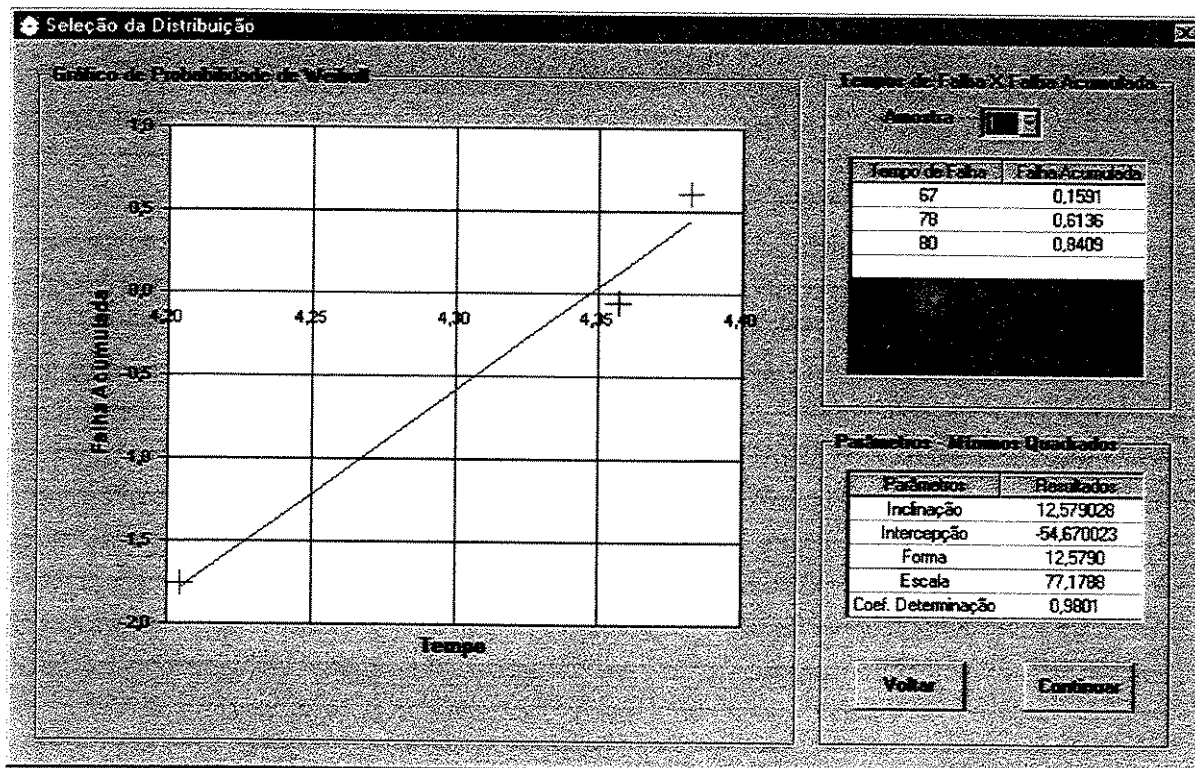


Figura 6.38 – Gráfico de Probabilidade de Weibull: TiN

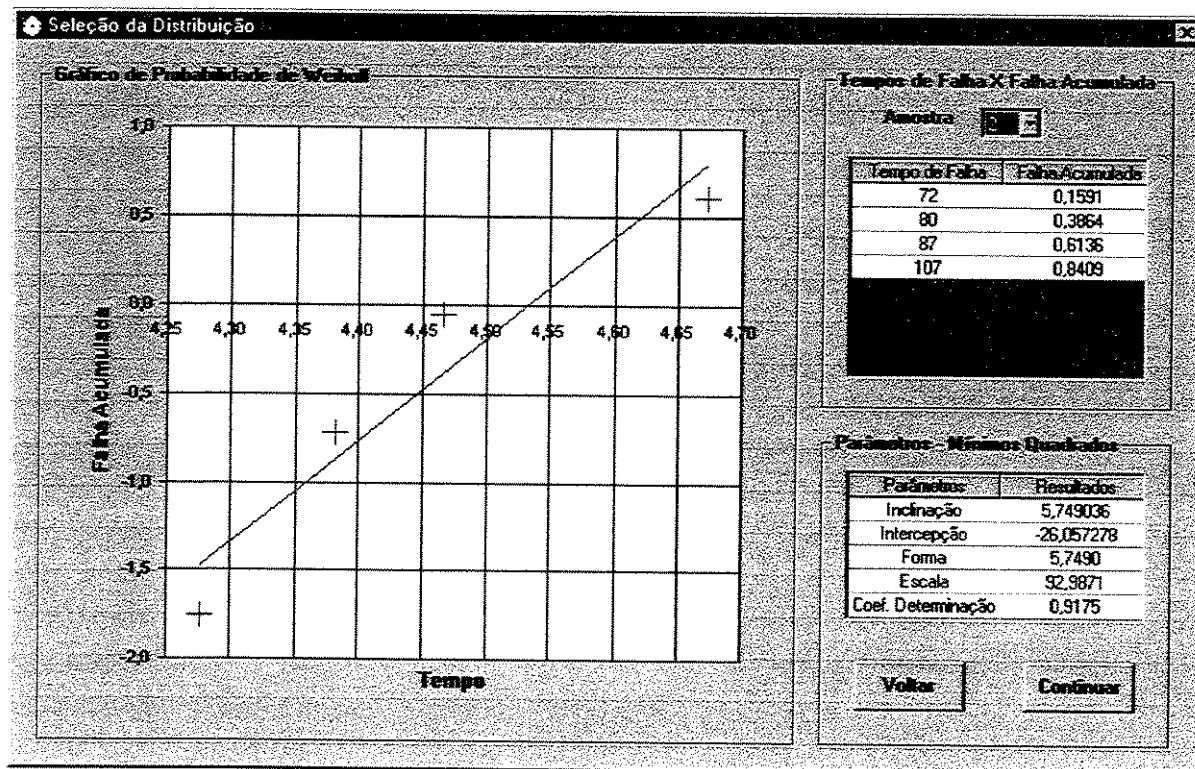


Figura 6.39 – Gráfico de Probabilidade de Weibull: TiCN + TiN

A tabela 6.3 resume os resultados do coeficiente de determinação:

Cobertura da Ferramenta	Exponencial	Normal	Weibull
TiN	0,8350	0,9546	0,9801
TiCN + TiN	0,9949	0,9398	0,9175

Tabela 6.3 – Resultados do Coeficiente de Determinação: Exemplo 3

Pelos resultados mostrados nas figuras 6.34 até 6.39 e a tabela 6.3, as distribuições Normal ou Weibull fornecem um bom ajuste para os dados das duas amostras. Será escolhida a distribuição Normal em virtude de sua larga utilização para a modelagem de fenômenos sujeitos a desgaste. As figuras 6.40 e 6.41 mostram os modelos ajustados para cada amostra e as figuras 6.42 até 6.46 mostram os cálculos relativos aos intervalos de confiança.

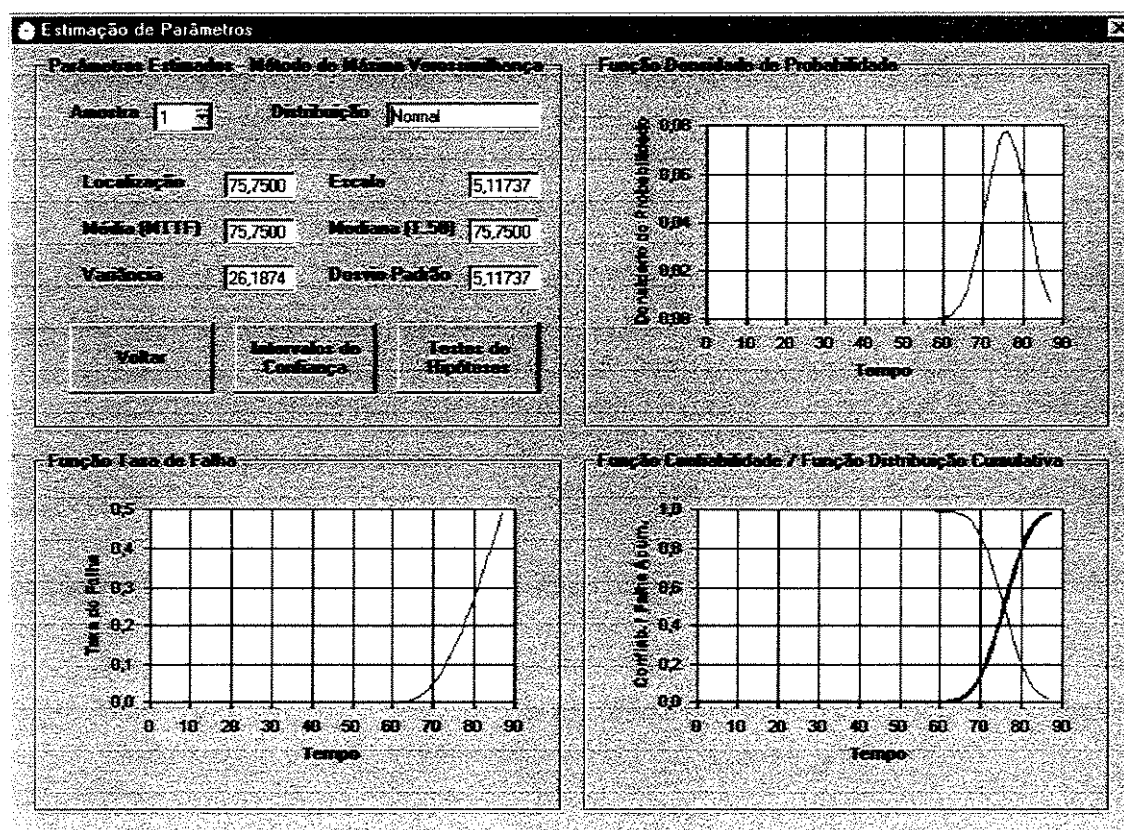


Figura 6.40 – Modelo Ajustado: TiN

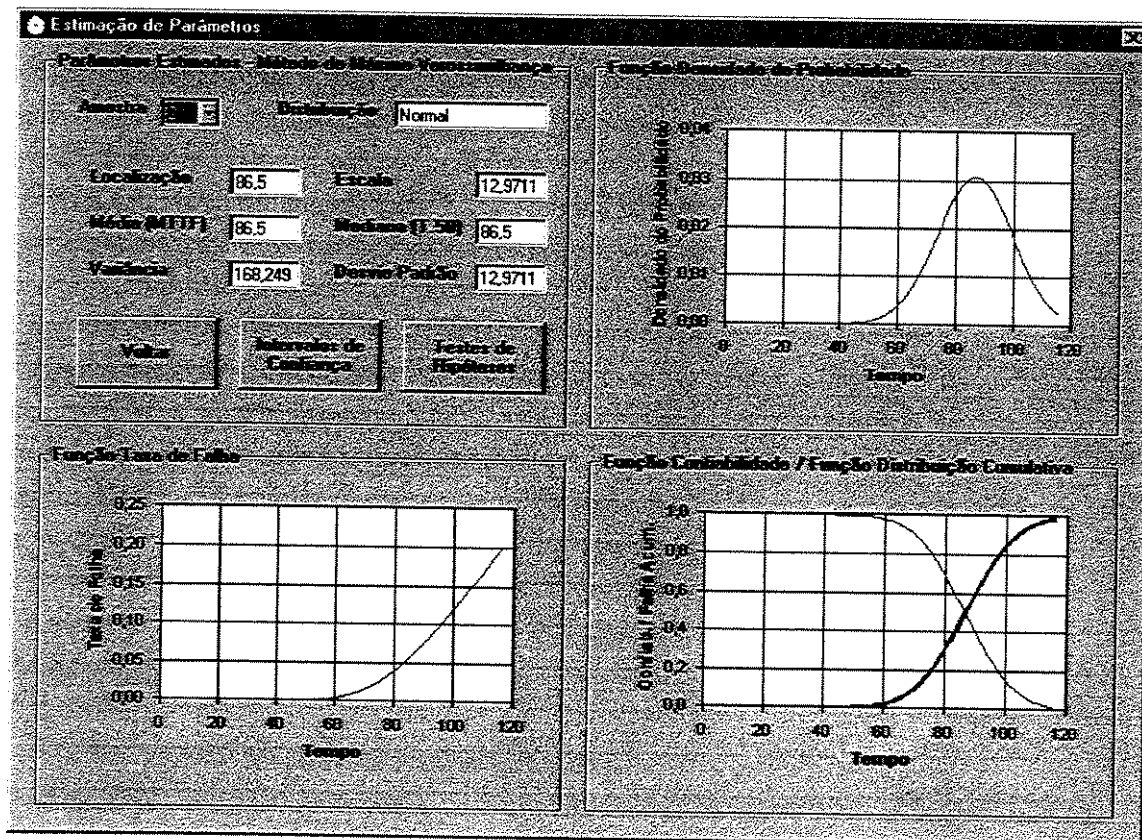


Figura 6.41 – Modelo Ajustado: TiCN + TiN

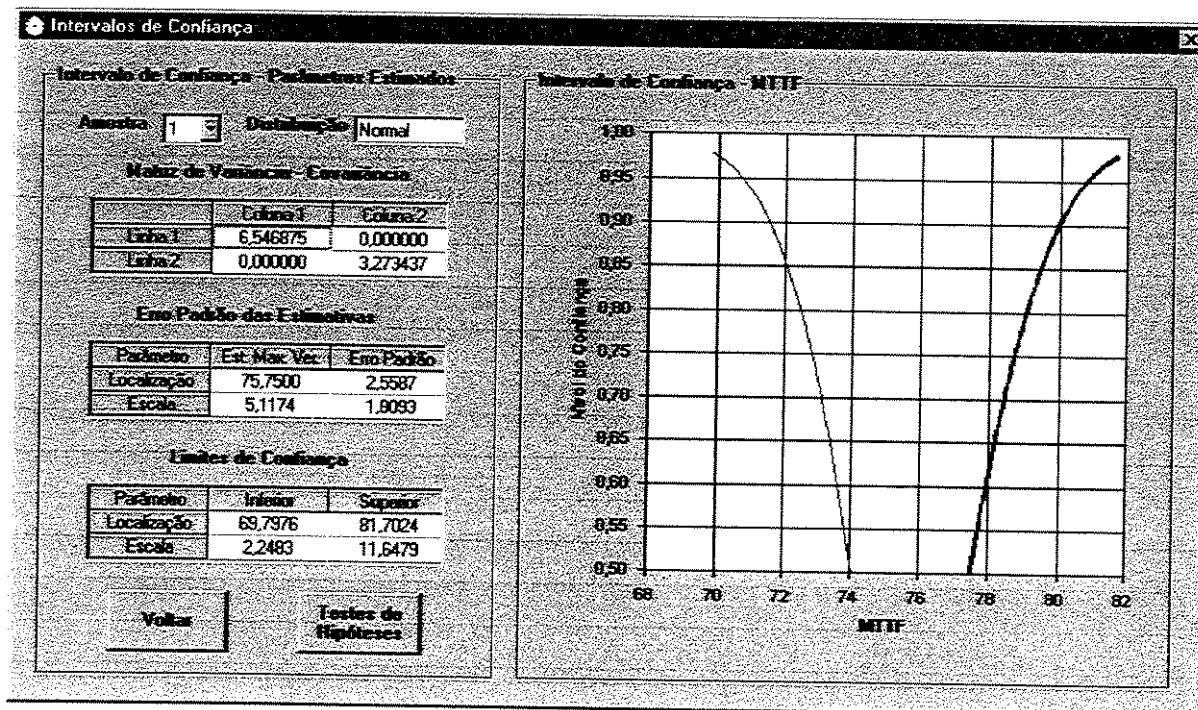


Figura 6.42 – Intervalos de Confiança MTTF: TiN

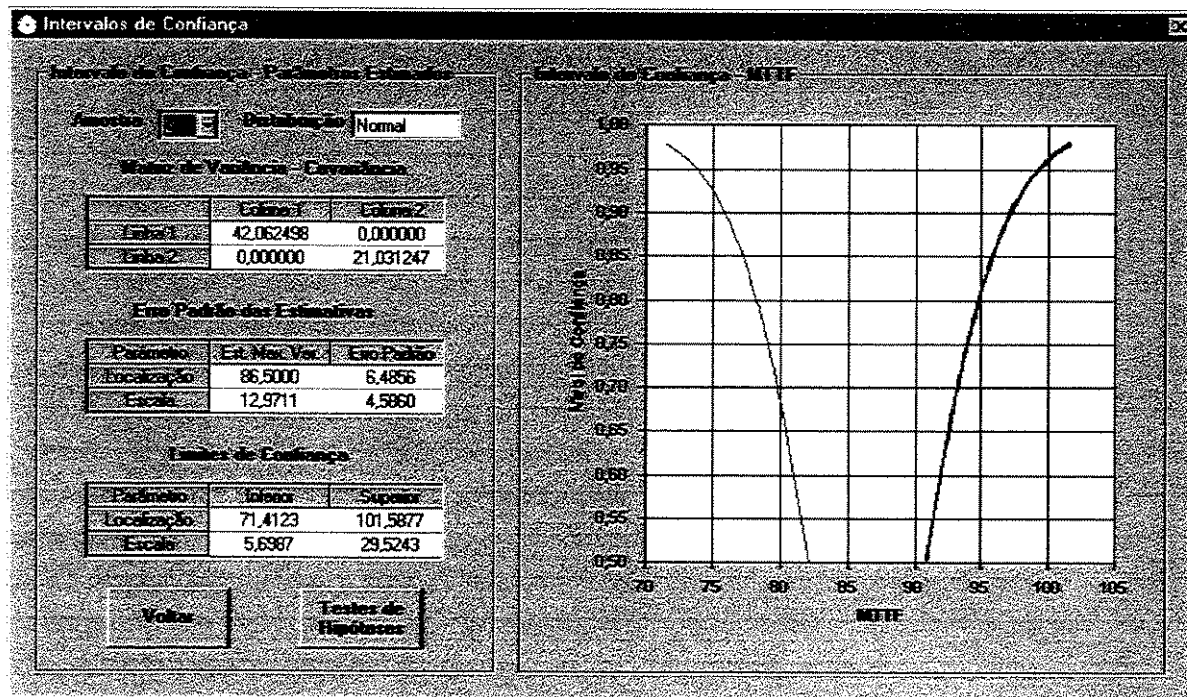


Figura 6.43 – Intervalos de Confiança MTT: TiCN + TiN

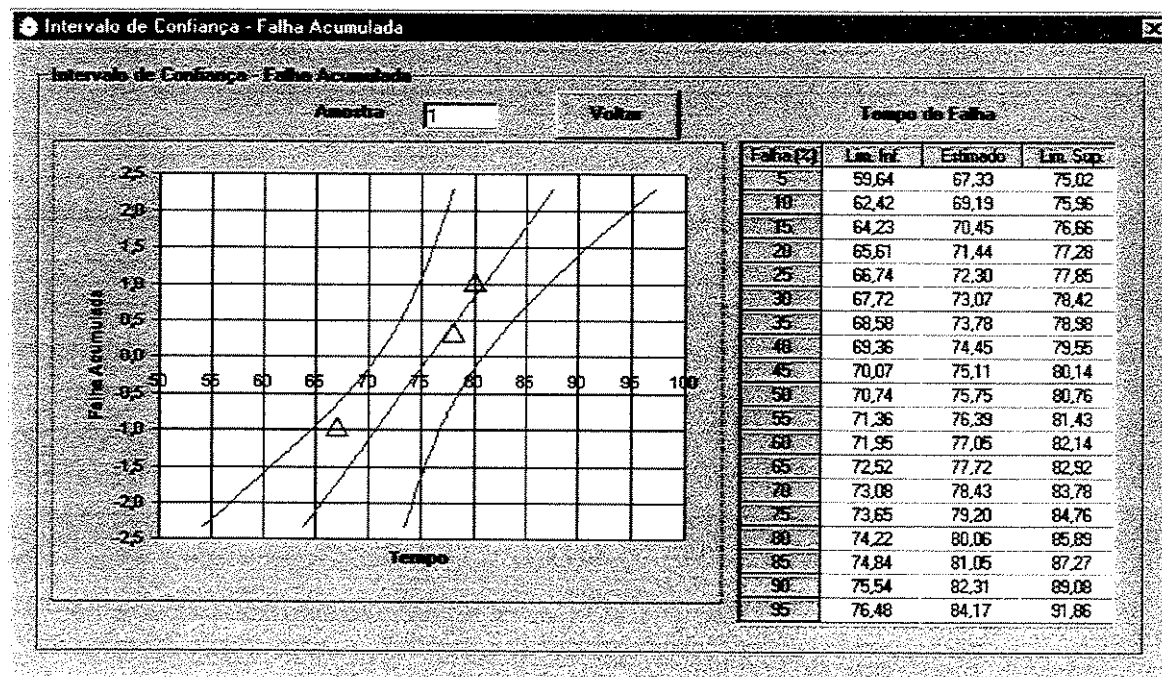


Figura 6.44 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: TiN

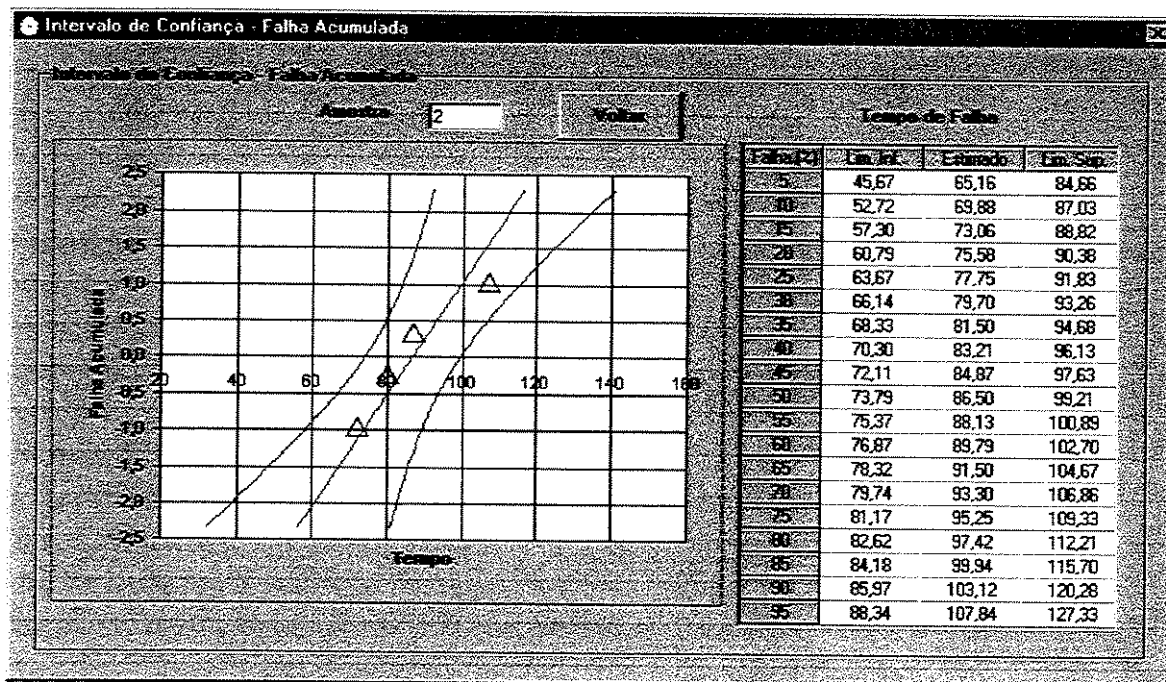


Figura 6.45 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: TiCN + TiN

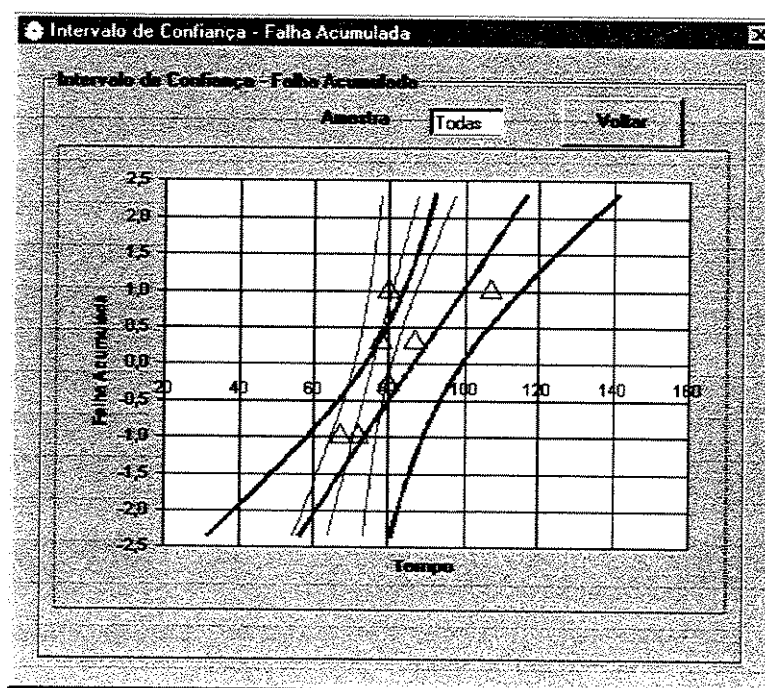


Figura 6.46 – Intervalos de Confiança Falha Acumulada: TiN e TiCN + TiN

A sobreposição dos gráficos de intervalos de confiança para a falha acumulada ocorre parcialmente. A hipótese de igualdade é verificada através do teste da razão de verossimilhança.

As figuras 6.47 e 6.48 mostram os cálculos de tamanho da amostra e a figura 6.49 mostra a aplicação do teste da razão de verossimilhança:

Largura(%)	Lim. Inf.	Lim. Sup.	Tam. Amostra
1	74,25	75,75	179
2	73,50	76,50	45
3	72,75	77,25	20
4	72,00	78,00	11
5	71,25	78,75	7
10	67,50	82,50	2
15	63,75	86,25	1
20	60,00	90,00	0
25	56,25	93,75	0
30	52,50	97,50	0

Figura 6.47 – Tamanho da Amostra: TiN

Largura(%)	Lim. Inf.	Lim. Sup.	Tam. Amostra
1	85,14	86,86	874
2	84,28	87,72	218
3	83,42	88,58	97
4	82,56	89,44	55
5	81,70	90,30	35
10	77,40	94,60	9
15	73,10	98,90	4
20	68,80	103,20	2
25	64,50	107,50	1
30	60,20	111,80	1

Figura 6.48 – Tamanho da Amostra: TiCN + TiN

A variabilidade é maior nos dados da amostra 2, conforme pode ser observado pelos gráficos de intervalos de confiança para a falha acumulada e também pela estimativa de erro-padrão. O tamanho da amostra 2 deve ser maior para conseguir um intervalo de confiança com a mesma precisão da amostra 1.

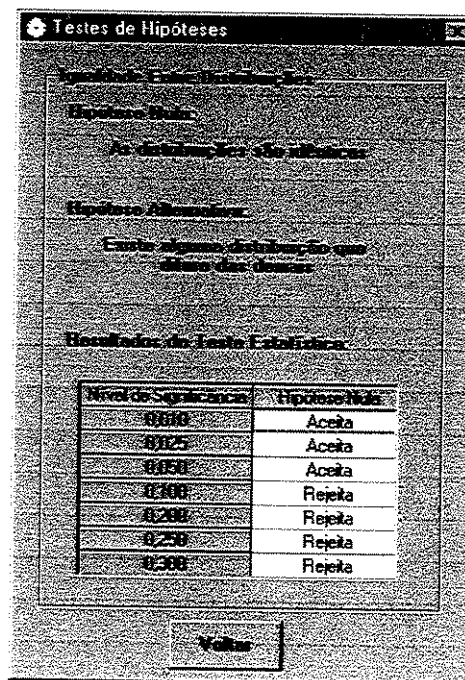


Figura 6.49 – Teste de Hipóteses: TiN e TiCN + TiN

O teste da razão de verossimilhança revela que há evidência suficiente para rejeitar a hipótese de igualdade entre distribuições para níveis de significância maiores ou iguais a 0,1, conforme resultados acima.

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Conforme descrito na introdução, este trabalho teve por objetivos: a seleção da distribuição estatística mais adequada para a modelagem de um determinado processo de falha, a aplicação de métodos de estimação de parâmetros para a completa definição do modelo e o emprego de testes de hipóteses com o intuito de decidir se uma determinada afirmação acerca de uma ou mais populações é verdadeira.

Embora sua interpretação algumas vezes seja subjetiva, os gráficos de probabilidade mostraram-se uma ferramenta bastante acessível e rápida na seleção da distribuição estatística mais adequada. Aliado aos métodos gráficos, o coeficiente de determinação mostrou-se um critério mais objetivo por quantificar percentualmente a variabilidade explicada pelo modelo de regressão linear, utilizado para relacionar o tempo de falha e probabilidade de falha acumulada.

No exemplo extraído da literatura consultada e abordado no capítulo 5, a distribuição Normal forneceu o melhor ajuste para as duas amostras analisadas. No primeiro estudo de caso real foram analisados dados de campo. Além das condições operacionais e ambientais implícitas nos dados de campo, a principal vantagem em sua utilização é a disponibilidade de amostras de grande tamanho quando comparados com dados provenientes de ensaios. A distribuição Normal mostrou-se novamente a mais adequada, embora a distribuição de Weibull tenha também fornecido um bom ajuste.

O segundo caso abordado no capítulo 6 envolveu a análise estatística de dados provenientes de ensaios de vida de rolamentos. Neste exemplo, a distribuição de Weibull forneceu o melhor ajuste, embora a distribuição Exponencial em uma das amostras tenha mostrado um coeficiente de determinação maior. O conhecimento prévio do fenômeno ou processo de falha em questão auxiliou na determinação do modelo teórico mais adequado, visto que fenômenos de desgaste e fadiga em componentes mecânicos são modelados mais adequadamente pela distribuição de Weibull.

Os resultados de seleção da distribuição estatística para o terceiro caso foram similares ao exemplo comentado anteriormente. A distribuição Normal foi utilizada para a modelagem de vida de ferramentas de corte por esta ser mais adequada a processos de falha por desgaste. Nesses dois exemplos, verificou-se que a análise através do método proposto ficou limitada pelo tamanho da amostra. Amostras com tamanho muito reduzido fornecem pouca informação sobre o processo de falha e conduzem algumas vezes a resultados dúbios ou pouco conclusivos.

Para a estimação dos parâmetros da distribuição selecionada, foi utilizado o método de máxima verossimilhança. Os procedimentos baseados em verossimilhança mostraram-se versáteis porque permitiram o tratamento estatístico de dados censurados e aplicação da metodologia em distribuições não Normais. O método de Newton-Raphson foi aplicado na resolução das equações de verossimilhança e convergiu adequadamente em todos os casos analisados.

Para cada estimativa de parâmetro do modelo ajustado foi calculado o erro padrão, cujo objetivo era quantificar a precisão associada à estimativa. Destaca-se o exemplo 2, abordado no capítulo 6, onde o erro padrão associado a cada estimativa de parâmetro foi significativo, atingindo aproximadamente 80% do valor estimado em um dos parâmetros. Novamente, o tamanho de amostra reduzido não permitiu a obtenção de estimativas mais precisas. Intervalos de confiança também foram afetados pelo tamanho da amostra e demonstraram pouco significado prático neste exemplo. Em cada exemplo, o tamanho de amostra necessário foi calculado em função de um intervalo de confiança e um nível de confiança requerido.

Os resultados do cálculo do tamanho da amostra demonstraram que para o caso mais crítico, exemplo 2 do capítulo 6, um tamanho de amostra muito maior seria necessário para obter estimativas de intervalo de confiança com uma precisão maior, principalmente em relação ao rolamento 1, onde uma amostra com 168 itens seria necessária para conseguir um intervalo de confiança com $\pm 30\%$ do valor do parâmetro, considerando-se um nível de confiança de 95%.

Os gráficos com intervalos de confiança sobrepostos revelaram-se uma ferramenta útil para verificação de homogeneidade entre curvas de falha acumulada. Em cada exemplo ficou bem caracterizado se essa hipótese era plausível através da inspeção visual dos gráficos, embora estes, em alguns casos, tenham sido afetados pela variabilidade inerente aos dados e o tamanho da amostra. Novamente, o exemplo envolvendo o estudo comparativo entre dois rolamentos foi o caso mais crítico, principalmente devido à magnitude do intervalo de confiança para a primeira amostra.

O teste da razão de verossimilhança foi aplicado para verificar a veracidade de hipóteses estabelecidas acerca dos parâmetros das populações envolvidas. Por ser um procedimento geral, permitiu a inclusão de dados censurados e distribuições não Normais. Em conjunto com os gráficos de intervalos de confiança comentados anteriormente, os testes estatísticos revelaram para que nível de significância haveria evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula de homogeneidade entre as populações em cada exemplo analisado.

Em todos os casos analisados a metodologia aplicada mostrou-se válida, porém deve-se ressaltar que as conclusões estabelecidas podem não refletir a realidade com a precisão requerida se amostras com tamanho muito reduzido são empregadas ou em situações onde a censura é muito severa. Além disso, neste trabalho somente três distribuições estatísticas foram consideradas: Exponencial, Normal e Weibull. É possível que em um ou mais casos analisados um outro modelo teórico poderia fornecer um ajuste melhor. Portanto, a primeira sugestão para trabalhos futuros, seria a extensão da metodologia a outras distribuições estatísticas com larga aplicação em confiabilidade: Lognormal, Valores Extremos, Gamma, Rayleigh e também distribuições para variáveis aleatórias discretas: Binomial e Poisson.

Em relação aos métodos de seleção da distribuição estatística, outras técnicas podem ser empregadas. Uma estimativa de taxa de falha empírica também pode ser um dos critérios de escolha de um modelo teórico. Uma curva de taxa de falha não paramétrica com um padrão constante poderia indicar que um modelo Exponencial é razoável. Para taxas de falha crescente, a distribuição de Weibull seria uma das escolhas. Técnicas da análise de regressão para tratamento de pontos influentes (*outliers*) em gráficos de probabilidade também podem ser implementadas fornecendo um subsídio a mais para a escolha do modelo teórico mais adequado.

Na aplicação do método de máxima verossimilhança foram considerados somente dados completos e dados de censura simples ou múltipla à direita. Embora a censura à esquerda e a censura em um intervalo sejam menos comuns em confiabilidade, o tratamento é similar, bastando inclusão desses dados na função verossimilhança. É possível também incluir variáveis explanatórias na modelagem baseada em verossimilhança, fazendo com que a probabilidade de falha dependa não só do tempo de falha, como também de outras variáveis quantitativas ou qualitativas.

Outros métodos numéricos para encontrar as estimativas de parâmetros podem ser empregados. O método de Newton-Raphson foi abordado neste trabalho, mas uma série de outros métodos: ascendente de maior inclinação (*steepest ascent*), Powell, Secante, etc podem ser utilizados para obter as estimativas de máxima verossimilhança. Um estudo comparativo entre os vários métodos pode ser realizado com o objetivo de verificar a eficiência relativa de cada um deles.

Os intervalos de confiança por aproximação Normal foram empregados devido à facilidade de implementação, porém em amostras com tamanho reduzido, estes não são precisos. Outra sugestão de extensão do trabalho seria a implementação de intervalos de confiança baseados na verossimilhança da amostra e também intervalos de confiança por simulação *bootstrap*. Estas técnicas produzem resultados mais precisos quando amostras de tamanho muito pequeno são utilizadas.

O cálculo do tamanho da amostra é aproximado e sua precisão depende da porcentagem de dados censurados presentes na amostra. Em casos onde a censura é severa, métodos de estimação do tamanho da amostra mais precisos devem ser empregados. Em relação aos testes de verossimilhança, somente foram considerados testes bilaterais com o objetivo de verificar se as populações em estudo são estatisticamente idênticas. Testes unilaterais, onde é verificado se uma população ultrapassa a outra em relação a um ou mais parâmetros de interesse, também podem ser implementados.

Referências Bibliográficas

- Aminzadeh, M. S. Confidence bounds for $\Pr\{X>Y\}$ in 1-way ANOVA random model. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 40, nº 5, pp. 537-540, 1991.
- Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C. T., Ng, H. K. T. Point and interval estimation for Gaussian distribution, based on progressively tipe-2 censored samples. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 52, nº 1, pp. 90-95, 2003.
- Barlow, R. E., Proschan, F. *Mathematical Theory of Reliability*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- Bazovsky, I. *Reliability Theory and Practice*. Prentice Hall, NewJersey, 1961.
- Billinton, R., Allan, R. N. *Reliability Evaluation of Engineering Systems: Concepts and Techniques*. NewYork: Plenum Press, 1983, 349p.
- Bohoris, G. A. Parametric statistical techniques for the comparative analysis of censored reliability data: a review. *Reliability Engineering and System Safety*, v.48, pp. 149-155, 1995.
- Bompas Smith, J. H. *Mechanical Survival: the Use of Reliability Data*. London: McGrawHill, 1973, 199p.

- Brandt, S. *Data Analysis: Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers*. New York: Springer-Verlag Inc., 1999, 652p.
- Coit, D. W., Dey, K. A. Analysis of grouped data from field-failure reporting systems. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 65, pp. 95-101, 1999.
- Colmenero, A. N. *Ensaaios acelerados. Coleta e processamento de dados para estudos de confiabilidade em casos de mecanismo de falha simples*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, 152p. Dissertação (Mestrado).
- Condra, L. W. *Reliability Improvement with Design of Experiments*. Marcel Dekker, 1993.
- Conover, W. J. *Practical Nonparametric Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999, 584p.
- Doganaksoy, N. Determining the duration of a demonstration life-test before all units fail. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 44, n° 1, pp. 26-30, 1995.
- Doganaksoy, N., Schmee, J. Pratical aspects of corrected likelihood ratio confidence intervals: A discussion of Jeng-Meeker and Wong-Wu. *Technometrics*, v. 42, n° 2, pp. 156-159, 2000.
- Doty, L. A. *Reliability for the Technologies*. NewYork: Industrial, 1989, 307p.
- Ebeling, C. E. *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*. McGraw-Hill, 1997, 486 p.
- Fraser, D. A. S., Reid, N. Ancillaries and third-order significance. *Utilitas Mathematica*, v. 7, pp. 33-53, 1995.

- Gerald, F. C., Wheatley, P.O. *Applied Numerical Analysis*. Addison Wesley Longman, 1999, 698p.
- Hamada, M. Using statistically designed experiments to improve reliability and to achieve robust reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, v. 44, n° 2, pp. 206-215, 1995.
- Hisada, K., Arizino, I. Reliability tests for Weibull distribution with varying shape-parameter, based on complete data. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 51, n° 3, pp. 331-336, 2002.
- Jeng, S. L., Meeker, W. Q. Comparisons of approximate confidence interval procedures for type 1 censored data. *Technometrics*, v. 42, n° 2, pp. 135-148, 2000.
- Kapur, K. C., Lamberson, L. R. *Reliability in Engineering Design*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1977
- Lawless, J. F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982, 580p.
- Lawson, C., Keats, J. B., Montgomery, D. C. Comparison of robust and least-squares regression in computer-generated probability plots. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 46, n° 1, pp. 108-115, 1997.
- Lewis, E. E. *Introduction to Reliability Engineering*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996, 435p.
- Ling, J., Pan, J. A new method for selection of population distribution and parameter estimation. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 60, pp. 247-255, 1998.
- Lui, K. J. Hypothesis testing of equality between exponential distributions with matched sets. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 46, n° 2, pp. 240-246, 1997.

- Mann, N. R., Schafer, R. E., Singpurwalla, N. D. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1974, 564p.
- Meeker, W. Q., Escobar, L. A. *Statistical Methods for Reliability Data*. John Wiley & Sons, Inc., 1998, 680p.
- Mojena, M. A. R. *Análise e Redução de Estruturas em Confiabilidade*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, 158p. Dissertação (Mestrado).
- Montgomery, D. C., Runger G. C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2003, 463p.
- Nelson, W. *Applied Life Data Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982, 634p.
- Nelson, W. *Accelerated Testing: Statistical Models, Data Analysis and Test Plans*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990, 230p.
- O'Connor, P. D. T. *Practical Reliability Engineering*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990, 560p.
- Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. *Numerical Recipes: The art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1986, 818p.
- Ramakumar, R. *Engineering Reliability Fundamentals and Applications*. New Jersey: Prentice Hall International Editions, 1993, 482p.
- Sinha, S. K. *Reliability and Life Testing*. New Delhi: Wiley Eastern, 1986, 252p.
- Smith, C. O. *Introduction to Reliability in Design*, New York: McGraw-Hill, 1976.

- Thiagarajah, K. R. Homogeneity tests for scale parameters of 2-parameter exponential populations under time censoring. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 44, n° 2, pp. 297-301, 1995.
- Wang, F. K., Keats, J. B. Improved percentile estimation for the two-parameter Weibull distribution. *Microelectronics and Reliability*, v. 35, n° 6, pp. 883-892, 1995.
- Watkins, A. J. On maximum likelihood estimation for the two parameter Weibull distribution. *Microelectronics and Reliability*, v. 36, n° 5, pp. 595-603, 1996.
- Wong, A. C. M., Wu, J. Practical small-sample asymptotics for distributions used in life-data analysis. *Technometrics*, v. 42, n° 2, pp. 149-155, 2000.