



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

HELDER RICHARDISON DAIHA

**Projeto de controle de sistemas dinâmicos com  
comutação baseado em função de Lyapunov  
variante no tempo**

Campinas  
2020

HELDER RICHARDISON DAIHA

**Projeto de controle de sistemas dinâmicos com comutação baseado  
em função de Lyapunov variante no tempo**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na área de Mecatrônica.

**Orientadora:** Profa. Dra. Grace Silva Deaecto

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO HELDER RICHARDISON DAIHA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. GRACE SILVA DEAECTO.

**Campinas  
2020**

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

D143p Daiha, Helder Richardson, 1989-  
Projeto de controle de sistemas dinâmicos com comutação baseado em uma função de Lyapunov variante no tempo / Helder Richardson Daiha. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Grace Silva Deaecto.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas de comutação. 2. Sistemas de controle por realimentação. 3. Desigualdades matriciais lineares. 4. Teoria do controle. I. Deaecto, Grace Silva, 1983--. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Control design of switched dynamical systems based on a time-varying Lyapunov function

**Palavras-chave em inglês:**

Switched systems

Feedback control systems

Linear matrix inequalities

Control theory

**Área de concentração:** Mecatrônica

**Titulação:** Doutor em Engenharia Mecânica

**Banca examinadora:**

Grace Silva Deaecto [Orientador]

Alberto Luiz Serpa

Janito Vaqueiro Ferreira

Gabriela Werner Gabriel

Márcio Roberto Covacic

**Data de defesa:** 31-07-2020

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Mecânica

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-4067-9279>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/2386208002180954>

# Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO ACADÊMICO

## Projeto de controle de sistemas dinâmicos com comutação baseado em função de Lyapunov variante no tempo

Autor: Helder Richardson Daiha

Orientadora: Profa. Dra. Grace Silva Deaecto

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo:

**Profa. Dra. Grace Silva Deaecto (Presidente)**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

**Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

**Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira**

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)

**Prof. Dra. Gabriela Werner Gabriel**

Divisão de Engenharia Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

**Prof. Dr. Márcio Roberto Covacic**

Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Londrina (UEL)

A Ata de Defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria do Programa da Unidade.

Campinas, 31 de Julho de 2020.

Dedico este trabalho à minha esposa  
Bruna,  
e aos meus pais,  
Cesar e Silvia.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e sua maravilhosa graça. Sem Ele, eu não conseguiria ter alcançado nada do que alcancei.

Com todo amor, sou grato à minha incrível esposa, Bruna. Ela foi quem sempre me ajudou de todas as maneiras possíveis; aconselhando, motivando, animando e me mostrando que é possível ir mais longe.

Agradeço aos meus pais, Cesar e Silvia, por tudo o que representam pra mim. Eles me ensinaram, não apenas por meio de palavras, mas principalmente por serem a minha referência; graças ao seu incentivo, tudo isso tornou-se possível. À minha irmã Darc e ao meu sobrinho Caique, a distância não diminui o meu amor por vocês. Enfim, aos meus tios Henrique, João, Adriana, Agnaldo e Irimar, pelos ensinamentos, experiências e apoio ao longo de toda a vida.

Gostaria de expressar o meu reconhecimento aos professores que fizeram parte de toda minha formação, em especial à minha orientadora Grace Deaecto, pela oportunidade e conhecimento proporcionados durante o período do doutorado, e ao professor José Geromel, por todo suporte e inspiração. Não poderia deixar de mencionar meus agradecimentos à Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), que se tornou meu segundo lar nos últimos 10 anos, e foi o cenário de grandes momentos que levarei para a vida; à CAPES, responsável pelo financiamento deste trabalho.

Pela amizade e companheirismo, finalizo agradecendo a todos os grandes colegas que tive o prazer de conhecer e caminhar durante toda esta jornada, entre eles Fernando, Edson, Edilson, Adriano pelos bons momentos e cafés compartilhados; ao Egídio, por todos esses anos de conversas, apoio e trabalho conjunto; em especial, ao Falchetto, que tem caminhado comigo desde o mestrado e se tornou mais chegado que um irmão; e ao Renan e Patrick, pela história e amizade que nunca morrem.

Por último, mas não menos importante, quero aqui prestar meus agradecimentos a Coordenação de Pós-Graduação da FEM por todo o suporte que me deram durante o mestrado e doutorado. Toda ciência que a FEM produz tem de forma direta ou indireta a participação deste departamento, tão importante para ciência nacional. Eu não conseguiria citar nominalmente cada membro do departamento, porém quero agradecer a cada líder que conheci e estender estes agradecimentos aos funcionários. Portanto, muito obrigado Denise, Marcus e Bruna por toda dedicação e empenho.

---

<sup>1</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

Esta tese é inteiramente dedicada ao projeto de controle de sistemas dinâmicos com comutação, considerando duas classes principais de sistemas, a saber, os lineares e os afins, ambos no domínio do tempo discreto. As soluções propostas são baseadas em uma função de Lyapunov convexa variante no tempo e descritas em termos de desigualdades matriciais lineares, que são facilmente resolvidas por algoritmos prontamente disponíveis na literatura. No contexto dos sistemas lineares, tratamos o projeto de controle via realimentação estática e dinâmica de saída. No caso de realimentação estática de saída, consideramos, como passo preliminar, o projeto da regra de comutação como única variável de controle do sistema. Posteriormente, realizamos a síntese de duas estruturas de controle, a regra de comutação e ganhos matriciais de realimentação de saída, sem levar em conta a presença de qualquer estrutura dinâmica adicional. Neste contexto, o projeto via realimentação de estado também é levado em consideração para fins de comparação. Estes resultados são generalizados para tratar o caso de controle via realimentação dinâmica de saída, em que um controlador de ordem completa e uma regra de comutação são determinados simultaneamente. Todas as estruturas de controle mencionadas garantem estabilidade exponencial global da origem e asseguram um limitante superior para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . Ademais, visto que as condições propostas são descritas em termos de desigualdades matriciais lineares, elas são mais simples de resolver, mas não são mais conservadoras quando comparadas a outros métodos disponíveis na literatura, como por exemplo, aqueles baseados em desigualdades de Lyapunov-Metzler. No que se refere aos sistemas afins com comutação, fornecemos condições para o projeto de uma regra de comutação dependente do estado que garante estabilidade assintótica global de um ciclo limite. Este ciclo limite é determinado de acordo com algum critério de interesse relacionado ao comportamento das trajetórias do estado no regime permanente como, por exemplo, seu valor médio, ou a amplitude máxima de oscilação. A maioria das metodologias disponíveis são capazes de guiar as trajetórias do estado para um conjunto de atração que contém o ponto de equilíbrio de interesse assegurando, neste caso, estabilidade prática deste ponto. No entanto, embora importante, o comportamento das trajetórias dentro deste conjunto não é considerado e, além disso, não é possível definir índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  que exigem, como condição necessária, estabilidade assintótica do sistema. A técnica fornecida nesta tese garante um comportamento adequado das trajetórias do estado no regime permanente pelo projeto de um ciclo limite apropriado. Além disso, por levar em conta estabilidade assintótica, permite assegurar custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Os resultados são ilustrados por meio de exemplos acadêmicos e duas aplicações práticas: o controle de uma suspensão ativa representando um quarto de veículo (através de dados experimentais) e de um conversor CC-CC.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares com comutação, Sistemas afins com comutação, Função de Lyapunov variante no tempo, Domínio de tempo discreto, Desigualdades matriciais lineares.

# Abstract

This thesis is entirely devoted to the control design of switched dynamic systems considering two main classes, namely, the linear and the affine ones, both in the discrete-time domain. The proposed solutions are based on a time-varying convex Lyapunov function and are described in terms of linear matrix inequalities, which are simple to solve by readily available algorithms. In the context of linear systems, we treat static and dynamic output feedback control design. In the static output feedback case, we consider, as a preliminary step, the design of a switching function as the unique control variable of the system. Afterwards, we deal with the synthesis of two control structures, a switching function and a set of output feedback matrix gains, without considering the presence of any additional dynamic structure. The state feedback control design is also taken into account for comparison purposes. These results are generalized to cope with dynamic output feedback control design, where a full order controller and an output dependent switching function are simultaneously determined. All the mentioned control structures assure global exponential stability of the origin and a suitable upper bound for the  $\mathcal{H}_2$  or  $\mathcal{H}_\infty$  performance indexes. In addition, considering that the proposed conditions are described in terms of linear matrix inequalities, they are simpler to solve, but not more conservative when compared to other methods available in the literature, as for instance, those based on Lyapunov-Metzler inequalities. Concerning the switched affine systems, we provide conditions for the control design of a state dependent switching function that assures global asymptotic stability of a limit cycle. This limit cycle is determined according to criteria of interest related to the steady-state behavior of the state trajectories as, for instance, its mean value or the maximum oscillation amplitude. Most of the available methodologies are able to guide the state trajectories to a set of attraction containing the equilibrium point preserving, in this case, practical stability. However, although important, the trajectories behavior inside this set is not considered, neither is possible to assure  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  performance indexes, since they require asymptotic stability of the system. The proposed technique assures an appropriate steady-state behavior by adequately designing the limit cycle. Moreover, by dealing with asymptotic stability, it allows us to assure  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  costs. The results are illustrated by means of academical examples and validated through two practical applications: the control of an active suspension representing a quarter car vehicle (through experimental data) and a DC-DC converter.

**Keywords:** Switched linear systems, Switched affine systems, Time-varying Lyapunov function, Discrete-time domain, Linear matrix inequalities.

# Lista de Figuras

2.1	Trajatória do estado com $h = 0,5$ [s]	24
2.2	Trajatória do estado com $h = 3,0$ [s]	24
2.3	Superfície de comutação com solução de Carathéodory (à esquerda) e com modos deslizantes (à direita)	25
2.4	Plano de fase do primeiro subsistema	31
2.5	Plano de fase do segundo subsistema	31
2.6	Plano de fase do sistema linear com comutação.	32
2.7	Plano de fase do primeiro subsistema afim	42
2.8	Plano de fase do segundo subsistema afim	42
2.9	Plano de fase do sistema afim com comutação.	42
2.10	Trajatória de $\xi_1$ no tempo	43
2.11	Trajatória de $\xi_2$ no tempo	43
3.1	Trajórias do estado	53
3.2	Sequência de comutação	53
3.3	Trajórias do estado	62
3.4	Esforço de controle	62
3.5	Sequência de comutação	63
3.6	Trajórias do estado	77
3.7	Esforço de controle	77
3.8	Sequência de comutação	77
4.1	Trajórias do estado do sistema	87
4.2	Trajória do estado do controlador	87
4.3	Esforço de controle	87
4.4	Sequência de comutação	87
4.5	Trajórias do estado obtidas pela lei de controle CL1	92
4.6	Sequência da comutação obtida pela lei de controle CL1	92
4.7	Trajórias do estado obtidas pela lei de controle CL2	92
4.8	Sequência da comutação obtida pela lei de controle CL2	92
5.1	Trajória do estado $x[n]$ e ciclo limite $\mathcal{X}_e^*$	100
5.2	Trajória do estado auxiliar $\xi[n]$	101
5.3	Sequência de comutação	101

5.4	Trajétória do estado auxiliar $\xi[n]$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	105
5.5	Sequência de comutação (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	105
5.6	Trajétórias de estado convergindo para o ciclo limite $\mathcal{X}_e^*$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	105
5.7	Zoom no ciclo limite $\mathcal{X}_e^*$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	105
5.8	Trajétória do estado auxiliar $\xi[n]$ (projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	106
5.9	Sequência de comutação (projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	106
6.1	Sistema de suspensão ativa (à esquerda) e diagrama esquemático (à direita) . . . . .	108
6.2	Aceleração da massa suspensa $\ddot{z}_s(t)$ (Realimentação estática de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . .	111
6.3	Deslocamento da massa suspensa $z_s(t)$ (Realimentação estática de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_2$ )	112
6.4	Deslocamento da massa não-suspensa $z_{us}(t)$ (Realimentação estática de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	112
6.5	Esforço de controle $u[n]$ (Realimentação estática de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	112
6.6	Sequência de comutação $\sigma(y)$ (Realimentação estática de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	113
6.7	Aceleração da massa suspensa $\ddot{z}_s(t)$ (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) .	115
6.8	Deslocamento da massa suspensa $z_s(t)$ (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ )	115
6.9	Deslocamento da massa não-suspensa $z_{us}(t)$ (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	115
6.10	Esforço de controle $u[n]$ (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	116
6.11	Sequência de comutação $\sigma(y)$ (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	116
6.12	Diagrama esquemático de um conversor de três células. . . . .	117
6.13	Tensões nos capacitores $c_1$ e $c_2$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	119
6.14	Corrente $i_o$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	119
6.15	Sequência da comutação (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	120
6.16	Trajétórias de estado convergindo para o ciclo limite $\mathcal{X}_e^*$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	120
6.17	Zoom no ciclo limite $\mathcal{X}_e^*$ (projeto de controle $\mathcal{H}_2$ ) . . . . .	121
6.18	Trajétórias do estado $\xi[n]$ no domínio do tempo discreto (projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	121
6.19	Tensão no capacitor $v_1$ (projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	122
6.20	Tensão no capacitor $v_2$ (projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	122
6.21	Corrente $i_o$ (projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ ) . . . . .	122

# Lista de Tabelas

3.1	Custos garantido e verdadeiro $\mathcal{H}_2$ para RE e RS . . . . .	53
3.2	Índice de desempenho $\mathcal{H}_2$ . . . . .	62
3.3	Custos garantido e verdadeiro $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	68
3.4	Índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty(\sqrt{\rho})$ . . . . .	69
3.5	Índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty(\sqrt{\rho})$ . . . . .	76
4.1	Desempenho $\mathcal{H}_2$ para $N = 4$ subsistemas . . . . .	87
4.2	Custo garantido $\mathcal{H}_2$ . . . . .	88
4.3	Custo garantido $\mathcal{H}_\infty(\sqrt{\rho})$ . . . . .	93
6.1	Parâmetros da suspensão ativa . . . . .	108
6.2	Valores $\eta_1$ , $\eta_2$ , e $\eta_3$ para cada modo de operação $i$ . . . . .	117

# Nomenclatura

## Letras latinas

$I$	Matriz identidade.
$N$	Número de subsistemas.
$h$	Período de amostragem.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$ .
$\mathbb{K}$	Conjunto dos $N$ primeiros números naturais positivos $\{1, \dots, N\}$ .
$\mathbb{S}^n$	Conjunto de matrizes simétricas de ordem $n$ .
$\mathcal{M}_c$	Subclasse de matrizes de Metzler com elementos $\pi_{ii} \leq 0$ e $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0$ .
$\mathcal{M}_d$	Subclasse de matrizes de Metzler com elementos $\pi_{ji} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1$ .
$X > 0$ ( $X < 0$ )	Matriz simétrica positiva (negativa) definida.
$m_n$	Número inteiro definido por $m_n = \kappa \lfloor n/\kappa \rfloor$ .

## Letras gregas

$\sigma$	Regra ou função de comutação.
$\Pi$	Matriz de Metzler em $\mathcal{M}_c$ ou $\mathcal{M}_d$ .
$\Lambda$	Conjunto Simplex unitário definido como $\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \right\}$ .
$\lambda$	Vetor arbitrário pertencente ao conjunto $\Lambda$ .
$\kappa$	Número inteiro e positivo que determina o período sequência $\mathfrak{C}_p(\kappa)$ .

## Sobrescritos

$X'$	Transposta da matriz $X$ .
$X^{-1}$	Inversa da matriz $X$ .

## Subscritos

$X_i$	A $i$ -ésima matriz do conjunto $\{X_1, \dots, X_N\}$ .
$X_\lambda$	Combinação convexa das matrizes $\{X_1, \dots, X_N\}$ , dada por $X_\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda_j X_j$ .
$\pi_{ji}$	Elemento da matriz de Metzler localizado na linha $j$ e coluna $i$ .

## Símbolos

$\bullet$	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
$\text{Tr}(X)$	Traço da matriz $X$ .
$\text{diag}(X, Y)$	Bloco diagonal de matrizes com elementos $X$ e $Y$ .
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana.
$\ \cdot\ _2$	Norma $\mathcal{L}_2$ .
$ \cdot $	Valor absoluto de um escalar.
$\lfloor a \rfloor$	Maior número inteiro, menor ou igual a “ $a$ ”.
$\min(\cdot)$	Operador mínimo.
$\arg \min_{i \in \mathbb{K}} x_i$	Índice de $\{x_1, \dots, x_N\}$ para o qual o mínimo ocorre.
$\inf$	Operador ínfimo.
$\sup$	Operador supremo.
$\mathfrak{C}(\kappa)$	Conjunto obtido a partir do produto cartesiano de $\mathbb{K}$ por ele mesmo $\kappa$ vezes.
$\mathfrak{C}_p(\kappa)$	Sequência de índices $\mathfrak{C}_p(\kappa) = (i[0], \dots, i[\kappa - 1])$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>22</b>
2.1	Sistemas dinâmicos com comutação . . . . .	22
2.2	Sistemas lineares com comutação . . . . .	26
2.2.1	Sistemas com comutação a tempo discreto . . . . .	32
2.3	Critérios de desempenho . . . . .	37
2.4	Sistemas afins com comutação . . . . .	38
2.5	Considerações finais . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Controle via realimentação estática de saída</b>	<b>45</b>
3.1	Formulação do problema . . . . .	45
3.2	Projeto de controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .	47
3.2.1	Síntese da regra de comutação $\sigma$ . . . . .	48
3.2.2	Síntese da lei de controle $u$ . . . . .	54
3.3	Projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	63
3.3.1	Síntese da regra de comutação $\sigma$ . . . . .	63
3.3.2	Síntese da lei de controle $u$ . . . . .	70
3.4	Considerações finais . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Controle via realimentação dinâmica de saída</b>	<b>79</b>
4.1	Formulação do problema . . . . .	79
4.2	Projeto de controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .	81
4.3	Projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	88
4.4	Considerações finais . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Sistemas afins com comutação a tempo discreto</b>	<b>94</b>
5.1	Formulação do problema . . . . .	94
5.2	Geração do ciclo limite . . . . .	96
5.3	Estabilidade e custo garantido . . . . .	98
5.4	Projeto de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	101
5.5	Considerações finais . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Aplicação prática</b>	<b>107</b>

6.1	Suspensão Ativa . . . . .	107
6.1.1	Realimentação estática de saída . . . . .	110
6.1.2	Realimentação dinâmica de saída . . . . .	113
6.2	Conversor CC-CC . . . . .	116
6.2.1	Projeto de controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .	118
6.2.2	Projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	119
6.3	Considerações finais . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>124</b>
<b>A</b>	<b>Resultados auxiliares em análise matricial</b>	<b>131</b>
A.1	Desigualdades matriciais lineares . . . . .	131
A.2	Complemento de Schur . . . . .	132

“Ó profundidade da riqueza da sabedoria e do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e inescrutáveis os seus caminhos!”

— ROMANOS 11:33

Sistemas com comutação têm sido amplamente estudados nas últimas décadas. Os livros [Liberzon \[2003\]](#) e [Sun and Ge \[2005\]](#) e os artigos [Liberzon and Morse \[1999\]](#), [Lin and Antsaklis \[2009\]](#) e [Shorten et al. \[2007\]](#) são referências básicas sobre o assunto. O interesse neste tema justifica-se pela sua importância teórica e diversas aplicações práticas, tais como, controle em rede ([Deaecto et al. \[2015\]](#)), sistemas embarcados ([Song et al. \[2008\]](#)), eletrônica de potência ([Cardim et al. \[2009\]](#)), mutação viral no tratamento de HIV ([Hernandez-Vargas et al. \[2011\]](#)), amortecimento de vibração em estruturas ([Blanchini et al. \[2012\]](#)) e várias outras.

No contexto geral, um sistema com comutação pode ser assimilado como um sistema dinâmico constituído por vários subsistemas e uma regra que orquestra a comutação entre eles, em outras palavras, uma estratégia lógica que decide a ativação de um subsistema específico a cada instante de tempo. Esta regra de comutação pode atuar como uma entrada de perturbação, sendo dependente do tempo, ou uma variável de controle, dependente do estado ou da saída medida, que deve ser projetada com objetivos específicos de estabilidade e otimização de um determinado índice de desempenho. Para ambas as abordagens, a literatura apresenta resultados relevantes, muitos deles representados por condições suficientes, o que justifica o interesse em novas técnicas de controle que permitam a obtenção de condições cada vez menos conservadoras.

Em geral, quando a regra é dependente do tempo, um dos problemas de controle consiste em determinar um tempo de permanência mínimo, durante o qual não pode haver comutação entre os subsistemas, de forma a preservar estabilidade assintótica global e assegurar um índice de desempenho de interesse. Neste caso, a literatura apresenta diversas condições suficientes baseadas na adoção de diferentes funções de Lyapunov, como por exemplo, funções de Lyapunov múltiplas ([Branicky \[1998\]](#), [Hespanha \[2004\]](#) e [Liberzon \[2003\]](#)), do tipo mínimo ([Geromel and Colaneri \[2006b\]](#) e [Geromel and Colaneri \[2006a\]](#)), quadráticas variantes no tempo ([Allerhand and Shaked \[2010\]](#)) e polinomiais homogêneas ([Chesi et al. \[2011\]](#)). A diferença entre elas se dá no grau de conservadorismo e na facilidade de generalização para tratar sistemas mais gerais, apresentando inclusive incertezas paramétricas no modelo. Condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica global estão disponíveis na literatura para o caso particular em que a regra de comutação é arbitrária e são baseadas na existência de uma função de Lyapunov comum a todos os subsistemas, veja [Shorten et al. \[2007\]](#) e [Lin and Antsaklis \[2009\]](#) para maiores detalhes.

No caso em que a regra atua como uma variável de controle, a literatura é vasta e fornece resultados para ambos os domínios de tempo. Baseado em uma função de Lyapunov quadrática, as referências [Wicks et al. \[1994\]](#) e [Zhai \[2001\]](#) asseguram a existência de uma regra de comutação globalmente assintoticamente estabilizante para sistemas a tempo contínuo e discreto, respectivamente. Condições menos conservadoras foram

obtidas em Geromel and Colaneri [2006b], para o caso contínuo, e em Geromel and Colaneri [2006a], para o caso discreto, baseadas em uma função de Lyapunov por partes do tipo mínimo. Entretanto, estas condições, conhecidas como desigualdades de Lyapunov-Metzler, são não-convexas devido ao produto de variáveis matriciais e, portanto, difíceis de serem resolvidas para problemas compostos por um número arbitrário de subsistemas. Elas foram generalizadas em Geromel et al. [2008], Deaecto [2010] e Deaecto et al. [2011] para tratar o projeto via realimentação dinâmica de saída de sistemas lineares com comutação, para ambos os domínios de tempo. Mais especificamente, a referência Geromel et al. [2008] apresenta condições para o co-projeto de uma regra de comutação e de um filtro de ordem completa responsável por fornecer informações relevantes para a implementação da regra, enquanto que Deaecto [2010] e Deaecto et al. [2011] consideram um problema mais geral envolvendo o projeto de duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação e um controlador dinâmico de ordem completa. Embora, elas sejam uma das condições menos conservadoras existentes na literatura, apresentam a desvantagem de serem não-convexas. Atualmente, um grande esforço da comunidade científica está voltado para a obtenção de condições mais simples de resolver, mas não mais conservadoras do que as disponíveis.

Neste sentido, exclusivamente para o caso discreto, a referência Fiacchini and Jungers [2014] propõe condições necessárias e suficientes expressas em termos de LMIs<sup>1</sup> e baseadas na teoria de conjuntos para a estabilidade de sistemas lineares com comutação. Embora essa última referência tenha resolvido completamente o problema, infelizmente, as condições são muitas vezes impossíveis de serem implementadas numericamente, pois é necessário verificar se algum conjunto específico está contido na união de outros. Com a finalidade de contornar esta dificuldade, em Fiacchini et al. [2016] foram propostas condições apenas suficientes que estabelecem um compromisso entre generalidade e viabilidade numérica. Estes resultados foram utilizados como base em Fiacchini and Tarbouriech [2017] para tratar o projeto conjunto de uma regra de comutação e ganhos de realimentação de estado, mas ainda sem considerar os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Em Deaecto and Geromel [2018] foi fornecida uma solução que garante estabilidade exponencial e assegura um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ . A versão  $\mathcal{H}_\infty$  deste resultado está apresentada em Daiha et al. [2017]. As condições disponíveis nas duas últimas referências são baseadas em uma função de Lyapunov convexa variante no tempo e apresentam como importantes atributos o fato de serem descritas em termos de LMIs e não serem mais conservadoras do que as desigualdades de Lyapunov-Metzler propostas em Geromel and Colaneri [2006a]. Entretanto, elas limitam-se ao projeto de controle via realimentação de estado.

As referências recentes Daiha and Deaecto [2019a], Deaecto and Daiha [Submetido] e Daiha and Deaecto [2019b] generalizam as condições de Deaecto and Geromel [2018] para tratar o projeto via realimentação de saída e possuem como ponto crucial a presença de uma matriz adicional, que permite a obtenção de condições equivalentes e alternativas às apresentadas em Deaecto and Geromel [2018]. A importância desta matriz é que ela torna possível a imposição de estruturas que são essenciais para levar em conta problemas mais gerais. Mais especificamente, a referência Daiha and Deaecto [2019a] trata o projeto de uma regra de comutação via realimentação estática de saída, sem considerar a presença de nenhuma estrutura dinâmica adicional. Este problema foi tratado pela primeira vez em Mainardi Júnior et al. [2015] no contexto de controle robusto e

---

<sup>1</sup>do inglês Linear Matrix Inequalities

exclusivamente para o domínio do tempo contínuo. As condições propostas nesta referência são baseadas em uma função de Lyapunov quadrática invariante no tempo o que, em geral, fornece soluções muito conservadoras. Mais recentemente, a referência [Cardim et al. \[2016\]](#) tratou o mesmo problema, mas a partir de condições não-convexas expressas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler que, como já mencionado, são difíceis de resolver para um número arbitrário de subsistemas. Além disso, a solução apresentada em [Cardim et al. \[2016\]](#) considera a imposição de uma estrutura especial nas matrizes de Lyapunov o que, certamente, contribui para aumentar o conservadorismo. Comparações destas e de outras técnicas da literatura estão disponíveis em [Daiha and Deaecto \[2019a\]](#) e serão discutidas com maiores detalhes no decorrer desta tese.

As referências [Deaecto and Daiha \[Submetido\]](#) e [Daiha and Deaecto \[2019b\]](#) tratam o projeto de controle dinâmico via realimentação de saída levando em conta índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , respectivamente. Ambas propõem a síntese conjunta de uma regra de comutação e um controlador dinâmico de ordem completa que, como mencionado anteriormente, é um problema que já foi tratado em [Geromel et al. \[2008\]](#) e [Deaecto et al. \[2011\]](#). Neste sentido, a maior contribuição de [Deaecto and Daiha \[Submetido\]](#) e [Daiha and Deaecto \[2019b\]](#) foi apresentar condições expressas em termos de LMIs que não são mais conservadoras do que as propostas em [Geromel et al. \[2008\]](#) e [Deaecto et al. \[2011\]](#). Um ponto relevante da solução apresentada é que a matriz de transformação utilizada para obter as condições de realimentação de saída é independente das matrizes de Lyapunov. Isto foi importante para evitar a imposição de estruturas sobre estas matrizes, o que levaria a resultados muito conservadores. Maiores detalhes a respeito dos resultados propostos em [Deaecto and Daiha \[Submetido\]](#) e [Daiha and Deaecto \[2019b\]](#) estão disponíveis no decorrer desta tese, que também apresenta uma série de exemplos acadêmicos para ilustrar a teoria, bem como resultados experimentais relacionados ao controle de uma suspensão ativa representando um quarto de veículo.

Além dos sistemas lineares, os sistemas afins com comutação também foram nosso foco de estudo nesta tese. Estes sistemas são caracterizados pela presença de termos afins em seu modelo dinâmico, o que implica na existência de uma região de pontos de equilíbrio atingíveis no espaço de estado. Assim, quando os termos afins são nulos, o sistema torna-se linear e o ponto de equilíbrio único, comum a todos os subsistemas, é a origem. Entretanto, quando pelo menos um termo afim não é nulo, o problema de controle revela-se muito mais desafiador, visto que o ponto de equilíbrio escolhido, geralmente, não é comum a nenhum dos subsistemas. Conseqüentemente, a estabilidade assintótica deste ponto só é possível com uma frequência de comutação arbitrariamente elevada, o que pode ser impossível de implementar em aplicações práticas devido às limitações físicas, como o tempo de resposta dos comutadores ou período de amostragem, no caso de sistemas embarcados. As referências [Deaecto et al. \[2010\]](#), [Deaecto and Santos \[2015\]](#), [Deaecto \[2016\]](#) e [Seatzu et al. \[2006\]](#) tratam estabilidade assintótica global dos sistemas afins com comutação no domínio do tempo contínuo, sem considerar nenhuma restrição sobre a taxa de comutação. Todavia, quando algum limitante superior é imposto à frequência de comutação, a estabilidade assintótica não é mais garantida, sendo possível assegurar apenas a estabilidade prática. Neste tipo de estabilidade, as trajetórias do estado são guiadas para um conjunto de atração suficientemente pequeno que contém o ponto de equilíbrio de interesse. Este é sempre o caso dos sistemas afins no domínio do tempo discreto, em que a taxa de comutação é naturalmente limitada pela natureza discreta do sistema. Neste

contexto, importantes resultados que asseguram estabilidade prática são apresentados nas referências [Sferlazza et al. \[2019\]](#), [Hauroigne et al. \[2011\]](#), [Hetel and Fridman \[2013\]](#) e [Albea-Sanchez et al. \[2019\]](#), no domínio do tempo contínuo, e nas referências [Deaecto and Egidio \[2016\]](#), [Deaecto and Geromel \[2017\]](#) e [Egidio and Deaecto \[2019\]](#), no domínio do tempo discreto. No entanto, na estabilidade prática o comportamento das trajetórias dentro do conjunto de atração não pode ser controlado diretamente, apesar de afetar consideravelmente o desempenho do sistema. Além disso, os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  não podem ser considerados, já que os mesmos são definidos apenas para sistemas assintoticamente estáveis, para detalhes veja [Deaecto and Santos \[2015\]](#).

Muito recentemente, para o domínio do tempo contínuo, algumas referências trataram estabilidade assintótica não para um ponto específico, mas sim para um ciclo limite, como forma de controlar o comportamento das trajetórias no regime permanente, veja [Benmiloud et al. \[2019\]](#) que considera estabilidade apenas local e [Patino et al. \[2010\]](#), que utiliza uma abordagem baseada em controle preditivo. Para sistemas a tempo discreto, a referência [Egidio et al. \[2020\]](#) foi a primeira a fornecer uma função de comutação dependente do estado do tipo mínimo para assegurar estabilidade assintótica global de um ciclo limite de interesse. Nesta referência, um conjunto de ciclos limites associados a sequências de comutação periódicas é determinado *a priori* e um subconjunto é escolhido a partir de critérios específicos relacionados ao comportamento desejado das trajetórias no regime permanente. Posteriormente, a regra de comutação é projetada de forma a assegurar estabilidade assintótica global de um ciclo limite de interesse pertencente ao subconjunto mencionado, assim como um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho. Desta forma, é possível assegurar um certo nível de desempenho desejado tanto no regime transitório quanto no regime permanente. Os resultados obtidos em [Egidio et al. \[2020\]](#) estão disponíveis nesta tese e foram validados através de exemplos acadêmicos e do controle de um conversor CC-CC.

## Organização

Esta tese está dividida em sete capítulos que estão organizados da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Introduzimos o tema a ser tratado situando importantes resultados da literatura e apresentamos a organização da tese.
- **Capítulo 2:** Expomos e discutimos os conceitos fundamentais necessários para os desenvolvimentos dos capítulos seguintes. Mais especificamente, apresentamos a descrição dos sistemas dinâmicos com comutação, enfatizando algumas das suas propriedades e características principais; discutimos as diferentes formas de atuação da regra de comutação; definimos os conceitos de estabilidade e os critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  largamente utilizados ao longo desta tese.
- **Capítulo 3:** Tratamos o projeto de controle via realimentação estática de estado e de saída. Em um primeiro momento, realizamos o projeto da função de comutação como única variável de controle do sistema para, posteriormente, generalizar este resultado para o projeto simultâneo da regra e de um conjunto de ganhos de realimentação de estado ou de saída, levando em conta a otimização de índices de desempenho

$\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

- **Capítulo 4:** Os resultados do capítulo anterior são utilizados como base para tratar o controle via realimentação dinâmica de saída. Mais especificamente, apresentamos condições suficientes para o projeto conjunto de um controlador dinâmico de ordem completa e uma regra de comutação assegurando índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .
- **Capítulo 5:** Apresentamos condições suficientes para o projeto de uma regra de comutação do tipo mínimo capaz de assegurar estabilidade assintótica global de um ciclo limite a ser projetado. O projeto do ciclo limite é realizado de acordo com critérios de interesse relacionados ao comportamento das trajetórias em regime permanente. Assim como nos capítulos anteriores, as condições apresentadas levam em conta a otimização de índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .
- **Capítulo 6:** Duas aplicações práticas são utilizadas para validar os resultados apresentados nos capítulos anteriores. A primeira delas, utilizada para ilustrar as técnicas de controle relacionadas aos sistemas lineares apresentadas nos Capítulos 3 e 4, refere-se ao controle de uma suspensão ativa representando um quarto de veículo e foi implementada experimentalmente. A segunda, que consiste no controle de um conversor CC-CC, foi utilizada para validar os resultados relacionados aos sistemas afins do Capítulo 5.
- **Capítulo 7:** Apresentamos as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.
- **Apêndice A:** Destacamos alguns resultados auxiliares utilizados ao longo deste trabalho.

As simulações foram obtidas utilizando um dos seguintes computadores: - Dell com sistema operacional Windows 10, processador Intel Core i7, 8 GB de RAM, com o software Matlab versão R2017b e funções disponíveis no *Robust Control Toolbox* versão 6.4 ou - Apple com sistema operacional MAC OS X versão 10.13.5, processador Intel Core i7, 8 GB de RAM com o software Matlab versão R2017a e funções disponíveis no *Robust Control Toolbox* versão 6.3.

## Publicações resultantes

Seguem abaixo os artigos científicos gerados a partir desta tese de doutorado.

### Periódicos científicos

1. L. N. Egidio, H. R. Daiha, and G. S. Deaecto, “Limit cycle global asymptotic stability and  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  performance of discrete-time switched affine systems,” *Automatica*, DOI: 10.1016/j.automatica.2020.108927, 2020.
2. H. R. Daiha, and G. S. Deaecto, “ $\mathcal{H}_2$  static output feedback switching function design based on a time-varying Lyapunov function approach,” *International Journal of Control*, DOI: 10.1080/00207179.2019.1657241, 2019.

3. G. S. Deaecto, and H. R. Daiha, “LMI conditions for output feedback control of switched systems based on a time-varying convex Lyapunov function,” *Submetido*.

## Conferências internacionais

1. H. R. Daiha, and G. S. Deaecto, “A time-varying convex Lyapunov function approach for output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of switched linear systems,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 581–586, 2019.
2. H. R. Daiha, L. N. Egidio, G. S. Deaecto, and J. C. Geromel, “ $\mathcal{H}_\infty$  state feedback control design of discrete-time switched linear systems,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5882–5887, 2017.
3. L. N. Egidio, H. R. Daiha, G. S. Deaecto, and J. C. Geromel, “DC motor speed control via buck-boost converter through a state dependent limited frequency switching rule,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2072–2077, 2017.

## Conferências nacionais

1. H. R. Daiha e G. S. Deaecto, “Projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  de sistemas lineares com comutação: uma abordagem baseada em função de Lyapunov variante no tempo,” em *XXII Congresso Brasileiro de Automática*, 2018.
2. H. R. Daiha, L. N. Egidio, e G. S. Deaecto, “ $\mathcal{H}_\infty$  via realimentação de estado para sistemas lineares com comutação a tempo discreto,” em *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pp. 171–176, 2017.
3. L. N. Egidio, H. R. Daiha, e G. S. Deaecto, “Projeto e implementação prática de uma regra de comutação para o controle de velocidade de um motor CC via conversor Buck-boost,” em *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pp. 295–300, 2017.

“Pois dele, por ele e para ele são todas as coisas. A ele seja a glória para sempre! Amém.”

— ROMANOS 11:36

Neste capítulo, apresentamos inicialmente a definição dos sistemas dinâmicos com comutação, enfatizando algumas de suas propriedades e características intrínsecas que colocam em evidência a importância do seu estudo sob o ponto de vista teórico e o seu grande potencial para aplicações práticas. Posteriormente, fornecemos alguns resultados preliminares referentes ao caso particular dos sistemas lineares com comutação, os quais se encontram disponíveis na literatura e que serviram de motivação para os resultados que serão apresentados nos Capítulos 3 e 4. Além disso, introduzimos algumas definições de estabilidade e critérios de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , pois serão amplamente utilizadas ao longo dos próximos capítulos. Por último, algumas condições de estabilidade de sistemas afins com comutação foram apresentadas para ilustrar a importância de se estudar esta classe de sistemas no domínio do tempo discreto, que é o nosso tema de estudo no Capítulo 5.

## 2.1 Sistemas dinâmicos com comutação

Antes de descrever o que de fato é um sistema com comutação, é necessário estabelecer uma relação deste com o sistema híbrido. Este último representa a interação entre processos dinâmicos, definidos no domínio do tempo contínuo ou discreto, com eventos discretos disparados por alguma lógica de comutação ou algum processo de tomada de decisão. Na prática, estes sistemas evoluem segundo uma dinâmica contínua ou discreta no tempo e comutam bruscamente para outra a partir da ocorrência de um evento. O próximo exemplo, apresentado em [Liberzon \[2003\]](#), ilustra esta interação.

**Exemplo 2.1.** Considere um modelo simplificado que descreve a relação do motor com o sistema de transmissão de um veículo. Este sistema mecânico é composto pelo acelerador e um conjunto finito de configurações de engrenagens, as quais estabelecem uma relação de transmissão entre o motor e as rodas motrizes. Um modelo simplificado do movimento do veículo é apresentado a seguir

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{2.1}$$

$$\dot{x}_2(t) = f(a(t), q(t)) \tag{2.2}$$

em que  $x_1$  é a posição do veículo,  $x_2$  a sua velocidade,  $a \geq 0$  é a aceleração de entrada e  $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, -1, 0\}$  a posição do acoplamento da engrenagem “marcha do veículo”. A função  $f$  deve ser negativa e decrescente em  $a$  quando  $q = -1$ , negativa e independente de  $a$  para  $q = 0$ . Além disso,  $f$  é crescente em  $a$ , positiva para  $a$  suficientemente grande, e decrescente em  $q$  quando  $q > 0$ . Neste sistema os estados  $x_1$  e  $x_2$  são contínuos e  $q$  é um evento discreto. Observe que a transição discreta afeta consideravelmente a trajetória dos estados contínuos. No caso de uma transmissão automática, a evolução do estado  $x_2$  é utilizada para determinar automaticamente o evento discreto (troca de marcha) a cada instante de tempo, de maneira a controlar o movimento do veículo. Já no caso de uma transmissão manual, o motorista é o responsável pela troca de marchas. Pode-se concluir, portanto, que as variáveis de saída dependem tanto da dinâmica contínua quanto do evento discreto, o que caracteriza um sistema híbrido. Um exemplo de variável de saída é a taxa de rotação do motor que depende tanto da dinâmica contínua  $x_2$  quanto do evento discreto  $q$ .

Devido à sua natureza interdisciplinar, os sistemas híbridos têm atraído o interesse de diferentes comunidades científicas sob diversos pontos de vista. De fato, eles são capazes de modelar uma grande variedade de sistemas dinâmicos complexos que podem apresentar comportamentos não-lineares extremamente complicados, como discutido nas referências Shorten et al. [2007] e DeCarlo et al. [2000]. Neste contexto, nosso estudo está direcionado a uma subclasse específica composta pelos sistemas dinâmicos com comutação. Eles são caracterizados por apresentarem um conjunto de subsistemas (ou modos) e uma função (ou regra) de comutação que seleciona um deles a cada instante de tempo. A literatura apresenta alguns resultados sobre este tema, mas ainda existem vários problemas em aberto a serem tratados. Os livros Liberzon [2003] e Sun and Ge [2005] e os artigos Shorten et al. [2007], DeCarlo et al. [2000] e Lin and Antsaklis [2009] são referências básicas sobre este assunto.

Considere um sistema com comutação descrito genericamente pela seguinte realização no espaço de estado

$$\dot{x}(t) = f_\sigma(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

$$y(t) = g_\sigma(x(t)) \quad (2.4)$$

no domínio do tempo contínuo com  $t \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . A variável  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado do sistema e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a saída medida. A função de comutação  $\sigma \in \mathbb{K} := \{1, \dots, N\}$ , com  $N$  representando o número de subsistemas disponíveis, desempenha um papel importante, podendo atuar como uma variável de controle a ser projetada ou uma entrada de perturbação, como descrevemos a seguir:

- **Regra de comutação como entrada de perturbação:** Neste caso, a regra de comutação é dependente do tempo, sendo dada por

$$\sigma(t) = i, \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}) \quad (2.5)$$

em que  $t_n$  e  $t_{n+1}$  são dois instantes sucessivos de comutação que satisfazem  $t_{n+1} - t_n \geq h^* \geq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e o modo  $i \in \mathbb{K} := \{1, \dots, N\}$  representa um dos  $N$  subsistemas selecionados arbitrariamente. Neste contexto, assumindo que cada subsistema seja estável, um problema de controle de grande interesse na literatura consiste em determinar o período de tempo mínimo  $h^*$ , denominado tempo de permanência<sup>1</sup>, de forma a garantir estabilidade assintótica do sistema global, veja DeCarlo et al. [2000], Hespanha and Morse [1999], Geromel and Colaneri [2006b]. Durante este período de tempo o sistema não pode sofrer comutação. Quando  $h^* \rightarrow 0$  a regra de comutação é arbitrária e a literatura já apresenta condições necessárias e suficientes para a estabilidade exponencial da origem do sistema  $\dot{x}(t) = A_\sigma x(t)$  que são baseadas na existência de uma função de Lyapunov comum a todos os subsistemas, veja Shorten et al. [2007] e Molchanov and Pyatnitskiy [1989] para maiores detalhes. O próximo exemplo coloca em evidência a importância do tempo de permanência para a garantia de estabilidade do sistema global.

**Exemplo 2.2.** Considere o seguinte sistema linear com comutação

$$\dot{x} = A_\sigma x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.6)$$

definido para  $t \geq 0 \in \mathbb{R}$ , evoluindo de  $x_0 = [1 \ -1]'$ . Este sistema é composto por dois subsistemas estáveis

---

<sup>1</sup>do inglês *dwelling time*

com matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Adotando a regra de comutação periódica com período  $h > 0$  dada por

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2 & , \quad t \in [0, h/2) \\ 1 & , \quad t \in [h/2, h) \end{cases} \quad (2.8)$$

obtemos as trajetórias dos estados apresentadas nas Figuras 2.1 e 2.2. Nestas figuras, o gráfico da esquerda apresenta a resposta para  $h = 0,5$  [s] e o da direita para  $h = 3,0$  [s]. Note que, embora a resposta do sistema divirja da origem para  $h = 0,5$  [s], é possível assegurar estabilidade aumentando o valor de  $h$  de forma adequada. Como já mencionado, determinar um valor mínimo de  $h$ , ou seja,  $h = h^*$  capaz de garantir estabilidade é um tema de grande interesse da literatura atual.

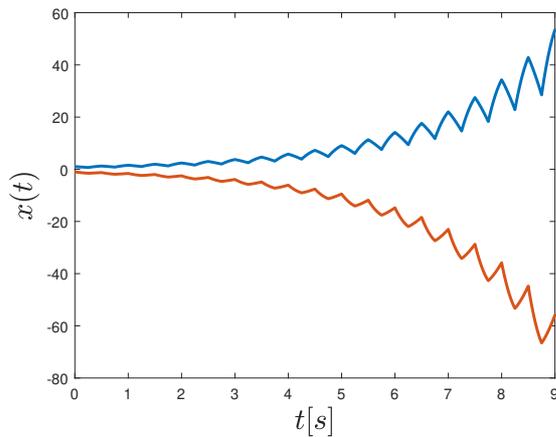


Figura 2.1: Trajetória do estado com  $h = 0,5$  [s]

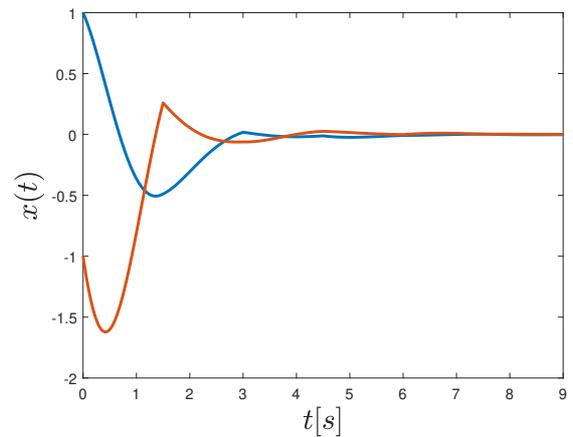


Figura 2.2: Trajetória do estado com  $h = 3,0$  [s]

- Regra de comutação como variável de controle:** Neste caso, a regra de comutação depende de alguma medida do sistema, do estado ou da saída, e, geralmente, é dada por  $\sigma : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $s \in \{x, y\}$ . Neste contexto, o problema de controle consiste em projetar  $\sigma(\cdot)$  de maneira a assegurar estabilidade assintótica e desempenho adequado para o sistema. Uma característica interessante é que uma regra de comutação adequadamente projetada pode assegurar estabilidade assintótica do sistema global mesmo que todos os subsistemas sejam instáveis. Do ponto de vista de estabilidade, uma hipótese muito adotada em algumas referências da literatura é a imposição de que todos os subsistemas sejam instáveis como justificativa para o projeto da regra de comutação, veja [Wicks et al. \[1994\]](#), [Zhai \[2001\]](#) e [Geromel and Colaneri \[2006b\]](#). Esta hipótese é feita para evitar a solução trivial, que ocorre quando a função de comutação permanece fixa no subsistema estável para todo instante de tempo. Entretanto, esta hipótese pode ser descartada se considerarmos a regra como uma variável de controle não somente para assegurar estabilidade, mas também um dispositivo para melhorar o desempenho em relação àquele de cada subsistema isolado. Neste caso, o seu projeto se justifica até mesmo quando todos os subsistemas são estáveis. Uma regra com esta propriedade é chamada de estritamente consistente, veja [Geromel et al. \[2013\]](#) e [Deaecto et al. \[2013\]](#) para maiores detalhes. A literatura já apresenta vários resultados relacionados ao projeto de uma regra de comutação tanto no que se refere à realimentação de estado como de saída. Os resultados que servirão de base e/ou motivação para a teoria desenvolvida neste trabalho são as referências [Geromel and](#)

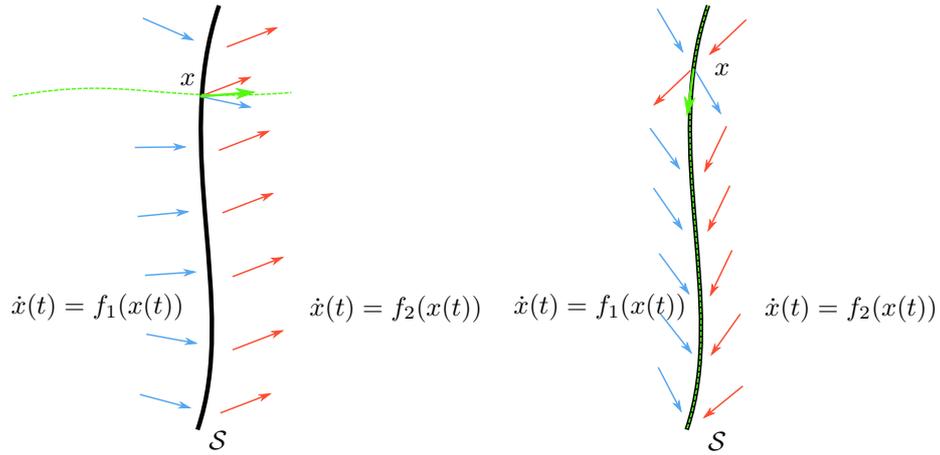


Figura 2.3: Superfície de comutação com solução de Carathéodory (à esquerda) e com modos deslizantes (à direita)

Colaneri [2006a], Geromel and Colaneri [2006b], Fiacchini and Jungers [2014] e Fiacchini et al. [2016] que discutiremos em seguida.

Um ponto fundamental a ser destacado é o que ocorre com o comportamento do sistema no momento da comutação. Durante este evento discreto, o sistema pode simplesmente assumir o comportamento dinâmico do subsistema para o qual foi comutado ou apresentar um comportamento inédito não característico de nenhum dos subsistemas. Por simplicidade, considere um sistema com comutação composto apenas por dois subsistemas  $\dot{x}(t) = f_i(x(t))$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , e uma regra dependente do estado, definindo a superfície de comutação  $\mathcal{S}$ , que divide o espaço de estado em duas regiões de operação correspondentes a cada um dos subsistemas. Os comportamentos mencionados anteriormente podem ser descritos da seguinte forma. Quando a trajetória  $x$  atinge a superfície  $\mathcal{S}$ , se ambos os vetores  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  apontarem na mesma direção com relação à  $\mathcal{S}$  (superfície  $\mathcal{S}$  apresentada à esquerda da Figura 2.3), a trajetória atravessa a superfície assumindo o comportamento dinâmico do subsistema para o qual foi comutado. Uma solução no sentido de Carathéodory é então naturalmente obtida (para maiores detalhes veja Hale [1954]). Entretanto, observando a Figura 2.3, à direita, podemos notar que se os vetores  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  apontarem na direção da superfície  $\mathcal{S}$ , a trajetória difere das características de ambos os subsistemas. Este caso demanda um conceito diferente de solução, a qual é fornecida por Filippov, como discutido em Liberzon [2003]. De acordo com a definição de Filippov, o sistema deve satisfazer a inclusão diferencial

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x) \quad (2.9)$$

em que para  $x \in \mathcal{S}$  temos

$$\mathcal{F}(x) := \{\alpha f_1(x) + (1 - \alpha)f_2(x) : \alpha \in [0, 1]\} \quad (2.10)$$

enquanto que para  $x \notin \mathcal{S}$ , temos  $\mathcal{F}(x) = f_1(x)$  ou  $\mathcal{F}(x) = f_2(x)$  dependendo do lado para o qual o sistema comuta. Neste caso, uma vez que a trajetória atinge a superfície, desliza sobre ela, resultando em uma dinâmica

diferente conhecida como modos deslizantes<sup>2</sup>. Durante o modo deslizante, a frequência de comutação é arbitrariamente elevada provocando um fenômeno conhecido como *chattering*, que é geralmente indesejado em aplicações práticas, pois pode provocar desgaste ou danificar equipamentos. A ocorrência de modos deslizantes estáveis é muito comum em diversos trabalhos dedicados ao projeto de uma regra de comutação globalmente assintoticamente estabilizante. Acrescentar uma restrição na frequência de comutação de maneira a evitar *chattering* é, portanto, um ponto importante, principalmente, no que se refere à implementação prática.

Visto que, nos dias atuais, a maioria dos controladores são embarcados e/ou implementados através de uma rede de comunicação, a atualização do sinal de controle em tempo real é impraticável devido às restrições físicas como, por exemplo, tempo de resposta dos dispositivos, período de amostragem e largura de faixa dos canais de comunicação. Neste contexto, o controle de sistemas com dados amostrados ou a tempo discreto tem atraído cada vez mais o interesse da comunidade científica e é o tema principal desta tese. Recentemente, a referência [Allerhand and Shaked \[2013\]](#) foi uma das primeiras a tratar o projeto de uma regra de comutação dependente do estado levando em conta também a existência de um tempo de permanência.

A partir de agora, daremos início ao estudo de estabilidade de sistemas lineares com comutação. Embora o foco desta tese esteja voltado para o estudo destes sistemas no domínio do tempo discreto, apresentaremos alguns resultados relacionados ao domínio do tempo contínuo devido à sua importância como embasamento teórico para esta classe de sistemas.

## 2.2 Sistemas lineares com comutação

O objetivo central de um projeto de controle é sempre a estabilidade, ou seja, conduzir o estado do sistema para o ponto de equilíbrio desejado. O sistema de interesse nesta seção é dado por

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.11)$$

$$z(t) = E_\sigma x(t) \quad (2.12)$$

no domínio do tempo contínuo com  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ , e

$$x[n+1] = A_\sigma x[n], \quad x[0] = x_0 \quad (2.13)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] \quad (2.14)$$

no domínio do tempo discreto com  $n \in \mathbb{N}$ . Neste sistema  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída controlada e  $\sigma \in \mathbb{K}$  é a regra de comutação. Consideramos que o sistema evolui de uma condição inicial arbitrária  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Note que os sistemas (2.11)-(2.12) e (2.13)-(2.14) são lineares e, para  $\det(A_i) \neq 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  no caso contínuo ou  $\det(I - A_i) \neq 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  no caso discreto, o único ponto de equilíbrio, comum a todos os subsistemas, é a origem.

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados da literatura dedicados ao projeto de uma regra de comutação  $\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$  de forma a assegurar estabilidade assintótica da origem do sistema, bem como um

---

<sup>2</sup>do inglês *sliding modes*

custo garantido de desempenho. Começamos nossa análise considerando o caso mais simples baseado em uma função de Lyapunov quadrática  $V(x) = x'Px$ ,  $P > 0$ , cujas condições de estabilidade estão apresentadas no próximo teorema. Antes, entretanto, é importante definir o seguinte conjunto

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1 \right\} \quad (2.15)$$

denominado de simplex unitário, que será muito utilizado ao longo desta tese.

**Teorema 2.1.** *As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. **Tempo contínuo:** *Se existir um vetor  $\lambda \in \Lambda$  e uma matriz simétrica  $P > 0$  satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i'P + PA_i + E_i'E_i) < 0 \quad (2.16)$$

*então, a regra de comutação dependente do estado*

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)' (2A_i'P + E_i'E_i) x(t) \quad (2.17)$$

*assegura a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.11)-(2.12) e fornece o seguinte custo garantido*

$$\int_0^{\infty} z(t)'z(t)dt < x_0'Px_0 \quad (2.18)$$

2. **Tempo discreto:** *Se existir um vetor  $\lambda \in \Lambda$  e uma simétrica  $P > 0$  satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A_i'PA_i - P + E_i'E_i) < 0 \quad (2.19)$$

*então, a regra de comutação dependente do estado*

$$\sigma(x[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' (A_i'PA_i + E_i'E_i) x[n] \quad (2.20)$$

*assegura a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.13)-(2.14) e fornece o seguinte custo garantido*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z[n]'z[n] < x_0'Px_0 \quad (2.21)$$

**Prova:** Disponível em [Feron \[1996\]](#) e [Zhai \[2001\]](#) para os casos contínuo e discreto, respectivamente.  $\square$

Para o caso contínuo, adotando a regra de comutação (2.17), o teorema é provado avaliando a derivada no tempo da função de Lyapunov  $V(x)$  para uma trajetória arbitrária do sistema (2.11)-(2.12), ou seja

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)'(A_{\sigma}'P + PA_{\sigma} + E_{\sigma}'E_{\sigma})x(t) - z(t)'z(t) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} x(t)'(A_i'P + PA_i + E_i'E_i)x(t) - z(t)'z(t) \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} x(t)' \left( \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i (A_i'P + PA_i + E_i'E_i) \right) x(t) - z(t)'z(t) \\ &\leq x(t)' \left( \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i (A_i'P + PA_i + E_i'E_i) \right) x(t) - z(t)'z(t) \\ &< -z(t)'z(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que a segunda igualdade é devido à regra de comutação (2.17), a terceira deriva do fato de que o mínimo de uma função linear em  $\lambda$  ocorre sempre nos vértices do polítopo convexo definido por  $\lambda \in \Lambda$ . Finalmente, a primeira desigualdade é uma consequência do operador mínimo e, por último, a segunda desigualdade decorre diretamente de (2.16). O custo garantido é obtido integrando ambos os lados de (2.22) para  $t \in [0, \infty)$ , ou seja

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \int_0^\infty z(t)' z(t) dt \\ &< - \int_0^\infty \dot{V}(x(t)) dt \\ &< V(x(0)) - V(x(\infty)) \\ &< x_0' P x_0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

que resulta do fato de que a estabilidade assintótica implica que  $V(x(\infty)) = 0$ . Portanto, as condições do Teorema 2.1, referentes ao tempo contínuo, garantem a estabilidade assintótica do sistema (2.11)-(2.12) e asseguram o custo garantido (2.18). Um procedimento análogo é adotado no caso do sistema a tempo discreto. De fato, adotando a regra de comutação (2.20), e avaliando o operador diferença  $\Delta V(x[n]) = V(x[n+1]) - V(x[n])$  para uma trajetória arbitrária do sistema (2.13)-(2.14), temos

$$\begin{aligned} \Delta V(x[n]) &= x[n]'(A_\sigma' P A_\sigma - P + E_\sigma' E_\sigma)x[n] - z[n]' z[n] \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]'(A_i' P A_i - P + E_i' E_i)x[n] - z[n]' z[n] \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} x[n]' \left( \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i (A_i' P A_i - P + E_i' E_i) \right) x[n] - z[n]' z[n] \\ &\leq x[n]' \left( \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i (A_i' P A_i - P + E_i' E_i) \right) x[n] - z[n]' z[n] \\ &< -z[n]' z[n] \end{aligned} \tag{2.24}$$

que foi obtida seguindo os mesmos argumentos apresentados anteriormente. Além disso, somando ambos os lados de (2.24) para  $n \in [0, \infty)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \sum_{n=0}^\infty z[n]' z[n] \\ &< \sum_{n=0}^\infty (V(x[n]) - V(x[n+1])) \\ &< V(x[0]) - V(x[\infty]) \\ &< x_0' P x_0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

pois, devido à estabilidade assintótica, temos que  $V(x[\infty]) = 0$ . Assim sendo, as condições (2.19) garantem a estabilidade assintótica do sistema (2.13)-(2.14) e asseguram a validade da desigualdade (2.21).

Uma condição necessária e suficiente para a factibilidade de (2.16) é a existência de um vetor  $\lambda \in \Lambda$  tal que a matriz  $A_\lambda$  seja Hurwitz estável<sup>3</sup>. Note que resultado similar não foi obtido para o caso de sistemas a

<sup>3</sup>apresente todos os seus autovalores com parte real negativa

tempo discreto, uma vez que a condição (2.19) é, na verdade, mais restritiva do que exigir que a matriz  $A_\lambda$  seja Schur estável<sup>4</sup>. Felizmente, para ambos os domínios de tempo, nenhuma propriedade de estabilidade é imposta às matrizes dos subsistemas  $A_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  consideradas isoladamente. Em outras palavras, as regras de comutação propostas no Teorema 2.1 asseguram estabilidade assintótica dos sistemas (2.11)-(2.12) ou (2.13)-(2.14) mesmo que todos os subsistemas sejam instáveis. É importante salientar que a solução numérica deste teorema não é uma tarefa fácil, visto que as desigualdades (2.16) e (2.19) são não-convexas devido ao produto de variáveis  $(\lambda, P)$  e, no caso de (2.16), a determinação de  $\lambda \in \Lambda$  tal que  $A_\lambda$  seja Hurwitz estável é um problema NP-difícil como discutido em Blondel and Tsitsiklis [1997].

No sentido de obter condições menos conservadoras, nas referências Geromel and Colaneri [2006b] e Geromel and Colaneri [2006a] foram propostas soluções baseadas em uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo dada por:  $V(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x$ , com  $P_i > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  para os domínios de tempo contínuo e discreto, respectivamente. Todavia, antes de apresentar as condições de estabilidade associadas, vamos definir as seguintes subclasses de matrizes de Metzler. De acordo com Luenberger [1979], estas matrizes são definidas como sendo quadradas e com todos os seus elementos fora da diagonal principal não-negativos. Para o tempo contínuo, a subclasse de interesse é denotada por  $\mathcal{M}_c$  e composta por matrizes de Metzler  $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  que apresentam a seguinte propriedade adicional

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.26)$$

enquanto que para o caso a tempo discreto, ela é denotada por  $\mathcal{M}_d$  e composta por matrizes de Metzler  $\Pi = \{\pi_{ji}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  que satisfazem

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ji} = 1, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.27)$$

Uma vez definidas estas subclasses, as condições de estabilidade são apresentadas no teorema seguinte.

**Teorema 2.2.** *As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. **Tempo contínuo:** *Se existir um conjunto de matrizes simétricas  $P_i > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e uma matriz de Metzler  $\Pi \in \mathcal{M}_c$  satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler*

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j + E_i' E_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.28)$$

*então, a regra de comutação dependente do estado*

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x \quad (2.29)$$

*garante estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.11)-(2.12) e fornece o seguinte custo garantido*

$$\int_0^\infty z(t)' z(t) dt < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0 \quad (2.30)$$

2. **Tempo discreto:** *Se existir um conjunto de matrizes simétricas  $P_i > 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e uma matriz de Metzler*

---

<sup>4</sup>apresente todos os seu autovalores no interior do círculo de raio unitário

$\Pi \in \mathcal{M}_d$  satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler

$$A_i' \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i + E_i' E_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.31)$$

então, a regra de comutação dependente do estado (2.29) garante estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.13)-(2.14) e fornece o seguinte custo garantido

$$\sum_{n=0}^{\infty} z[n]' z[n] < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i x_0 \quad (2.32)$$

**Prova:** A prova para o caso contínuo pode ser encontrada em Geromel and Colaneri [2006b] e para o sistema discreto em Geromel and Colaneri [2006a].  $\square$

Uma condição necessária para a factibilidade de (2.28) é a validade das desigualdades

$$\left( A_i + \frac{\pi_{ii}}{2} I \right)' P_i + P_i \left( A_i + \frac{\pi_{ii}}{2} I \right) < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.33)$$

que foram obtidas fazendo  $\sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j = \pi_{ii} P_i + \sum_{j \neq i \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j$ . Da mesma forma, as desigualdades (2.31) são satisfeitas sempre que

$$\left( \sqrt{\pi_{ii}} A_i \right)' P_i \left( \sqrt{\pi_{ii}} A_i \right) - P_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.34)$$

forem verificadas. Podemos notar que a condição (2.33) exige que as matrizes  $A_i + (\pi_{ii}/2)I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , sejam Hurwitz estáveis, enquanto (2.34) exige que  $\sqrt{\pi_{ii}} A_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , sejam Schur estáveis. Entretanto, como  $\pi_{ii} \leq 0$  em (2.33) e  $0 \leq \pi_{ii} \leq 1$  em (2.34), nenhuma propriedade de estabilidade é exigida das matrizes  $A_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e, portanto, a regra de comutação (2.29) preserva a estabilidade assintótica da origem mesmo no caso em que todos os subsistemas são instáveis. Além disso, como apresentado nas referências Geromel and Colaneri [2006b] e Geromel and Colaneri [2006a], sempre que as condições do Teorema 2.1 são satisfeitas, as desigualdades de Lyapunov-Metzler apresentam solução, indicando que elas são, na verdade, menos conservadoras. Entretanto, elas sofrem da mesma dificuldade numérica verificada nas condições do Teorema 2.1, pois são não-convexas devido ao produto das variáveis matriciais  $(\Pi, P_i, i \in \mathbb{K})$ . Uma maneira de resolvê-las é realizando-se busca exaustiva com relação aos elementos das matrizes de Metzler, o que é uma tarefa árdua e praticamente impossível para um número arbitrário de subsistemas. Outra alternativa é restringir a subclasse de matrizes de Metzler àquelas que apresentam elementos iguais na diagonal principal. As condições resultantes desta metodologia alternativa estão apresentadas no próximo corolário.

**Corolário 2.1.** *As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. **Tempo contínuo:** *Se existir um conjunto de matrizes simétricas  $P_i > 0$  e um escalar  $\gamma > 0$  satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler modificadas*

$$A_i' P_i + P_i A_i + \gamma (P_j - P_i) + E_i' E_i < 0, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.35)$$

então, a regra de comutação dependente do estado (2.29) garante estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.11)-(2.12) e fornece custo garantido (2.30).

2. **Tempo discreto:** *Se existir um conjunto de matrizes simétricas  $P_i > 0$  e um escalar  $0 \leq \gamma \leq 1$*

satisfazendo as seguintes desigualdades de Lyapunov-Metzler modificadas

$$A_i'(\gamma P_i + (1 - \gamma)P_j)A_i - P_i + E_i'E_i < 0, \quad i \neq j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \quad (2.36)$$

então, a regra de comutação dependente do estado (2.29) garante estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (2.13)-(2.14) e fornece custo garantido (2.32).

**Prova:** A prova segue diretamente do resultado do Teorema 2.2 restrita para matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal e está disponível em Geromel and Colaneri [2006b] e Geromel and Colaneri [2006a] para o caso contínuo e discreto, respectivamente.  $\square$

A solução deste corolário pode ser obtida realizando-se busca unidimensional com relação ao escalar  $\gamma$  e resolvendo-se um conjunto de LMIs. Note, entretanto, que as condições tornam-se mais simples de resolver, mas são naturalmente mais conservadoras do que aquelas apresentadas no Teorema 2.2.

O próximo exemplo ilustra as condições apresentadas no Teorema 2.2 e no Corolário 2.1 para sistemas a tempo contínuo.

**Exemplo 2.3.** Considere o sistema (2.11)-(2.12) composto pelos seguintes subsistemas instáveis

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

As Figuras 2.4 e 2.5 apresentam o plano de fase dos subsistemas para condições iniciais  $x_0 = [r_i \cos(\theta) \quad r_i \sin(\theta)]'$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $r_1 = 10$  e  $r_2 = 0,1$ . Como pode ser observado nas figuras, o ponto de equilíbrio do primeiro subsistema é do tipo sela enquanto que do segundo é do tipo foco instável.

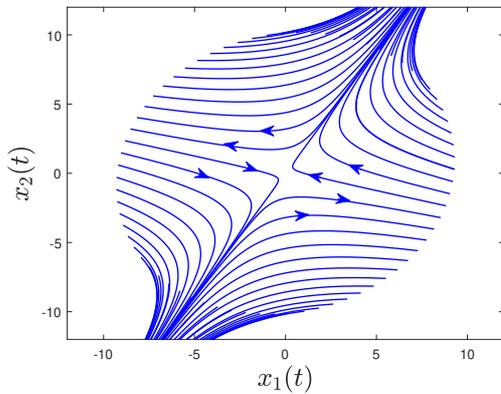


Figura 2.4: Plano de fase do primeiro subsistema

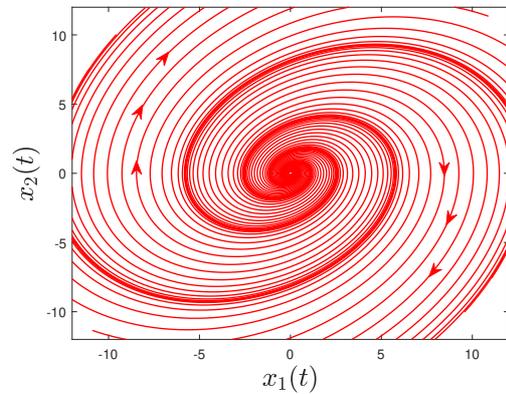


Figura 2.5: Plano de fase do segundo subsistema

Para  $E_1 = E_2 = I$ , resolvemos as condições do Teorema 2.2 para a função objetivo

$$\min_{i \in \mathbb{K}} \text{Tr}(P_i) \quad (2.38)$$

sujeito às desigualdades de Lyapunov-Metzler (2.28) com  $\pi_{11} = -4000$ ,  $\pi_{22} = -760$  e obtivemos as seguintes matrizes

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6,9738 & -9,6799 \\ -9,6799 & 23,8645 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 7,0007 & -9,7084 \\ -9,7084 & 23,8717 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

importantes para a implementação da regra de comutação (2.29). A Figura 2.6 apresenta o plano de fase do sistema com comutação para condições iniciais em torno de uma circunferência de raio 10 com centro na origem.

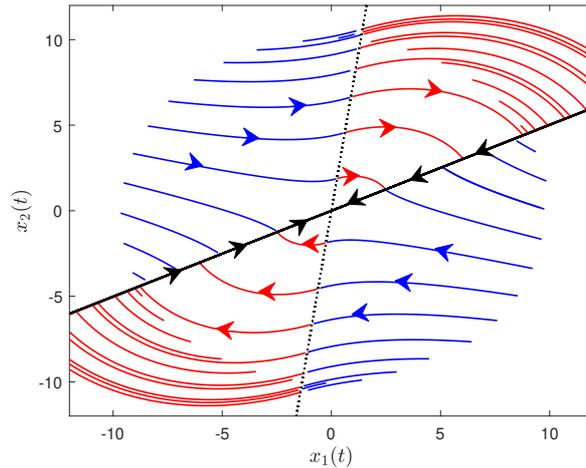


Figura 2.6: Plano de fase do sistema linear com comutação.

Nesta figura, as curvas em azul representam as trajetórias do estado na região de operação do primeiro subsistema, as curvas em vermelho são referentes à região de operação do segundo subsistema e as semi-retas em preto são superfícies de comutação. Note que quando as trajetórias localizadas na região de operação do primeiro subsistema atingem a superfície de comutação tracejada, elas atravessam esta superfície assumindo o comportamento dinâmico do segundo subsistema. Isso ocorre porque os vetores  $f_1(x) = A_1x$  e  $f_2(x) = A_2x$  apontam no mesmo sentido com relação a superfície de comutação tracejada, indicando uma solução do tipo Carathéodory. Entretanto, quando as trajetórias encontram a superfície de comutação contínua, elas deslizam sobre esta superfície até atingir a origem. Isso ocorre porque os vetores  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  apontam na direção da superfície, indicando uma solução do tipo Filippov. Neste caso, o sistema evolui sobre um modo deslizante e, como consequência, a frequência de comutação é arbitrariamente elevada. Resolvendo o mesmo problema (2.38), mas utilizando as condições (2.35) do Corolário 2.1 não foi possível obter solução factível.

A partir deste momento, daremos destaque aos sistemas lineares com comutação a tempo discreto, visto que eles são o foco de estudo desta tese. Os desenvolvimentos que seguem foram utilizados como base para a obtenção dos nossos resultados principais e, portanto, serão apresentados com a necessária riqueza de detalhes.

## 2.2.1 Sistemas com comutação a tempo discreto

Os resultados que serão apresentados nesta subseção utilizam as seguintes definições de estabilidade obtidas de Fiacchini et al. [2016] e Deaecto and Geromel [2018], respectivamente.

**Definição 2.1.** *O sistema linear com comutação dado por (2.13) é exponencialmente estabilizável se existirem constantes  $c \geq 0$  e  $0 \leq \mu < 1$  e uma trajetória de comutação  $\{\sigma[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:*

$$\|x[n]\| \leq c\mu^n \|x[0]\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.40)$$

para cada condição inicial  $x[0] \in \mathbb{R}^{n_x}$ .

Deve-se salientar, que no contexto de estabilidade exponencial, diferentes funções de comutação  $\{\sigma[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  podem ser adotadas para condições iniciais distintas  $x[0] \in \mathbb{R}^{n_x}$ . A próxima definição é mais exigente, pois impõe uma única regra de comutação para qualquer condição inicial.

**Definição 2.2.** *O sistema linear com comutação dado por (2.13) é Schur estabilizável se existirem constantes  $c \geq 0$  e  $0 \leq \mu < 1$  e uma trajetória de comutação  $\{\sigma[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:*

$$\|x[n]\| \leq c\mu^n \|x[0]\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.41)$$

para qualquer condição inicial  $x[0] \in \mathbb{R}^{n_x}$ .

Como discutido em [Deaecto and Geromel \[2018\]](#), se a Schur estabilizabilidade é assegurada para uma lei de comutação  $\{\sigma[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , então ela também é verificada para uma regra de comutação periódica  $\{\sigma_p[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$  com um período  $\kappa \in \mathbb{N}$  grande o suficiente, tal que  $c\mu^\kappa < 1$  e  $\sigma_p[n] = \sigma[n]$ ,  $\forall n \in [0, \kappa)$ . Observe que é possível verificar a validade da Definição 2.2 testando o sistema (2.13) para uma regra da comutação periódica. Conseqüentemente, a estabilizabilidade Schur é assegurada se e somente se existir  $0 < \kappa \in \mathbb{N}$  finito tal que a matriz definida como  $\mathbb{A}_{0, \kappa-1} = A_{\sigma[\kappa-1]} \cdots A_{\sigma[1]} A_{\sigma[0]}$  seja Schur estável.

Antes de apresentar os resultados mais importantes desta seção, vamos ilustrar alguns aspectos relevantes sobre o sistema (2.13).

**Exemplo 2.4.** Considere o sistema (2.13) composto por dois subsistemas de segunda ordem definidos pelas matrizes  $A_i = e^{A_{ci}h}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , com  $h = 0,1$  e

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

A matriz produto  $\mathbb{A}_{(0,1)} = A_{\sigma[1]} A_{\sigma[0]} = A_1 A_2$  é Schur estável embora as matrizes dos subsistemas  $A_1$  e  $A_2$  não sejam. Os autovalores de  $\mathbb{A}'_{(0,1)} \mathbb{A}_{(0,1)}$  são  $\{0,7014; 1,1673\}$ . Isto significa que a restrição  $\mathbb{A}'_{(0,1)} P \mathbb{A}_{(0,1)} < P$  é satisfeita para algum  $P > 0$ , mas não admite  $P = I$  como solução. O primeiro número inteiro  $p > 0$  tal que  $(\mathbb{A}'_{(0,1)})^p \mathbb{A}_{(0,1)}^p < I$  é  $p = 1030$ . Logo existe  $\mathbb{A}_{(0,1029)}$  tal que  $\mathbb{A}'_{(0,1029)} \mathbb{A}_{(0,1029)} < I$  que é um teste de estabilidade similar ao proposto em [Fiacchini et al. \[2016\]](#). Este exemplo deixa claro a importância da matriz  $P$  para reduzir de forma significativa o número de multiplicações de matrizes, deixando a análise de estabilidade mais viável sob o ponto de vista computacional.

Este exemplo deixa claro que as condições de estabilidade propostas em [Fiacchini and Jungers \[2014\]](#) e [Fiacchini et al. \[2016\]](#) apresentam como vantagem, em relação às desigualdades de Lyapunov-Metzler, o fato de serem descritas em termos de desigualdades matriciais lineares. Entretanto, a sua solução pode ser difícil de obter numericamente, tendo em vista o número elevado de multiplicações matriciais necessárias. Neste sentido, a obtenção de condições equivalentes, mas mais simples de resolver numericamente, é de grande interesse na literatura, pois viabiliza inclusive a possibilidade de generalização destes resultados para tratar problemas mais gerais.

A partir desta observação, a referência [Deaecto and Geromel \[2018\]](#) propõe condições suficientes mais simples do que as propostas em [Fiacchini and Jungers \[2014\]](#) e [Fiacchini et al. \[2016\]](#), expressas em termos de desigualdades matriciais lineares, que asseguram estabilidade exponencial global e um custo garantido de desempenho, como apresentado no próximo teorema. As condições propostas nesta referência são baseadas na função da Lyapunov quadrática e variante no tempo dada por

$$V(x[n], n) = x[n]' P[n] x[n] \quad (2.43)$$

definida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com a continuação periódica  $P[n] = P[n - m_n]$ ,  $P[n] > 0$ ,  $\forall n \in [0, \kappa)$ , e  $\kappa > 0$ . Nesta função, o termo  $m_n$  é definido por  $m_n = \kappa \lfloor n/\kappa \rfloor$  sendo  $\lfloor \alpha \rfloor$  o maior número inteiro menor ou igual a  $\alpha$ .

**Teorema 2.3.** Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , considere que existam vetores  $\lambda[n] \in \Lambda \subset \mathbb{R}^N$ , matrizes simétricas  $P[n] > 0$  satisfazendo

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i[n] (A'_i P[n+1] A_i + E'_i E_i) < P[n], \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (2.44)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ , com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0]$ . Então, a seguinte regra de comutação dependente do estado

$$\sigma(x[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' (A_i' P[n+1 - m_n] A_i + E_i' E_i) x[n] \quad (2.45)$$

assegura a estabilidade exponencial global do sistema (2.12)-(2.13) e o seguinte custo garantido

$$\sum_{n=0}^{\infty} z[n]' z[n] < x_0' P[0] x_0 \quad (2.46)$$

**Prova:** A prova está disponível em [Deaecto and Geromel \[2018\]](#).  $\square$

A respeito deste teorema os seguintes comentários são relevantes. O primeiro deles diz respeito à generalidade da solução. Como provado em [Deaecto and Geromel \[2018\]](#), se o sistema (2.13) é Schur estabilizável, as condições do Teorema 2.3 são sempre factíveis. Na verdade, estas condições são equivalentes a satisfazer a desigualdade matricial linear

$$\mathbb{A}'_{(0, \kappa-1)} P \mathbb{A}_{(0, \kappa-1)} - P < 0 \quad (2.47)$$

que é uma condição necessária e suficiente para assegurar estabilizabilidade periódica, veja [Fiacchini et al. \[2016\]](#) e [Bittanti and Colaneri \[2009\]](#) para maiores detalhes. Além disso, como ilustrado no Exemplo 2.4, a LMI (2.47) é mais simples de resolver numericamente do que as condições propostas em [Fiacchini et al. \[2016\]](#).

Este resultado colocou em evidência um importante aspecto teórico relacionado à análise de estabilidade de sistemas lineares com comutação. De fato, no exemplo apresentado em [Blanchini and Savorgnan \[2006\]](#), composto de dois subsistemas definidos pelas matrizes

$$A_1 = \nu \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

com  $\theta = (5\pi)/4$ ,  $\nu = 10$  e  $\mu = 100$ , verificamos que o produto matricial  $\mathbb{A}_{(0,3)} = A_2 A_1 A_1 A_2$  fornece a matriz nula  $\mathbb{A}_{(0,3)} = 0$  e, portanto, o sistema é Schur estabilizável. Ao contrário do que mencionado naquela referência, este sistema admite uma função de Lyapunov convexa, já que as condições do Teorema 2.3 aplicadas para este sistema levam a uma função de comutação estabilizante. Esta contradição ocorreu pois a análise realizada em [Blanchini and Savorgnan \[2006\]](#) foi restrita à funções de Lyapunov invariantes no tempo. Assim, o resultado apresentado no teorema indica a necessidade de expandir a análise realizada em [Blanchini and Savorgnan \[2006\]](#) para a classe de funções de Lyapunov variantes no tempo. A identificação deste aspecto teórico é uma contribuição importante de [Deaecto and Geromel \[2018\]](#).

O último comentário diz respeito à solução numérica das condições do Teorema 2.3. Note que elas são não-convexas devido ao produto de variáveis  $(\lambda[n], P[n])$ . Felizmente, uma simplificação pode ser adotada sem perda de generalidade. De fato, considerando a identidade

$$\min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' (A_i' P[n+1] A_i + E_i' E_i) x[n] = \min_{\lambda \in \Lambda} x[n]' \left( \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i [n] (A_i' P[n+1] A_i + E_i' E_i) \right) x[n] \quad (2.49)$$

válida graças ao operador mínimo presente na regra de comutação (2.45), temos que, para cada instante de tempo  $n \in \mathbb{N}$ , o valor ótimo deste operador ocorre sempre nos vértices do conjunto simplex. Isto nos permite restringir

os vetores  $\lambda$  presentes em (2.45) ao conjunto dos vértices  $\lambda \in \Lambda_v \subset \Lambda \subset \mathbb{R}^N$ . Logo, podemos reescrever as condições do Teorema 2.3 em termos de LMIs como ficará claro em seguida. Todavia, antes de fornecer as LMIs associadas ao Teorema 2.3, algumas definições são necessárias. Assim, para um dado  $\kappa$  denota-se  $\mathfrak{C}(\kappa) = \mathbb{K}^\kappa$  o conjunto obtido a partir do produto cartesiano de  $\mathbb{K}$  por ele mesmo  $\kappa$  vezes, ou seja,  $\mathfrak{C}(\kappa + 1) = \mathbb{K} \times \mathfrak{C}(\kappa)$  começando com  $\mathfrak{C}(1) = \mathbb{K}$ . Este conjunto possui  $N^\kappa$  elementos  $\mathfrak{C}_p(\kappa)$ ,  $\forall p \in [1, N^\kappa]$ . Cada elemento representa uma sequência de índices  $\mathfrak{C}_p(\kappa) = (i[0], \dots, i[\kappa - 1])$ . Dadas as definições, o próximo teorema apresenta as condições LMIs mencionadas.

**Teorema 2.4.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , considere que existam  $\mathfrak{C}_p(\kappa) \in \mathfrak{C}(\kappa)$  com  $p \in [1, N^\kappa]$ , matrizes simétricas  $P[n] > 0$  satisfazendo*

$$A'_{i[n]}P[n+1]A_{i[n]} + E'_{i[n]}E_{i[n]} < P[n], \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (2.50)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0]$ . Então, a regra da comutação dependente do estado (2.45) assegura a estabilidade exponencial global do sistema (2.13)-(2.14) e o custo garantido (2.46).

**Prova:** A prova segue diretamente das condições do Teorema 2.3 realizando a simplificação  $\lambda \in \Lambda_v$  e pode ser encontrada em Deaecto and Geromel [2018].  $\square$

A solução deste teorema pode ser obtida resolvendo-se o seguinte conjunto de subproblemas convexos

$$\min_{1 \leq p \leq N^\kappa} \inf_{P[n] > 0} x'_0 P[0] x_0 \quad (2.51)$$

sujeito à

$$A'_{i[n]}P[n+1]A_{i[n]} - P[n] + E'_{i[n]}E_{i[n]} < 0, \quad (2.52)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ ,  $i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa)$  e satisfazendo a condição de contorno  $P[0] = P[\kappa]$ . Devido à natureza variante no tempo da função de comutação adotada, esta solução é claramente mais geral do que a apresentada no Teorema 2.1 e muito mais simples de resolver.

Neste momento, nosso objetivo é comparar o resultado do Teorema 2.4 com as desigualdades de Lyapunov-Metzler, ou seja, com as condições do Teorema 2.2 para o domínio do tempo discreto. Neste sentido, vamos apresentar o lema proposto em Daiha et al. [2017], que fornece uma versão variante no tempo das desigualdades de Lyapunov-Metzler clássicas baseadas na seguinte função de Lyapunov não-convexa

$$V_m(x, n) = \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' P_i[n] x[n] \quad (2.53)$$

definida para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $P_i[n] = P_i[n - m_n] > 0$ ,  $\forall n \in [0, \kappa)$ .

**Lema 2.1.** *Assuma que existam matrizes de Metzler  $\Pi[n] \in \mathcal{M}_d$ , matrizes simétricas  $P_i[n] > 0$  satisfazendo*

$$A'_i \left( \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji}[n] P_j[n+1] \right) A_i + E'_i E_i < P_i[n], \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (2.54)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $P_i[0] = P_i[\kappa]$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Então, a regra de comutação dependente do estado

$$\sigma(x[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' P_i[n - m_n] x[n] \quad (2.55)$$

assegura a estabilidade exponencial global do sistema (2.13)-(2.14) e fornece o seguinte custo garantido

$$\sum_{n=0}^{\infty} z[n]'z[n] < \min_{i \in \mathbb{K}} x_0' P_i[0] x_0 \quad (2.56)$$

**Prova:** A prova está disponível em Daiha et al. [2017] e será aqui reproduzida. Considere que para um instante de tempo arbitrário  $n \in \mathbb{N}$  temos  $\sigma[n] = i$ ,  $i \in \mathbb{K}$ . Definindo o operador diferença  $\Delta V_m = V_m(x[n+1], n+1) - V_m(x[n], n)$  temos

$$\begin{aligned} \Delta V_m &= \min_{j \in \mathbb{K}} x[n]' (A_i' P_j[n+1] A_i + E_i' E_i - P_i[n]) x[n] - z[n]' z[n] \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} x[n]' \left( A_i' \left( \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j[n] P_j[n+1] \right) A_i + E_i' E_i - P_i[n] \right) x[n] - z[n]' z[n] \\ &\leq x[n]' \left( A_i' \left( \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji}[n] P_j[n+1] \right) A_i + E_i' E_i - P_i[n] \right) x[n] - z[n]' z[n] \\ &< -z[n]' z[n] \end{aligned} \quad (2.57)$$

válida  $\forall n \in [0, \kappa)$ , em que a última desigualdade de (2.57) decorre de (2.54). Logo de  $\Delta V_m < 0$  podemos concluir que existe um  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno tal que

$$V_m(x[n+1], n+1) \leq (1 - \varepsilon) V_m(x[n], n) \quad (2.58)$$

válido  $\forall n \in [0, \kappa)$ . Considerando as condições de contorno  $P_i[\kappa] = P_i[0]$  e a continuação periódica que garante  $P_i[n] = P_i[n - m_n]$ , temos que  $P_i[n] > 0$  e

$$V_m(x[n+1], n+1) \leq \mu^2 V_m(x[n], n) \quad (2.59)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e para algum  $\mu^2 = 1 - \varepsilon \in (0, 1)$ . Aplicando (2.59) recursivamente obtém-se que  $V_m(x[n], n) \leq \mu^{2n} V_m(x[0], 0)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e, portanto, a condição da Definição 2.1 é satisfeita com  $c^2 = \max_{p \in [0, \kappa)} \|P[0]\| \|P[p]^{-1}\|$  e o sistema é exponencialmente estável. Além disso, somando os dois lados de (2.57) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos  $\|z[n]\|_2^2 \leq x_0' P[0] x_0$  pois  $V_m(x[\infty], \infty) = 0$  devido à estabilidade exponencial da origem do sistema.  $\square$

Note que as desigualdades do Lema 2.1 são praticamente impossíveis de serem resolvidas, visto que as condições, além de serem variantes no tempo, também são não-convexas devido ao produto de variáveis matriciais  $\{\Pi[n], P_i[n]\}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Entretanto, sua importância no contexto desta tese é que restringindo as matrizes de Metzler à seguinte estrutura  $\Pi[n] = \lambda[n] e' \in \mathcal{M}_d$  com  $e' = [1 \cdots 1]$ , obtemos

$$A_i' \left( \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j[n] P_j[n+1] \right) A_i + E_i' E_i < P_i[n], \quad i \in \mathbb{K} \quad (2.60)$$

que é equivalente à (2.44). De fato, multiplicando ambos os lados de (2.60) por  $\lambda_i[n]$  e somando para todo  $i \in \mathbb{K}$  obtemos (2.44) para  $P[n+1] = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j[n] P_j[n+1]$  e  $P[n] = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j[n] P_j[n]$ . Além disso, a partir de (2.44), definindo  $P_i[n] = A_i' P[n] A_i + E_i' E_i + \epsilon$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, temos que  $P_i[n] > 0$  e

$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i[n] P_i[n+1] < P[n]$  que, multiplicando à direita por  $A_i$  e à esquerda pela sua transposta fornece (2.60).

Portanto, o resultado do Teorema 2.3 é equivalente à versão variante no tempo das desigualdades de Lyapunov-Metzler, considerando matrizes de Metzler com a estrutura especial  $\Pi[n] = [\lambda[n] \cdots \lambda[n]]$ . Enquanto que as condições clássicas de Lyapunov-Metzler (2.31) são obtidas de (2.54) para  $\Pi \in \mathcal{M}_d$  genérica e eliminando-se a natureza variante no tempo de  $P_i[n]$  e  $\Pi[n]$ . Logo, comparando as condições (2.44) com (2.31), temos que enquanto a primeira tira vantagem da natureza variante no tempo das desigualdades, a segunda explora a estrutura genérica de  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ . Portanto, ambas as metodologias não podem ser comparadas em termos de conservadorismo. Entretanto, como já mencionado (2.44) é muito mais simples de resolver.

A próxima seção é dedicada à definição dos índices de desempenho que serão adotados ao longo desta tese.

## 2.3 Critérios de desempenho

Em geral, na realização de um projeto de controle, além da estabilidade, também se busca determinar um índice específico que permita avaliar a qualidade do projeto realizado. No caso dos sistemas lineares e invariantes no tempo, os índices mais utilizados na literatura são as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Elas podem ser calculadas a partir da função de transferência ou da resposta ao impulso destes sistemas, desde que eles sejam estáveis.

Infelizmente, estas normas não podem ser definidas para os sistemas com comutação em estudo, pois eles não admitem representação frequencial. Entretanto, com a finalidade de avaliar a qualidade do projeto de controle para esta classe de sistemas, as referências Geromel et al. [2008] e Deaecto et al. [2011] propuseram índices de desempenho que, com certo abuso de notação, foram nomeados índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . O motivo desta nomeação deve-se ao fato de que eles se igualam ao quadrado das respectivas normas, na situação particular em que a regra é mantida fixa em um dos subsistemas. Antes de apresentá-los, vamos considerar o seguinte sistema linear com comutação no domínio do tempo discreto.

$$x[n+1] = A_\sigma x[n] + H_\sigma w[n] \quad (2.61)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + G_\sigma w[n] \quad (2.62)$$

em que além das variáveis já mencionadas,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  representa a entrada externa.

Note que, se considerarmos o sistema (2.61)-(2.62) definido para todo  $n \in \mathbb{N}_- = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , evoluindo de condição inicial  $x[-1] = 0$  e com entrada de perturbação impulsiva do tipo  $w[n] = \delta[n+1]e_r$ , em que  $e_r$  é a  $r$ -ésima coluna da matriz identidade, temos

$$\begin{aligned} x[-1] = 0 & \Rightarrow z_r[-1] = G_{\sigma[-1]}e_r \\ x[0] = H_{\sigma[-1]}e_r & \Rightarrow z_r[0] = E_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r \\ x[1] = A_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r & \Rightarrow z_r[1] = E_{\sigma[1]}A_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r \\ x[2] = A_{\sigma[1]}A_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r & \Rightarrow z_r[2] = E_{\sigma[2]}A_{\sigma[1]}A_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r \\ \vdots & \Rightarrow \vdots \\ x[n] = A_{\sigma[n-1]} \cdots A_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r & \Rightarrow z_r[n] = E_{\sigma[n]}A_{\sigma[n-1]} \cdots A_{\sigma[0]}H_{\sigma[-1]}e_r \end{aligned}$$

em que  $z_r$  é a saída controlada associada a um impulso aplicado no canal  $e_r$ . Assim, o sistema (2.61)-(2.62), com as especificações descritas acima, pode ser alternativamente representado por (2.13)-(2.14) definido para todo  $n \in \mathbb{N}$  com  $x[0] = H_{\sigma[-1]}e_r$ . Como ficará claro nos próximos capítulos, a utilização deste sistema alternativo facilita na obtenção das condições de projeto  $\mathcal{H}_2$ , pois permite utilizar como base os resultados para a determinação dos custos garantidos já obtidos anteriormente.

Considerando o sistema (2.61)-(2.62) com as especificações acima, o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  é definido em Geromel et al. [2008] como segue.

**Definição 2.3.** *O índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  associado ao sistema linear com comutação (2.61)-(2.62) evoluindo de  $x[-1] = 0$  e com entrada impulsiva  $w[n] = \delta[n+1]e_r$ , para todo  $r = 1, \dots, n_w$ , é dado por*

$$J_2(\sigma) = \sum_{r=1}^{n_w} \|z_r\|_2^2 + e_r' G'_{\sigma[-1]} G_{\sigma[-1]} e_r \quad (2.63)$$

em que  $z_r[n]$  é a saída correspondente à entrada impulsiva adotada.

Note que a mesma quantidade pode ser obtida com o sistema alternativo (2.13)-(2.14) definido para todo  $n \in \mathbb{N}$  e evoluindo de condições iniciais  $x[0] = H_{\sigma[-1]}e_r$ . Neste caso, devemos acrescentar o termo referente a  $n = -1$ , ou seja,  $z_r[-1]' z_r[-1] = e_r' G'_{\sigma[-1]} G_{\sigma[-1]} e_r$  como um fator de correção. A seguir apresentamos a definição do índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , disponível em Deaecto et al. [2011].

**Definição 2.4.** *O índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  associado ao sistema linear com comutação (2.61)-(2.62) evoluindo de  $x[0] = 0$  e com entrada externa  $w \in \mathcal{L}_2$  é dado por*

$$J_\infty(\sigma) = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (2.64)$$

com  $w \neq 0$ .

Note que devido à natureza não-linear e variante no tempo da regra de comutação  $\sigma(x)$ , estes índices são extremamente difíceis de calcular analiticamente e, por este motivo, a ideia consiste em determinar limitantes superiores assegurando, neste caso, custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 2.4 Sistemas afins com comutação

Esta seção é dedicada ao estudo dos sistemas afins com comutação, cuja representação no espaço de estado, no domínio do tempo contínuo, é dada por

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + b_\sigma, \quad x(0) = x_0 \quad (2.65)$$

$$z(t) = E_\sigma x(t) \quad (2.66)$$

com  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  sendo o estado,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída controlada,  $\sigma \in \mathbb{K}$  a regra de comutação e  $b_i$  os termos afins. Note que se  $b_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ , então o sistema (2.65)-(2.66) recupera (2.11)-(2.12), cujo único ponto de equilíbrio é a origem. Considerando o caso geral, em que  $b_i \neq 0$  para pelo menos um índice  $i \in \mathbb{K}$ , o sistema apresenta vários

pontos de equilíbrio formando o seguinte conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = -A_\lambda^{-1}b_\lambda, A_\lambda \in \mathcal{H}, \lambda \in \Lambda\} \quad (2.67)$$

sendo  $\mathcal{H}$  o conjunto de todas as matrizes Hurwitz estáveis e  $\Lambda$  o simplex unitário.

Definindo  $\xi(t) = x(t) - x_e$ , em que  $x_e \in X_e$ , obtemos o sistema alternativo

$$\dot{\xi}(t) = A_\sigma \xi(t) + \ell_\sigma, \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (2.68)$$

$$z_e(t) = E_\sigma \xi(t) \quad (2.69)$$

em que o novo termo afim é dado por  $\ell_i = A_i x_e + b_i, \forall i \in \mathbb{K}$ , e  $z_e(t) = z(t) - E_\sigma x_e$  é a saída deslocada. Note que utilizando  $x_e \in X_e$  e seu vetor  $\lambda \in \Lambda$  associado, obtemos  $\ell_\lambda = 0$ . Além disso, sempre que  $x(t) \rightarrow x_e$  a variável auxiliar  $\xi(t) \rightarrow 0$  e, portanto, a origem é o ponto de equilíbrio de interesse do sistema (2.68)-(2.69).

Assim como no caso dos sistemas lineares com comutação, o objetivo principal é projetar uma regra de comutação  $\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$  de forma a assegurar estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio  $x_e \in X_e$ . Destacamos que no caso linear, como já mencionado, todos os subsistemas compartilham o mesmo ponto de equilíbrio e, portanto, caso um deles seja estável, uma solução trivial para garantir estabilidade é manter a regra de comutação fixa neste subsistema. Para o caso afim, o ponto de equilíbrio de interesse  $x_e \in X_e$  é, geralmente, diferente dos pontos dos subsistemas e, portanto, ainda que um deles seja estável, não existe uma solução trivial capaz de garantir estabilidade assintótica, sendo o projeto da regra  $\sigma(x)$  fundamental para esta finalidade. Além disso, neste caso, a ocorrência de modos deslizantes estáveis é sempre verificada e, como consequência, a frequência de comutação é arbitrariamente elevada.

O objetivo desta seção é colocar em evidência as particularidades desta classe de sistemas em relação a dos lineares. Como ficará claro, o problema de projeto é muito mais abrangente, principalmente quando alguma restrição é imposta à frequência de comutação. As discussões aqui apresentadas são importantes para colocar em evidência o estado da arte e mostrar a importância dos estudos sobre sistemas afins. Neste sentido, obtivemos alguns resultados para o domínio do tempo discreto, que estão disponíveis no Capítulo 5.

No que se refere à estabilidade assintótica global para sistemas afins a tempo contínuo, a literatura apresenta diversas condições, como as fornecidas nas referências Bolzern and Spinelli [2004], Trofino et al. [2012] e Scharlau et al. [2014]. Neste momento, vamos direcionar nossa atenção para as condições de estabilidade fornecidas por Deaecto et al. [2010] e Santos [2015] que se baseiam na adoção da função de Lyapunov quadrática

$$V(\xi) = \xi' P \xi \quad (2.70)$$

com  $P > 0$ .

**Teorema 2.5.** *Considere o ponto de equilíbrio  $x_e \in X_e$  e seu vetor associado  $\lambda \in \Lambda$ . Se existirem matrizes simétricas  $P > 0$  e  $R_i$  satisfazendo*

$$A_i' P + P A_i + E_i' E_i + R_i < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (2.71)$$

$$R_\lambda > 0 \quad (2.72)$$

então, a seguinte função de comutação

$$\sigma(\xi(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\xi(t)' R_i \xi(t) + 2\xi(t)' P \ell_i \quad (2.73)$$

assegura a estabilidade assintótica global do sistema (2.65)-(2.66) e fornece o seguinte custo garantido

$$\int_0^\infty z_e(t)' z_e(t) dt < \xi_0' P \xi_0 \quad (2.74)$$

**Prova:** A prova está disponível em Santos [2015].  $\square$

Embora a prova esteja disponível na literatura, ela será aqui comentada em linhas gerais. Considerando o sistema equivalente (2.68)-(2.69) e assumindo que as condições (2.71) e (2.72) são asseguradas, a derivada com relação ao tempo de uma trajetória arbitrária deste sistema fornece

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \dot{\xi}(t)' P \xi(t) + \xi(t)' P \dot{\xi}(t) \\ &= \xi(t)' (A'_\sigma P + P A_\sigma + E'_\sigma E_\sigma) \xi(t) + 2\xi(t)' P \ell_\sigma - z_e(t)' z_e(t) \\ &< -\xi(t)' R_\sigma \xi(t) + 2\xi(t)' P \ell_\sigma - z_e(t)' z_e(t) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}} -\xi(t)' R_i \xi(t) + 2\xi(t)' P \ell_i - z_e(t)' z_e(t) \\ &= \min_{\lambda \in \Lambda} -\xi(t)' R_\lambda \xi(t) + 2\xi(t)' P \ell_\lambda - z_e(t)' z_e(t) \\ &\leq -\xi(t)' R_\lambda \xi(t) + 2\xi(t)' P \ell_\lambda - z_e(t)' z_e(t) \\ &< -z_e(t)' z_e(t) \end{aligned} \quad (2.75)$$

em que a primeira desigualdade é consequência da condição (2.71), a terceira igualdade é devido à regra de comutação (2.73), a segunda desigualdade é uma consequência direta do operador mínimo e a última desigualdade decorre de (2.72) e do fato que  $\ell_\lambda = 0$  pois  $x_e \in X_e$ . Logo, a estabilidade assintótica global é garantida pois  $\dot{V}(\xi) < 0$ . Além disso, integrando os dois lados de (2.75) de  $t = 0$  a  $t \rightarrow \infty$ , obtemos  $\|z_e\|_2^2 < V(x(0)) - V(x(\infty))$  que resulta em (2.74) pois  $V(x(\infty)) = 0$ , como consequência da estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio.

No que se refere ao Teorema 2.5, note que as matrizes  $R_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , são indefinidas em sinal e, portanto, nenhuma propriedade de estabilidade é exigida das matrizes  $A_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , consideradas isoladamente. Na verdade, as desigualdades (2.71) junto com (2.72) são equivalentes a

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (A'_i P + P A_i + E'_i E_i) < 0 \quad (2.76)$$

que já foi apresentada no Teorema 2.1. Logo, como mencionado anteriormente, uma condição suficiente para a estabilidade é que a matriz  $A_\lambda$  seja Hurwitz estável. A sutil diferença entre estes teoremas é que o vetor  $\lambda \in \Lambda$  no Teorema 2.5 não está livre como no Teorema 2.1, mas sim associado à escolha do ponto de equilíbrio de interesse  $x_e \in X_e$ . Neste contexto, devemos destacar que existe uma relação de dependência da matriz de Lyapunov  $P$  com o vetor  $\lambda \in \Lambda$ . Conseqüentemente, se um novo ponto de equilíbrio  $x_e \in X_e$  for considerado, a matriz  $P$  deve ser computada novamente por meio do Teorema 2.5. Esta exigência pode dificultar a implementação prática desta técnica, uma vez que as matrizes  $P$  e  $R_i$  são determinadas *a priori* e utilizadas na composição da

regra (2.73). Assim, neste caso não é possível realizar alterações *online* do ponto de equilíbrio, ou seja, durante a operação do sistema.

Como solução alternativa, o próximo corolário propõe uma regra de comutação robusta com relação ao ponto de equilíbrio, mas que exige que todos os subsistemas sejam individualmente estáveis.

**Corolário 2.2.** *Considere o ponto de equilíbrio  $x_e \in X_e$ . Se existir uma matriz simétrica  $P > 0$  satisfazendo*

$$A_i'P + PA_i + E_i'E_i < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (2.77)$$

*então, a seguinte função de comutação*

$$\sigma(\xi(t)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \xi(t)' P \ell_i \quad (2.78)$$

*assegura a estabilidade assintótica global do sistema (2.65)-(2.66) e fornece o custo garantido dado por (2.74).*

**Prova:** A prova é uma consequência direta do Teorema 2.5 impondo que  $R_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ .  $\square$

Comparando os dois últimos resultados, temos que o Teorema 2.5 é menos conservador do que o Corolário 2.2, visto que não exige a estabilidade assintótica de  $A_i, \forall i \in \mathbb{K}$ . Entretanto, devemos salientar que, quando se trata de aplicação prática, na maioria vezes, os subsistemas envolvidos são estáveis e as condições do Corolário 2.2 podem ser mais adequadas, pois a matriz de Lyapunov  $P > 0$  é calculada apenas uma vez independente do ponto de equilíbrio. Isso permite que este ponto possa ser modificado durante a operação do sistema. O próximo exemplo ilustra as condições do Teorema 2.5.

**Exemplo 2.5.** Considere o sistema afim com comutação (2.68)-(2.69) composto por dois subsistemas definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad E_1 = E_2 = I \quad (2.79)$$

O ponto de equilíbrio de interesse é  $x_e = [0,6474 \quad -0,0016]'$  correspondente a  $\lambda = [0,35 \quad 0,65]'$ . Note que este ponto não coincide com o ponto de equilíbrio de nenhum dos subsistemas. No intuito de observar o comportamento das trajetórias do estado de cada um deles, analisamos os seus respectivos planos de fase expressos na variável de estado  $\xi = x - x_e$ . O primeiro subsistema possui os seguintes autovalores  $\{3,3660 \quad 1,6340\}$ , indicando que o ponto de equilíbrio correspondente  $x_{e1}$  é do tipo nó instável. A Figura 2.7 apresenta o plano de fase deste primeiro subsistema com  $\xi_{e1} = x_{e1} - x_e = [-0,8292 \quad 0,1834]'$  representado por “+” e condições iniciais  $\xi_0 = [r \cos(\theta) \quad r \sin(\theta)]' + x_{e1} - x_e$  com  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $r = 0,1$ . No caso do segundo subsistema, os seus autovalores são  $\{-3 \pm 2,2361i\}$  indicando um ponto de equilíbrio  $x_{e2}$  do tipo foco estável. A Figura 2.8 mostra o plano de fase deste segundo subsistema partindo de condições iniciais  $\xi_0 = [r \cos(\theta) \quad r \sin(\theta)]'$  com  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $r = 1$ . Nesta figura “\*” indica a posição de  $\xi_{e2} = [-0,2903 \quad -0,2127]'$ .

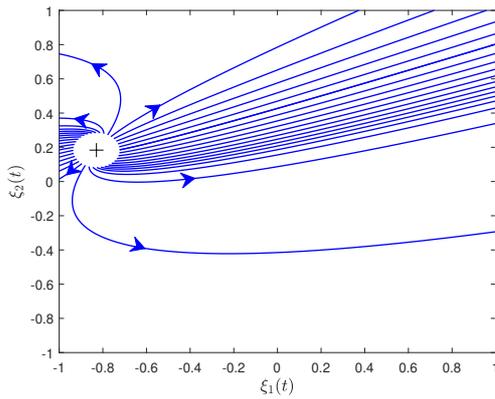


Figura 2.7: Plano de fase do primeiro subsistema afim

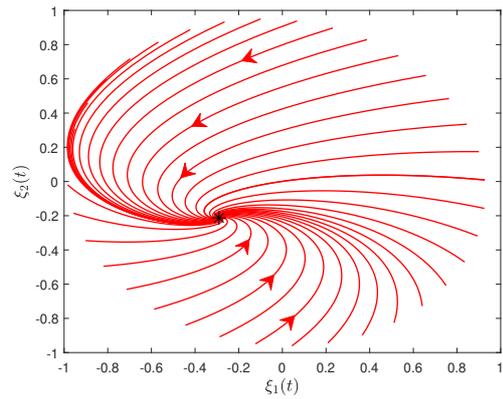


Figura 2.8: Plano de fase do segundo subsistema afim

Conhecidas as trajetórias de cada subsistema, nosso objetivo é verificar como eles interagem na presença de uma regra de comutação e se, de fato, é possível levar as trajetórias do sistema global para o ponto de equilíbrio  $x_e$ . Nesse sentido, resolvemos o problema de otimização convexa

$$\inf_{P, R_i} \text{Tr}(P) \tag{2.80}$$

sujeito às condições do Teorema 2.5. Utilizando as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 0,4104 & -0,2743 \\ -0,2743 & 0,9596 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} -3,7348 & 1,0274 \\ 1,0274 & -3,7421 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 2,0111 & -0,5532 \\ -0,5532 & 2,0150 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

obtidas como solução deste problema e implementando a regra de comutação (2.73) para condições iniciais  $\xi_0$  no entorno de uma circunferência de raio unitário, obtivemos o plano de fase do sistema afim com comutação apresentado na Figura 2.9, em que  $\xi_{e1}$  e  $\xi_{e2}$  são representados por “+” e “\*”, respectivamente, e o ponto de equilíbrio  $\xi = 0$  é indicado por “×”. A região de operação do primeiro subsistema é caracterizada pelas curvas em azul, enquanto que a do segundo é indicada pelas curvas em vermelho. A superfície de comutação é representada em preto. Podemos observar a presença de modos deslizantes estáveis, como indicado pela curva contínua em preto na superfície de comutação.

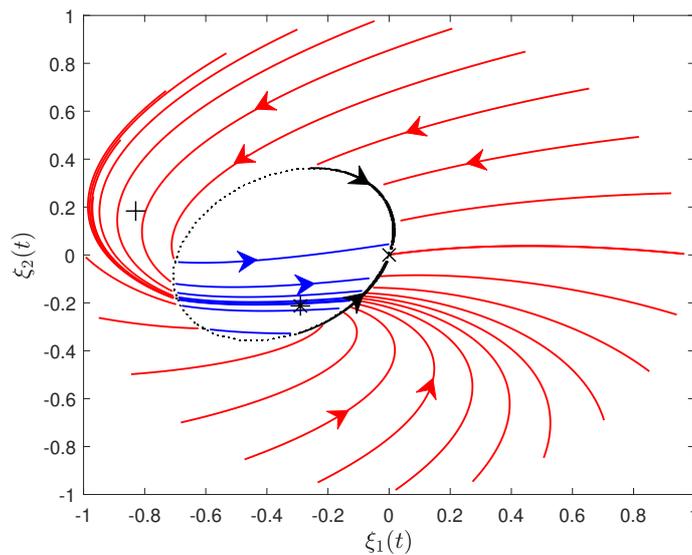


Figura 2.9: Plano de fase do sistema afim com comutação.

Neste exemplo, a ocorrência de modos deslizantes estáveis é fundamental para a garantia de estabilidade assintótica da origem  $\xi = 0$ , visto que o ponto de equilíbrio de interesse não coincide com aquele de nenhum dos subsistemas. Infelizmente, como já mencionado, este fenômeno provoca *chattering* que é extremamente indesejável do ponto de vista prático, pois causa desgaste de peças mecânicas, dissipação de energia por calor em circuito de potência e, até mesmo, a danificação de equipamentos. Na maioria das vezes, esta frequência não é implementável devido às limitações físicas, como por exemplo, o tempo de resposta das chaves ou o período de amostragem, no caso dos sistemas embarcados. Neste contexto, uma solução possível seria fixar um período de tempo  $h > 0$ , dentro do qual não pode haver comutação. Desta forma é possível estabelecer um limitante superior para a frequência de comutação, deixando a regra mais amena para aplicações práticas. O próximo exemplo ilustra este procedimento.

**Exemplo 2.6.** Considere o mesmo sistema utilizado no Exemplo 2.5 e a função de comutação projetada com as matrizes (2.81) obtidas como solução do Teorema 2.5. Nosso objetivo neste exemplo é verificar empiricamente o que ocorre quando a frequência de comutação é limitada. Neste sentido, vamos impor que a regra de comutação só pode atuar a cada  $h \in \{0,001; 0,5; 1\}$ . Adotando a regra da comutação (2.73) e a condição inicial  $\xi_0 = [10\cos(\pi/4) \ 10\sin(\pi/4)]'$ , obtivemos a trajetória de  $\xi(t)$  para os três valores de  $h$ . As Figuras 2.10 e 2.11 apresentam, respectivamente, as trajetórias da primeira e segunda componentes de  $\xi(t)$ . Como podemos observar a convergência para a origem ocorreu apenas para  $h$  suficientemente pequeno. A medida que este valor aumenta, a resposta é deteriorada levando inclusive à instabilidade. Isto indica a necessidade de condições específicas que levam em conta a presença de  $h > 0$  tendo em vista a sua grande importância sob o ponto de vista teórico e prático.

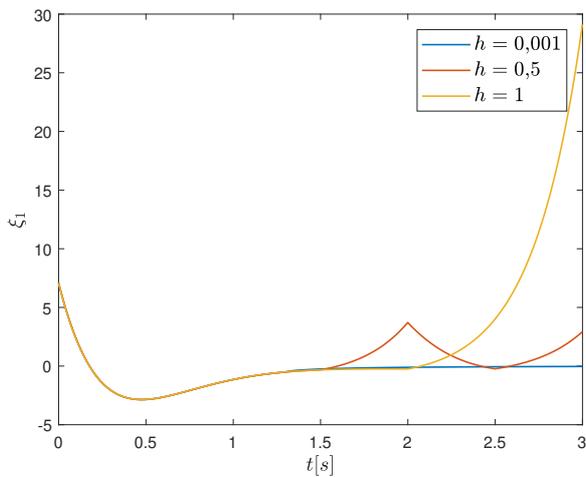


Figura 2.10: Trajetória de  $\xi_1$  no tempo

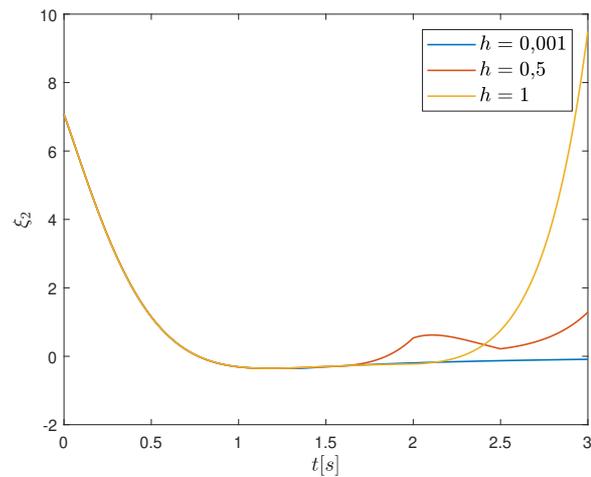


Figura 2.11: Trajetória de  $\xi_2$  no tempo

Como ilustrado em ambos os exemplos apresentados, a regra de comutação proposta no Teorema 2.5 exige uma frequência de comutação arbitrariamente elevada para a garantia de estabilidade assintótica. Pelas razões já mencionadas, a sua implementação pode ser inviável em aplicações práticas. Neste sentido um grande esforço da comunidade científica está voltado para a obtenção de condições de estabilidade que levam em conta a limitação da frequência de comutação. Para o domínio do tempo contínuo, as referências [Hauvoigne et al. \[2011\]](#), [Hetel and Fridman \[2013\]](#), [Albea-Sanchez et al. \[2019\]](#) e [Sferlazza et al. \[2019\]](#) fornecem importantes resultados considerando a abordagem de controle via dados amostrados e assegurando estabilidade prática do

ponto de equilíbrio.

Para o domínio do tempo discreto, a literatura apresenta poucos resultados como pode ser observado nas referências recentes [Deaecto and Egidio \[2016\]](#), [Deaecto and Geromel \[2017\]](#) e [Egidio and Deaecto \[2019\]](#). Todas elas fornecem condições que asseguram estabilidade prática do ponto de equilíbrio de interesse. Embora este tipo de estabilidade garanta que as trajetórias do estado sejam atraídas para um conjunto de atração, o seu comportamento no interior deste conjunto não pode ser controlado diretamente, apesar de afetar consideravelmente o desempenho do sistema. Além disso, não é possível otimizar índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  que só são definidos para sistemas assintoticamente estáveis. Estes problemas são contornados no Capítulo 5 utilizando uma abordagem que leva em conta a estabilidade assintótica de um ciclo limite a ser projetado.

## 2.5 Considerações finais

Neste capítulo, foram apresentados alguns conceitos fundamentais relacionados aos sistemas dinâmicos com comutação, destacando algumas das suas características mais importantes, que justificam o interesse no estudo desta classe de sistemas, tanto do ponto de vista teórico como do seu grande potencial para aplicações práticas. Além disso, alguns resultados da literatura relacionados aos sistemas lineares e afins com comutação, que são o nosso foco de estudo nesta tese, foram apresentados e discutidos. Estes resultados colocam em evidência o estado da arte e serão utilizados como embasamento teórico para os capítulos seguintes. No caso particular dos sistemas lineares, maior destaque foi dado a esta classe de sistemas no domínio do tempo discreto. Apresentamos condições de estabilidade baseadas na função de Lyapunov quadrática clássica, que é a mais simples da literatura, na função de Lyapunov do tipo mínimo, que resultaram nas desigualdades de Lyapunov-Metzler, e na função de Lyapunov convexa e variante no tempo, que será a nossa escolha no decorrer desta tese. Discutimos a maneira como estas condições se relacionam e a sua importância no contexto dos próximos capítulos. Para o caso dos sistemas afins, condições de estabilidade para o domínio do tempo contínuo, foram utilizadas para ilustrar as características principais desta classe de sistemas, que é naturalmente mais geral do que a dos lineares por apresentar diversos pontos de equilíbrio. Como discutido, não é possível assegurar estabilidade assintótica quando alguma limitação é imposta à frequência de comutação, o que faz com que o estudo de sistemas no domínio de tempo discreto seja mais abrangente. O Capítulo 5 desta tese é inteiramente dedicado aos sistemas afins com comutação a tempo discreto.

# CONTROLE VIA REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA

“Porque a loucura de Deus é mais sábia que a sabedoria humana, e a fraqueza de Deus é mais forte que a força do homem.”

— I CORÍNTIOS 1:25.

Este capítulo apresenta uma parte dos resultados principais obtidos durante o meu doutorado e é dedicado ao projeto via realimentação estática de saída de sistemas lineares com comutação a tempo discreto. Mais especificamente, são propostas condições suficientes para o projeto de uma regra de comutação que atua como única variável de controle do sistema. Posteriormente, estas condições são generalizadas para tratar o caso mais geral caracterizado pela presença de duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação e uma entrada adicional definida por ganhos matriciais reais de realimentação de saída. Em ambos os casos, o objetivo é assegurar estabilidade exponencial global da origem e um limitante superior para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . As condições propostas são baseadas em uma função de Lyapunov convexa variante no tempo e descritas em termos de desigualdades matriciais lineares. Elas são, portanto, mais fáceis de resolver do que outras disponíveis na literatura, como as condições expressas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler. Estas últimas são não-convexas e, como já discutido no capítulo anterior, difíceis de resolver para um número arbitrário de subsistemas. Diferente de outras metodologias, a técnica proposta não exige o projeto de nenhuma estrutura dinâmica adicional, responsável por fornecer informações importantes para a implementação da regra de comutação. Na verdade, esta técnica conta com a presença de uma matriz especial  $R_i[n]$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , utilizada na implementação da regra de comutação e que permitiu a obtenção das condições de realimentação estática de saída aqui propostas. Como ficará claro ao longo do capítulo, os resultados obtidos contêm, como caso particular, os disponíveis nas referências [Deaecto and Geromel \[2018\]](#) e [Daiha et al. \[2017\]](#), que tratam o projeto de controle via realimentação de estado, exclusivamente. No decorrer deste capítulo vários exemplos ilustrativos, usados para validar a teoria e compará-la com técnicas recentes da literatura, são apresentados e discutidos. Além disso, um procedimento experimental é apresentado no [Capítulo 6](#) para colocar em evidência a aplicabilidade da técnica proposta.

## 3.1 Formulação do problema

Considere o seguinte sistema linear com comutação no domínio do tempo discreto

$$x[n+1] = A_\sigma x[n] + B_\sigma u[n] + H_\sigma w[n] \quad (3.1)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + F_\sigma u[n] + G_\sigma w[n] \quad (3.2)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] \quad (3.3)$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  o estado,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  a entrada de controle,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada externa,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  a saída controlada,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  a saída medida e  $\sigma \in \mathbb{K}$  a regra de comutação que seleciona a cada instante de tempo um dos  $N$  subsistemas disponíveis, definidos por  $\mathcal{G}_i = (A_i, B_i, H_i, E_i, F_i, G_i, C_i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , com as matrizes de  $\mathcal{G}_i$  de dimensões compatíveis. A lei de controle  $u$  possui a seguinte estrutura

$$u[n] = L_\sigma y[n] \quad (3.4)$$

com os ganhos de realimentação de saída  $\{L_1, \dots, L_N\}$  a serem determinados. A depender do critério de desempenho utilizado (veja as Definições 2.3 e 2.4), duas classes de entrada externa são levadas em consideração. Para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ , consideramos que o sistema (3.1)-(3.3), definido para todo  $n \in \mathbb{N}_- = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , é perturbado por entradas externas do tipo impulsiva  $w[n] = \delta[n+1]e_r$ , com  $e_r$  sendo a  $r$ -ésima coluna da matriz identidade de ordem  $n_w$ , e que evolui de condições iniciais nulas  $x[-1] = 0$ . Por outro lado, para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , consideramos entradas externas da classe  $\mathcal{L}_2$ , isto é,  $0 \neq w \in \mathcal{L}_2$  e que o sistema (3.1)-(3.3), definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ , evolui de condições iniciais nulas  $x[0] = 0$ .

Neste capítulo, vamos tratar dois problemas de controle distintos. Para ambos os casos, as condições de projeto são derivadas da função de Lyapunov convexa variante no tempo (2.43). No primeiro deles, consideramos o sistema (3.1)-(3.3) com  $u[n] = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_-$ . Nosso objetivo é projetar uma função de comutação dependente da saída medida  $\sigma : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$  de forma a assegurar estabilidade exponencial global da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho. Posteriormente, vamos obter condições para o projeto de uma regra de comutação  $\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$  para o caso particular em que os estados estão disponíveis para realimentação, ou seja,  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Resultados relacionados ao projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  estão disponíveis em [Daiha and Deaecto \[2019a\]](#).

Segundo o nosso conhecimento, o projeto de  $\sigma(y)$  como única variável de controle e sem nenhuma estrutura dinâmica adicional foi apresentado pela primeira vez em [Mainardi Júnior et al. \[2015\]](#), no contexto de controle robusto de sistemas lineares com comutação e, exclusivamente, para o domínio do tempo contínuo. Em [Mainardi Júnior et al. \[2015\]](#), a função de Lyapunov é quadrática e invariante no tempo o que, geralmente, fornece condições muito conservadoras. Além disso, a técnica adotada naquela referência exige que a matriz de saída medida seja independente de índice, ou seja,  $C_i = C$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Como ficará claro em seguida, a metodologia proposta nesta tese não impõe esta restrição. Mais recentemente, também no contexto de controle robusto, a referência [Cardim et al. \[2016\]](#) tratou o mesmo problema, utilizando uma função de Lyapunov do tipo mínimo e a partir de condições baseadas em desigualdades de Lyapunov-Metzler, que são de natureza não-convexa e, portanto, difíceis de resolver. Detalhes sobre estas desigualdades estão disponíveis em [Geromel and Colaneri \[2006a\]](#). Infelizmente, a referência [Cardim et al. \[2016\]](#) exige a imposição de uma estrutura especial nas matrizes de Lyapunov, fazendo com que as condições resultantes se tornem muito conservadoras.

No que se refere ao projeto de  $\sigma(x)$  como única variável de controle, as referências [Geromel et al. \[2008\]](#) e [Deaecto et al. \[2011\]](#) apresentam, respectivamente, condições  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  expressas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler. Condições de projeto  $\mathcal{H}_2$  baseadas em uma função de Lyapunov variante no tempo foram propostas pela primeira vez em [Deaecto and Geromel \[2018\]](#). Como mencionado no capítulo anterior, a

vantagem destas condições é que elas são descritas em termos de LMIs e podem fornecer soluções para o caso em que as desigualdades clássicas de Lyapunov-Metzler são infactíveis. Na verdade, como já discutido na Subseção 2.2.1, elas são um caso particular das desigualdades de Lyapunov-Metzler variantes no tempo.

O segundo problema de interesse leva em conta o sistema geral (3.1)-(3.3) e o projeto de duas variáveis de controle, a saber, a regra de comutação  $\sigma : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$  e um conjunto de ganhos matriciais reais  $\{L_1, \dots, L_N\}$  que compõem a lei de controle (3.4). A ideia neste caso é satisfazer os mesmos objetivos de estabilidade e desempenho já mencionados. Para o caso de realimentação de estado, o projeto de  $\sigma(x)$  e  $u = L_\sigma x$  é feito conjuntamente, enquanto que para realimentação de saída a determinação de  $\sigma(y)$  e  $u = L_\sigma y$  é realizada de forma independente em dois estágios sequenciais. No primeiro estágio, os ganhos  $L_i, \forall i \in \mathbb{K}$ , são obtidos pelo método de Kleinman-Newton Generalizado, proposto por Geromel and Deaecto [2018], e em seguida, a regra  $\sigma(y)$  é projetada. Para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , sempre que a entrada externa estiver disponível, uma regra de comutação mais geral que depende também desta entrada, é projetada. Resultados preliminares relacionados exclusivamente ao controle  $\mathcal{H}_\infty$  via realimentação de estado estão disponíveis em Daiha et al. [2017].

A literatura apresenta diversos resultados relacionados ao projeto conjunto destas duas variáveis de controle, mas exclusivamente para o caso em que os estados estão disponíveis para a realimentação. As referências Deaecto et al. [2015], Fiacchini and Tarbouriech [2017] e Deaecto and Geromel [2018] são alguns exemplos de técnicas deste tipo na literatura. A primeira referência baseia-se em condições expressas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler e a segunda leva em conta uma abordagem envolvendo teoria de conjuntos e considera ganhos de realimentação de estado dependentes do tempo. Esta abordagem não é muito usual em aplicações práticas devido à dificuldade de implementação da lei de controle contendo ganhos variantes no tempo. Além dos resultados inéditos para tratar o controle via realimentação estática de saída, o presente capítulo propõe condições alternativas às apresentadas em Deaecto and Geromel [2018]. Com relação a esta última referência, nossa principal contribuição é a presença de uma matriz adicional, utilizada na regra de comutação, que torna possível tratar casos mais realistas, como o projeto de controle via realimentação de saída.

## 3.2 Projeto de controle $\mathcal{H}_2$

Nesta seção, os dois problemas de controle mencionados anteriormente são tratados levando em conta a otimização do índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  definido em (2.63). Primeiramente, consideramos o projeto da regra  $\sigma$  como única variável de controle. Posteriormente, os resultados são generalizados para tratar o caso mais geral que consiste no projeto da regra  $\sigma$  e da lei de controle  $u$ .

### 3.2.1 Síntese da regra de comutação $\sigma$

Considere o sistema linear com comutação a tempo discreto

$$x[n+1] = A_\sigma x[n] + H_\sigma w[n], \quad x[-1] = 0 \quad (3.5)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + G_\sigma w[n] \quad (3.6)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] \quad (3.7)$$

definido para todo  $n \in \mathbb{N}_-$  e com  $w[n] = \delta[n+1]e_r$  para todo  $r = 1, \dots, n_w$ . Como discutido na Seção 2.3, este sistema pode ser reescrito de forma equivalente como

$$x[n+1] = A_\sigma x[n], \quad x[0] = H_{\sigma[-1]}e_r \quad (3.8)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] \quad (3.9)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] \quad (3.10)$$

Esta descrição alternativa é usual na literatura e adotada sempre que o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  é levado em consideração. Os resultados que apresentaremos em seguida estão disponíveis em Daiha and Deaecto [2019a] e utilizam o conjunto  $\mathfrak{C}(\kappa) = \mathbb{K}^\kappa$  já definido na Subseção 2.2.1 para algum  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ . Este conjunto contém  $N^\kappa$  elementos  $\mathfrak{C}_p(\kappa)$ ,  $\forall p \in [1, N^\kappa]$  cada um deles representando uma sequência de  $\kappa$  índices  $\mathfrak{C}_p(\kappa) = (i[0], \dots, i[\kappa-1])$ . O próximo teorema fornece condições para estabilidade exponencial do sistema (3.5)-(3.7).

**Teorema 3.1.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e  $q = \sigma[-1]$ , assuma que existam matrizes simétricas  $P[n] > 0$ ,  $U[n]$  e  $R_i[n]$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$J_2(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr} (H'_q P[0] H_q + G'_q G_q) \quad (3.11)$$

sujeito a

$$A'_i P[n+1] A_i - P[n] + E'_i E_i < U[n] + C'_i R_i[n] C_i, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.12)$$

$$U[n] + C'_{i[n]} R_{i[n]}[n] C_{i[n]} < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (3.13)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição da contorno  $P[\kappa] = P[0] > 0$ . Então, a regra de comutação dependente da saída medida

$$\sigma(y[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} y[n]' R_i[n - m_n] y[n] \quad (3.14)$$

assegura estabilidade exponencial global da origem do sistema (3.5)-(3.7). Além disso, a solução de (3.11) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** Considere o sistema (3.5)-(3.7) escrito alternativamente da forma (3.8)-(3.10). Adote a função de Lyapunov convexa variante no tempo (2.43) com a continuação periódica  $P[n] = P[n - m_n]$  e  $P[n] > 0$ ,  $\forall n \in [0, \kappa)$ . Assumindo que as desigualdades (3.12)-(3.13) sejam satisfeitas, utilizando a regra de comutação (3.14)

e o operador diferenças dado por  $\Delta V = V(x[n+1], n+1) - V(x[n], n)$ , temos

$$\begin{aligned}
\Delta V &= x[n]' (A'_\sigma P[n+1]A_\sigma - P[n] + E'_\sigma E_\sigma) x[n] - z[n]' z[n] \\
&< x[n]' (U[n] + C'_\sigma R_\sigma[n]C_\sigma) x[n] - z[n]' z[n] \\
&= x[n]' U[n] x[n] + \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' C'_i R_i[n] C_i x[n] - z[n]' z[n] \\
&< -z[n]' z[n]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

válida para  $\forall n \in [0, \kappa)$ . Note que a primeira desigualdade é garantida por (3.12), a segunda igualdade é devido à regra de comutação (3.14) e a última desigualdade é consequência do fato que

$$\begin{aligned}
x[n]' U[n] x[n] + \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' C'_i R_i[n] C_i x[n] &= x[n]' U[n] x[n] + \min_{\lambda[n] \in \Lambda} x[n]' \left( \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i[n] C'_i R_i[n] C_i \right) x[n] \\
&\leq x[n]' \left( U[n] + \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i[n] C'_i R_i[n] C_i \right) x[n], \lambda[n] \in \Lambda_v \\
&= x[n]' \left( U[n] + C'_{i[n]} R_{i[n]}[n] C_{i[n]} \right) x[n] \\
&< 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Em (3.16), a primeira igualdade é assegurada pois para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o operador mínimo do lado direito ocorre sempre em um dos vértices do conjunto simplex unitário  $\lambda[n]^* \in \Lambda_v \subset \Lambda$ . Este operador nos permite adotar uma simplificação, que não implica em perda de generalidade, e consiste em restringir o vetor  $\lambda[n]$  ao conjunto dos vértices do simplex unitário  $\lambda[n] \in \Lambda_v, \forall n \in [0, \kappa)$ . No que se refere à segunda igualdade, trata-se de uma representação alternativa, visto que  $i[n]$  indica um dos vértices de  $\Lambda$ . Por fim, a última desigualdade em (3.16) é uma consequência direta de (3.13).

Assim, verificamos que (3.15) assegura que  $\Delta V < 0$  e, portanto, podemos afirmar que existe um escalar  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno tal que a desigualdade

$$V(x[n+1], n+1) \leq (1 - \varepsilon)V(x[n], n) \tag{3.17}$$

é válida  $\forall n \in [0, \kappa)$ . Vamos agora mostrar que  $\Delta V < 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto de fato ocorre devido às condições de contorno  $P[\kappa] = P[0]$  e a continuação periódica  $P[n] = P[n - m_n]$ ,  $R_i[n] = R_i[n - m_n]$  e  $U[n] = U[n - m_n]$ . Além disso, definindo  $\mu^2 = 1 - \varepsilon$  e aplicando (3.17) recursivamente, obtemos

$$V(x[n], n) \leq \mu^{2n} V(x[0], 0) \tag{3.18}$$

válida  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Consequentemente, a desigualdade  $\|x[n]\| \leq c\mu^n \|x[0]\|$ , presente na Definição 2.1, é assegurada para  $c^2 = \max_{p \in [0, \kappa)} \|P[0]\| \|P[p]^{-1}\|$  e, portanto, o sistema (3.8)-(3.10) é globalmente exponencialmente estável. Note que os desenvolvimentos realizados em (3.15) permite-nos escrever

$$V(x[n+1], n+1) < V(x[n], n) - z[n]' z[n] \tag{3.19}$$

válida  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Então, dado que a saída controlada  $z_r$  corresponde à condição inicial  $x[0] = H_q e_r$ , somando

ambos os lados de (3.19) para  $\forall n \in \mathbb{N}$ , obtemos  $\|z_r\|_2^2 < x[0]'P[0]x[0]$  e, portanto, do índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  definido em (2.63), temos

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &= \sum_{r=1}^{n_w} \|z_r\|_2^2 + e_r' G_q' G_q e_r \\ &< \sum_{r=1}^{n_w} e_r' (H_q' P[0] H_q + G_q' G_q) e_r \\ &= \text{Tr} (H_q' P[0] H_q + G_q' G_q) \end{aligned} \quad (3.20)$$

provando assim o teorema proposto.  $\square$

Observe que o projeto da regra de comutação é obtido como solução de um conjunto de  $N^\kappa$  subproblemas convexos, os quais são descritos em termos de desigualdades matriciais lineares e, conseqüentemente, facilmente resolvidos através de rotinas numéricas prontamente disponíveis na literatura. Além disso, devemos observar que devido à regra de comutação (3.14), a busca de  $\lambda \in \Lambda_v$  em (3.16) é restrita, sem perda de generalidade, ao conjunto dos vértices do simplex unitário, ou seja,  $\lambda[n] \in \Lambda_v \subset \Lambda$ . Esta simplificação associada à natureza variante no tempo da função da Lyapunov escolhida, é o que nos permitiu obter as condições do Teorema 3.1.

É importante destacarmos que a determinação da regra de comutação (3.14) não está completamente definida pelo conjunto solução  $\Psi$  do Teorema 3.1. Isso ocorre pois para cada instante de tempo  $n \in [0, \kappa)$ , as matrizes  $R_i[n]$  estão restritas pela desigualdade (3.13) apenas para o caso em que  $i = i[n]$ . Para  $i \neq i[n]$  estas matrizes podem ser arbitrariamente escolhidas de forma a satisfazer (3.12). Nesse sentido, uma escolha trivial, que não é necessariamente a melhor, é fazer  $R_i[n] = \alpha I$ ,  $\forall i \neq i[n]$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ . Entretanto, esta escolha restringe a regra de comutação à sequência periódica  $\mathfrak{C}_p^*(\kappa)$  obtida como a solução ótima do problema (3.11). Infelizmente, como será ilustrado no Exemplo 3.1, a regra de comutação periódica não é uma boa escolha quando se trata da melhoria do desempenho efetivo do sistema. Neste sentido, uma escolha mais adequada consiste em considerar  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , o mais próximo possível da borda de factibilidade de (3.12), como apresentado no próximo corolário.

**Corolário 3.1.** *Assuma que exista uma solução para o problema de otimização do Teorema 3.1, considere as matrizes  $U[n]$  e  $P[n]$  resultantes e defina*

$$\Gamma_{1i} = C_i' (C_i C_i')^{-1}, \quad \Gamma_{2i} = \mathcal{N} (C_i) \quad (3.21)$$

e a seguinte variável matricial

$$\mathcal{L}_i[n] = A_i' P[n+1] A_i - P[n] + E_i' E_i - U[n] \quad (3.22)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $n \in [0, \kappa)$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, a regra de comutação dependente da saída medida (3.14) é globalmente exponencialmente estabilizante para as matrizes  $R_i[n]$  determinadas da seguinte forma:

- Para  $i \neq i[n]$ , adota-se

$$R_i[n] = \Gamma_{1i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{1i} - \Gamma_{1i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{2i} \left( \Gamma_{2i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{2i} \right)^{-1} \Gamma_{2i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{1i} + \varepsilon I \quad (3.23)$$

para o caso em que  $\dim(\mathcal{N}(C_i)) \neq 0$  ou

$$R_i[n] = C_i'^{-1} \mathcal{L}_i[n] C_i^{-1} + \varepsilon I \quad (3.24)$$

caso contrário.

- Para  $i = i[n]$ , adota-se a solução fornecida pelo Teorema 3.1.

**Prova:** O objetivo é obter  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , o mais próximo possível da borda de factibilidade de (3.12). Note que para  $\dim(\mathcal{N}(C_i)) = 0$  a matriz  $C_i$  é não-singular e  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , é obtida diretamente de (3.24). Caso contrário, definindo  $\Gamma_i = [\Gamma_{1i} \ \Gamma_{2i}]$ , observando que  $C_i \Gamma_i = [I \ 0]$  e multiplicando à direita de (3.12) por  $\Gamma_i$  e à esquerda pela transposta desta matriz, obtemos

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{1i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{1i} - R_i[n] & \bullet \\ \Gamma_{2i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{1i} & \Gamma_{2i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{2i} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

Esta desigualdade é factível como consequência direta da factibilidade de (3.12). Então, temos  $\Gamma_{2i}' \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{2i} < 0$ , o que nos permite aplicar o Complemento de Schur com relação a este bloco em (3.25) e obter (3.23), concluindo assim a prova do corolário.  $\square$

No caso em que todos os estados estão disponíveis, ou seja,  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , o próximo corolário apresenta a versão do Teorema 3.1 para o projeto da regra de comutação via realimentação de estado.

**Corolário 3.2.** Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e  $q = \sigma[-1]$ , assumamos que existam matrizes simétricas  $P[n] > 0$  e  $R_i[n]$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização

$$J_2(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr} (H_q' P[0] H_q + G_q' G_q) \quad (3.26)$$

sujeito a

$$A_i' P[n+1] A_i - P[n] + E_i' E_i < R_i[n], \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.27)$$

$$R_{i[n]}[n] < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (3.28)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0] > 0$ . Então, a regra de comutação dependente do estado

$$\sigma(x[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' R_i[n - m_n] x[n] \quad (3.29)$$

assegura a estabilidade exponencial global da origem do sistema (3.5)-(3.7), com  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Além disso, a solução de (3.26) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** A prova é obtida diretamente do Teorema 3.1, considerando  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e  $U[n] = 0$ ,  $\forall n \in [0, \kappa)$ .  $\square$

Note que a desigualdade (3.27) associada a (3.28), resulta em

$$A_{i[n]}' P[n+1] A_{i[n]} - P[n] + E_{i[n]}' E_{i[n]} < 0 \quad (3.30)$$

que junto com (3.26) coincide com as condições de estabilidade e custo garantido apresentado no Teorema 2.4, proposto em Deaecto and Geromel [2018]. Além disso, utilizando a regra de comutação dependente do estado

(3.29) com  $R_i[n]$  dada pelo Corolário 3.1, temos

$$\begin{aligned}\sigma(x[n]) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' R_i[n - m_n] x[n] \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' (\mathcal{L}_i[n - m_n] + \varepsilon I) x[n] \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' (A_i' P[n + 1 - m_n] A_i + E_i' E_i) x[n]\end{aligned}\quad (3.31)$$

que é exatamente a regra obtida na referência [Deaecto and Geromel \[2018\]](#). De fato, sempre que  $i \neq i[n]$ , temos que  $R_i[n] = \mathcal{L}_i[n] + \varepsilon I$  dada por (3.24), que é equivalente ao caso  $i = i[n]$ , visto que a restrição (3.28) impõe que (3.27) seja satisfeita o mais próximo possível da igualdade, isto é,  $R_{i[n]}[n] \approx \mathcal{L}_{i[n]}[n] \approx -\varepsilon I$ . O próximo exemplo, também disponível em [Daiha and Deaecto \[2019a\]](#), coloca em evidência a importância de uma escolha adequada da matriz  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , com relação ao desempenho efetivo (custo verdadeiro) do sistema.

**Exemplo 3.1.** Considere o sistema (3.5)-(3.7) composto por três subsistemas instáveis definidos por

$$A_i = e^{A_i h} \quad (3.32)$$

para  $i \in \{1, 2, 3\}$  com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -22 & -19 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -34 & -34 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & -33 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

e  $h = 0,1$ . As matrizes de saída são dadas por  $E_1 = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $E_2 = [5 \ 0 \ 5]$ ,  $E_3 = [1 \ 0 \ 1]$  e  $G_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  e as de entrada são  $H_i = [-1 \ 1 \ 1]'$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Neste exemplo, consideramos duas situações distintas. Na primeira, denotada por RE, o estado está disponível e, portanto, vamos considerar as condições do Corolário 3.2. Na segunda, denotada por RS, a terceira variável de estado não está disponível, sendo assim, implementamos as condições do Teorema 3.1 com a saída medida definida pelas seguintes matrizes

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Para  $i = i[n]$ , as matrizes  $R_i[n]$  utilizadas são fornecidas pelo Corolário 3.2 ou pelo Teorema 3.1 para RE e RS, respectivamente. No caso  $i \neq i[n]$  são consideradas quatro situações diferentes, as quais são apresentadas a seguir:

- **Caso 1**  $\Rightarrow$  Considere  $R_i[n] = \alpha I$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ .
- **Caso 2**  $\Rightarrow$  Considere  $R_i[n]$  obtida do Corolário 3.1.
- **Caso 3**  $\Rightarrow$  Considere  $R_i[n] = \alpha I$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ , para  $i = 1$ , e  $R_i[n]$  obtida do Corolário 3.1, para  $i \in \{2, 3\}$ .
- **Caso 4**  $\Rightarrow$  Considere  $R_i[n] = \alpha I$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ , para  $i = 3$ , e  $R_i[n]$  obtida do Corolário 3.1, para  $i \in \{1, 2\}$ .

Claramente, todas estas escolhas satisfazem as condições do Corolário 3.2 ou do Teorema 3.1 relativas ao projeto via realimentação de estado ou de saída, respectivamente. A Tabela 3.1 apresenta os custos garantidos, representados por  $J_{2s}$ , e os custos verdadeiros, considerando os quatro casos descritos anteriormente para os valores de  $\kappa \in \{2, 3, 4, 6\}$ . Como esperado, a regra de comutação no Caso 1 é periódica para ambas situações, RE e RS, com a sequência de comutação coincidindo com a sequência ótima dada por  $\mathfrak{C}_p^*(\kappa)$ . Além disso, sempre que  $R_i[n] = \alpha I$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , o custo verdadeiro coincide com o garantido para RE. Isso porque, como já discutido em [Deaecto and Geromel \[2018\]](#), as condições de (2.50) e, conseqüentemente, as do Corolário 3.2 são necessárias e suficientes para a existência de uma regra de comutação periódica. Esta mesma propriedade não é observada para RS, indicando que as condições do Teorema 3.1 são apenas suficientes para a existência de uma regra de comutação periódica. Além disso, é importante notar que o custo verdadeiro pode ser melhorado de acordo com a escolha de  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ .

	$\kappa$	$J_{2s}$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
RE	2	87,0862	87,0862	17,8226	40,2632	19,7765
	3	52,8075	52,8075	10,3364	20,5950	12,4412
	4	38,0372	38,0372	7,1735	13,3465	11,4353
	6	21,2337	21,2337	8,6027	11,2123	8,6054
RS	2	1365,4623	105,8715	49,0456	72,7792	81,7714
	3	437,7508	78,9105	64,9189	78,6427	64,9213
	4	263,1494	76,3454	71,5506	76,3378	71,5506
	6	172,5799	40,8871	38,9878	40,8871	38,9878

Tabela 3.1: Custos garantido e verdadeiro  $\mathcal{H}_2$  para RE e RS

Como ilustrado na Tabela 3.1, o Caso 2 é uma escolha razoável, uma vez que, para este exemplo em particular, forneceu o menor custo verdadeiro e, portanto, o melhor desempenho efetivo. Considerando a regra de comutação dependente da saída (3.14) com  $\kappa = 2$ , e as matrizes  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , fornecidas pelo Corolário 3.1, obtivemos as Figuras 3.1 e 3.2 que apresentam, respectivamente, as trajetórias do estado e a sequência de comutação. Observando as figuras, podemos notar que a sequência ótima de comutação não é periódica e, além disso, a escolha de  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , permitiu à regra de comutação selecionar o primeiro subsistema que não está incluso no conjunto  $\mathcal{C}_6^*(2) = (2\ 3)$ , determinado pela solução do Teorema 3.1.

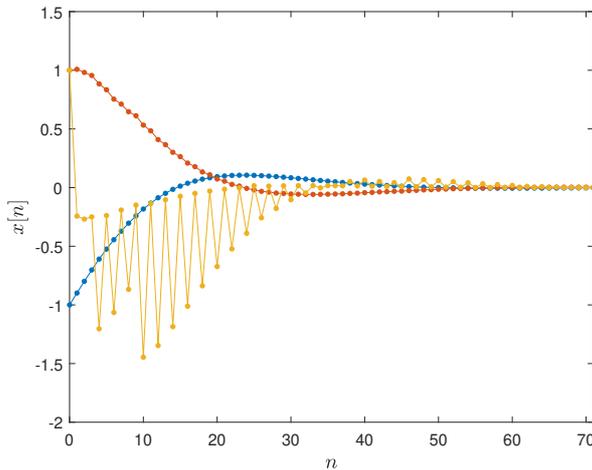


Figura 3.1: Trajetórias do estado

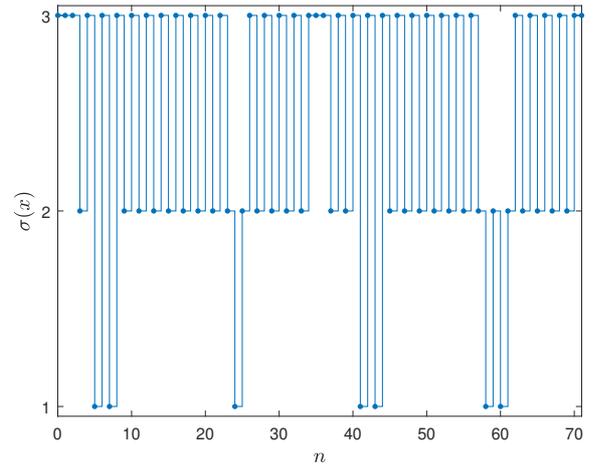


Figura 3.2: Sequência de comutação

Vamos agora comparar a metodologia proposta no Teorema 3.1 com as disponíveis em Cardim et al. [2016] e Geromel et al. [2008]. Os resultados de ambas referências são baseados nas desigualdades de Lyapunov-Metzler e, portanto, são difíceis de resolver para mais de dois subsistemas. Sendo assim, vamos considerar apenas os dois primeiros subsistemas do exemplo, cujas matrizes dinâmicas são dadas por (3.33) e as de saída medida dadas por (3.34). Nesse sentido, resolvendo as condições do Teorema 6 da referência Geromel et al. [2008], que trata do projeto conjunto de uma regra de comutação e de um filtro dinâmico de ordem completa, obtivemos o custo garantido  $J_{2s} = 466,6249$ . Em contrapartida, resolvendo as condições do Teorema 3.1 com  $\kappa = 8$  obtivemos  $J_{2s} = 258,2999$ , que é 44% menor que o custo garantido fornecido pelas condições de Geromel et al. [2008]. Além disso, adaptando as condições de Cardim et al. [2016], que foram originalmente desenvolvidas para o caso a tempo contínuo, para tratar sistemas a tempo discreto, temos

$$A_i' \left( \sum_{j \in \mathbb{K}} \pi_{ji} P_j \right) A_i - P_i + E_i' E_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.35)$$

com matrizes estruturadas  $P_i = C_i' \hat{P}_i C_i + P_o > 0, \forall i \in \mathbb{K}$ . Estas condições representam a versão a tempo discreto das apresentadas em Cardim et al. [2016] (veja o passo 1 da Seção 5.2 de Cardim et al. [2016]). Infelizmente, resolvendo (3.35) não encontramos solução factível. Para o caso de realimentação de estado, as condições propostas em Geromel et al. [2008] forneceram o custo  $J_{2s} = 216,4039$ , enquanto que as condições do Corolário 3.2 com  $\kappa = 8$  forneceram  $J_{2s} = 88,9425$ .

O Exemplo 3.1 coloca em evidência a importância da escolha de  $R_i[n], \forall i \neq i[n]$ , para a melhoria do custo verdadeiro tanto para o caso de realimentação de estado como de saída. Além disso, como ilustrado no exemplo citado, as condições do Teorema 3.1 não são mais conservadoras do que as propostas por Geromel et al. [2008] e aquelas adaptadas de Cardim et al. [2016]. Nestas referências as condições são descritas em termos das desigualdades de Lyapunov-Metzler e, portanto, muito difíceis de resolver para  $N \geq 3$ .

Analisando o Teorema 3.1 do ponto de vista de complexidade numérica, observamos que a sua solução implica em resolver  $N^\kappa$  subproblemas convexos, cada um deles constituído  $(N + 1)\kappa$  desigualdades matriciais lineares e  $\kappa(n_x^2 + n_x) + N\kappa(n_y^2 + n_y)/2$  variáveis. Essa análise coloca em evidência que a complexidade numérica, tanto do Teorema 3.1 como do Corolário 3.2, aumenta com o valor de  $\kappa$  e  $N$ . Felizmente, não é necessário que o valor de  $\kappa$  seja muito grande para se obter um bom desempenho. Note que o custo não necessariamente decresce com o valor de  $\kappa$  como será ilustrado no próximo exemplo.

**Exemplo 3.2.** Considere o sistema (3.5)-(3.7) composto por dois subsistemas instáveis, dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -2 \\ -3 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$E_1 = [0 \ 2 \ 0], E_2 = [1 \ 0 \ 1], G_i = 0, i \in \{1, 2\}$ , e as seguintes matrizes de saída medida

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

Resolvendo as condições do Teorema 3.1, obtivemos  $J_{2s}(\kappa = 5) = 125,9068$  e  $J_{2s}(\kappa = 6) = 245,5724$ , indicando que o custo não necessariamente decresce com o aumento de  $\kappa$ .

Na verdade, é importante salientar que  $J_{2s}(\alpha\kappa) \leq J_{2s}(\kappa)$  sempre que  $\alpha\kappa \geq \kappa$  com  $\alpha \geq 2$ , uma vez que  $\mathcal{C}(\alpha\kappa)$  contém todas as sequências com período  $\kappa$  como caso particular.

### 3.2.2 Síntese da lei de controle $u$

Até o presente momento, tratamos do projeto da regra de comutação  $\sigma$  para o caso em que ela atua como a única variável de controle do sistema (3.5)-(3.7). A partir de agora, vamos considerar o sistema mais geral (3.1)-(3.3) evoluindo de  $x[-1] = 0$ , com entrada externa  $w[n] = \delta[n+1]e_r$  e lei de controle  $u[n]$  dada em (3.4). Conectando a entrada de controle  $u[n]$  neste sistema e considerando a sua representação alternativa, como discutido na Seção 2.3, obtemos

$$x[n+1] = A_{L_\sigma} x[n], \quad x[0] = H_{\sigma[-1]} e_r \quad (3.38)$$

$$z[n] = E_{L_\sigma} x[n] \quad (3.39)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] \quad (3.40)$$

cujas matrizes de malha fechada são dadas por

$$A_{L_i} = A_i + B_i L_i C_i, \quad E_{L_i} = E_i + F_i L_i C_i, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (3.41)$$

Nosso objetivo é determinar os ganhos de realimentação de saída  $\{L_1, \dots, L_N\}$  e a regra de comutação  $\sigma(y)$  de forma a assegurar estabilidade exponencial global da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  de desempenho. Neste sentido, vamos apresentar dois procedimentos de projeto. O primeiro deles é realizado em dois estágios sequenciais, onde os ganhos matriciais  $\{L_1, \dots, L_N\}$  e a regra  $\sigma(\cdot)$  são determinados separadamente. O segundo procedimento é menos conservador pois leva em conta o projeto conjunto das duas variáveis de controle  $\sigma(\cdot)$  e  $u$ . Entretanto, devido à complexidade envolvida neste último, ele será aplicado apenas para o caso em que o estado está disponível para realimentação. A seguir apresentamos detalhes dos dois procedimentos mencionados.

### 3.2.2.1 Projeto em dois estágios

Este procedimento leva em conta a determinação *a priori* dos ganhos de realimentação de saída  $L_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , que minimizam a norma  $\mathcal{H}_2$  de cada subsistema isolado. Posteriormente, com os subsistemas em malha fechada já definidos, a regra de comutação é obtida a partir das condições do Teorema 3.1 e do Corolário 3.1. Para facilitar os desenvolvimentos que seguem vamos assumir que  $G_i = 0$ ,  $F_i' E_i = 0$  e que  $F_i' F_i > 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

Note, entretanto, que mesmo para cada subsistema isolado, a determinação do ganho estático de realimentação de saída não é uma tarefa trivial. Para melhorar a notação, a partir de agora, eliminamos a dependência de índice nas matrizes dos subsistemas.

Note que, para  $n_y < n_x$  o problema de controle ótimo a ser resolvido é dado por

$$\inf_{L \in \mathcal{L}_o} \|E_L(zI - A_L)^{-1} H\|_2^2 \quad (3.42)$$

com  $L$  pertencente ao conjunto convexo

$$\mathcal{L}_o = \{ZC : Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}\} \quad (3.43)$$

Devido à sua importância, este problema foi exaustivamente estudado por décadas. Entretanto, dada a sua natureza não-convexa, que não permite linearização por mudanças biunívocas de variáveis, uma solução global nunca foi completamente determinada, veja [Boyd et al. \[1994\]](#) para detalhes.

Recentemente, para sistemas lineares e invariantes no tempo, a referência [Geromel and Deaecto \[2018\]](#) apresentou um algoritmo baseado no método de Kleinman-Newton, proposto em [Kleinman \[1968\]](#), para tratar sistemas no domínio do tempo contínuo e levando em conta a otimização da norma  $\mathcal{H}_2$ . Além do problema de controle tratado em [Kleinman \[1968\]](#), o método de Kleinman-Newton Generalizado proposto em [Geromel and Deaecto \[2018\]](#) permite abordar problemas que apresentam restrições convexas nos ganhos de realimentação. Um deles, de grande interesse nesta tese, é o controle via realimentação estática de saída. A característica mais importante deste algoritmo é que ele mantém intacta a convergência monotônica para um mínimo local, que é uma propriedade do método original. Vale ressaltar que a natureza local da solução é compensada pela simplicidade de implementação do algoritmo e pelo fato de que em muitos casos ele converge para a solução

global. A generalização para tratar sistemas a tempo discreto foi realizada em Geromel and Deaecto [2017]. Como ficará claro em seguida, esta generalização se baseia em reescrever as condições de projeto do sistema a tempo discreto com uma estrutura equivalente àquela adotada no caso contínuo. A partir desta descrição, a solução é obtida diretamente aplicando o algoritmo proposto em Geromel and Deaecto [2018].

Para obter esta generalização, defina as seguintes matrizes

$$\hat{A}_K = \hat{A} + \hat{B}K \quad \text{e} \quad \hat{E}_K = \hat{E} + \hat{F}K \quad (3.44)$$

com

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -I/2 & 0 \\ A & -I/2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}, \quad \hat{E}' = \begin{bmatrix} E' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{F} = F, \quad \hat{C}' = \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

e o conjunto convexo

$$\mathcal{K}_o = \{Z\hat{C}' : Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}\} \quad (3.46)$$

que quando comparado à (3.43) indica que  $K \in \mathcal{K}_o$  se e somente se  $K = [L \ 0]$  com  $L \in \mathcal{L}_o$ . Além disso, considerando o conjunto convexo constituído por matrizes definidas positivas estruturadas em dois blocos de dimensões compatíveis

$$\mathcal{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} : P > 0, P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \right\} \quad (3.47)$$

podemos formular o problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  dado em (3.42) de forma equivalente às condições comumente adotadas para sistemas a tempo contínuo, como apresentado no lema seguinte disponível em Geromel and Deaecto [2017].

**Lema 3.1.** *Assuma que  $\mathcal{K}$  é um subconjunto de  $\mathcal{K}_o$ . Então, o problema (3.42) é equivalente a*

$$\inf_{K \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{Q}} \text{Tr}(\hat{H}'Q\hat{H}) \quad (3.48)$$

$$\hat{A}'_K Q + Q\hat{A}_K + \hat{E}'_K \hat{E}_K < 0 \quad (3.49)$$

**Prova:** A prova está disponível em Geromel and Deaecto [2017], mas será aqui apresentada em linhas gerais. Considerando a matriz estruturada  $Q \in \mathcal{Q}$  obtemos diretamente que  $\text{Tr}(\hat{H}'Q\hat{H}) = \text{Tr}(H'PH)$ . Por outro lado, o fato que  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_o$  implica que qualquer  $K$  factível pode ser escrito como  $K = [L \ 0]$  para algum  $L \in \mathcal{L}_o$ . Usando as definições matriciais de (3.45) e considerando que  $Q \in \mathcal{Q}$ , obtemos

$$Q\hat{A}_K = \begin{bmatrix} -P/2 & 0 \\ P(A+BL) & -P/2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

assim como  $\hat{E}'_K = [E + FL \ 0]$ . Então, a partir destas relações, a restrição matricial do problema (3.48)-(3.49) pode ser reescrita como

$$\inf_{L \in \mathcal{L}_o, P > 0} \text{Tr}(H'PH) \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} -P + (E + FL)'(E + FL) & \bullet \\ P(A + BL) & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (3.52)$$

que, aplicando o Complemento de Schur com relação à última linha e coluna, descreve exatamente o problema

(3.42).  $\square$

Comparando as condições (3.48)-(3.49) com as (3.51)-(3.52) torna-se evidente que a desigualdade de Lyapunov no domínio do tempo discreto foi convertida, sem perda de generalidade, na estrutura da desigualdade de Lyapunov no domínio do tempo contínuo.

A partir de agora vamos considerar o resultado do Lema 3.1 e resolver o problema não-convexo (3.48) sujeito às desigualdades (3.49) a partir de um algoritmo que consiste na generalização do célebre método de Kleinman-Newton proposto em Kleinman [1968]. Para esta finalidade, note que a desigualdade matricial (3.49) pode ser reescrita de forma equivalente a

$$\hat{A}'Q + Q\hat{A} + \hat{E}'\hat{E} - Q\hat{B}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'Q + R_{KQ} < 0 \quad (3.53)$$

em que a matriz  $R_{KQ} > 0$  é dada por

$$R_{KQ} = \left( K + (\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'Q \right)' (\hat{F}'\hat{F}) \left( K + (\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'Q \right) \quad (3.54)$$

Além disso, considere as seguintes funções matriciais

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_Q \\ \hat{E}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{B}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'Q \\ \hat{E} - \hat{F}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'Q \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

que serão utilizadas na prova do próximo teorema, proposto em Geromel and Deaecto [2017], que assegura a monotonicidade da solução, que é uma das principais propriedades do método de Kleinman-Newton original.

**Teorema 3.2.** *Assuma que o par  $(K_0 \in \mathcal{K}, Q_0 \in \mathcal{Q})$  é uma solução factível para o problema (3.48)-(3.49) com custo  $J_{2s}(K_0) = \text{Tr}(\hat{H}'Q_0\hat{H})$ . Seja  $(K \in \mathcal{K}, S \in \mathcal{Q})$  a solução ótima do seguinte problema de otimização convexa*

$$\inf_{K \in \mathcal{K}, S \in \mathcal{Q}} \text{Tr}(\hat{H}'S\hat{H}) \quad (3.56)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \hat{A}'_{Q_0}S + S\hat{A}_{Q_0} + \hat{E}'_{Q_0}\hat{E}_{Q_0} & \bullet \\ K + (\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'S & -(\hat{F}'\hat{F})^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.57)$$

A solução  $Q \in \mathcal{Q}$  de (3.48)-(3.49) com  $K \in \mathcal{K}$  fixo produz o custo  $J_{2s}(K) = \text{Tr}(\hat{H}'Q\hat{H}) \leq J_{2s}(K_0)$ .

**Prova:** Aplicando o Complemento de Schur na segunda linha e coluna de (3.57), obtemos

$$\hat{A}'_{Q_0}S + S\hat{A}_{Q_0} + \hat{E}'_{Q_0}\hat{E}_{Q_0} + R_{KS} < 0 \quad (3.58)$$

Agora, adotando as funções matriciais definidas em (3.55) e lembrando que  $F'E = 0$ ,  $F'F > 0$ , algumas manipulações algébricas levam a

$$\hat{A}'_{Q_0}S + S\hat{A}_{Q_0} + \hat{E}'_{Q_0}\hat{E}_{Q_0} = \hat{A}'S + S\hat{A} + \hat{E}'\hat{E} - S\hat{B}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'S + (S - Q_0)\hat{B}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'(S - Q_0) \quad (3.59)$$

**Algoritmo 1:** Método de Kleinman-Newton Generalizado para o custo  $\mathcal{H}_2$ .

**Entrada:**  $K_0 \in \mathcal{K}$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno

**Saída:**  $K^* \in \mathcal{K}$  e o custo ótimo  $J_{2s}(K^*)$

1 **início**

2  $p \leftarrow 0$  ;

3 Resolva o problema (3.48)-(3.49) para  $K = K_0 \in \mathcal{K}$ . Determine  $Q_0 \in \mathcal{Q}$  e o custo inicial

$$J_{2s}(K_0) = \text{Tr}(\hat{H}'Q_0\hat{H})$$

4 **enquanto**  $J_{2s}(K_p)/J_{2s}(K_{p-1}) < 1 - \varepsilon$  **faça**

5 Resolva o seguinte problema convexo

$$\inf_{K \in \mathcal{K}, S \in \mathcal{Q}} \text{Tr}(\hat{H}'S\hat{H})$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}'_{Q_p}S + S\hat{A}_{Q_p} + \hat{E}'_{Q_p}\hat{E}_{Q_p} & \bullet \\ K + (\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'S & -(\hat{F}'\hat{F})^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

6  $p \leftarrow p + 1$

7 Resolva o problema (3.48)-(3.49) para  $K \in \mathcal{K}$  solução do problema anterior e obtenha

$$Q \in \mathcal{Q}. \text{ Defina } (K_p, Q_p) = (K, Q) \text{ e determine o valor do custo atual } J_{2s}(K_p) = \text{Tr}(\hat{H}'Q_p\hat{H})$$

8 **fim**

9 **fim**

Acoplando(3.59) na desigualdade (3.58) e utilizando (3.53), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{A}'_K S + S\hat{A}_K + \hat{E}'_K \hat{E}_K &< -(S - Q_0)\hat{B}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'(S - Q_0) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Isso indica que o par ótimo  $(K, S)$  é uma solução factível para o problema (3.48)-(3.49). Consequentemente, devemos ter

$$J_{2s}(K) = \text{Tr}(\hat{H}'Q\hat{H}) \leq \text{Tr}(\hat{H}'S\hat{H}) \quad (3.61)$$

Por outro lado, uma vez que

$$\hat{A}'_{K_0}Q_0 + Q_0\hat{A}_{K_0} + \hat{E}'_{K_0}\hat{E}_{K_0} < 0 \quad (3.62)$$

o par  $(K, S)$  arbitrariamente próximo de  $(K_0, Q_0)$  é uma solução factível para a desigualdade matricial linear (3.57). Como resultado, a otimalidade do problema (3.56)-(3.57) fornece

$$\text{Tr}(\hat{H}'\hat{S}\hat{H}) \leq \text{Tr}(\hat{H}'Q_0\hat{H}) = J_{2s}(K_0) \quad (3.63)$$

Desta forma, podemos concluir que  $J_{2s}(K) = \text{Tr}(\hat{H}'Q\hat{H}) \leq \text{Tr}(\hat{H}'\hat{S}\hat{H}) \leq J_{2s}(K_0)$ , o que completa a prova.  $\square$

O Teorema 3.2 evidencia que, a partir de um par factível  $(K_0 \in \mathcal{K}, Q_0 \in \mathcal{Q})$ , a solução do problema (3.56)-(3.57) fornece um novo par factível  $(K \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{Q})$  tal que o custo  $J_{2s}$  decresce ou permanece constante. O procedimento para a obtenção de uma solução inicial factível  $(K_0 \in \mathcal{K}, Q_0 \in \mathcal{Q})$  para o problema (3.48)-(3.49) segue o mesmo raciocínio aqui apresentado, mas com a adoção de uma função penalidade adequada, como a proposta em Geromel and Deaecto [2018]. A partir desta solução inicial, o Algoritmo 1 apresenta o método de Kleinman-Newton Generalizado para o custo  $\mathcal{H}_2$ .

O resultado do Teorema 3.2 garante que a sequência gerada pelo Algoritmo 1 satisfaz a propriedade de  $J_{2s}(K_p) \geq J_{2s}(K_{p+1}) \geq 0$ , o que implica na conclusão de que a convergência para uma solução estacionária do problema em consideração ocorre de maneira uniforme e monotônica. Além disso, devemos salientar que este procedimento coincide com o método de Kleiman-Newton original quando não há restrição na matriz de ganho.

Uma vez obtido o ganho  $L$  de cada subsistema pelo método de Kleinman-Newton Generalizado, determinamos as matrizes em malha fechada  $A_{L_i}$  e  $E_{L_i}$  dadas em (3.41). A regra de comutação é então obtida resolvendo-se as condições do Teorema 3.1 com a desigualdade (3.12) substituída pela seguinte

$$A'_{L_i} P[n+1] A_{L_i} - P[n] + E'_{L_i} E_{L_i} < U[n] + C'_i R_i[n] C_i, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.64)$$

e utilizando diretamente o resultado do Corolário 3.1.

Note que o projeto via realimentação de estado é mais simples, uma vez que não apresenta restrição na matriz de ganho  $L \in \mathcal{L}_o \equiv \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ . Neste caso, o ganho  $L$  de cada subsistema isolado pode ser obtido através do Algoritmo 1 para  $C = I$  ou simplesmente resolvendo o problema de programação convexa

$$\inf_{S>0} \text{Tr}(W) \quad (3.65)$$

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet \\ AS + BY & S & \bullet \\ ES + FY & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} W & \bullet \\ H & S \end{bmatrix} > 0 \quad (3.66)$$

que é clássico na literatura e fornece o ganho  $L = YS^{-1}$  como solução ótima. Por se tratar de um caso mais simples, podemos obter uma solução menos conservadora, considerando o projeto conjunto da lei de controle e da regra de comutação, como será apresentado em seguida.

### 3.2.2.2 Projeto conjunto

Nesta subseção, considere o sistema em malha fechada (3.38)-(3.40) com as matrizes (3.41) e  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Nosso objetivo é generalizar o resultado do Corolário 3.2 para tratar este sistema mais geral, como apresentado nas condições a seguir.

**Corolário 3.3.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e  $q = \sigma[-1]$ , assuma que existam matrizes simétricas  $X[n] > 0$ ,  $Q_i[n]$  e as matrizes  $J_i$ ,  $Y_i$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$J_2(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr}(W) \quad (3.67)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ H_q & X[0] & \bullet \\ G_q & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} J_i + J'_i - X[n] + Q_i[n] & \bullet & \bullet \\ A_i J_i + B_i Y_i & X[n+1] & \bullet \\ E_i J_i + F_i Y_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.69)$$

$$Q_i[n] < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (3.70)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $X[\kappa] = X[0] > 0$ . Então, a lei de controle  $u[n] = L_\sigma x[n]$  com os ganhos de realimentação de estado, dados por  $L_i = Y_i J_i^{-1}$  e a regra de comutação (3.29), com

$R_i[n] = J_i'^{-1}Q_i[n]J_i^{-1}$  asseguram estabilidade exponencial da origem do sistema (3.1)-(3.3) com  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Além disso, a solução de (3.67) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** Assumindo que as matrizes  $J_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , são não-singulares, temos de Oliveira et al. [1999], que a seguinte desigualdade

$$J_i'X[n]^{-1}J_i \geq J_i' + J_i - X[n] > 0 \quad (3.71)$$

é válida. Ademais, utilizando  $L_i = Y_iJ_i^{-1}$  e  $R_i[n] = J_i'^{-1}Q_i[n]J_i^{-1}$ , a desigualdade (3.69) multiplicada à direita por  $\text{diag}(J_i^{-1}, I, I)$  e à esquerda pela sua transposta garante a factibilidade de

$$\begin{bmatrix} X[n]^{-1} + R_i[n] & \bullet & \bullet \\ A_i + B_iL_i & X[n+1] & \bullet \\ E_i + F_iL_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.72)$$

Agora, aplicando o Complemento de Schur em (3.72) com relação às duas últimas linhas e colunas, obtemos (3.27) com  $A_{L_i} \rightarrow A_i$ ,  $E_{L_i} \rightarrow E_i$  e  $P[n] = X[n]^{-1}$ , o que satisfaz a condição de contorno  $P[0] = P[\kappa]$ . Note que (3.70) assegura a validade de (3.28) e a função objetivo (3.26) é obtida de  $W > H_q'P[0]H_q + G_q'G_q$  que é resultante da aplicação do Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas de (3.68). Logo, as condições do Corolário 3.2 são satisfeitas para o sistema em malha fechada. A prova é assim concluída.  $\square$

No que diz respeito à regra de comutação, note que a matriz  $Q_i[n]$  é restrita somente para  $i = i[n]$ . Caso contrário, para  $i \neq i[n]$ , a matriz  $Q_i[n]$  pode ser escolhida de maneira arbitrária desde que atenda a restrição (3.69). Uma escolha possível é aproximar  $Q_i[n]$  da borda de factibilidade de (3.69). Entretanto, observando a desigualdade (3.71), uma opção menos restritiva é realizar esta aproximação mas com  $J_i'X[n]^{-1}J_i$  no lugar de  $J_i' + J_i - X[n]$  em (3.69), obtendo

$$\begin{aligned} Q_i[n] = & -J_i'X[n]^{-1}J_i + (E_iJ_i + F_iY_i)'(E_iJ_i + F_iY_i) + \\ & + (A_iJ_i + B_iY_i)'X[n+1]^{-1}(A_iJ_i + B_iY_i) + \varepsilon I \end{aligned} \quad (3.73)$$

para todo  $i \neq i[n]$  com  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno. Desta forma, para  $\forall i = i[n]$  a matriz  $Q_i[n]$  é fornecida diretamente pela solução do Corolário 3.3 enquanto que para  $\forall i \neq i[n]$  a matriz é obtida de (3.73). Com esta escolha recuperamos o resultado proposto no Corolário 3 de Deaecto and Geromel [2018] bem como a regra de comutação associada.

Existem duas outras situações que são cobertas por este corolário as quais, embora de menor interesse no contexto do controle de sistemas lineares com comutação, são importantes do ponto de vista teórico e prático. Na primeira situação, substituindo  $(J_i, Y_i)$  por matrizes constantes  $(J, Y)$ , obtemos o ganho de realimentação de estado  $L = YJ^{-1}$  que é independente da regra de comutação e, conseqüentemente, simplifica a implementação da lei de controle. No segundo caso, os pares  $(J_i, Y_i)$  são substituídos por matrizes variantes no tempo  $(J[n], Y[n])$  que fornecem ganhos de realimentação de estado  $L[n] = Y[n]J[n]^{-1}$  independentes de índices, mas variantes no tempo. Esta situação é importante do ponto de vista teórico, pois os resultados dos Corolários 3.2 e 3.3 tornam-se equivalentes. Na verdade, para este caso em particular, nenhum conservadorismo é introduzido no

Corolário 3.3. Isto pode ser verificado fazendo  $J[n] = X[n]$  em (3.71) que, desta forma, é satisfeita na igualdade. O próximo exemplo ilustra os procedimentos de projeto tratados nesta seção.

**Exemplo 3.3.** Considere o sistema (3.1)-(3.3) composto por dois subsistemas instáveis dados por  $A_i = e^{A_i h}$  com  $h = 0,5$  e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 70 & -2 & -30 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 40 & 12 & -12 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$G_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , e as seguintes matrizes de saída medida

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Utilizando o método de Kleinman-Newton Generalizado descrito pelo Algoritmo 1, obtivemos os seguintes ganhos de realimentação de saída

$$L_1 = [-0,8898 \quad -3,1743], \quad L_2 = [-0,0810 \quad -0,1793] \quad (3.77)$$

para cada subsistema isolado associados às normas  $\mathcal{H}_2$  ao quadrado dadas por  $J_{2s} \in \{1.057,1434; 1.086,5362\}$ , respectivamente. Substituindo  $A_{L_i} \rightarrow A_i$  e  $E_{L_i} \rightarrow E_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , na desigualdade (3.12) e resolvendo as condições do Teorema 3.1 para  $\kappa = 6$ , obtivemos  $J_{2s} = 709,6412$ . Observe que para este exemplo, o Teorema 3.1 forneceu um custo garantido 32,87% menor do que a norma  $\mathcal{H}_2$  ao quadrado do primeiro subsistema.

Considerando os mesmos subsistemas, mas substituindo as matrizes de saída (3.76) por  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \{1; 2\}$ , resolvemos o problema (3.65) sujeito a (3.66), obtendo os seguintes ganhos de realimentação de estado

$$L_1 = [-6,2882 \quad -4,0954 \quad -0,1301] \quad L_2 = [-0,2290 \quad -0,1809 \quad -0,0128] \quad (3.78)$$

que coincidem com aqueles obtidos via método Kleinman-Newton Generalizado. Estes ganhos estão associados às normas  $\mathcal{H}_2$  ao quadrado de cada subsistema  $J_{2s} \in \{822,5920; 992,9074\}$ , respectivamente. Substituindo  $A_{L_i} \rightarrow A_i$  e  $E_{L_i} \rightarrow E_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , em (3.27) e resolvendo as condições do Corolário 3.2 com  $\kappa = 2$ , obtivemos o seguinte custo garantido  $J_{2s} = 700,1932$ , que representa uma redução de 14,88% com relação ao custo do subsistema com melhor desempenho. Entretanto, este resultado pode ser melhorado pelo projeto conjunto dos ganhos e da regra de comutação. Para este fim, resolvemos as condições do Corolário 3.3 e obtivemos um custo garantido de  $J_{2s} = 560,9807$ , isto é, uma redução de 19,88% com relação ao caso anterior que leva em conta o projeto dos ganhos e da regra de forma independente.

Este exemplo ilustra os procedimentos de projeto propostos e deixa claro a importância da atuação conjunta de ambas as variáveis de controle. De fato, tanto para o caso de realimentação de estado como de saída, o custo garantido fornecido pelas metodologias propostas foi sempre menor do que aquele obtido considerando cada subsistema isolado. Além disso, o desempenho efetivo resultante da interação conjunta das duas variáveis de controle  $u$  e  $\sigma$ , tanto no projeto em dois estágios como no projeto conjunto é, na verdade, superior às porcentagens apresentadas, uma vez que o custo verdadeiro é menor ou igual ao garantido.

O próximo exemplo compara o desempenho das três classes de ganhos de realimentação de estado que podem ser obtidas pelas condições do Corolário 3.3, ou seja,  $L$ ,  $L_i$  e  $L[n]$ . Os resultados obtidos são comparados com os fornecidos pelas desigualdades de Lyapunov-Metzler, que também levam em conta o projeto conjunto de ambas as variáveis de controle, veja o Teorema 1 de [Deaecto et al. \[2015\]](#) para obter as condições de projeto baseadas nestas desigualdades.

		Corolário 3.3				Lyapunov-Metzler	
		$\kappa$	2	3	4	6	—
$h = 0,1$	$L$	79,9998	79,9998	79,9998	79,9998	79,9998	1,7482
	$L_i$	2,3974	1,3764	1,4322	1,3764	1,3764	
	$L[n]$	2,3974	1,3083	1,3754	1,2894	1,2894	
$h = 0,5$	$L$	423,0699	423,0698	423,0698	423,0698	423,0698	1,5090
	$L_i$	1,5646	1,5884	1,5508	1,5239	1,5239	
	$L[n]$	1,5646	1,5383	1,5232	1,5131	1,5131	

Tabela 3.2: Índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Exemplo 3.4.** Considere o sistema (3.1)-(3.3) composto de dois subsistemas instáveis definidos por  $A_i = e^{A_i h}$ , com matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

$F_1 = [0 \ 5]'$ ,  $F_2 = [0 \ 1]'$  e  $G_i = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , sendo  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  retiradas de Geromel and Colaneri [2006a]. Neste exemplo vamos considerar  $h \in \{0,1; 0,5\}$ .

A Tabela 3.2 apresenta o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  obtido pelo Corolário 3.3 em função de  $\kappa$  e das estruturas de controle  $L$ ,  $L_i$  e  $L[n]$  considerando os dois valores de  $h$  mencionados, bem como o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  obtido pelas desigualdades de Lyapunov-Metzler apresentadas no Teorema 1 de Deaecto et al. [2015]. Analisando a Tabela 3.2 para  $L_i$  e  $L[n]$ , note que para  $h = 0,1$  o Corolário 3.3 fornece resultados melhores do que aquele fornecido pelas desigualdades de Lyapunov-Metzler, enquanto que para  $h = 0,5$  esta situação se inverte. Isto indica que, como evidenciado no Capítulo 2, os dois métodos não são comparáveis em termos de conservadorismo. As Figuras 3.3, 3.4 e 3.5 apresentam, respectivamente, as trajetórias do estado, o esforço de controle e a sequência de comutação para ganhos  $L_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ ,  $h = 0,1$  e  $\kappa = 3$ , cuja combinação ótima associada é  $\mathcal{C}_2^*(3) = (1 \ 1 \ 2)$ .

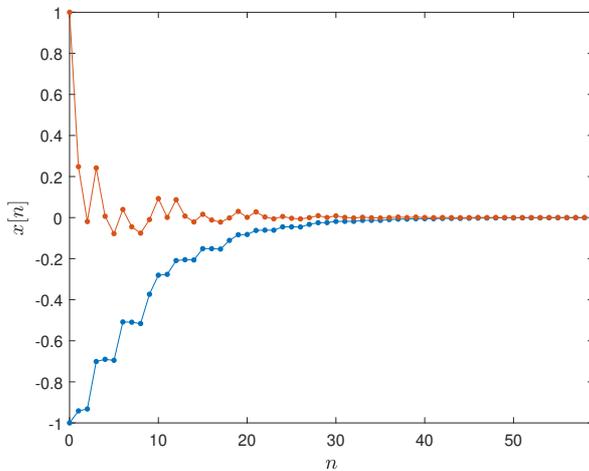


Figura 3.3: Trajetórias do estado

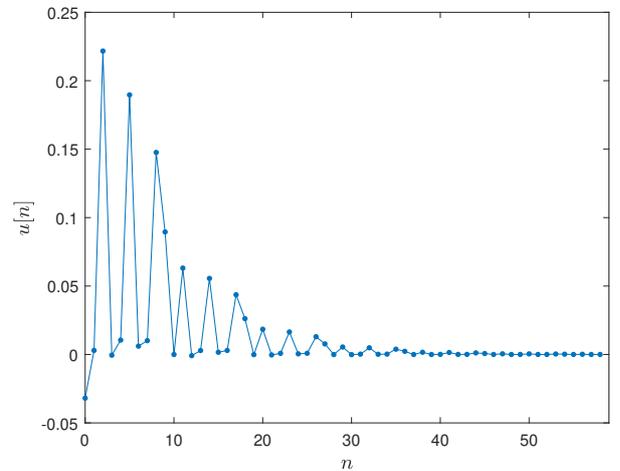


Figura 3.4: Esforço de controle

Este exemplo finaliza esta seção, que trata do projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  via realimentação estática de estado e de saída.

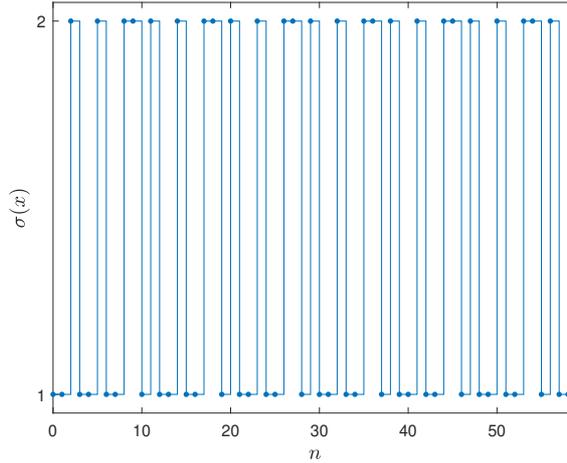


Figura 3.5: Sequência de comutação

### 3.3 Projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$

Esta seção é dedicada à generalização dos resultados anteriores para tratar o projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . A organização da subseção segue a mesma lógica anterior e, muitas vezes, os mesmos comentários são pertinentes. Neste sentido, daremos maior destaque às características e resultados específicos para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ . Primeiramente, vamos tratar o projeto da regra de comutação como única variável de controle para, posteriormente, levar em conta o sistema mais geral que inclui a atuação da lei de controle  $u$ . Sempre que a entrada externa puder ser medida, uma nova classe de funções de comutação, que dependem também desta entrada, será considerada.

#### 3.3.1 Síntese da regra de comutação $\sigma$

Considere o sistema linear com comutação a tempo discreto

$$x[n+1] = A_\sigma x[n] + H_\sigma w[n], \quad x[0] = 0 \quad (3.80)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + G_\sigma w[n] \quad (3.81)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] \quad (3.82)$$

definido para todo  $n \in \mathbb{N}$  e com  $w \in \mathcal{L}_2$ . O índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  a ser adotado foi apresentado na Definição 2.4 do capítulo anterior. Antes de fornecer os resultados principais, vamos definir as seguintes funções matriciais que serão úteis nos desenvolvimentos que seguem.

$$\mathcal{M}_i(P, \rho) = \begin{bmatrix} A_i' P A_i + E_i' E_i & \bullet \\ H_i' P A_i + G_i' E_i & H_i' P H_i + G_i' G_i - \rho I \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathcal{T}_i(P, \rho) = A_i' P A_i + E_i' E_i + (H_i' P A_i + G_i' E_i)' (\rho I - H_i' P H_i - G_i' G_i)^{-1} (H_i' P A_i + G_i' E_i) \quad (3.84)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $0 < P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Considerando as definições de (3.83) e (3.84), o próximo teorema fornece condições para o projeto de uma regra de comutação dependente da saída medida que assegura estabilidade

exponencial global da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema (3.80)-(3.82).

**Teorema 3.3.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , assuma que existam matrizes simétricas  $P[n] > 0$ ,  $U[n]$ ,  $R_i[n]$  e um escalar positivo  $\rho$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$J_\infty(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (3.85)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A'_i P[n+1] A_i - P[n] + E'_i E_i - C'_i R_i[n] C_i - U[n] \\ H'_i P[n+1] A_i + G'_i E_i \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} H'_i P[n+1] H_i + G'_i G_i - \rho I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.86)$$

$$U[n] + C'_{i[n]} R_{i[n]}[n] C_{i[n]} < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (3.87)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0] > 0$ . Então, a regra de comutação dependente da saída medida

$$\sigma(y[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} y[n]' R_i[n - m_n] y[n] \quad (3.88)$$

assegura estabilidade exponencial global da origem do sistema (3.80)-(3.82). Além disso, a solução do problema (3.85) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Prova:** Considere que as condições (3.86) e (3.87) são satisfeitas. Observando de (3.86) que  $H'_i P[n+1] H_i + G'_i G_i - \rho I < 0, \forall i \in \mathbb{K}$  e  $\forall n \in [0, \kappa)$ , temos que a seguinte igualdade

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' \mathcal{M}_i(P[n+1], \rho) \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} = x[n]' \mathcal{T}_i(P[n+1], \rho) x[n] \quad (3.89)$$

é verificada para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Assim, adotando a função de Lyapunov convexa variante no tempo (2.43) com  $P[n] = P[n - m_n] > 0$  para uma trajetória genérica de (3.80)-(3.82), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta V &= \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' \mathcal{M}_\sigma(P[n+1], \rho) \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} - x[n]' P[n] x[n] - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &\leq x[n]' \left( \mathcal{T}_\sigma(P[n+1], \rho) - P[n] \right) x[n] - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &< x[n]' \left( U[n] + C'_\sigma R_\sigma[n] C_\sigma \right) x[n] - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &= x[n]' U[n] x[n] + \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' C'_i R_i[n] C_i x[n] - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &< -z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \end{aligned} \quad (3.90)$$

válida para todo  $n \in [0, \kappa)$ . Note que a primeira desigualdade é consequência de (3.89), a segunda é garantida por (3.86) aplicando o Complemento de Schur com relação à sua última linha e coluna e a igualdade, apresentada na sequência, decorre da regra de comutação (3.88). Neste cenário, a terceira desigualdade provém do fato, já apresentado em (3.16), que

$$\begin{aligned} x[n]' U[n] x[n] + \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' C'_i R_i[n] C_i x[n] &\leq x[n]' \left( U[n] + \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i[n] C'_i R_i[n] C_i \right) x[n], \quad \lambda_i[n] \in \Lambda_v \\ &= x[n]' \left( U[n] + C'_{i[n]} R_{i[n]}[n] C_{i[n]} \right) x[n] \\ &< 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Em (3.91), a última desigualdade é consequência direta de (3.87). A continuação periódica  $P[n] = P[n - m_n]$ ,  $R_i[n] = R_i[n - m_n]$  e  $U[n] = U[n - m_n]$  garante que a desigualdade (3.90) é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A prova da estabilidade exponencial segue raciocínio idêntico ao apresentado em (3.17)-(3.18) e decorre do fato que para  $w = 0$ ,  $\Delta V < 0$  implica em  $\|x[n]\| \leq c\mu^n \|x[0]\|$  para  $c^2 = \max_{p \in [0, \kappa)} \|P[0]\| \|P[p]^{-1}\|$ . Ademais, somando ambos os lados de (3.90) para  $n \in [0, \infty)$ , considerando que  $V(x[0], 0) = 0$  e que a estabilidade exponencial assegura que  $V(x[\infty], \infty) = 0$ , temos que a desigualdade

$$\|z\|_2^2 - \rho \|w\|_2^2 < 0 \quad (3.92)$$

e, portanto,  $\rho > 0$  é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .  $\square$

Neste Teorema 3.3, a matriz  $R_i[n]$  está restrita apenas para  $i = i[n] \in \mathbb{K}$ . Sendo assim, para a implementação da regra de comutação podemos escolher  $R_i[n]$ ,  $i \neq i[n]$ , arbitrariamente próximo da borda de factibilidade de (3.86), como será apresentado no próximo corolário.

**Corolário 3.4.** *Assuma que exista uma solução  $\{U[n], P[n]\}$  para o problema de otimização do Teorema 3.3, considere as matrizes  $\Gamma_{1i}$ ,  $\Gamma_{2i}$  dadas em (3.21) e defina a seguinte variável matricial*

$$\mathcal{L}_i[n] = \mathcal{T}_i(P[n+1], \rho) - P[n] - U[n] \quad (3.93)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $n \in [0, \kappa)$ . Então, para  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, a regra de comutação dependente da saída medida (3.14) é globalmente exponencialmente estabilizante para as matrizes  $R_i[n]$  determinadas da seguinte forma:

- Para  $i \neq i[n]$ , adota-se

$$R_i[n] = \Gamma'_{1i} \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{1i} - \Gamma'_{1i} \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{2i} \left( \Gamma'_{2i} \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{2i} \right)^{-1} \Gamma'_{2i} \mathcal{L}_i[n] \Gamma_{1i} + \varepsilon I \quad (3.94)$$

para o caso em que  $\dim(\mathcal{N}(C_i)) \neq 0$  ou

$$R_i[n] = C_i'^{-1} \mathcal{L}_i[n] C_i^{-1} + \varepsilon I \quad (3.95)$$

caso contrário.

- Para  $i = i[n]$ , adota-se a solução fornecida pelo Teorema 3.3.

**Prova:** A prova é idêntica àquela apresentada no Corolário 3.1 e, portanto, será omitida.  $\square$

A respeito do resultado do Teorema 3.3, é importante ressaltar que se a entrada externa  $w[n]$  estiver disponível para medição é possível obter uma regra de comutação dependente da saída medida e da entrada externa baseada em condições menos conservadoras, as quais são apresentadas no próximo teorema que utiliza as seguintes matrizes aumentadas

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_i[n] = \begin{bmatrix} R_{1i}[n] & R_{2i}[n]' \\ R_{2i}[n] & R_{3i}[n] \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}[n] = \begin{bmatrix} U_1[n] & U_2[n]' \\ U_2[n] & U_3[n] \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}[n] = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} P[n] \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}' \quad (3.96)$$

para facilitar a apresentação.

**Teorema 3.4.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , assumamos que existam matrizes simétricas  $P[n] > 0$ ,  $U_1[n]$ ,  $U_3[n]$ ,  $R_{1i}[n]$ ,  $R_{3i}[n]$ , matrizes  $U_2[n]$ ,  $R_{2i}[n]$  e um escalar positivo  $\rho$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (3.97)$$

sujeito a

$$\mathcal{M}_i(P[n+1], \rho) - \tilde{P}[n] - \tilde{U}[n] - \tilde{C}'_i \tilde{R}_i[n] \tilde{C}_i < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.98)$$

$$\tilde{U}[n] + \tilde{C}'_{i[n]} \tilde{R}_{i[n]} \tilde{C}_{i[n]} < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p \quad (3.99)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa-1$  com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0] > 0$ . Então, a regra de comutação dependente da saída medida e da entrada externa

$$\sigma(y[n], w[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} y[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' \tilde{R}_i[n] \begin{bmatrix} y[n] \\ w[n] \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

assegura estabilidade exponencial global da origem do sistema (3.80)-(3.82). Além disso, a solução de (3.85) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Prova:** Adotando a função de Lyapunov convexa variante no tempo (2.43) e a regra da comutação (3.100), temos

$$\begin{aligned} \Delta V &= \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' (\mathcal{M}_\sigma(P[n+1], \rho) - \tilde{P}[n]) \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &< \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' (\tilde{C}'_\sigma \tilde{R}_\sigma[n] \tilde{C}_\sigma + \tilde{U}[n]) \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' \tilde{C}'_i \tilde{R}_i[n] \tilde{C}_i \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' \tilde{U}[n] \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &\leq \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' (\tilde{C}'_{i[n]} \tilde{R}_{i[n]} \tilde{C}_{i[n]} + \tilde{U}[n]) \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix} - z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &< -z[n]' z[n] + \rho w[n]' w[n] \end{aligned} \quad (3.101)$$

em que a primeira desigualdade decorre de (3.98), a segunda igualdade é devido à regra de comutação (3.100) e a segunda e terceira desigualdades são obtidas por raciocínio análogo ao realizado em (3.91). Logo, seguindo o mesmo procedimento da prova do Teorema 3.3, concluímos que (3.101) assegura a estabilidade exponencial global da origem do sistema (3.80)-(3.82) e que a solução ótima (3.97) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .  $\square$

Para a obtenção das matrizes  $\tilde{R}_i[n]$  que são importantes para a implementação da regra de comutação, utilizamos a mesma estratégia adotada anteriormente, conforme apresentado no próximo corolário.

**Corolário 3.5.** *As matrizes  $\tilde{R}_i[n]$  utilizadas na implementação da regra de comutação (3.100) são baseadas na solução do Teorema 3.4 e seguem as mesmas escolhas apresentadas nos dois itens do Corolário 3.4, mas utilizando a versão aumentada com*

$$\tilde{\mathcal{L}}_i[n] = \mathcal{M}_i(P[n+1], \rho) - \tilde{P}[n] - \tilde{U}[n] \quad (3.102)$$

$$e \tilde{\Gamma}_{1i} = \tilde{C}'_i (\tilde{C}_i \tilde{C}'_i)^{-1}, \tilde{\Gamma}_{2i} = \mathcal{N}(\tilde{C}_i).$$

**Prova:** A prova é idêntica à do Corolário 3.1 e, portanto, será omitida.  $\square$

A respeito do Teorema 3.4 algumas observações são relevantes. A primeira é que ele contém as condições do Teorema 3.3 como caso particular, o que é facilmente verificado impondo  $R_{2i}[n] = 0$ ,  $R_{3i}[n] = 0$ ,  $U_2[n] = 0$  e  $U_3[n] = 0$  em (3.98) para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $n \in [0, \kappa)$ . Além disso, note que uma condição necessária para a factibilidade de (3.98) é que a desigualdade

$$H'_i P[n+1] H_i + G'_i G_i - \rho I - U_3[n] - R_{i3}[n] < 0 \quad (3.103)$$

presente no seu bloco matricial (2,2) seja verificada para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $n \in [0, \kappa)$ . Entretanto, as matrizes  $U_3[n]$  e  $R_{3i}[n]$  são indefinidas em sinal e, portanto, não é exigido que a condição  $H'_i P[n+1] H_i + G'_i G_i - \rho I < 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , presente em (3.86), seja verificada. Isto indica que o Teorema 3.4 pode ser uma excelente escolha de projeto sempre que a entrada externa estiver disponível.

O próximo exemplo compara as condições dos Teoremas 3.3 e 3.4 com as propostas em Deaecto et al. [2011]. Esta última referência trata do projeto de controle via realimentação dinâmica de saída, o que implica na necessidade do projeto de uma estrutura adicional de filtro para fornecer informações relevantes para a implementação da regra de comutação. Além disso, as condições fornecidas em Deaecto et al. [2011] são descritas em termos das desigualdades de Lyapunov-Metzler, o que limita a sua aplicação aos sistemas compostos por no máximo três subsistemas.

**Exemplo 3.5.** Neste exemplo, considere o sistema (3.80)-(3.82) composto de dois subsistemas instáveis definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & -1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -2 \\ -3 & 0,5 & -1 \\ 0 & 0 & -1,25 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$E_1 = [0 \ 2 \ 0]$ ,  $E_2 = [1 \ 0 \ 1]$ ,  $G_i = 0$  e  $H_1 = [-1 \ 1 \ -1]'$ ,  $H_2 = -H_1$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ . A entrada externa é dada por

$$w[n] = \begin{cases} 0,5 \cos\left(\frac{\pi n}{100}\right), & n \in [0, 125) \\ 0, & n \in (125, 500] \end{cases} \quad (3.105)$$

Resolvendo as condições dos Teoremas 3.3 e 3.4 para o projeto de  $\sigma(y)$  e  $\sigma(y, w)$ , respectivamente, com quatro diferentes valores de  $\kappa \in \{2, 5, 6, 7\}$ , obtivemos os custos apresentados na Tabela 3.3. Nesta tabela,  $\rho$  apresenta o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Além disso,  $\hat{J}_\infty$  representa  $\hat{J}_\infty = \|z\|_2^2 / \|w\|_2^2$  com  $w$  dada em (3.105) e considerando a regra de comutação calculada através dos Corolários 3.4 e 3.5 para  $\sigma(y)$  e  $\sigma(y, w)$ , respectivamente. Note que  $\hat{J}_\infty$  não possui relação com o índice de desempenho  $J_\infty$  definido em (2.64). De fato, enquanto  $\hat{J}_\infty$  é calculado para a entrada (3.105), o índice  $J_\infty$  é determinado para a entrada externa de pior caso. Entretanto,  $\hat{J}_\infty$  é uma boa medida de comparação entre as regras, já que encontrar a entrada externa de pior caso é uma tarefa praticamente impossível de desenvolver. Analisando esta tabela, verificamos que, para este exemplo, apenas quando  $\kappa = 7$  o custo garantido fornecido pelas condições de projeto de  $\sigma(y, w)$  é inferior ao obtido pelo projeto de  $\sigma(y)$ . Entretanto, analisando  $\hat{J}_\infty$  o desempenho de  $\sigma(y, w)$  foi melhor para  $\kappa \in \{6, 7\}$ .

Para fins de comparação com outras técnicas da literatura, implementamos as condições do Teorema 3 de Deaecto et al. [2011], com  $W_i = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , de forma a levar em conta o projeto da regra de comutação como única variável de controle do sistema. A solução proposta por Deaecto et al. [2011] forneceu como custo garantido de  $\sqrt{\rho} = 70,5733$  e  $\sqrt{\hat{J}_\infty} = 60,8341$ , o que coloca em evidência o fato de que as condições dos

$\kappa$	$\sigma(y)$				$\sigma(y, w)$			
	2	5	6	7	2	5	6	7
$\sqrt{\rho}$	70,5733	53,4630	70,5733	61,7690	70,5733	53,4630	70,5733	58,1659
$\sqrt{\hat{J}_\infty}$	63,0801	26,7809	63,0801	16,1465	63,9326	28,5349	62,9841	14,6475

 Tabela 3.3: Custos garantido e verdadeiro  $\mathcal{H}_\infty$ .

Teoremas 3.3 e 3.4 não são mais conservadoras do que as existentes na literatura.

Note que os Teoremas 3.3 e 3.4 contêm o projeto da regra de comutação dependente do estado como caso particular. Para obter as condições de projeto associadas, basta fazer em ambos os casos  $C_i = I$  e  $U[n] = 0$ . O problema de otimização relacionado ao Teorema 3.3 fica

$$\min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (3.106)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} A_i'P[n+1]A_i - P[n] + E_i'E_i - R_i[n] & \bullet \\ H_i'P[n+1]A_i + G_i'E_i & H_i'P[n+1]H_i + G_i'G_i - \rho I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.107)$$

$$R_{i[n]}[n] < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (3.108)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e  $P[\kappa] = P[0] > 0$ . Aplicando o Corolário 3.4 temos que as matrizes  $R_i[n]$  são dadas pela solução de (3.106) para  $i = i[n]$  e tornam-se  $R_i[n] = \mathcal{T}_i(P[n+1], \rho) - P[n] + \varepsilon I$  para todo  $i \neq i[n]$ . A regra de comutação neste caso fica

$$\sigma(x[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x[n]' \mathcal{T}_i(P[n+1 - m_n], \rho) x[n] \quad (3.109)$$

É imediato verificar que as condições (3.107)-(3.108) junto com a regra (3.109) são equivalentes àquelas propostas no Teorema 2 de Daiha et al. [2017]. Da mesma forma, o problema de otimização associado ao Teorema 3.4 é idêntico ao anterior, mas com

$$\mathcal{M}_\sigma[n](P[n+1], \rho) - \tilde{P}[n] - \tilde{R}_i[n] < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.110)$$

$$\tilde{R}_{i[n]}[n] < 0 \quad (3.111)$$

no lugar de (3.107) e (3.108), respectivamente. Agora, utilizando o Corolário 3.5, a regra de comutação se reduz à regra dependente do estado e da entrada externa dada por

$$\sigma(x[n], w[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} x[n] \\ w[n] \end{bmatrix}' \mathcal{M}_i(P[n+1 - m_n]) \begin{bmatrix} y[n] \\ w[n] \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

que junto com o problema de otimização (3.106) sujeito a (3.110)-(3.111) torna-se o resultado do Corolário 2 de Daiha et al. [2017]. Mesmo sendo equivalentes, a vantagem das condições (3.107)-(3.108) e (3.110)-(3.111) em relação às propostas em Daiha et al. [2017] é a presença da matriz  $R_i[n]$  e  $\tilde{R}_i[n]$ , respectivamente, que permite a imposição de estruturas e, portanto, tratar problemas de projeto mais gerais, como os envolvendo realimentação estática e dinâmica de saída.

$\kappa$	$\sigma(x)$				$\sigma(x, w)$	LM
	2	3	4	10	10	-
Ex. 2 de Geromel and Colaneri [2006a]	114,8090	$\infty$	50,2525	<b>49,5000</b>	49,5000	88,3467
Ex. 28 de Fiacchini et al. [2016]	$\infty$	$\infty$	32,9091	<b>32,3300</b>	32,3300	$\infty$
Ex. 7a de Fiacchini and Jungers [2014]	10,6654	18,7018	<b>9,3033</b>	10,6654	10,6654	10,0315
Ex. 7b de Fiacchini and Jungers [2014]	8,0935	17,4734	8,0935	8,0935	8,0935	<b>7,3911</b>

Tabela 3.4: Índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty(\sqrt{\rho})$ 

O próximo exemplo compara as condições propostas nesta tese para o projeto das regras de comutação  $\sigma(x)$  e  $\sigma(x, w)$  com as desigualdades de Lyapunov-Metzler disponíveis no Teorema 2 de Deaecto et al. [2015].

**Exemplo 3.6.** Neste exemplo, vamos considerar quatro sistemas diferentes com realização em espaço de estado dada por (3.80)-(3.82). O primeiro é definido pelas matrizes dinâmicas  $A_i = e^{A_i h}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  com  $h = 0,1$  e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

retiradas do Exemplo 2 de Geromel and Colaneri [2006a], e  $H_i = [0 \ 1]'$ ,  $E_i = [0 \ 1]$  e  $G_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . O segundo é definido pelas matrizes dinâmicas

$$A_1 = 1,01 \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{5}) & -\text{sen}(\frac{\pi}{5}) \\ \text{sen}(\frac{\pi}{5}) & \cos(\frac{\pi}{5}) \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,6 & -2 \\ 0 & -1,2 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

retiradas do Exemplo 28 de Fiacchini et al. [2016] e  $H_i = [0 \ 1]'$ ,  $E_i = [0 \ 1]$  e  $G_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . O terceiro e quarto utilizam as mesmas matrizes dinâmicas dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ -1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & -2 \\ 0 & 0 & -1,2 \end{bmatrix}, \quad (3.115)$$

obtidas do Exemplo 7 de Fiacchini and Jungers [2014], mas apresentam matrizes de entrada distintas definidas por  $H_1 = [1 \ 0 \ 1]'$ ,  $H_2 = [0 \ 1 \ 0]'$ , que identificam o Exemplo 7a, e  $H_1 = [0 \ 1 \ 0]'$ ,  $H_2 = [1 \ 0 \ 1]'$ , que identificam o Exemplo 7b. As matrizes de saída em ambos os casos são iguais a  $E_1 = [0 \ 1 \ 0]$ ,  $E_2 = [1 \ 0 \ 1]$  e  $G_1 = G_2 = 0$ . Resolvendo o problema (3.106) sujeito a (3.107)-(3.108) para o projeto de  $\sigma(x)$  e (3.110)-(3.111) para o projeto de  $\sigma(x, w)$ , bem como as desigualdades de Lyapunov-Metzler propostas no Teorema 2 de Deaecto et al. [2015] obtivemos os custos garantidos  $\mathcal{H}_\infty$  apresentados na Tabela 3.4. Analisando esta tabela é interessante observar que o custo garantido é sempre decrescente com relação a valores múltiplos de  $\kappa$ . Fora esta propriedade não é possível identificar nenhuma outra associada a  $\kappa$ , o que indica que  $\kappa$  não precisa ser grande para fornecer um bom desempenho para o sistema. Além disso, note que para o Exemplo 7b de Fiacchini and Jungers [2014] o melhor desempenho é obtido pelas desigualdades de Lyapunov-Metzler (LM) propostas em Deaecto et al. [2015]. Por outro lado, utilizando os mesmos subsistemas, mudando apenas as matrizes de entrada, como apresentado no Exemplo 7a a conclusão é diferente, ou seja, as desigualdades de Lyapunov-Metzler são as que fornecem o pior desempenho. Pelo Exemplo 28 de Fiacchini et al. [2016] podemos notar que as condições propostas nesta tese são capazes de fornecer solução quando as desigualdades de Lyapunov-Metzler são ineficazes. Estas observações ilustram o fato de que as condições aqui propostas, baseadas na função de Lyapunov convexa variante no tempo, não são comparáveis em termos de conservadorismo com as desigualdades clássicas de Lyapunov-Metzler.

### 3.3.2 Síntese da lei de controle $u$

Considere o sistema linear com (3.1)-(3.2) evoluindo de condições iniciais nulas  $x[0] = 0$  e com  $w \in \mathcal{L}_2$ . Conectando a entrada de controle (3.4) neste sistema obtemos

$$x[n+1] = A_{L\sigma}x[n] + H_\sigma w[n], \quad x[0] = 0 \quad (3.116)$$

$$z[n] = E_{L\sigma}x[n] + G_\sigma w[n] \quad (3.117)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] \quad (3.118)$$

com as matrizes em malha fechada  $A_{L_i} = A_i + B_i L_i C_i$  e  $E_{L_i} = E_i + F_i L_i C_i$  já apresentadas em (3.41). Nosso objetivo é determinar os ganhos de realimentação de saída  $\{L_1, \dots, L_N\}$  que compõem a lei de controle  $u$  e a regra de comutação  $\sigma(y)$  de forma a assegurar estabilidade exponencial global da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho. Assim como no caso  $\mathcal{H}_2$ , vamos apresentar dois procedimentos de projeto. O primeiro deles é realizado em dois estágios e o segundo, aplicado somente no caso em que o estado está disponível para realimentação, leva em conta o projeto conjunto de  $\sigma(x)$  e  $u = L_\sigma x$ .

#### 3.3.2.1 Projeto em dois estágios

O projeto em dois estágios consiste em determinar os ganhos ótimos  $\mathcal{H}_\infty$  de cada subsistema isolado e, posteriormente, projetar a regra de comutação utilizando os resultados apresentados na subseção anterior. Para o primeiro estágio, vamos supor que  $G_i = 0$ ,  $F_i' E_i = 0$  e  $F_i' F_i > 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  e eliminar a dependência de índice das matrizes. Nosso objetivo é, portanto, resolver o problema de controle ótimo

$$\inf_{L \in \mathcal{L}_o} \|E_L(zI - A_L)^{-1}H\|_\infty^2 \quad (3.119)$$

com  $L \in \mathcal{L}_o$  definido em (3.43). Para isto, vamos generalizar o algoritmo de Kleinman-Newton Generalizado proposto em Geromel and Deaecto [2017] para tratar o caso  $\mathcal{H}_\infty$ . A metodologia é similar à adotada no caso  $\mathcal{H}_2$ , ou seja, primeiramente, vamos obter matrizes aumentadas que permitam resolver (3.119) através de condições  $\mathcal{H}_\infty$  com a mesma estrutura daquelas usadas para tratar sistemas a tempo contínuo e, posteriormente, generalizar o algoritmo de Kleinman-Newton para tratar este caso específico. As matrizes aumentadas  $\hat{A}_K = \hat{A} + \hat{B}K$  e  $\hat{E}_K = \hat{E} + \hat{F}K$  continuam as mesmas adotadas no caso  $\mathcal{H}_2$  e definidas em (3.45) com  $K$  pertencente a  $\mathcal{K}_o$  que foi definido em (3.46). Além disso, utilizaremos matrizes estruturadas pertencentes ao conjunto  $\mathcal{Q}$  definido em (3.47). O próximo lema apresenta as condições equivalentes.

**Lema 3.2.** *Assuma que  $\mathcal{K}$  é um subconjunto de  $\mathcal{K}_o$ . Então, o problema (3.119) é equivalente a*

$$\inf_{K \in \mathcal{K}, Q \in \mathcal{Q}} \rho \quad (3.120)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \hat{A}'_K Q + Q \hat{A}_K + \hat{E}'_K \hat{E}_K & \bullet \\ \hat{H}' Q & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.121)$$

**Prova:** Considerando que  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_o$ , qualquer ganho  $K$  factível pode ser escrito como  $K = [L \ 0]$  para algum  $L \in \mathcal{L}_o$ , sendo  $\mathcal{L}_o$  definido em (3.43). Usando as definições matriciais de (3.45) e  $Q \in \mathcal{Q}$ , obtemos  $Q \hat{A}_K$

dado em (3.50),  $\hat{E} = [E + FL \ 0]$  e  $\hat{H}'Q = [0 \ H'P]$ . Com estas relações o problema (3.120)-(3.121) pode ser reescrito como

$$\inf_{L \in \mathcal{L}_o, P > 0} \rho \quad (3.122)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} -P + (E + FL)'(E + FL) & \bullet & \bullet \\ P(A + BL) & -P & \bullet \\ 0 & H'P & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.123)$$

Note que trocando a segunda e terceira linhas e colunas de (3.123) e aplicando o Complemento de Schur na desigualdade resultante, obtemos

$$\begin{bmatrix} (A + BL)'P(A + BL) - P + (E + FL)'(E + FL) & \bullet \\ H'P(A + BL) & H'PH - \rho I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.124)$$

O problema de otimização (3.122) sujeito a (3.124) descreve exatamente o problema de controle ótimo (3.119) provando, assim, o lema proposto.  $\square$

Assim como no caso  $\mathcal{H}_2$ , note que as matrizes  $(\hat{A}_K, E_K)$  dependem linearmente da variável  $K \in \mathcal{K}_o$ . Além disso, observe que a condição (3.121) é não-convexa, mas pode ser resolvida através de um algoritmo obtido a partir da generalização do método de Kleinman-Newton proposto na referência Kleinman [1968]. Para a obtenção deste algoritmo consideramos (3.121) reescrita da seguinte forma

$$\hat{A}'Q + Q\hat{A} + \hat{E}'\hat{E} + \rho^{-1}Q\hat{H}\hat{H}'Q - Q\hat{B}(\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'Q + R_{KQ} < 0 \quad (3.125)$$

com  $R_{KQ}$  dado em (3.54). Utilizando as matrizes  $\hat{A}_Q$  e  $\hat{E}_Q$  definidas em (3.55), o próximo teorema garante a convergência monotônica para uma solução estacionária, que é uma propriedade importante do algoritmo de Kleinman-Newton original.

**Teorema 3.5.** *Assuma que o par  $(K_0 \in \mathcal{K}, Q_0 \in \mathcal{Q})$  é uma solução factível para o problema (3.120)-(3.121) com custo  $\rho(K_0)$ . Seja  $(K \in \mathcal{K}, S \in \mathcal{Q})$  a solução ótima para o seguinte problema de otimização convexa*

$$\inf_{K \in \mathcal{K}, S \in \mathcal{Q}} \rho \quad (3.126)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \hat{A}'_{Q_0}S + S\hat{A}_{Q_0} + \hat{E}'_{Q_0}\hat{E}_{Q_0} & \bullet & \bullet \\ \hat{H}'S & -\rho I & \bullet \\ K + (\hat{F}'\hat{F})^{-1}\hat{B}'S & 0 & -(\hat{F}'\hat{F})^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.127)$$

A solução  $Q \in \mathcal{Q}$  de (3.120)-(3.121) com  $K \in \mathcal{K}$  fixo produz o custo  $\rho(K) \leq \rho(K_0)$ .

**Prova:** A prova segue raciocínio idêntico ao apresentado na prova do Teorema 3.2 e, portanto, será omitida.  $\square$

Baseado neste resultado teórico, o Algoritmo 2 apresenta o método de Kleinman-Newton Generalizado para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ . A metodologia para a obtenção de uma solução inicial factível pode ser a mesma adotada para o caso  $\mathcal{H}_2$  e se baseia no algoritmo proposto em Geromel and Deaecto [2018].

**Algoritmo 2:** Método de Kleinman-Newton Generalizado para o custo  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Entrada:**  $\mathcal{K}_0 \in \mathcal{K}$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno

**Saída:**  $K^* \in \mathcal{K}$  e o custo ótimo  $\rho(K^*)$

1 início

2  $p \leftarrow 0$  ;

3 Resolva o problema (3.120)-(3.121) para  $K = K_0 \in \mathcal{K}$ . Determine  $Q_0 \in \mathcal{Q}$  e o custo inicial  $\rho(K_0)$

4 enquanto  $\rho(K_p)/\rho(K_{p-1}) < 1 - \varepsilon$  faça

5 Resolva o seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{K \in \mathcal{K}, S \in \mathcal{Q}} \rho$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}'_{Q_p} S + S \hat{A}_{Q_p} + \hat{E}'_{Q_p} \hat{E}_{Q_p} & \bullet & \bullet \\ \hat{H}' S & -\rho I & \bullet \\ K + (\hat{F}' \hat{F})^{-1} \hat{B}' S & 0 & -(\hat{F}' \hat{F})^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

6  $p \leftarrow p + 1$

7 Resolva o problema (3.120)-(3.121) para  $K \in \mathcal{K}$  solução do problema anterior e obtenha  $Q \in \mathcal{Q}$ . Defina  $(K_p, Q_p) = (K, Q)$  e determine o valor do custo atual  $\rho(K_p)$

8 fim

9 fim

O Teorema 3.5 garante que a sequência gerada pelo Algoritmo 2 satisfaz  $\rho(K_p) \geq \rho(K_{p+1})$  e, portanto, ela converge para uma solução estacionária local de forma monotônica e decrescente.

Neste momento, após determinar, através do Algoritmo 2, os ganhos ótimos obtidos como solução do problema de otimização (3.119), podemos aplicar o resultado do Teorema 3.3 ou do Teorema 3.4 para obter a regra de comutação  $\sigma(y)$  ou  $\sigma(y, w)$ , respectivamente, fazendo  $A_{L_i} \rightarrow A_i$  e  $E_{L_i} \rightarrow E_i$ . Posteriormente, utilizamos o resultado do Corolário 3.4 ou 3.5 para a obtenção das matrizes  $R_i[n]$  ou  $\tilde{R}_i[n]$  que são importantes na implementação destas regras. O próximo exemplo ilustra este procedimento.

**Exemplo 3.7.** Considere dois subsistemas instáveis cujas matrizes dinâmicas são definidas por  $A_i = e^{A_i h}$ , com  $h = 0,05$  e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -22 & -19 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 70 & -2 & -30 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

As matrizes de entrada externa são dadas por

$$H_1 = \begin{bmatrix} 3,5 \\ -0,45 \\ 3,5 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 2,0 \\ -1,2 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

e as de saída são definidas por

$$E_1 = \begin{bmatrix} -0,5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Utilizando o Algoritmo 2 partindo da solução factível

$$L_{10} = [0,4755 \quad -0,6061], \quad L_{20} = [-0,2784 \quad -0,0224] \quad (3.131)$$

obtivemos os seguintes ganhos de realimentação de saída

$$L_1 = [0,5265 \quad -0,6682], \quad L_2 = [-0,2100 \quad -0,0191] \quad (3.132)$$

associados aos custos ótimos  $\sqrt{\rho_1} = 138,9700$  e  $\sqrt{\rho_2} = 188,4760$ . Substituindo  $A_{L_i}$  e  $E_{L_i}$ , definidas em (3.41), nas condições do Teorema 3.3 e utilizando  $\kappa = 2$ , obtivemos a sequência ótima  $\mathfrak{C}_2^*(2) = (1 \ 2)$  e um custo garantido de  $\sqrt{\rho} = 87,5376$  que é 37% menor do que  $\sqrt{\rho_1}$ . Este exemplo ilustra a validade e eficácia da técnica de controle proposta.

Quando o estado está disponível para realimentação, podemos utilizar o Algoritmo 2 com  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  ou, simplesmente, resolver o seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{S>0, \rho>0} \rho \quad (3.133)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ AS + BY & H & S & \bullet \\ ES + FY & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.134)$$

que é um resultado clássico na literatura e fornece o ganho  $L = YS^{-1}$  como solução ótima do problema. Por se tratar de um caso mais simples podemos realizar o projeto das duas variáveis de controle de forma conjunta como será tratado a seguir.

### 3.3.2.2 Projeto conjunto

Nesta subseção, nosso objetivo é generalizar os Teoremas 3.3 e 3.4 com  $U[n] = 0$  e  $\tilde{U}[n] = 0$ , respectivamente, para tratar o sistema em malha fechada (3.116)-(3.118) com  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Como foi discutido logo após o Exemplo 3.5, estas escolhas de  $U[n]$  e  $\tilde{U}[n]$  particularizam os Teoremas 3.3 e 3.4 para tratar o projeto de controle via realimentação de estado. A ideia é determinar conjuntamente os ganhos de realimentação de estado  $\{L_1, \dots, L_N\}$  e as matrizes  $R_i[n]$  ou  $\tilde{R}_i[n]$  necessárias para a implementação das regras de comutação  $\sigma(x)$  ou  $\sigma(x, w)$ , respectivamente. O próximo corolário apresenta a generalização do Teorema 3.3.

**Corolário 3.6.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , assuma que existam matrizes simétricas  $X[n] > 0$ ,  $Q_i[n]$ , matrizes  $J_i, Y_i$  e um escalar positivo  $\rho$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$J_\infty(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (3.135)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} J_i + J_i' - X[n] + Q_i[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ A_i J_i + B_i Y_i & H_i & X[n+1] & \bullet \\ E_i J_i + F_i Y_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.136)$$

$$Q_i[n] < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (3.137)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $X[\kappa] = X[0] > 0$ . Então, a lei de controle (3.4) com os ganhos de realimentação de estado, dados por  $L_i = Y_i J_i^{-1}$ , e a regra de comutação (3.88), com  $R_i[n] = J_i'^{-1} Q_i[n] J_i^{-1}$ , asseguram a estabilidade exponencial da origem do sistema (3.1)-(3.3) sempre que  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Além disso, a solução de (3.67) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Prova:** Considere que a desigualdade (3.136) é satisfeita. Multiplicando-a à direita por  $\text{diag}(J_i^{-1}, I, I, I)$  e à esquerda pela sua transposta e utilizando o fato que  $L_i = Y_i J_i^{-1}$  e  $R_i[n] = J_i'^{-1} Q_i[n] J_i^{-1}$ , é simples mostrar que (3.136) garante a validade de

$$\begin{bmatrix} X[n]^{-1} + R_i[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i L_i & H_i & X[n+1] & \bullet \\ E_i + F_i L_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.138)$$

pois a desigualdade  $J_i' X[n]^{-1} J_i \geq J_i' + J_i - X[n]$  é verificada. Agora, aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas de (3.138), e considerando  $X[n]^{-1} = P[n]$ , obtemos (3.86) com  $C_i = I$ ,  $U[n] = 0$  e  $A_{L_i} \rightarrow A_i$  e  $E_{L_i} \rightarrow E_i$ . Note que a condição de contorno  $P[0] = P[\kappa]$  é satisfeita e que as matrizes  $Q_i[n]$  obtidas como solução ótima deste corolário assegura a validade de (3.87). Assim, as condições do Teorema 3.3 para  $U[n] = 0$  são satisfeitas para o sistema em malha fechada com  $C_i = I$  concluindo, assim, a prova.  $\square$

Note que para  $i = i[n] \in \mathbb{K}$  a matriz  $Q_i[n]$ , importante para a obtenção da regra de comutação (3.88), é determinada de forma direta pelo Corolário 3.6. Já para  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$  essa matriz é calculada adequadamente de forma a satisfazer (3.136). Uma escolha possível é obtida resolvendo as condições do Corolário 3.6 e substituindo  $J_i' + J_i - X[n] > 0$  presente no bloco (1,1) de (3.136) por  $J_i' X[n]^{-1} J_i > 0$ , a fim de obter uma condição factível menos restritiva. Realizando este procedimento e definindo

$$\mathcal{L}_{1i}[n] = J_i' X[n]^{-1} J_i - (E_i J_i + F_i Y_i)' (E_i J_i + F_i Y_i) - (A_i J_i + B_i Y_i)' X[n+1]^{-1} (A_i J_i + B_i Y_i) \quad (3.139)$$

$$\mathcal{L}_{2i}[n] = H_i' X[n+1]^{-1} (A_i J_i + B_i Y_i) + G_i' (E_i J_i + F_i Y_i) \quad (3.140)$$

$$\mathcal{L}_{3i}[n] = \rho I - G_i' G_i - H_i' X[n+1]^{-1} H_i \quad (3.141)$$

obtemos

$$Q_i[n] = -\mathcal{L}_{1i}[n] + \mathcal{L}_{2i}[n]' \mathcal{L}_{3i}[n]^{-1} \mathcal{L}_{2i}[n] + \varepsilon I \quad (3.142)$$

para todo  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$  com  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno. A seguir apresentamos a generalização do Teorema 3.4 para tratar o sistema em malha fechada (3.116)-(3.118).

**Corolário 3.7.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , assuma que existam matrizes simétricas  $X[n] > 0$ ,  $Q_{1i}[n]$ ,  $Q_{3i}[n]$ , matrizes  $Q_{2i}[n]$ ,  $J_i$ ,  $Y_i$  e um escalar positivo  $\rho$ , que constituem o conjunto solução  $\Psi$ , satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (3.143)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} J_i' + J_i - X[n] + Q_{1i}[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ Q_{2i}[n] & \rho I + Q_{3i}[n] & \bullet & \bullet \\ A_i J_i + B_i Y_i & H_i & X[n+1] & \bullet \\ E_i J_i + F_i Y_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (3.144)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{1i[n]}[n] & \bullet \\ Q_{2i[n]}[n] & Q_{3i[n]}[n] \end{bmatrix} < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p \quad (3.145)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $X[\kappa] = X[0] > 0$ . Então, a lei de controle (3.4) com os ganhos de realimentação de estado, dados por  $L_i = Y_i J_i^{-1}$ , e a regra de comutação (3.100), com  $R_{1i}[n] =$

$J_i'^{-1}Q_{1i}[n]J_i^{-1}$ ,  $R_{2i}[n] = Q_{2i}[n]J_i^{-1}$ ,  $R_{3i}[n] = Q_{3i}[n]$ , asseguram a estabilidade exponencial do sistema (3.1)-(3.3) sempre que  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Além disso, a solução de (3.67) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Prova:** A prova segue os mesmos passos daquela realizada no Corolário 3.6 e será apresentada aqui em linhas gerais. Primeiramente, considere que (3.144) é satisfeita e multiplique-a à direita por  $\text{diag}(J_i^{-1}, I, I, I)$  e à esquerda pela sua transposta. Utilizando as mudanças de variável  $L_i = Y_i J_i^{-1}$ ,  $R_{1i}[n] = J_i'^{-1}Q_{1i}[n]J_i^{-1}$ ,  $R_{2i}[n] = Q_{2i}[n]J_i^{-1}$ ,  $R_{3i}[n] = Q_{3i}[n]$  e devido à validade de  $J_i'X[n]^{-1}J_i \geq J_i' + J_i - X[n]$ , é simples concluir que a desigualdade

$$\begin{bmatrix} X[n]^{-1} + R_{1i}[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{2i}[n] & \rho I + R_{3i}[n] & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i L_i & H_i & X[n+1] & \bullet \\ E_i + F_i L_i & G_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.146)$$

é verificada. Logo, aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas de (3.146) obtemos (3.98), com  $\tilde{U}[n] = 0$  e  $P[n] = X[n]^{-1}$ , o que satisfaz a condição de contorno  $P[0] = P[\kappa]$ . A desigualdade (3.99) é obtida diretamente de (3.145) multiplicada à direita por  $\text{diag}(J_i^{-1}, I)$  e à esquerda pela sua transposta. Assim, as condições do corolário asseguram a validade do Teorema 3.4 com  $\tilde{U}[n] = 0$ , concluindo assim a prova.  $\square$

Similar à discussão realizada anteriormente, as matrizes  $Q_{1i}[n]$ ,  $Q_{2i}[n]$  e  $Q_{3i}[n]$ , importantes para a determinação da regra de comutação (3.100), podem ser obtidas adequadamente de forma a satisfazer (3.144). Neste caso, uma escolha possível é utilizar a solução oferecida pelo Corolário 3.7 para  $i = i[n]$  e as seguintes identidades

$$Q_{1i}[n] = -\mathcal{L}_{1i}[n] + \varepsilon I, \quad Q_{2i}[n] = \mathcal{L}_{2i}[n] + \varepsilon I, \quad \text{e} \quad Q_{3i}[n] = -\mathcal{L}_{3i}[n] + \varepsilon I, \quad (3.147)$$

para todo  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$  com  $\mathcal{L}_{1i}[n]$ ,  $\mathcal{L}_{2i}[n]$  e  $\mathcal{L}_{3i}[n]$  dadas em (3.139)-(3.141), respectivamente.

Da mesma forma que no caso  $\mathcal{H}_2$ , observe que os Corolários 3.6 e 3.7 permitem considerar duas outras estruturas para a lei de controle (3.4). A primeira é obtida substituindo  $(J_i, Y_i) = (J, Y)$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , fazendo com que a lei de controle (3.4) torne-se independente da regra de comutação pois o ganho de realimentação de estado  $L = YJ^{-1}$  é independente de índice, o que simplifica consideravelmente a implementação de (3.4). A segunda é obtida substituindo  $(J_i, Y_i) = (J[n], Y[n])$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Para esta estrutura as matrizes de ganho são variantes no tempo  $L[n] = Y[n]J[n]^{-1}$  e teoricamente importantes pois os Corolários 3.6 e 3.7 tornam-se equivalentes aos Teoremas 3.3 e 3.4, respectivamente. O próximo exemplo ilustra a validade da teoria proposta e compara as condições dos Corolários 3.6 e 3.7 com as propostas em Deaecto et al. [2015], que são descritas em termos das desigualdades de Lyapunov-Metzler.

**Exemplo 3.8.** Neste exemplo, considere o sistema (3.1)-(3.2) com  $C_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  e a lei de controle (3.4). Vamos considerar dois conjuntos de sistemas, que consistem nos Exemplos 1 e 2 da referência Zhang et al. [2009]. O primeiro é composto por dois subsistemas de segunda ordem instáveis dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1,5 & 1 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

	$\kappa$	$\sigma(x)$				$\sigma(x, w)$
		1	2	3	4	4
Ex. 1 de Zhang et al. [2009]	$L$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
	$L_i$	$\infty$	3,3483	6,3245	3,3583	2,2205
	$L[n]$	$\infty$	3,3483	4,0342	3,3483	2,2205
Ex. 2 de Zhang et al. [2009]	$L$	3,4142	3,4142	3,4142	3,4142	3,4142
	$L_i$	3,4142	3,3276	3,4142	3,3276	1,8946
	$L[n]$	3,4142	3,3276	3,4142	3,3276	1,8946

Tabela 3.5: Índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty(\sqrt{\rho})$ 

com  $E_1 = [1 \ 2]$ ,  $E_2 = [0 \ 1]$ ,  $F_1 = F_2 = [1]$ ,  $H_1 = [1 \ 0]'$ ,  $H_2 = [0 \ 1]'$  e  $G_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . O segundo exemplo, é composto pelos seguintes subsistemas, sendo os três primeiros instáveis e o quarto estável.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -0,5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2,5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1,5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 2,5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B_3 = B_1, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B_4 = B_2 \quad (3.150)$$

com  $E_1 = E_2 = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$ ,  $E_3 = E_4 = [0 \ 1 \ 0 \ 1]$ ,  $F_i = 1$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $H_1 = H_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]'$ ,  $H_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 1]'$ ,  $H_4 = 2H_3$  e  $G_i = 0$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . A Tabela 3.5 apresenta o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  em função de  $\kappa$  e para as estruturas de ganhos  $L$ ,  $L_i$  e  $L[n]$  considerando o projeto de  $\sigma(x)$  e  $\sigma(x, w)$  propostas nessa subseção. Resolvendo as condições do Corolário 3.7 para o segundo exemplo com  $\kappa = 4$ , obtivemos  $\sqrt{\rho} = 1,8946$  associado à sequência ótima  $\mathcal{C}_{154}^*(4) = (3 \ 2 \ 3 \ 2)$  e os ganhos de realimentação de estado dados por

$$L_1 = [ \ 0,0443 \ -0,0772 \ 0,0444 \ -0,3374] \quad (3.151)$$

$$L_2 = [-0,1755 \ 0 \ -0,1049 \ 0,1451] \quad (3.152)$$

$$L_3 = [-0,2451 \ -0,0915 \ -0,1551 \ 0,0260] \quad (3.153)$$

$$L_4 = [-0,1049 \ 0,0696 \ -0,3593 \ 0,0650] \quad (3.154)$$

As Figuras 3.6, 3.7 e 3.8 apresentam, respectivamente, as trajetórias do estado, o esforço de controle e sequência de comutação para a entrada externa (3.105). Considerando novamente o Exemplo 1 de Zhang et al. [2009], implementamos também as desigualdades de Lyapunov-Metzler apresentadas no Teorema 2 de Deaecto et al. [2015] e obtivemos  $\sqrt{\rho} = 2,2205$  que coincide com o fornecido pela última coluna da Tabela 3.5. Não foi possível resolver as condições propostas em Deaecto et al. [2015] para o Exemplo 2, visto que seria necessário realizar a busca de 12 parâmetros livres. Este exemplo coloca em evidência a flexibilidade e a precisão da metodologia proposta pelos Corolários 3.6 e 3.7 para o projeto conjunto de uma regra de comutação e ganhos de realimentação de estado. Note que tanto a estrutura das matrizes de ganhos como a complexidade da regra de comutação podem ser escolhidas. A dificuldade numérica na solução destas condições é mensurada em termos do parâmetro  $\kappa \geq 1$ , o qual é fornecido pelo projetista. Felizmente, como já discutido anteriormente, este parâmetro não precisa ser grande para fornecer um desempenho adequado.

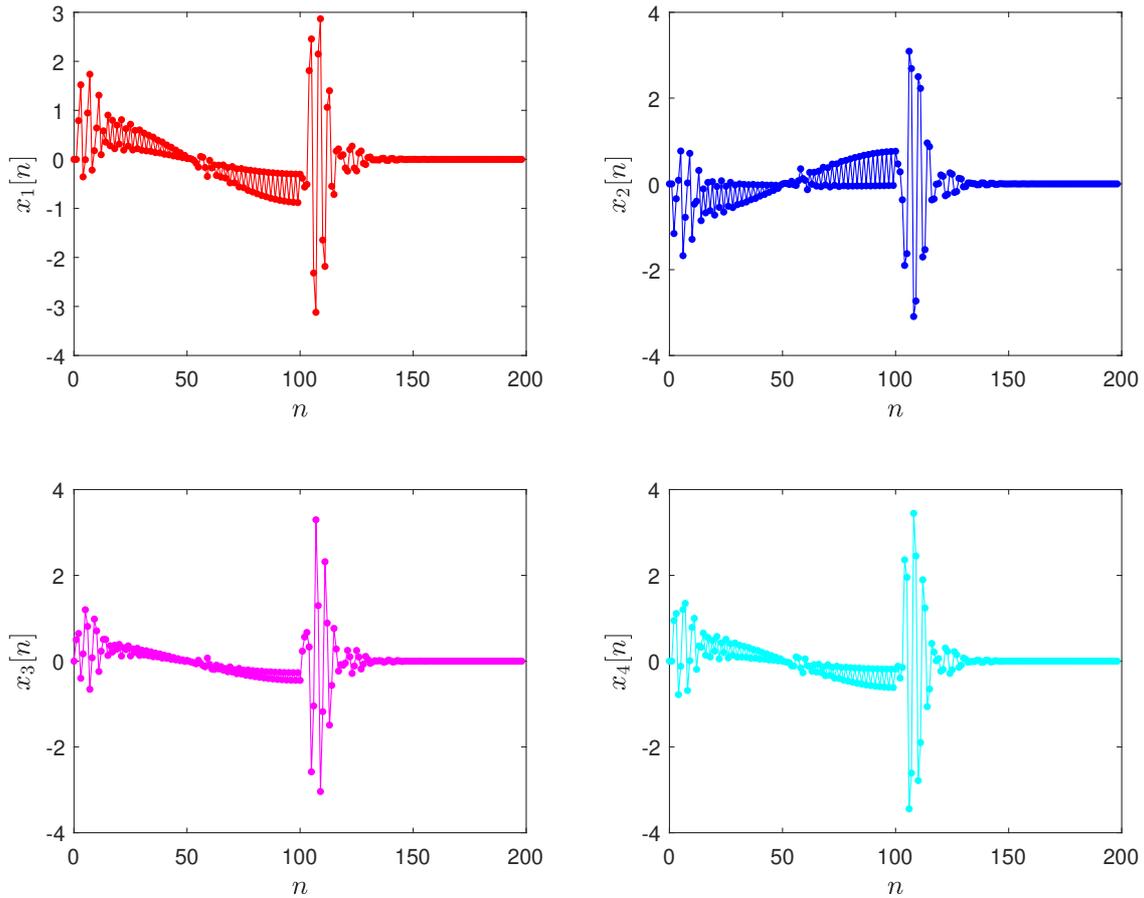


Figura 3.6: Trajetórias do estado

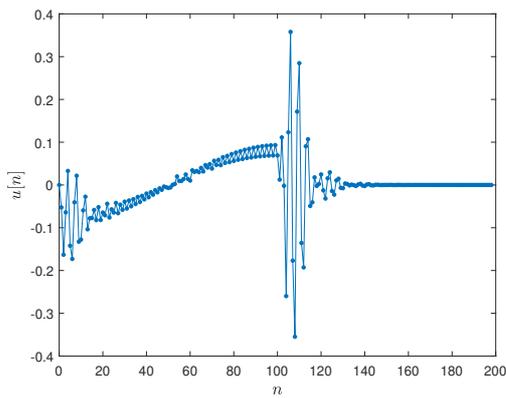


Figura 3.7: Esforço de controle

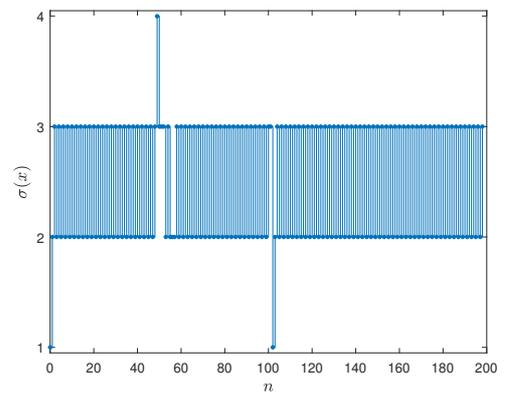


Figura 3.8: Sequência de comutação

No que se refere aos resultados desta seção devemos destacar que todas as condições que abordam o projeto de  $\sigma(y)$  (ou  $\sigma(x)$ ) são, de fato, mais conservadoras que do que as dedicadas a tratar do projeto de  $\sigma(y, w)$  (ou  $\sigma(x, w)$ ). Isso ocorre porque, enquanto as primeiras consideram a entrada externa de pior caso, ou seja,  $w = w_{max}$ , as outras assumem que  $w$  é conhecida, seja via medida ou estimação.

## 3.4 Considerações finais

Neste capítulo, fornecemos condições suficientes descritas em termos de desigualdades matriciais lineares para tratar o projeto via realimentação estática de saída de sistemas lineares com comutação a tempo discreto. Mais especificamente, consideramos dois casos distintos. No primeiro, a regra de comutação é a única variável de controle do sistema e, no segundo, ela atua em conjunto com uma entrada de controle dependente somente da saída medida. Em ambas as situações o objetivo é assegurar estabilidade exponencial da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho. Exclusivamente, para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , sempre que a entrada externa estiver disponível, propusemos uma função de comutação dependente também da entrada externa. Esta regra é mais geral e muito importante pois fornece resultados menos conservadores. Como ilustrado através de vários exemplos, as condições de realimentação de saída propostas neste capítulo são menos conservadoras do que as existentes na literatura e, além disso, possui o grande diferencial de serem simples de resolver devido à sua descrição em termos de LMIs.

# CONTROLE VIA REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA

“Assim, fixamos os olhos, não naquilo que se vê, mas no que não se vê, pois o que se vê é transitório, mas o que não se vê é eterno.”

— 2 CORÍNTIOS 4:18

Este capítulo é dedicado à síntese de controle via realimentação dinâmica de saída de sistemas lineares com comutação a tempo discreto. Mais especificamente, o objetivo é realizar o projeto conjunto de uma regra de comutação e um controlador dinâmico de ordem completa com a finalidade de assegurar estabilidade exponencial global da origem e garantir um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Com relação a outros métodos disponíveis na literatura, nossa maior contribuição é fornecer condições descritas em termos de desigualdades matriciais lineares, que são mais simples de resolver, porém não mais conservadoras do que os métodos propostos em Geromel et al. [2008] e Deaecto et al. [2011] que são expressos em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler. Um ponto fundamental que contribuiu para reduzir o conservadorismo das condições de projeto é a natureza variante no tempo da função de Lyapunov adotada. Basicamente, o resultado principal deste capítulo foi obtido generalizando as condições de estabilidade obtidas do capítulo anterior. Neste caso, a matriz especial  $R_i[n]$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , utilizada na implementação da regra de comutação, apresenta uma estrutura particular que é importante para fazer com que a regra seja independente do estado do sistema que, por hipótese, está indisponível. Além disso, a matriz de transformação, utilizada para linearizar as condições de projeto, foi escolhida de modo que os parâmetros do controlador, que são invariantes no tempo, sejam independentes da matriz de Lyapunov. Isto resulta em condições menos conservadoras, pois evita a imposição de restrições sobre a matriz de Lyapunov. Exemplos acadêmicos são utilizados para colocar em evidência a eficácia da metodologia proposta e compará-la com outras técnicas disponíveis na literatura. No Capítulo 6 esta técnica é utilizada no controle de uma suspensão ativa, o que evidencia a sua utilidade em várias aplicações práticas de engenharia.

## 4.1 Formulação do problema

Considere o seguinte sistema linear com comutação no domínio do tempo discreto

$$x[n+1] = A_\sigma x[n] + B_\sigma u[n] + H_\sigma w[n] \quad (4.1)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + F_\sigma u[n] + G_\sigma w[n] \quad (4.2)$$

$$y[n] = C_\sigma x[n] + D_\sigma w[n] \quad (4.3)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada de perturbação,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  são as saídas controlada e medida, respectivamente. O sinal  $\sigma \in \mathbb{K}$  representa a regra de comutação que seleciona a cada instante de tempo um dos subsistemas dentre os  $N$  disponíveis. Como no capítulo anterior, a depender do critério de desempenho utilizado (veja as Definições 2.3 e 2.4) a entrada externa é do tipo

impulsiva  $w[n] = \delta[n+1]e_r$ , com  $e_r$  sendo a  $r$ -ésima coluna da matriz identidade, para o caso  $\mathcal{H}_2$  ou qualquer sinal arbitrário tal que  $w \in \mathcal{L}_2$  para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ . Em ambas as situações, consideramos que o sistema evolui de condições iniciais nulas,  $x[-1] = 0$  ou  $x[0] = 0$ , respectivamente.

Nosso objetivo é realizar o projeto conjunto de uma regra de comutação dependente da saída medida  $\sigma : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$  e um controlador dinâmico de ordem completa, de forma a assegurar estabilidade exponencial global da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho. Consideramos que o controlador dinâmico com comutação evolui de condições iniciais nulas e apresenta a seguinte realização em espaço de estado

$$\hat{x}[n+1] = \hat{A}_\sigma \hat{x}[n] + \hat{B}_\sigma y[n] \quad (4.4)$$

$$u[n] = \hat{C}_\sigma \hat{x}[n] + \hat{D}_\sigma y[n] \quad (4.5)$$

em que as matrizes do controlador  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , devem ser determinadas concomitantemente com a regra de comutação  $\sigma(y)$ . Este problema, já foi tratado nas referências [Deaecto \[2010\]](#) e [Deaecto et al. \[2011\]](#), porém impondo que  $\hat{D}_i = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e com condições descritas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler, as quais são não-convexas devido ao produto de variáveis matriciais e, conseqüentemente, difíceis de serem resolvidas quando o sistema em questão for constituído por mais de três subsistemas. Mais detalhes sobre estas desigualdades estão disponíveis em [Geromel and Colaneri \[2006a\]](#), [Deaecto \[2010\]](#) e [Deaecto et al. \[2011\]](#).

Definindo o vetor de estado aumentado  $\tilde{x} = [x' \ x']'$  e conectando o controlador (4.4)-(4.5) ao sistema (4.1)-(4.3), obtemos o seguinte sistema em malha fechada

$$\tilde{x}[n+1] = \tilde{A}_\sigma \tilde{x}[n] + \tilde{H}_\sigma w[n] \quad (4.6)$$

$$z[n] = \tilde{E}_\sigma \tilde{x}[n] + \tilde{G}_\sigma w[n] \quad (4.7)$$

com as matrizes aumentadas dadas por

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i \hat{D}_i C_i & B_i \hat{C}_i \\ \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i + B_i \hat{D}_i D_i \\ \hat{B}_i D_i \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i + F_i \hat{D}_i C_i & F_i \hat{C}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_i = [F_i \hat{D}_i D_i + G_i] \quad (4.9)$$

que dependem das matrizes do controlador  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , a serem determinadas. Note que estas matrizes são invariantes no tempo e, portanto, uma dificuldade a ser enfrentada é obter condições LMIs que permitam determiná-las. Neste caso, a matriz de transformação utilizada no processo de linearização das condições de projeto não pode depender da matriz de Lyapunov que é variante no tempo. Isso evita a imposição de estruturas nesta matriz, o que levaria a resultados muito conservadores. Neste sentido, nossa proposta é adotar a matriz genérica

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} X' & ? \\ U' & ? \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & ? \\ V & ? \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

em que o símbolo “?” indica blocos sem importância e, associada a ela, a seguinte matriz de transformação  $\tilde{\Phi}$

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

em que as matrizes  $X$ ,  $Y$ ,  $U$  e  $V$  são todas quadradas e as duas últimas são não-singulares, ou seja,  $\det(U) \neq 0$  e  $\det(V) \neq 0$ . A matriz de transformação  $\tilde{\Phi}$  já foi utilizada na literatura para tratar sistemas lineares incertos e invariantes no tempo e, como ficará claro em seguida, se encaixa bem no problema em estudo. Para maiores detalhes a respeito da sua aplicação veja a referência de Oliveira et al. [2002]. Os resultados apresentados neste capítulo estão também disponíveis em Daiha and Deaecto [2019a] e Deaecto and Daiha [Submetido]. A próxima seção fornece os resultados relacionados ao projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ .

## 4.2 Projeto de controle $\mathcal{H}_2$

Considere o sistema linear com comutação em malha fechada (4.6)-(4.7) evoluindo de condições iniciais nulas  $\tilde{x}[-1] = 0$  e com entrada externa do tipo impulsiva, ou seja,  $w[n] = \delta[n+1]e_r$  para todo  $n \in \mathbb{N}_-$  e com  $e_r$  sendo a  $r$ -ésima coluna da matriz identidade. Como usual na literatura, este sistema pode ser reescrito de forma equivalente a

$$\tilde{x}[n+1] = \tilde{A}_\sigma \tilde{x}[n], \quad \tilde{x}[0] = \tilde{H}_{\sigma[-1]} e_r \quad (4.12)$$

$$z[n] = \tilde{E}_\sigma \tilde{x}[n] \quad (4.13)$$

definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Adotando a função de Lyapunov convexa e variante no tempo

$$V(\tilde{x}[n], n) = \tilde{x}[n] \tilde{P}[n] \tilde{x}[n] \quad (4.14)$$

com  $\tilde{P}[n] = \tilde{P}[n - m_n] > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , e assumindo, neste primeiro momento, que  $\tilde{x}$  está disponível para realimentação, o próximo corolário apresenta uma versão do Teorema 3.1 que foi adaptado para o caso de realimentação de estado e aplicado ao sistema em malha fechada (4.6)-(4.7).

**Corolário 4.1.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e  $q = \sigma[-1]$ . Assuma que existam matrizes simétricas  $\tilde{P}[n] > 0$ ,  $\tilde{R}_i[n]$  e um controlador dinâmico (4.4)-(4.5) definido pelas matrizes  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$  compondo o conjunto solução  $\Psi$  e satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$J_2(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr} (\tilde{H}'_q \tilde{P}[0] \tilde{H}_q + \tilde{G}'_q \tilde{G}_q) \quad (4.15)$$

sujeito a

$$\tilde{A}'_i \tilde{P}[n+1] \tilde{A}_i - \tilde{P}[n] + \tilde{E}'_i \tilde{E}_i < \tilde{R}_i[n], \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.16)$$

$$\tilde{R}_i[n] < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (4.17)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição de contorno  $\tilde{P}[\kappa] = \tilde{P}[0] > 0$ . Então, o controlador (4.4)-(4.5) junto com a regra de comutação

$$\sigma(\tilde{x}[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \tilde{x}[n]' \tilde{R}_i[n - m_n] \tilde{x}[n] \quad (4.18)$$

asseguram estabilidade exponencial global da origem do sistema (4.6)-(4.7). Além disso, a solução de (4.15) é

um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** Segue do Teorema 3.1 fazendo  $\tilde{C}_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  e  $\tilde{U}[n] = 0$ ,  $\forall n = 0, \dots, \kappa - 1$ .  $\square$

Note que as condições (4.16)-(4.17) são não-convexas devido à presença das matrizes do controlador  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$  em  $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i, \tilde{G}_i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Nosso objetivo é generalizar este resultado para tratar o problema em consideração no qual o estado não está disponível para realimentação. Neste sentido, devemos considerar duas particularidades que tornam esta tarefa longe de ser trivial.

A primeira é que as matrizes do controlador dinâmico (4.6)-(4.7) são invariantes no tempo e, consequentemente, a mudança de variável utilizada para linearizar (4.16)-(4.17) deve assegurar que estas desigualdades sejam independentes da matriz de Lyapunov  $\tilde{P}[n]$ , que é variante no tempo. Neste caso, vamos adotar a matriz de transformação (4.11) associada à matriz genérica (4.10). Como já mencionado, esta matriz evita a imposição de estruturas sobre a matriz de Lyapunov, o que levaria a resultados muito conservadores.

O segundo ponto a ser destacado é referente à regra de comutação que não pode depender da variável de estado do sistema  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ , que está indisponível. Neste caso, a matriz aumentada  $\tilde{R}_i[n]$  deve possuir a estrutura particular

$$\tilde{R}_i[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{R}_i[n] \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

definida para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ , o que implica na seguinte regra de comutação

$$\sigma(\tilde{x}[n]) = \sigma(\hat{x}[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \hat{x}[n]' \hat{R}_i[n - m_n] \hat{x}[n] \quad (4.20)$$

Observe que esta regra depende apenas da saída medida  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  através da variável de estado do controlador  $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Essa estrutura já foi utilizada no contexto dos sistemas afins com comutação, como pode ser verificado na referência Deaecto [2016]. Considerando as particularidades mencionadas, ou seja, adotando a matriz de transformação (4.11) associada a (4.10) e a matriz estruturada (4.19), o próximo teorema fornece condições de projeto  $\mathcal{H}_2$  descritas em termos de desigualdades matriciais lineares.

**Teorema 4.1.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e  $q = \sigma[-1]$ . Assuma que existam matrizes simétricas  $W$ ,  $J[n]$ ,  $Z[n]$ ,  $Q_i[n]$  e matrizes  $T[n]$ ,  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $N_i$ ,  $K_i$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $S$  de dimensões compatíveis compondo o conjunto solução  $\Psi$  e satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$J_2(\sigma) < \min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr}(W) \quad (4.21)$$

sujeito a

$$Q_i[n][n] < 0 \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} J[n] & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ T[n] & Z[n] + Q_i[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ XA_i + L_iC_i & M_i & X + X' - J[n+1] & \bullet & \bullet \\ A_i + B_iK_iC_i & A_iY + B_iN_i & I + S' - T[n+1] & Y + Y' - Z[n+1] & \bullet \\ E_i + F_iK_iC_i & E_iY + F_iN_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.23)$$

$$\begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet & \bullet \\ XH_q + L_qD_q & X + X' - J[0] & \bullet & \bullet \\ H_q + B_qK_qD_q & I + S' - T[0] & Y + Y' - Z[0] & \bullet \\ G_q + F_qK_qD_q & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.24)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ ,  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ ,  $i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa)$  e  $q = \sigma[-1]$ , com as condições de contorno  $J[\kappa] = J[0]$ ,  $Z[\kappa] = Z[0]$  e  $T[\kappa] = T[0]$ . Então, existe um controlador dinâmico (4.4)-(4.5) e uma regra de comutação (4.20) que asseguram estabilidade exponencial global da origem do sistema (4.6)-(4.7). Além disso, a solução de (4.21) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** Considere que as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas. Nosso objetivo é mostrar que elas asseguram a validade do Corolário 4.1. De fato, note que (4.22)-(4.23) são obtidas das desigualdades

$$\tilde{\Phi}' \tilde{R}_{i[n]}[n] \tilde{\Phi} < 0 \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}' \tilde{P}[n] \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}' R_i[n] \tilde{\Phi} & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{A}_i \tilde{\Phi} & \tilde{\Phi}' (\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}' - \tilde{P}[n+1]) \tilde{\Phi} & \bullet \\ \tilde{E}_i \tilde{\Phi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{H}_q & \tilde{\Phi}' (\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}' - \tilde{P}[0]) \tilde{\Phi} & \bullet \\ \tilde{G}_q & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.27)$$

com a matriz genérica não-singular  $\tilde{\Gamma}$  dada em (4.10), a matriz de transformação  $\tilde{\Phi}$  proposta em (4.11) e levando em conta as seguintes identidades

$$\tilde{\Phi}' \tilde{P}[n] \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} J[n] & \bullet \\ T[n] & Z[n] \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}' \tilde{R}_i[n] \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & \bullet \\ 0 & V' \hat{R}_i[n] V \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} E_i + F_i K_i C_i & E_i Y + F_i N_i \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' = \begin{bmatrix} X & U \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{A}_i \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} X A_i + L_i C_i & M_i \\ A_i + B_i K_i C_i & A_i Y + B_i N_i \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} X H_i + L_i D_i \\ H_i + B_i K_i D_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} X & S \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

sendo  $\tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}'$  obtido diretamente do fato que  $\tilde{\Gamma}'^{-1} \tilde{\Gamma}' = I$ . Para a obtenção destas identidades foram consideradas as variáveis matriciais

$$\begin{bmatrix} M_i & L_i \\ N_i & K_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & X B_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 0 \\ C_i Y & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} A_i \begin{bmatrix} Y & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Além disso, denotamos  $Q_i[n] = V' \hat{R}_i[n] V$  e  $S = XY + UV$ . Note que uma condição necessária para a factibilidade de (4.23) é que a desigualdade

$$\begin{bmatrix} J[n] & \bullet \\ T[n] & Z[n] + Q_i[n] \end{bmatrix} > 0 \quad (4.32)$$

seja satisfeita para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $n = 1, \dots, \kappa - 1$ . Como  $Q_{i[n]}[n] < 0$ , podemos concluir da validade de (4.32) que  $\tilde{\Phi}' P[n] \tilde{\Phi} > 0$  e, conseqüentemente, que  $\tilde{P}[n] > 0$ ,  $\forall n = 1, \dots, \kappa - 1$ . Agora, levando em conta que a desigualdade

$$\tilde{\Gamma}' \tilde{P}[n]^{-1} \tilde{\Gamma}' > \tilde{\Gamma}' + \tilde{\Gamma}' - \tilde{P}[n] \quad (4.33)$$

é assegurada para  $\tilde{P}[n] > 0$ , veja a referência Oliveira et al. [1999] para detalhes, podemos concluir que se (4.26)

é válida, logo, a mesma desigualdade com o bloco  $\tilde{\Phi}'(\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}' - \tilde{P}[n+1])\tilde{\Phi}$  substituído por  $\tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{P}[n+1]^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{\Phi}$  é verificada. Considerando a substituição mencionada anteriormente e realizando a seguinte multiplicação

$$\begin{bmatrix} \Phi'^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'\tilde{P}[n]\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}'R_i[n]\tilde{\Phi} & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{A}_i\tilde{\Phi} & \tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{P}[n+1]^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{\Phi} & \bullet \\ \tilde{E}_i\tilde{\Phi} & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.34)$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}[n] + R_i[n] & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'\tilde{A}_i & \tilde{\Gamma}'\tilde{P}[n+1]^{-1}\tilde{\Gamma} & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.35)$$

Aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas de (4.35), obtemos a desigualdade (4.16) do Corolário 4.1. De forma similar, considere (4.27) com o seu bloco (2, 2) substituído por  $\tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{P}[0]^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{\Phi}$ . Multiplicando a desigualdade resultante à direita por  $\text{diag}(I, \tilde{\Phi}^{-1}, I)$  e à esquerda pelo seu transposto e aplicando o Complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas, obtemos  $\tilde{W} > \tilde{H}'_q\tilde{P}[0]\tilde{H}_q + \tilde{G}'_q\tilde{G}_q$ . Portanto, (4.21) e (4.24) asseguram a validade do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  apresentado em (4.15). Além disso, multiplicando à direita de (4.25) por  $\tilde{\Phi}^{-1}$  e à esquerda pela sua transposta, obtemos (4.17). Finalmente, a função de comutação segue da adoção da matriz estruturada (4.19) concluindo assim a prova.  $\square$

Como nos resultados apresentados no capítulo anterior, note que o Teorema 4.1 é descrito como a solução de  $N^\kappa$  subproblemas convexos e, portanto, é mais simples de resolver do que as metodologias baseadas em desigualdades de Lyapunov-Metzler propostas em Deaecto [2010], Geromel et al. [2008] e Deaecto et al. [2011]. Entretanto, note que se o valor de  $\kappa$  é muito grande, a quantidade de variáveis matriciais e restrições de cada subproblema convexo pode tornar a solução difícil de se obter computacionalmente. Todavia, felizmente, como foi discutido no Capítulo 3 e ilustrado no Exemplo 3.2, não é necessário um valor muito grande de  $\kappa$  para se obter um índice de desempenho satisfatório. Na verdade, como discutido no capítulo mencionado, os custos garantidos decrescem ou permanecem constantes sempre que os valores de  $\kappa$  são múltiplos. Caso contrário, nada pode ser concluído a respeito do comportamento dos custos garantidos.

Uma vez que resolvemos o problema de otimização (4.21), as matrizes do controlador dinâmico com comutação podem ser, prontamente, obtidas pela seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{-1} & -U^{-1}XB_i \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i - XA_iY & L_i \\ N_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ -C_iYV^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

válida para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Observe que utilizando as matrizes  $S = XY + UV$  e  $Y$ , fornecidas pela solução do Teorema 4.1, podemos determinar  $U$  pela escolha arbitrária da matriz não-singular  $V$ , ou determinar  $V$  pela escolha arbitrária da matriz não-singular  $U$ . A determinação dessas variáveis são importantes para obter as matrizes do controlador dadas por (4.36) e para calcular  $\hat{R}_i[n] = V'^{-1}Q_i[n]V^{-1}$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , que é essencial na implementação da regra de comutação (4.20).

No que diz respeito à esta regra de comutação, podemos notar, observando a desigualdade (4.22), que

a variável matricial  $Q_i[n]$  está restrita apenas para  $i = i[n] \in \mathbb{K}$ . Para  $i \neq i[n]$ , as matrizes  $Q_i[n]$  podem ser escolhidas de forma arbitrária, mas satisfazendo (4.23). Vale ressaltar que essa escolha é importante porque ela interfere diretamente no desempenho efetivo do sistema. Desse modo, nossa proposta é escolher as matrizes  $Q_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ , o mais próximo possível da borda de factibilidade de (4.23). Nesse sentido, resolvendo o Teorema 4.1 e definindo as seguintes variáveis matriciais

$$\Omega^{11}[n] = \begin{bmatrix} J[n] & \bullet \\ T[n] & Z[n] \end{bmatrix}, \quad \Omega_i^{21} = \begin{bmatrix} XA_i + L_iC_i & M_i \\ A_i + B_iK_iC_i & A_iY + B_iN_i \\ E_i + F_iK_iC_i & E_iY + F_iN_i \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\Omega^{22}[n] = \begin{bmatrix} X + X' - J[n+1] & \bullet & \bullet \\ I + S' - T[n+1] & Y + Y' - Z[n+1] & \bullet \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Podemos reescrever (4.23) em termos de  $\Omega^{11}[n]$ ,  $\Omega_i^{21}$  e  $\Omega^{22}[n]$ , como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_i[n] \end{bmatrix} > \Omega_i^{21'} \left( \Omega^{22}[n] \right)^{-1} \Omega_i^{21} - \Omega^{11}[n] \quad (4.39)$$

que foi obtida pela aplicação do Complemento de Schur em (4.23) com relação a  $\Omega^{22}[n] > 0$ . Assim, com o lado direito de (4.23) totalmente definido, podemos particioná-lo como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_i[n] \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i^{11}[n] & \bullet \\ \mathcal{L}_i^{21}[n] & \mathcal{L}_i^{22}[n] \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Logo, aplicando o Complemento de Schur em (4.40) com relação ao termo  $\mathcal{L}_i^{11}[n] < 0$ , obtemos

$$Q_i[n] = \mathcal{L}_i^{22}[n] - \mathcal{L}_i^{21}[n] \left( \mathcal{L}_i^{11}[n] \right)^{-1} \mathcal{L}_i^{21}[n]' + \varepsilon, \quad \forall i \neq i[n] \in \mathbb{K} \quad (4.41)$$

com  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno. Sendo assim, a variável matricial  $Q_i[n]$  é obtida diretamente da solução do Teorema 4.1 para todo  $i = i[n] \in \mathbb{K}$ . Caso contrário, para  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$ , a matriz  $Q_i[n]$  é fornecida por (4.41). Isto nos permite calcular  $\hat{R}_i[n] = V'^{-1}Q_i[n]V$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  que é importante para a implementação da regra de comutação (4.20).

O próximo exemplo ilustra a eficácia da metodologia proposta no Teorema 4.1 e apresenta uma comparação com os resultados propostos na referência Deaecto [2010], cuja a solução é descrita em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler.

**Exemplo 4.1.** Considere o sistema com comutação (4.1)-(4.3) definido por dois subsistemas instáveis com matrizes  $A_i = e^{A_i h}$ ,  $h = 0,1$ ,

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 70 & -2 & -30 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 40 & 12 & -12 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$G_1 = G_2 = 0$  e matrizes de saída medida definidas por  $C_1 = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $C_2 = [0 \ 1 \ 0]$  e  $D_1 = D_2 = 1$ . Neste exemplo, implementamos duas leis de controle diferentes. A primeira, denominada CL1, é definida como  $u[n] = \hat{C}_\sigma \hat{x}[n]$  e importante para fins de comparação com as desigualdades de Lyapunov-Metzler propostas no Teorema 3.4 da referência Deaecto [2010]. A outra lei de controle, mais geral, é denotada por CL2 e definida em (4.5). Note que, a primeira lei, CL1, é implementada apenas impondo  $K_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ , como uma restrição adicional no Teorema 4.1. Assim, resolvendo o Teorema 4.1 para  $\kappa = 6, q = 2$  e  $K_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ , obtivemos o custo garantido  $J_{2s} = 417,3494$ , enquanto que a metodologia proposta pela referência Deaecto [2010] forneceu um custo garantido 24% maior aproximadamente. O custo obtido foi de  $J_{2s} = 517,3341$  para a matriz de Metzler

$$\Pi^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

determinada a partir de uma busca unidimensional com precisão de 0,1 em relação aos elementos de  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ . Através de simulação numérica, obtivemos o custo verdadeiro  $J_2 = 53,4288$  como resultado da implementação da regra de comutação (4.20) e do controlador dinâmico (4.36). Para a obtenção deste controlador, adotamos  $V = I$  que foi utilizado para determinar a matriz  $U$  via  $S = XY + UV$ . Em contrapartida, utilizando o Teorema 3.4 da referência Deaecto [2010], obtivemos  $J_2 = 267,1929$  com  $V = Y$ . Além disso, resolvendo o Teorema 4.1 para a lei de controle CL2, o desempenho foi significativamente melhorado, visto que o custo garantido resultante foi de  $J_{2s} = 321,5866$ , ou seja, aproximadamente 23% menor do que o custo fornecido pelo mesmo teorema, porém considerando a lei de controle CL1. Contudo, o custo verdadeiro obtido quando se considera CL2 foi de  $J_2 = 101,9420$ .

Como um segundo passo, adicionamos dois subsistemas instáveis ao exemplo, cujas matrizes são dadas abaixo

$$\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & 9 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & 21 & -4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$B_3 = B_2, B_4 = B_1, H_4 = H_3 = H_2, E_3 = E_4 = E, F_4 = F_3 = F_1, G_4 = G_3 = 0$  e matrizes de saída medida definidas por  $C_3 = C_1$  e  $C_4 = C_2, D_4 = D_3 = D_2$ . Devemos salientar que para uma matriz de Metzler genérica  $\Pi \in \mathcal{M}_d$ , as condições propostas no Teorema 3.4 de Deaecto [2010] são difíceis de serem resolvidas, uma vez que para  $N = 4$  é exigido a busca unidimensional de 12 parâmetros livres. Assim, considerando a lei de controle CL2, resolvemos novamente as condições do Teorema 4.1 para  $q = 2$  e  $\kappa \in \{2, 3, 4, 6\}$  e obtivemos os custos garantidos  $J_{2s}$  e verdadeiros  $J_2$  apresentados na Tabela 4.1. É importante destacar que os valores dos custos garantidos são sempre não-crescentes para valores múltiplos de  $\kappa$ . Para  $\kappa = 2$ , obtivemos a sequência ótima  $\mathcal{C}_3^*(2) = (1 \ 3)$  e os controladores

$$\hat{\mathcal{K}}_1(z) = \frac{-3.123z^3 + 2.901z^2 - 0.1429z - 0.001044}{z^3 - 0.9288z^2 + 0.02516z + 7.854e - 07} \quad (4.46)$$

$$\hat{\mathcal{K}}_2(z) = \frac{-0.1576z^3 - 12.65z^2 + 13.95z - 2.832}{z^3 + 3.216z^2 - 11.38z + 3.677} \quad (4.47)$$

$$\hat{\mathcal{K}}_3(z) = \frac{-1.555z^3 + 0.06452z^2 + 2.658z - 1.012}{z^3 + 0.2196z^2 + 0.007889z - 0.08841} \quad (4.48)$$

$$\hat{\mathcal{K}}_4(z) = \frac{-6.666z^3 + 8.867z^2 - 2.019z - 0.3008}{z^3 - 0.6316z^2 - 0.3499z - 0.03372} \quad (4.49)$$

Para cada  $\sigma = i, \forall i \in \mathbb{K}$ , temos  $\hat{\mathcal{K}}_i(z)$  é a função de transferência do  $i$ -ésimo controlador com realização  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$ . As Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam, respectivamente, as trajetórias dos estados do sistema e do controlador, o esforço de controle e a sequência de comutação. Este exemplo ilustra a validade e a eficácia da metodologia proposta no Teorema 4.1 comparada com a técnica baseada nas desigualdades de Lyapunov-Metzler.

$\kappa$	2	3	4	6
$J_{2s}$	191,2882	193,5635	176,2304	168,7051
$J_2$	8,2320	22,7229	10,7028	6,7115

Tabela 4.1: Desempenho  $\mathcal{H}_2$  para  $N = 4$  subsistemas

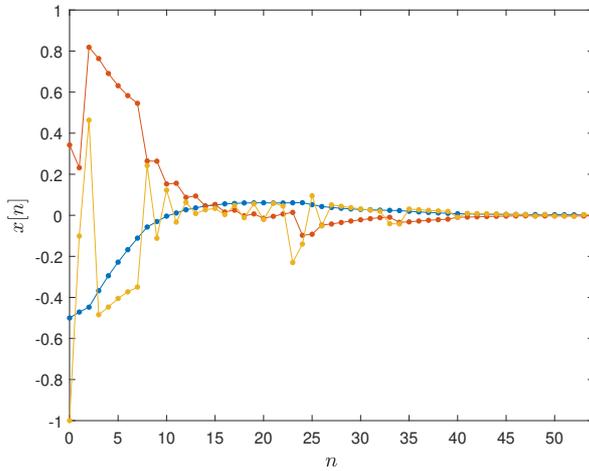


Figura 4.1: Trajetórias do estado do sistema

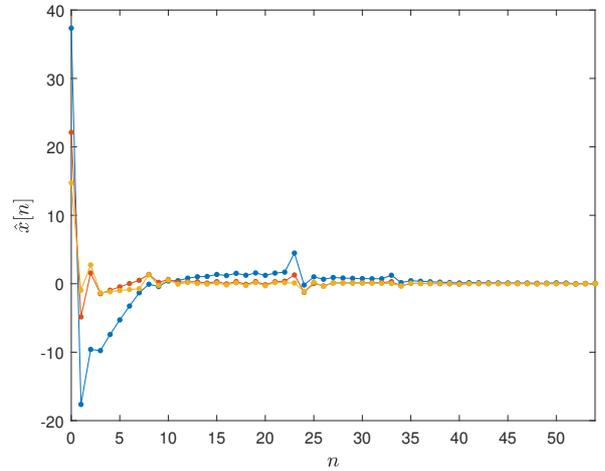


Figura 4.2: Trajetória do estado do controlador

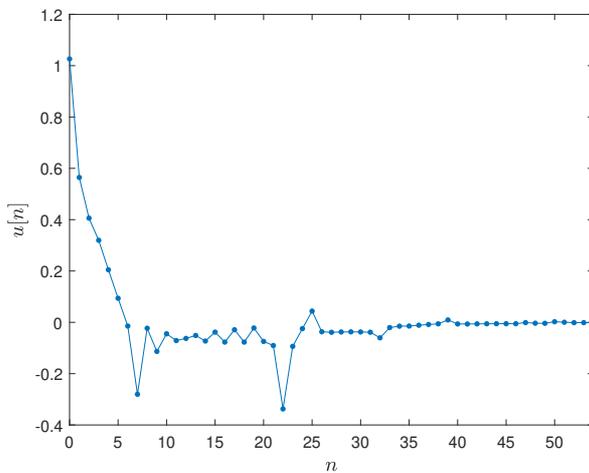


Figura 4.3: Esforço de controle

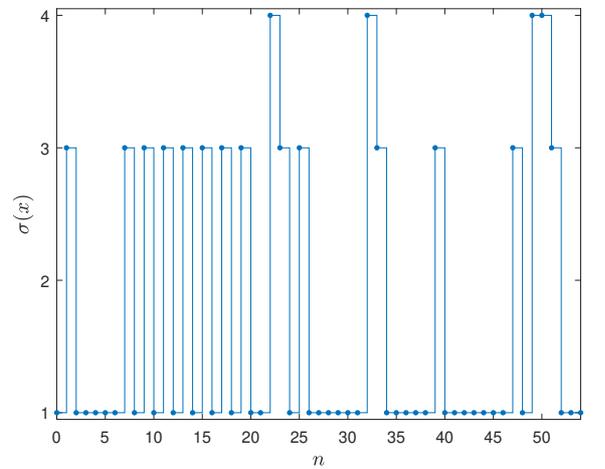


Figura 4.4: Sequência de comutação

Observe que a partir do Teorema 4.1 é possível obter condições para o projeto de uma regra de comutação estabilizante que atua como única variável de controle do sistema. Entretanto, diferente do problema abordado no capítulo anterior, consideramos o caso de realimentação dinâmica de saída. Neste contexto, a regra é projetada conjuntamente com um filtro dinâmico de ordem completa, que tem como função única e exclusiva de fornecer informações necessárias para a implementação da regra de comutação. Para a obtenção destas

$\kappa$	Teorema 3.1				Teorema 4.1 com $N_i = 0$ e $K_i = 0$			
	2	3	4	5	2	3	4	5
Ex. 3.1	1.365,4623	437,7508	263,1494	218,7408	344,5662	266,4926	264,9069	287,8260
Ex. 3.2	940,0814	$\infty$	389,2671	125,9068	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Tabela 4.2: Custo garantido  $\mathcal{H}_2$ .

condições, basta impor  $N_i = 0$  e  $K_i = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , nas desigualdades do Teorema 4.1, o que resulta em  $\hat{C}_i = 0$ ,  $\hat{D}_i = 0$  e, conseqüentemente,  $u[n] = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Desse modo, o próximo exemplo considera a solução do Teorema 4.1 com as restrições adicionais mencionadas.

**Exemplo 4.2.** Considere o sistema linear com comutação (4.1)-(4.3) com  $u[n] = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Neste exemplo, vamos comparar dois resultados propostos nesta tese para o projeto da regra de comutação dependente da saída medida. O primeiro refere-se ao Teorema 3.1 apresentado no Capítulo 3, que é baseado em condições de projeto via realimentação estática de saída. O segundo refere-se ao projeto via realimentação dinâmica de saída proposto no Teorema 4.1 considerando as restrições adicionais  $N_i = 0$  e  $K_i = 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , o que nos permite projetar de forma conjunta a regra de comutação (4.20) e o filtro dinâmico com comutação (4.4) definido pelas matrizes

$$\hat{A}_i = U^{-1} \left( M_i - L_i C_i Y - X A_i Y \right) V^{-1} \quad (4.50)$$

$$\hat{B}_i = U^{-1} L_i \quad (4.51)$$

válida para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Nesta comparação utilizamos os sistemas apresentados nos Exemplos 3.1 e 3.2 do Capítulo 3. A Tabela 4.2 apresenta o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  considerando as duas metodologias mencionadas para quatro valores diferentes de  $\kappa \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Observe que para o Exemplo 3.1 as condições do Teorema 4.1 forneceram um custo garantido substancialmente menor para  $\kappa \in \{2, 3\}$ , porém para  $\kappa = 5$  essa situação se inverte. No que se refere ao Exemplo 3.2, notamos que para nenhum dos valores de  $\kappa$  foi possível encontrar uma solução factível para o Teorema 4.1. Na verdade, ambos são problemas distintos e não comparáveis, mas representam abordagens alternativas para o projeto da regra de comutação dependente da saída medida.

### 4.3 Projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção, vamos considerar o sistema em malha fechada (4.6)-(4.7) evoluindo de condições iniciais nulas  $\tilde{x}[0] = 0$  e com entrada externa  $w \in \mathcal{L}_2$ . Primeiramente, vamos apresentar condições de projeto  $\mathcal{H}_\infty$  para o caso em que o estado  $\tilde{x}$  está disponível para realimentação. Estas condições são as mesmas obtidas no Teorema 3.3, mas adaptadas para o caso de realimentação de estado e estão disponíveis no próximo corolário.

**Corolário 4.2.** Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e  $q = \sigma[-1]$ . Assuma que existam matrizes simétricas  $\tilde{P}[n] > 0$ ,  $\tilde{R}_i[n]$ , um escalar positivo  $\rho > 0$  e um controlador dinâmico (4.4)-(4.5) definido pelas matrizes  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$  compondo o conjunto solução  $\Psi$  e satisfazendo o seguinte problema de otimização

$$\min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (4.52)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_i' \tilde{P}[n+1] \hat{A}_i - \tilde{P}[n] + \tilde{E}_i' \tilde{E}_i - \tilde{R}_i[n] & \bullet \\ \tilde{H}_i' \tilde{P}[n+1] \hat{A}_i + \tilde{G}_i' \tilde{E}_i & \tilde{H}_i' \tilde{P}[n+1] \tilde{H}_i + \tilde{G}_i' \tilde{G}_i - \rho I \end{bmatrix} < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (4.53)$$

$$\tilde{R}_i[n] < 0, \quad i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa) \quad (4.54)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e com a condição da contorno  $\tilde{P}[\kappa] = \tilde{P}[0] > 0$ . Então, o controlador (4.4)-(4.5) junto com a regra de comutação (4.18) asseguram estabilidade exponencial global da origem do sistema (4.6)-

(4.7). Além disso, a solução de (4.52) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Prova:** A prova segue do Teorema 3.3 aplicado ao sistema aumentado (4.6)-(4.7) e fazendo  $\tilde{C}_i = I$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$  e  $\tilde{U}[n] = 0$ ,  $\forall n = 0, \dots, \kappa - 1$ .  $\square$

Note que as desigualdades (4.53)-(4.54) são não-convexas devido à presença das matrizes do controlador  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$  nas matrizes aumentadas  $(\tilde{A}_i, \tilde{H}_i, \tilde{E}_i, \tilde{G}_i)$  do sistema. Nosso objetivo é generalizar estas condições para tratar o caso em que o estado  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  não está disponível. Em outras palavras, para esta situação específica, desejamos projetar simultaneamente uma regra de comutação e um controlador dinâmico de ordem completa (4.4)-(4.5) de forma a minimizar um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  definido em (2.64).

Pelos motivos já discutidos na seção anterior, a matriz de transformação (4.11) associada à (4.10) será utilizada para linearizar as desigualdades (4.53)-(4.54). Esta escolha é importante para fazer com que as matrizes do controlador  $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i)$  sejam independentes da matriz de Lyapunov  $\tilde{P}[n]$  que é variante no tempo, evitando, assim, a imposição de estruturas sobre  $\tilde{P}[n]$ , o que levaria a resultados muito conservadores. Além disso, utilizaremos a matriz  $\tilde{R}_i[n]$  com a estrutura (4.19) de forma a fazer com que a regra de comutação (4.18) seja independente do estado do sistema  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  como mostrado em (4.20). O próximo teorema apresenta as condições de projeto resultantes.

**Teorema 4.2.** *Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ . Assuma que existam matrizes simétricas  $J[n]$ ,  $Z[n]$ ,  $Q_i[n]$ , matrizes  $T[n]$ ,  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $N_i$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $S$  de dimensões compatíveis e um escalar positivo  $\rho > 0$  compondo o conjunto solução  $\Psi$  e satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{p \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \rho \quad (4.55)$$

sujeito a

$$Q_{i[n]}[n] < 0 \quad (4.56)$$

$$\begin{bmatrix} J[n] & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ T[n] & Z[n] + Q_i[n] & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \rho I & \bullet & \bullet & \bullet \\ XA_i + L_i C_i & M_i & XH_i + L_i D_i & X' + X - J[n+1] & \bullet & \bullet \\ A_i + B_i K_i C_i & A_i Y + B_i N_i & H_i + B_i K_i D_i & I + S' - T[n+1] & Y' + Y - Z[n+1] & \bullet \\ E_i + F_i K_i C_i & E_i Y + F_i N_i & G_i + F_i K_i D_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.57)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ ,  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ ,  $i[n] \in \mathfrak{C}_p(\kappa)$  e  $q = \sigma[-1]$ , com as condições de contorno  $J[\kappa] = J[0]$ ,  $Z[\kappa] = Z[0]$  e  $T[\kappa] = T[0]$ . Então, existe um controlador dinâmico (4.4)-(4.5) e uma regra de comutação (4.20) que asseguram a estabilidade exponencial global da origem do sistema (4.6)-(4.7). Além disso, a solução de (4.55) é um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Prova:** Observe que as condições (4.56)-(4.57) são obtidas a partir das seguintes desigualdades

$$\tilde{\Phi}' \tilde{R}_{i[n]}[n] \tilde{\Phi} < 0 \quad (4.58)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}' \tilde{P}[n] \tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}' \tilde{R}_i[n] \tilde{\Phi} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{A}_i \tilde{\Phi} & \tilde{\Phi}' \tilde{\Gamma}' \tilde{H}_i & \tilde{\Phi}' (\tilde{\Gamma}' + \tilde{\Gamma} - \tilde{P}[n+1]) \tilde{\Phi} & \bullet \\ \tilde{E}_i \tilde{\Phi} & \tilde{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.59)$$

com  $\tilde{\Gamma}$  e  $\tilde{\Phi}$  dados em (4.10) e (4.11), respectivamente. Esta verificação pode ser realizada utilizando as igualdades (4.28)-(4.30), as variáveis matriciais (4.31) e as mudanças de variáveis  $Q_i[n] = V' \hat{R}_i[n] V$  e  $S = XY + UV$ . Além disso, note que (4.32) é uma condição necessária para a factibilidade de (4.57). Como  $Q_{i[n]}[n] < 0$  em (4.32), concluímos que  $\tilde{\Phi}' \tilde{P}[n] \tilde{\Phi} > 0$  e, conseqüentemente,  $\tilde{P}[n] > 0$ , o que nos permite satisfazer a desigualdade (4.33). Logo, podemos substituir o bloco  $\tilde{\Phi}'(\tilde{\Gamma}' + \tilde{\Gamma} - \tilde{P}[n+1])\tilde{\Phi}$  por  $\tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{P}[n+1]^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{\Phi}$  em (4.59) e assegurar que esta desigualdade continua válida. Após esta substituição, realizando a seguinte multiplicação

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Phi}'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'\tilde{P}[n]\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi}'\tilde{R}_i[n]\tilde{\Phi} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{A}_i\tilde{\Phi} & \tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{H}_i & \tilde{\Phi}'\tilde{\Gamma}'\tilde{P}[n+1]^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{\Phi} & \bullet \\ \tilde{E}_i\tilde{\Phi} & \tilde{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Phi}'^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.60)$$

obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}[n] + \tilde{R}_i[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ \tilde{\Gamma}'\tilde{A}_i & \tilde{\Gamma}'\tilde{H}_i & \tilde{\Gamma}'\tilde{P}[n+1]^{-1}\tilde{\Gamma} & \bullet \\ \tilde{E}_i & \tilde{G}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.61)$$

Aplicando o Complemento de Schur em (4.61), com relação às duas últimas linhas e colunas, obtemos a desigualdade (4.53) do Corolário 4.2. Ademais, multiplicando à direita de (4.58) por  $\tilde{\Phi}^{-1}$  e à esquerda pela sua transposta obtemos (4.54), concluindo a prova.  $\square$

Após resolver o problema de otimização deste teorema, temos que as matrizes do controlador dinâmico com comutação (4.4)-(4.5) são obtidas de (4.36) em que  $U$  pode ser determinado da identidade  $S = XY + UV$  a partir de uma escolha arbitrária da matriz não-singular  $V$ , ou *vice e versa*.

Observe que a regra de comutação é função da matriz  $\hat{R}_i[n]$ , que é obtida a partir da variável matricial  $Q_i[n]$ . Note que essa última está restrita apenas para o caso em que  $i = i[n] \in \mathbb{K}$ , ou seja, para  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$  a matriz pode assumir qualquer valor desde que atenda (4.57). Como temos realizado ao longo desta tese, vamos impor que  $Q_i[n]$  se aproxime da borda de factibilidade de (4.57) para todo  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$ . Nesse sentido, definindo as seguintes variáveis matriciais

$$\Xi[n]^{11} = \begin{bmatrix} J[n] & \bullet \\ T[n] & Z[n] \end{bmatrix}, \quad \Xi_i^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ XA_i + L_iC_i & M_i \\ A_i + B_iK_iC_i & A_iY + B_iN_i \\ E_i + F_iK_iC_i & E_iY + F_iN_i \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\Xi_i[n]^{22} = \begin{bmatrix} \rho I & \bullet & \bullet & \bullet \\ XH_i + L_iD_i & X' + X - J[n+1] & \bullet & \bullet \\ H_i + B_iK_iD_i & I + S' - T[n+1] & Y' + Y - Z[n+1] & \bullet \\ G_i + F_iK_iD_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Podemos reescrever a desigualdade (4.59), como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_i[n] \end{bmatrix} > \Xi_i^{21'} \left( \Xi_i^{22}[n] \right)^{-1} \Xi_i^{21} - \Xi[n]^{11} \quad (4.64)$$

o qual foi obtido aplicando o Complemento de Schur com relação ao termo  $\Xi_i^{22}[n] > 0$ . Com o lado direito de (4.64) completamente determinado, podemos redefiní-lo como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_i[n] \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \vartheta_i^{11}[n] & \bullet \\ \vartheta_i^{21}[n] & \vartheta_i^{22}[n] \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Além disso, aplicando o Complemento de Schur com relação a  $\vartheta_i^{11}[n] < 0$ , obtemos

$$Q_i[n] = \vartheta_i^{22}[n] - \vartheta_i^{21}[n] \left( \vartheta_i^{11}[n] \right)^{-1} \vartheta_i^{21}[n]' + \varepsilon I, \quad \forall i \neq i[n] \in \mathbb{K} \quad (4.66)$$

com  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno. Assim, com a matriz  $Q_i[n]$  obtida diretamente da solução do Teorema 4.2 para  $i = i[n] \in \mathbb{K}$  e calculada de (4.66) para todo  $i \neq i[n] \in \mathbb{K}$  podemos determinar as matrizes  $\hat{R}_i[n] = V'^{-1}Q_i[n]V$  presentes na regra de comutação (4.20).

Note que o Teorema 4.2 é descrito como a solução de  $N^\kappa$  subproblemas convexos que podem ser facilmente resolvidos a partir de técnicas disponíveis na literatura para a solução de LMIs. O próximo exemplo ilustra e compara a eficácia da solução proposta pelo Teorema 4.2 com aquela fornecida em Deaecto et al. [2011].

**Exemplo 4.3.** Considere o sistema linear com comutação (4.1)-(4.3) composto por quatro subsistemas instáveis definidos por  $A_i = e^{A_i h}$  com  $h = 0,1$  e matrizes

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4,5 & -8,5 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{K}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = H_3 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

As matrizes da saída controlada são

$$E_1 = E_2 = E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = F_3 = F_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,3 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$G_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ , e as matrizes da saída medida são  $C_i = [1 \ 0]$  e  $D_i = 0,3, \forall i \in \mathbb{K}$ . As mesmas leis de controle do Exemplo 4.1, denominadas CL1 e CL2, são consideradas neste exemplo. Mais especificamente, CL1 define a lei de controle  $u[n] = \hat{C}_\sigma \hat{x}[n]$  e pode ser implementada apenas impondo  $K_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ , como restrição adicional no Teorema 4.2 e CL2 define a lei de controle mais geral dada por  $u[n] = \hat{C}_\sigma \hat{x}[n] + \hat{D}_\sigma y[n]$ . Assim, resolvendo o Teorema 4.2 para  $\kappa = 4$ , obtivemos o custo garantido  $\sqrt{\rho_{\text{CL1}}} = 48,7801$  para CL1 e  $\sqrt{\rho_{\text{CL2}}} = 24,9853$  para CL2. Considerando que o sistema é composto por  $N = 4$  subsistemas, constatamos que as condições baseadas nas desigualdades de Lyapunov-Metzler são difíceis de serem resolvidas, pois exigiria a busca unidimensional de 12 parâmetros livres. Sendo assim, resolvemos estas desigualdades para um caso mais simples que é obtido impondo que a matriz de Metzler tenha todos os elementos da diagonal principal iguais, o que resultou no custo garantido  $\sqrt{\rho_{\text{LM}}} = 1.207,6328$ . Adotando a entrada externa  $w[n] = \cos(\pi n/5)$  para  $n \in [0, 50]$  e  $w[n] = 0$  caso contrário e  $V = I$  em (4.36), implementamos o controlador dinâmico com comutação (4.4)-(4.5) e a regra de comutação (4.20), utilizando os resultados obtidos da solução do Teorema 4.2, para as leis de controle CL1 e CL2. As Figuras 4.5 e 4.6 apresentam as trajetórias do estado e sequência de comutação obtidas utilizando a lei de controle CL1 enquanto que as Figuras 4.7 e 4.8 ilustram as mesmas variáveis obtidas a partir da implementação de CL2. Este exemplo coloca em evidência a eficácia da metodologia proposta no Teorema 4.2. Além disso, comparado com a solução fornecida pela referência Deaecto et al. [2011], verificamos que as

condições do Teorema 4.2 são mais fáceis de serem resolvidas pois são descritas em termos de desigualdades matriciais lineares.

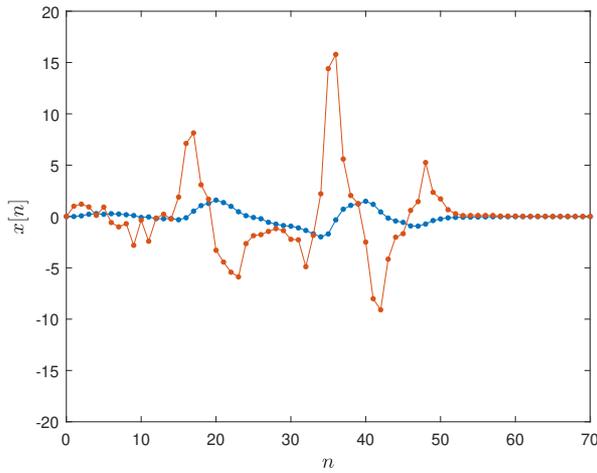


Figura 4.5: Trajetórias do estado obtidas pela lei de controle CL1

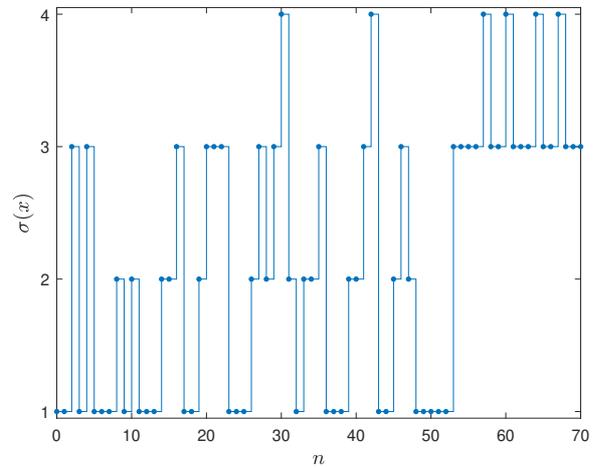


Figura 4.6: Sequência da comutação obtida pela lei de controle CL1

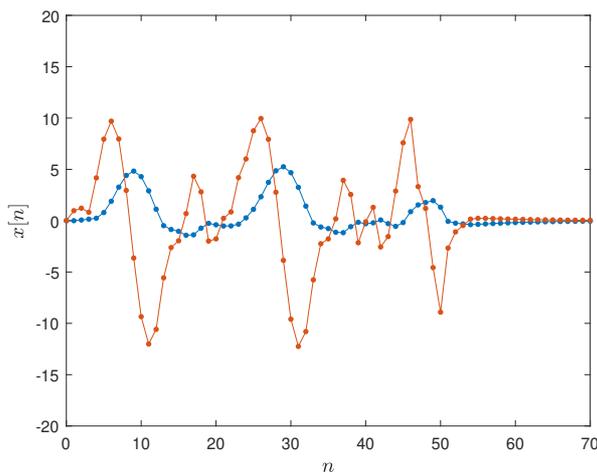


Figura 4.7: Trajetórias do estado obtidas pela lei de controle CL2

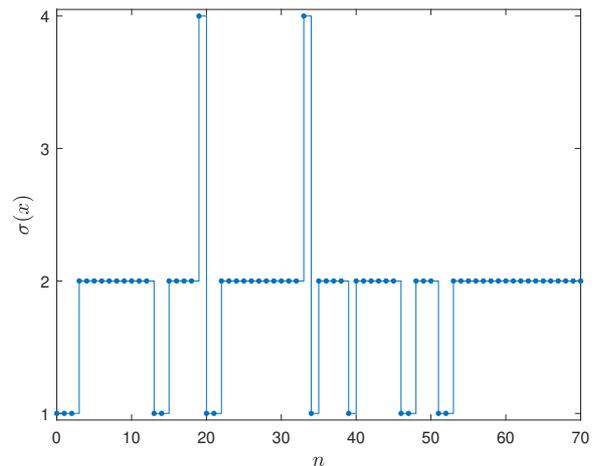


Figura 4.8: Sequência da comutação obtida pela lei de controle CL2

Assim como apresentado na seção anterior para o caso  $\mathcal{H}_2$ , é possível realizar o projeto da regra de comutação como sendo a única variável de controle do sistema. Neste caso, ela é projetada em conjunto com um filtro dinâmico de ordem completa, cuja função é fornecer o seu estado para a implementação da regra de comutação. As condições de projeto são obtidas do Teorema 4.2 impondo  $N_i = 0$  e  $K_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$ . Assim, a partir dessas restrições adicionais, obtemos o filtro (4.4) definido pelas matrizes (4.50)-(4.51) que junto com a regra (4.20) asseguram estabilidade exponencial global do sistema (4.6)-(4.7) e um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . O próximo exemplo ilustra este resultado.

$\kappa$	Teorema 3.3			Teorema 4.2 com $N_i = 0$ e $K_i = 0$		
	2	3	5	2	3	5
Ex. 3.1	204,6841	110,0530	80,6637	67,0450	60,0698	62,6980
Ex. 3.2	98,8156	$\infty$	144,0910	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Tabela 4.3: Custo garantido  $\mathcal{H}_\infty(\sqrt{\rho})$ .

**Exemplo 4.4.** Considere o sistema linear com comutação (4.1)-(4.3) com  $u[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Neste exemplo vamos comparar os resultados obtidos do Teorema 3.3 relacionado à realimentação estática de saída com os fornecidos pelo Teorema 4.2 com  $N_i = 0$  e  $K_i = 0$  relacionadas à realimentação dinâmica de saída. Utilizando os sistemas apresentados nos Exemplos 3.1 e 3.2, resolvemos para  $\kappa \in \{2, 3, 5\}$  as condições de ambos os teoremas e obtivemos os custos garantidos apresentados na Tabela 4.3. Analisando esta tabela, verificamos que para o sistema do Exemplo 3.1 as condições do Teorema 4.2 forneceram custos garantidos 22,27% à 67,24% menores do que os fornecidos pela solução do Teorema 3.3. Entretanto, para o sistema do Exemplo 3.2 constatamos que as condições do Teorema 4.2 são todas ineficazes. Isto ocorre pois os problemas não são comparáveis em termos de estrutura, mas representam formas alternativas de se projetar a regra de comutação dependente apenas da saída medida.

## 4.4 Considerações finais

Neste capítulo, propusemos uma nova metodologia para tratar o projeto conjunto de uma regra de comutação, dependente somente da saída medida, e de um controlador dinâmico de ordem completa. Ambas as estruturas de controle foram projetadas com o objetivo de garantir estabilidade exponencial global da origem e assegurar um limitante superior para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . As condições fornecidas são baseadas em uma função de Lyapunov convexa variante no tempo e descritas em termos de desigualdades matriciais lineares sendo, portanto, mais simples de serem resolvidas quando comparadas a outros métodos disponíveis na literatura. Ademais, a matriz de transformação adotada para linearizar as condições de realimentação de saída foi determinada de modo que as variáveis de otimização associadas aos parâmetros do controlador sejam independentes das matrizes de Lyapunov, o que contribuiu para obtenção de condições menos conservadoras. Exemplos acadêmicos ilustraram a metodologia proposta e foram importantes para colocar em evidência a sua eficácia em comparação com outros métodos disponíveis na literatura.

# SISTEMAS AFINS COM COMUTAÇÃO A TEMPO DISCRETO

“Porque Deus tanto amou o mundo que deu o seu Filho Unigênito, para que todo o que nele crer não pereça, mas tenha a vida eterna.”

— JOÃO 3:16

Neste capítulo, vamos aplicar os conceitos teóricos adquiridos nos capítulos anteriores para tratar o projeto via realimentação de estado de sistemas afins com comutação a tempo discreto. Como já mencionado no Capítulo 2, para esta classe de sistemas, é impossível assegurar estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio de interesse. Desta forma, a maioria das metodologias disponíveis consideram a estabilidade prática deste ponto. Neste tipo de estabilidade as trajetórias são guiadas pela regra de comutação para um conjunto de atração, tão pequeno quanto possível, contendo o ponto de equilíbrio de interesse. Infelizmente, nesta abordagem, o comportamento das trajetórias no regime permanente, ou seja, quando elas estão dentro deste conjunto, não pode ser controlado. Além disso, não é possível levar em conta índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  que estão intimamente relacionados à estabilidade assintótica do sistema. Para resolver estes inconvenientes, propomos nesta tese uma regra de comutação dependente do estado capaz de assegurar estabilidade assintótica global de um ciclo limite. Este ciclo limite é determinado de acordo com algum critério de interesse do projetista, relacionado ao comportamento desejado das trajetórias no regime permanente como, por exemplo, o ajuste do seu valor médio ou da sua amplitude e frequência de oscilação. Mais especificamente, baseado em uma função de Lyapunov convexa e variante no tempo, uma regra de comutação do tipo mínimo é determinada com a finalidade de governar as trajetórias do estado, evoluindo de uma condição inicial arbitrária, para o ciclo limite desejado. Desta forma é possível controlar o comportamento das trajetórias no regime permanente através do projeto adequado deste ciclo limite. Além disso, por levar em conta estabilidade assintótica, os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser considerados de forma a assegurar um desempenho adequado no regime transitório. Todas as condições são expressas em termos de desigualdades matriciais lineares sendo, portanto, simples de resolver por meio de ferramentas disponíveis na literatura. Exemplos acadêmicos são utilizados para ilustrar a metodologia proposta. No Capítulo 6, esta metodologia é aplicada no controle de um conversor CC-CC e os resultados obtidos colocam em evidência o seu grande interesse na área de eletrônica de potência.

## 5.1 Formulação do problema

Considere o seguinte sistema afim com comutação no domínio do tempo discreto

$$x[n+1] = A_{\sigma[n]}x[n] + b_{\sigma[n]} + H_{\sigma[n]}w[n] \quad (5.1)$$

$$z[n] = E_{\sigma[n]}x[n] + G_{\sigma[n]}w[n] \quad (5.2)$$

definido para todo  $n \in \mathbb{N}_- = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , em que  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada de perturbação,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a saída controlada e  $\sigma : \mathbb{N}_- \rightarrow \mathbb{K}$  é a sequência de comutação que seleciona um dos subsistemas  $\mathcal{G}_i = (A_i, b_i, H_i, E_i, G_i)$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , para ser ativado a cada instante de tempo.

Assuma que o sistema (5.1)-(5.2) com  $w[n] = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_-$ , admite uma solução periódica  $x_e[n]$  com período  $\kappa$  escolhido pelo projetista e que ele evolui de  $x[-1] = x_e[-1]$ . Lembrando que  $m_n = \kappa \lfloor n/\kappa \rfloor$ , a trajetória  $x_e[n]$  associada à regra de comutação periódica  $\sigma[n] = c[n - m_n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_-$ , para alguma sequência  $c = (c[0], \dots, c[\kappa - 1]) \in \mathbb{K}^\kappa$ , deve satisfazer

$$x_e[n + 1] = A_{c[n - m_n]}x_e[n] + b_{c[n - m_n]} \quad (5.3)$$

cujo ciclo limite correspondente é dado por

$$\mathcal{X}_e(c) = \left\{ x_e[n - m_n] : (5.3), n \in \mathbb{N}_- \right\} \quad (5.4)$$

Note que os primeiros  $\kappa$  pontos de  $x_e[n]$  podem ser obtidos de (5.3) para  $n \in [0, \kappa)$  respeitando a condição de contorno  $x_e[0] = x_e[\kappa]$ . O período fundamental, dado pela sequência  $(x_e[0], \dots, x_e[\kappa - 1])$ , é determinado a partir de uma das  $N^\kappa$  sequências de comutação periódicas possíveis  $\sigma[n] = c[n - m_n]$ , de acordo com algum critério relacionado ao comportamento desejado das trajetórias do sistema no regime permanente, como ficará mais claro na próxima seção.

Definindo a variável de estado auxiliar  $\xi[n] = x[n] - x_e[n]$ ,  $x_e \in \mathcal{X}_e(c)$ , obtemos uma representação alternativa do sistema (5.1)-(5.2) dada por

$$\xi[n + 1] = A_{\sigma[n]}\xi[n] + \ell_{\sigma[n]}[n] + H_{\sigma[n]}w[n] \quad (5.5)$$

$$z_e[n] = E_{\sigma[n]}\xi[n] + G_{\sigma[n]}w[n] \quad (5.6)$$

evoluindo de  $\xi[-1] = 0$ , com  $\ell_i[n] = A_i x_e[n] - x_e[n + 1] + b_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e  $z_e[n] = z[n] - E_\sigma x_e[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_-$ . Observe que para  $\xi[n] = 0$ , o ciclo limite  $x_e[n]$  é atingido pela solução do sistema (5.1)-(5.2).

Nosso objetivo é projetar uma regra de comutação dependente do estado  $\sigma : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$  que garanta estabilidade assintótica global do ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c)$ . Em outras palavras, desejamos projetar  $\sigma(x[n])$  a fim de assegurar que a origem  $\xi = 0$  do sistema (5.5)-(5.6) seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, garantindo um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . Estes índices são os mesmos dados pelas Definições 2.3 e 2.4, mas aplicados ao sistema (5.5)-(5.6) e, portanto, com  $z_e$  no lugar de  $z$ . É importante destacar que eles exigem que o sistema seja assintoticamente estável e, portanto, não podem ser avaliados por técnicas de controle que tratam estabilidade prática. Neste tipo de estabilidade, as trajetórias do estado evoluem para um conjunto de atração contendo o ponto de equilíbrio de interesse. Infelizmente, o comportamento das trajetórias no interior deste conjunto não pode ser controlado e, conseqüentemente, a norma  $\mathcal{L}_2$  da saída  $\|z_e\|_2^2$ , presente na definição de ambos os índices de desempenho, não converge. Veja as referências [Hetel and Fridman \[2013\]](#), [Hauvoigne et al. \[2011\]](#), [Deaecto and Geromel \[2017\]](#) e [Egidio and Deaecto \[2019\]](#) como exemplos de técnicas de controle que asseguram estabilidade prática.

Como em toda a tese, as condições de projeto são baseadas na seguinte função de Lyapunov convexa e

variante no tempo

$$V(\xi[n], n) = \xi[n]'P[n]\xi[n] \quad (5.7)$$

com a matriz  $P[n] = P[n - m_n] > 0$ ,  $n \in [0, \kappa)$ . A função (5.7) certamente fornece condições menos conservadoras do que aquelas recorrentes na literatura, as quais são baseadas em funções de Lyapunov quadrática e invariantes no tempo e encontram-se disponíveis nas referências Sferlazza et al. [2019], Hetel and Fridman [2013] e Deaecto and Geromel [2017].

Na próxima seção fornecemos uma metodologia para gerar um conjunto de ciclos limites candidatos, cada um deles, associado a uma sequência de comutação periódica  $\sigma[n] = c[n - m_n]$ .

## 5.2 Geração do ciclo limite

Nesta seção, o objetivo é determinar a trajetória  $x_e[n]$  associada à sequência periódica  $\sigma[n] = c[n - m_n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_-$ . Para esta finalidade, vamos retomar algumas definições do Capítulo 2 e adaptar outras para que melhor se enquadrem no contexto do presente capítulo. Assim, para um escalar positivo  $\kappa \in \mathbb{N}$  que define o período do ciclo limite, temos que  $\mathfrak{C}(\kappa) = \mathbb{K}^\kappa$  é o conjunto obtido do produto cartesiano de  $\mathbb{K}$  por ele mesmo  $\kappa$  vezes. Este conjunto contém  $N^\kappa$  elementos  $c \in \mathfrak{C}(\kappa)$ , que correspondem às sequências  $c = (c[0], \dots, c[\kappa - 1])$ . Associado a cada sequência  $c \in \mathfrak{C}(\kappa)$  existe um ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c)$  definido por (5.4), cujos primeiros  $\kappa$  pontos  $x_e[n]$ ,  $n \in [0, \kappa)$ , podem ser obtidos de (5.3) com  $x_e[0] = x_e[\kappa]$  como solução da equação linear

$$\tilde{A}(c)\tilde{x}_e = -\tilde{b}(c) \quad (5.8)$$

em que  $\tilde{x}_e = [x_e[0]' \ x_e[1]' \ \dots \ x_e[\kappa - 1]']'$ , a matriz

$$\tilde{A}(c) = \begin{bmatrix} A_{c[0]} & -I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{c[1]} & -I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -I & 0 & 0 & \dots & A_{c[\kappa-1]} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

e  $\tilde{b}(c) = [b'_{c[0]} \ b'_{c[1]} \ \dots \ b'_{c[\kappa-1]}]'$ . Nesta equação a condição de contorno  $x_e[0] = x_e[\kappa]$  foi considerada na última linha de  $\tilde{A}(c)$  e devido à (5.3) todos os ciclos limites satisfazem a identidade  $\ell_{c[n]}[n] = 0$ .

Observe que a partir das  $N^\kappa$  diferentes sequências de comutação  $c \in \mathfrak{C}(\kappa)$ , podemos definir uma família de ciclos limites candidatos

$$\mathfrak{X} = \{\mathcal{X}_e(c) : c \in \mathfrak{C}(\kappa)\} \quad (5.10)$$

A busca por um ciclo limite desejado  $\mathfrak{X}_e^* \in \mathfrak{X}$  pode estar restrita a um subconjunto  $\mathfrak{X}_s \subseteq \mathfrak{X}$ , contendo trajetórias do sistema (5.1)-(5.2) que apresentam propriedades de interesse no regime permanente como, por exemplo, amplitude e frequência de oscilação adequados. Deste modo, a partir de um ponto de referência  $x_*$ , um possível critério é dado por

$$\mathfrak{X}_s = \left\{ \mathcal{X}_e \in \mathfrak{X} : \frac{1}{\kappa} \sum_{n=0}^{\kappa-1} \|\Gamma(x_e[n] - x_*)\| < 1 \right\} \quad (5.11)$$

que contém ciclos limites candidatos, cuja a distância média entre  $\Gamma x_e[n]$  e  $\Gamma x_*$  para  $n \in [0, \kappa)$  é menor do que 1. A matriz  $\Gamma$  é fornecida pelo projetista e determina quais componentes do estado ou combinação destes componentes devem ser otimizados no regime permanente. Alternativamente, quando o objetivo é limitar a amplitude de oscilação no regime permanente, devemos adotar o seguinte subconjunto

$$\mathfrak{X}_s = \left\{ \mathcal{X}_e \in \mathfrak{X} : \max_{n \in \{0, \dots, \kappa-1\}} \|\Gamma(x_e[n] - x_*)\|_\infty < 1 \right\} \quad (5.12)$$

em que, como no caso de (5.11),  $\Gamma$  é um parâmetro fornecido pelo projetista. Observe que a escolha do critério depende exclusivamente do interesse do projetista no que se refere ao comportamento da trajetória do sistema (5.1)-(5.2) no regime permanente. A depender do seu interesse podemos adotar os critérios (5.11), (5.12) ou algum outro a ser definido, levando a diferentes subconjuntos  $\mathfrak{X}_s$ . O subconjunto de sequências  $c$  associado a  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$  é definido como  $\mathfrak{C}_s(\kappa) \subseteq \mathfrak{C}(\kappa)$ . O próximo teorema, que utiliza um importante resultado de [Bittanti and Colaneri \[2009\]](#), propõe condições que asseguram a existência de um ciclo limite globalmente assintoticamente estável  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$  a ser considerado nos desenvolvimentos que seguem.

**Teorema 5.1.** *Considere o sistema (5.1)-(5.2) com  $w[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}_-$ , e forneça um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e uma sequência  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$ . O ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}$  sob a sequência de comutação periódica  $\sigma[n] = c[n - m_n]$  é globalmente assintoticamente estável se, e somente se existirem matrizes simétricas  $P[n] > 0$  satisfazendo as seguintes desigualdades matriciais lineares*

$$A'_{c[n]}P[n+1]A_{c[n]} - P[n] < 0 \quad (5.13)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ , com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0]$ .

**Prova:** Considere o sistema (5.1)-(5.2) com  $w[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}_-$ , escrito alternativamente como (5.5)-(5.6) e governado pela sequência de comutação periódica  $\sigma[n] = c[n - m_n] \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$ . Associado a esta sequência, o ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$  definido em (5.4) assegura que a equação linear  $\tilde{A}(c)\tilde{x}_e = -\tilde{b}(c)$  é garantida, o que é equivalente a verificar que a seguinte identidade

$$\ell_{c[n]}[n] = A_{c[n]}x_e[n] - x_e[n+1] + b_{c[n]} = 0 \quad (5.14)$$

é válida para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e  $x_e[0] = x_e[\kappa]$ . Desse modo, considerando a identidade (5.14) o sistema (5.5)-(5.6) torna-se linear, dado por  $\xi[n+1] = A_{c[n]}\xi[n]$ . Logo, utilizando a Proposição 3.5 de [Bittanti and Colaneri \[2009\]](#), podemos concluir que a condição (5.13) é necessária e suficiente para a estabilidade assintótica global da origem  $\xi = 0$  do sistema (5.5)-(5.6) ou, de forma equivalente, do ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c)$  do sistema (5.1)-(5.2).  $\square$

Para o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  que satisfaz as condições do Teorema 5.1, escolhido dentro do subconjunto  $\mathfrak{X}_s$ , é possível determinar uma regra de comutação dependente do estado que não apenas assegura estabilidade assintótica global do ciclo limite, mas também otimiza um limitante superior para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Todavia, antes de apresentar os resultados relacionados a estes índices, vamos propor condições que asseguram estabilidade assintótica e um custo garantido para o sistema (5.1)-(5.2) definido para  $n \in \mathbb{N}$  com

$w[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Para este fim, introduzimos a seguinte variável matricial

$$\mathcal{L}_i[n] = \begin{bmatrix} A'_i P[n+1] A_i - P[n] & \bullet \\ \ell_i[n]' P[n+1] A_i & \ell_i[n]' P[n+1] \ell_i[n] \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

que será útil para o resultado apresentado na próxima seção.

### 5.3 Estabilidade e custo garantido

Considere o sistema afim com comutação simplificado, dado pela seguinte realização no espaço de estado

$$\xi[n+1] = A_{\sigma[n]} \xi[n] + \ell_{\sigma[n]}[n] \quad (5.16)$$

$$z_e[n] = E_{\sigma[n]} \xi[n] \quad (5.17)$$

definido para  $n \in \mathbb{N}$  e evoluindo de uma condição inicial arbitrária  $\xi[0] = x[0] - x_e[0]$ , com  $x_e[n] \in \mathcal{X}_e^*$ . Neste primeiro momento, o objetivo é determinar uma função de comutação dependente do estado  $\sigma(x[n])$  que assegure estabilidade assintótica do ciclo limite  $\mathcal{X}_e^* \in \mathfrak{X}_s$ , escolhido como sendo aquele que minimiza o limitante superior da norma  $\mathcal{L}_2$  ao quadrado  $\|z_e\|_2^2$ . O próximo teorema apresenta este resultado.

**Teorema 5.2.** *Considere o sistema (5.1)-(5.2) definido para  $n \in \mathbb{N}$  com  $w[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , e evoluindo de uma condição inicial arbitrária  $x[0]$ . Dado um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e o conjunto dos ciclos limites candidatos  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s, \forall c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$ , se existirem matrizes simétricas  $P[n] > 0$  satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \inf_{P[n]} (x[0] - x_e[0])' P[0] (x[0] - x_e[0]) \quad (5.18)$$

sujeito às desigualdades matriciais lineares

$$A'_{c[n]} P[n+1] A_{c[n]} - P[n] + E'_{c[n]} E_{c[n]} < 0 \quad (5.19)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1, c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$  e com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0]$ , então a regra da comutação dependente do estado

$$\sigma(\xi[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \mathcal{L}_i[n - m_n] \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_i E_i \xi[n] \quad (5.20)$$

assegura que o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e^*(c)$ , solução de (5.18), é globalmente assintoticamente estável e que o seguinte limitante superior

$$\|z_e\|_2^2 < (x[0] - x_e[0])' P[0] (x[0] - x_e[0]) \quad (5.21)$$

é um custo garantido de desempenho.

**Prova:** Note que o sistema em consideração pode ser reescrito alternativamente como (5.16)-(5.17). Adotando a regra de comutação (5.20), então para uma trajetória arbitrária do sistema (5.16)-(5.17) no intervalo

$n \in [0, \kappa)$ , a função de Lyapunov (5.7) fornece

$$\begin{aligned}
\Delta V(\xi[n], n) &= \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \mathcal{L}_{\sigma[n]}[n] \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_{\sigma[n]} E_{\sigma[n]} \xi[n] - z_e[n]' z_e[n] \\
&= \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \mathcal{L}_i[n] \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_i E_i \xi[n] - z_e[n]' z_e[n] \\
&\leq \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \mathcal{L}_{c[n]}[n] \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_{c[n]} E_{c[n]} \xi[n] - z_e[n]' z_e[n] \\
&= \xi[n]' \left( A'_{c[n]} P[n+1] A_{c[n]} - P[n] + E'_{c[n]} E_{c[n]} \right) \xi[n] - z_e[n]' z_e[n], \\
&< -z_e[n]' z_e[n]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

em que a segunda igualdade decorre da regra de comutação (5.20), a primeira desigualdade é consequência do operador mínimo e a terceira igualdade é devido ao fato que a sequência  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$ , associada ao ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ , assegura que a identidade (5.14) é garantida. Finalmente, a última desigualdade é verificada devido à validade de (5.19). Além disso, a partir da continuação periódica  $P[n] = P[n - m_n]$ , temos que  $\Delta V(\xi[n], n) < -z_e[n]' z_e[n]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, portanto, o ponto de equilíbrio  $\xi = 0$  é globalmente assintoticamente estável, o que implica na mesma ocorrência para o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$ . Ademais, somando ambos os lados de (5.22) a partir de  $n = 0$  até  $n = \infty$ , obtemos uma série telescópica, que garante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta V(\xi[n], n) = -V(\xi[0], 0) < -\sum_{n \in \mathbb{N}} \|z_e[n]\|^2 \tag{5.23}$$

constatando que (5.21) é assegurada e concluindo assim a prova.  $\square$

O Teorema 5.2 apresenta condições para o projeto da regra de comutação dependente do estado. Entretanto, note que para o caso particular em que a regra de comutação é periódica e dada por  $\sigma[n] = c[n - m_n]$ , temos que a identidade

$$\|z_e\|_2^2 = (x[0] - x_e[0])' P[0] (x[0] - x_e[0]) \tag{5.24}$$

é verificada, em que  $P[0] > 0$  é solução do conjunto de equações

$$A'_{c[n]} P[n+1] A_{c[n]} - P[n] + E'_{c[n]} E_{c[n]} = 0 \tag{5.25}$$

para  $n = 0, \dots, \kappa - 1$  e  $P[\kappa] = P[0]$ . Isso indica que a regra de comutação dependente do estado (5.20) fornece um custo verdadeiro menor ou igual aquele proporcionado pela regra de comutação periódica. Além disso, destacamos que o Teorema 5.2 é o primeiro resultado que trata do projeto de uma regra de comutação assegurando estabilidade assintótica global de um ciclo limite desejado para sistemas afins com comutação a tempo discreto. Ainda que consideremos os sistemas a tempo contínuo, existem poucos resultados na literatura que tratam do mesmo problema. Podemos destacar a referência [Benmiloud et al. \[2019\]](#), que lida com estabilidade assintótica local por meio de uma metodologia sistemática baseada no mapa de Poincaré. De forma diferente, as condições

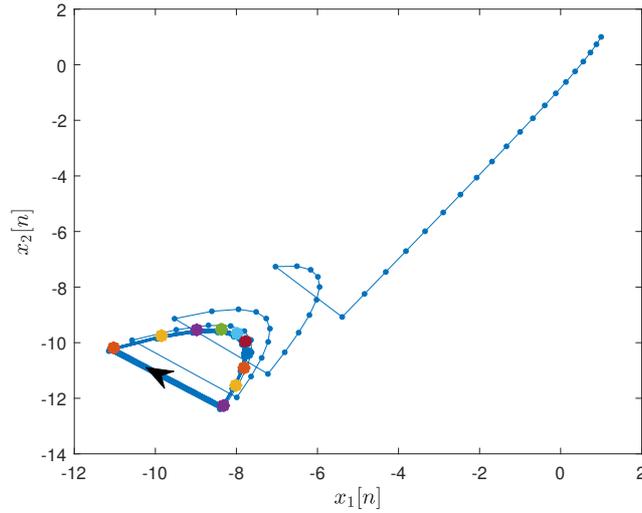


Figura 5.1: Trajetória do estado  $x[n]$  e ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$ .

propostas no Teorema 5.2 são expressas em termos de desigualdade matriciais lineares e, conseqüentemente, simples de serem resolvidas por algoritmos prontamente disponíveis na literatura. Comparadas às condições que garantem estabilidade prática, as desigualdades (5.19) são menos conservadoras do que os métodos baseados em uma função de Lyapunov quadrática e invariante no tempo, como os propostos nas referências Deaecto and Santos [2015], Deaecto and Geromel [2017] e não são comparáveis às condições descritas em termos das desigualdades de Lyapunov-Metzler que se encontram disponíveis na referência Egidio and Deaecto [2019]. O próximo exemplo ilustra a metodologia proposta nesta seção.

**Exemplo 5.1.** Considere o sistema afim com comutação (5.1)-(5.2) definido para  $n \in \mathbb{N}$  com  $w[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , e composto por dois subsistemas instáveis dados por

$$A_i = e^{A_i h}, \quad b_i = \int_0^h e^{A_i \tau} d\tau g_i, \quad i \in \{1, 2\} \quad (5.26)$$

com  $h = 0,1$  e

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2,5 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

e  $E_1 = E_2 = I$ . O objetivo é manter a primeira componente da variável de estado em torno de um valor médio próximo de  $-9$  quando a trajetória do sistema (5.1)-(5.2) atingir o regime permanente. Neste propósito, para  $\kappa = 10$ , um subconjunto de ciclos limites candidatos foi definido por (5.11) com  $x_* = [-9 \quad ?]'$ , em que o símbolo “?” indica um valor sem importância. Desse modo, escolhendo a matriz  $\Gamma = [1 \ 0]$  obtivemos o subconjunto  $\mathfrak{X}_s \in \mathfrak{X}$  composto por 10 ciclos limites, cujo valor médio da primeira componente do estado está dentro do intervalo  $(-10, -8)$ . Resolvendo as condições do Teorema 5.2, encontramos as matrizes  $P[n]$  e o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  correspondentes à sequência ótima  $c = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2) \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$ , o que possibilitou a implementação da regra de comutação (5.20). A Figura 5.1 apresenta o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  com a trajetória de estado iniciando em  $x[0] = [1 \ 1]'$ . As Figuras 5.2 e 5.3 exibem, respectivamente, a trajetória do estado auxiliar  $\xi[n]$  e a sequência de comutação  $\sigma[n]$ . Note que as trajetórias  $x[n]$  convergem para o ciclo limite escolhido ao passo que, como esperado,  $\xi[n]$  tende a zero. Além disso, por meio de simulação numérica obtivemos  $\|z\|_2^2 = 2.417,5352$  com um limitante superior de 3.945,5776 definido em (5.21). Isso coloca em evidência a eficácia da regra de comutação proposta.

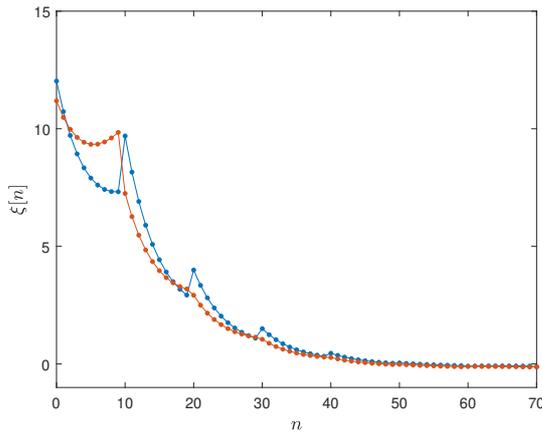
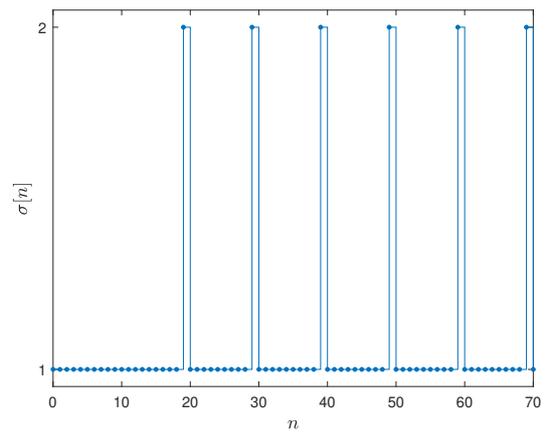
Figura 5.2: Trajetória do estado auxiliar  $\xi[n]$ 

Figura 5.3: Sequência de comutação

No que se refere a este resultado, uma observação interessante é que o desempenho pode ser melhorado se o parâmetro  $\kappa$  for escolhido adequadamente. Isto possibilita a otimização do desempenho do sistema tanto no regime transitório quanto no regime permanente. Felizmente, como verificado no caso dos sistemas lineares, não é necessário um valor de  $\kappa$  muito grande para obtermos um desempenho adequado. Na verdade, como já discutido nos capítulos anteriores, sempre que  $\hat{\kappa} = \eta\kappa$ , para algum escalar positivo  $\eta \in \mathbb{N}$ , podemos afirmar que os custos garantidos não crescem com o incremento de  $\eta$ , pois  $\mathfrak{C}_s(\eta\kappa)$  contém todas as sequências periódicas  $\mathfrak{C}_s(\kappa)$  como caso particular. Entretanto, nada podemos concluir sobre os custos para o caso em que  $\hat{\kappa} > \kappa$ , mas  $\hat{\kappa} \neq \eta\kappa$  para  $\eta \geq 2$ ,  $\eta \in \mathbb{N}$ .

## 5.4 Projeto de controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção, nosso objetivo é generalizar as condições do Teorema 5.2 para tratar o projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (5.1)-(5.2). Para o caso  $\mathcal{H}_2$ , considere este sistema na sua forma alternativa dada por (5.5)-(5.6) com a entrada externa do tipo impulsiva  $w[n] = \delta[n+1]e_r$ . Este sistema pode ser reescrito de forma equivalente a (5.16)-(5.17) com condição inicial  $\xi[0] = \ell_{\sigma[-1]}[-1] + H_{\sigma[-1]}e_r$ . O próximo corolário apresenta um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Corolário 5.1.** *Considere o sistema (5.1)-(5.2) definido para todo  $n \in \mathbb{N}_-$  com entrada externa  $w[n] = \delta[n+1]e_r$  e condição inicial  $x[-1] = x_e[-1]$ . Seja um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$ , um subconjunto de ciclos limites candidatos  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ ,  $\forall c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$  e  $q = \sigma[-1]$  dados. Se existirem matrizes simétricas  $P[n] > 0$  satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \inf_{P[n]} \text{Tr} \left( (L_q + H_q)' P[0] (L_q + H_q) + G_q' G_q \right) \quad (5.28)$$

com  $L_q = [\ell_q[-1] \ \dots \ \ell_q[-1]] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$  e  $\ell_q[-1] = A_q x_e[-1] - x_e[0] + b_q$ , sujeito às desigualdades matriciais lineares (5.19),  $\forall n \in [0, \kappa)$ ,  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$  com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0]$ , então a regra de comutação dependente do estado (5.20) assegura que o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e(c)$ , solução de (5.28), é globalmente assintoti-

amente estável e garante o seguinte limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$

$$J_2(\sigma) < \text{Tr} \left( (L_q + H_q)' P[0] (L_q + H_q) + G_q' G_q \right) \quad (5.29)$$

**Prova:** Considerando o Teorema 5.2, temos que a estabilidade assintótica é garantida pela regra da comutação (5.20) e que a desigualdade  $\|z_{er}\|_2^2 < \xi[0]' P[0] \xi[0]$  com  $\xi[0] = x[0] - x_e[0]$  é assegurada. Assim, da definição do índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  dada em (2.63), temos que

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &= \sum_{r=1}^{n_w} \|z_{er}\|_2^2 + e_r' G_q' G_q e_r \\ &< \sum_{r=1}^{n_w} \xi[0]' P[0] \xi[0] + e_r' G_q' G_q e_r \\ &= \text{Tr} \left( (L_q + H_q)' P[0] (L_q + H_q) + G_q' G_q \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

em que a desigualdade é devido ao custo garantido do Teorema 5.2 e a última igualdade é obtida de  $\xi[0] = (L_q + H_q)e_r$ , concluindo assim a prova do corolário.  $\square$

Observe que para um conjunto de ciclos limites candidatos  $\mathfrak{X}_s$  associados a  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa) \subseteq \mathfrak{C}(\kappa)$ , o Corolário 5.1 requer a solução de um certo número de subproblemas convexos que não supera  $N^\kappa$  e corresponde ao número de elementos do subconjunto  $\mathfrak{X}_s$ . Sendo assim, realizando a otimização com respeito a  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$ , obtemos o ciclo limite ótimo  $\mathcal{X}_e^* \in \mathfrak{X}_s$ , que minimiza o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  enquanto projeta a regra da comutação  $\sigma(x[n])$  do sistema.

Apresentadas as condições que asseguram um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , vamos nos ater ao projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Para isto, considere novamente o sistema (5.5)-(5.6), mas agora definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com entrada externa  $w \in \mathcal{L}_2$  e  $\xi[0] = 0$ . A seguinte variável matricial

$$\mathcal{M}_i[n] = \begin{bmatrix} A_i' P[n+1] H_i + E_i' G_i \\ \ell_i[n]' P[n+1] H_i \end{bmatrix} (H_i' P[n+1] H_i + G_i' G_i - \rho I)^{-1} \begin{bmatrix} A_i' P[n+1] H_i + E_i' G_i \\ \ell_i[n]' P[n+1] H_i \end{bmatrix}' \quad (5.31)$$

será útil para a determinação das condições de projeto  $\mathcal{H}_\infty$  propostas no próximo corolário.

**Corolário 5.2.** *Considere o sistema (5.1)-(5.2) definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com entrada externa  $w \in \mathcal{L}_2$  e condição inicial  $x[0] = x_e[0]$ . Seja um escalar positivo  $1 \leq \kappa \in \mathbb{N}$  e um subconjunto de ciclos limites candidatos  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ ,  $\forall c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$  dados. Se existirem matrizes simétricas  $P[n] > 0$  e um escalar positivo  $\rho$  satisfazendo o seguinte problema de otimização*

$$\min_{\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s} \inf_{P[n], \rho} \rho \quad (5.32)$$

sujeito às seguintes desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} P[n] & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \rho I & \bullet & \bullet \\ P[n+1] A_{c[n]} & P[n+1] H_{c[n]} & P[n+1] & \bullet \\ E_{c[n]} & G_{c[n]} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.33)$$

$$H_i' P[n+1] H_i + G_i' G_i - \rho I < 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (5.34)$$

para todo  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ ,  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$  e com a condição de contorno  $P[\kappa] = P[0]$ , então a regra da comutação

dependente do estado

$$\sigma(\xi[n]) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \left( \mathcal{L}_i[n - m_n] - \mathcal{M}_i[n - m_n] \right) \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_i E_i \xi[n] \quad (5.35)$$

assegura que o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^* = \mathcal{X}_e^*(c)$ , solução de (5.32), é globalmente assintoticamente estável. Além disso, um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  é dado por  $J_\infty(\sigma) < \rho^*$ .

**Prova:** Considere o sistema (5.1)-(5.2) escrito alternativamente como (5.5)-(5.6) com  $\xi[0] = 0$ , e defina as seguintes variáveis matriciais

$$\mathcal{F}_i[n] = \begin{bmatrix} A'_i P[n+1] A_i - P[n] + E'_i E_i & \bullet & \bullet \\ \ell_i[n]' P[n+1] A_i & \ell_i[n]' P[n+1] \ell_i[n] & \bullet \\ H'_i P[n+1] A_i + G'_i E_i & H'_i P[n+1] \ell_i[n] & H'_i P[n+1] H_i + G'_i G_i - \rho I \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\mathcal{N}_i[n] = A'_i P[n+1] H_i + E'_i G_i \quad (5.37)$$

$$\mathcal{W}_i[n] = H'_i P[n+1] H_i + G'_i G_i - \rho I \quad (5.38)$$

e o vetor de estado aumentado  $\tilde{\xi} = [\xi' \ 1 \ w']'$ . Então, adotando a função de Lyapunov (5.7) no intervalo de tempo  $n \in [0, \kappa)$ , temos

$$\begin{aligned} \Delta V(\xi[n], n) &= \tilde{\xi}[n]' \mathcal{F}_\sigma[n] \tilde{\xi}[n] - z_e[n]' z_e[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &\leq \min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \left( \mathcal{L}_i[n] - \mathcal{M}_i[n] \right) \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_i E_i \xi[n] - z_e[n]' z_e[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &\leq \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix}' \left( \mathcal{L}_{c[n]}[n] - \mathcal{M}_{c[n]}[n] \right) \begin{bmatrix} \xi[n] \\ 1 \end{bmatrix} + \xi[n]' E'_{c[n]} E_{c[n]} \xi[n] - z_e[n]' z_e[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &= \xi[n]' (A'_{c[n]} P[n+1] A_{c[n]} - P[n] + E'_{c[n]} E_{c[n]} - \mathcal{N}_{c[n]}[n] \mathcal{W}_{c[n]}[n]^{-1} \mathcal{N}_{c[n]}[n]) \xi[n] - \\ &\quad - z_e[n]' z_e[n] + \rho w[n]' w[n] \\ &< -z_e[n]' z_e[n] + \rho w[n]' w[n] \end{aligned} \quad (5.39)$$

Nestes desenvolvimentos, a primeira desigualdade deriva do fato que devido a (5.34), a função  $f_i(\xi, w) = \tilde{\xi}' \mathcal{F}_i[n] \tilde{\xi}$  é côncava com relação à entrada de perturbação  $w$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ . Portanto, é possível determinar  $\sup_{w \in \mathcal{L}_2} f_\sigma(\xi, w)$  que ocorre para

$$w[n]^* = -\mathcal{W}_\sigma[n]^{-1} \left( \mathcal{N}_\sigma[n]' \xi[n] + H'_\sigma P[n+1] \ell_\sigma[n] \right) \quad (5.40)$$

Este valor em conjunto com a regra de comutação (5.35) resultam na expressão à direita da primeira desigualdade de (5.39). A segunda desigualdade é consequência do operador mínimo, já a segunda igualdade ocorre pois  $\ell_{c[n]}[n] = 0$ , para a sequência  $c \in \mathfrak{C}_s(\kappa)$  associada ao ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ . Finalmente, a última desigualdade é assegurada por (5.33). Além disso, a continuação periódica  $P[n] = P[n - m_n]$  garante que  $\Delta V(\xi[n], n) < -z_e[n]' z_e[n] + \rho w[n]' w[n]$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Somando ambos os lados desta desigualdade a partir de  $n = 0$  até  $n = \infty$ , lembrando que  $V(\xi[0], 0) = 0$  visto que  $\xi[0] = 0$  e  $V(\xi[\infty], \infty) = 0$  devido à estabilidade assintótica da

origem  $\xi = 0$ , temos que

$$\|z_e\|_2^2 - \rho \|w\|_2^2 < 0 \quad (5.41)$$

é válida, o que assegura que  $\rho$  é um limite superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Concluimos assim a prova do corolário.  $\square$

Os resultados que acabamos de apresentar tratam do controle de sistemas afins com comutação no domínio do tempo discreto, considerando a otimização de desempenho tanto no regime transitório como no permanente. Mais especificamente, realizamos o projeto da regra de comutação em dois passos sequenciais. No primeiro, obtivemos um subconjunto de ciclos limites candidatos  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$ , que é determinado de acordo com algum critério de interesse escolhido pelo projetista, como por exemplo os apresentados em (5.11) e (5.12). No segundo passo, determinamos a regra de comutação dependente do estado, que assegura estabilidade assintótica global do ciclo limite  $\mathcal{X}_e^* \in \mathfrak{X}_s$  correspondente ao menor custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  obtidos, respectivamente, pelos Corolários 5.1 ou 5.2.

É importante destacar também que, considerando um dos critérios (5.11) ou (5.12), sempre que  $\mathfrak{X}_s$  não for vazio, existem pelo menos  $\kappa$  ciclos limites candidatos, que são versões deslocadas entre si. Como exemplo, as sequências  $\{(1, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 2)\}$  fornecem o mesmo ciclo limite, mas para diferentes condições iniciais  $x_e[0]$ . Sendo assim, se um deles está contido em  $\mathfrak{C}_s(\kappa)$  os demais também estão. Note que quando este cenário ocorre para projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ , a otimização referente ao ciclo limite  $\mathcal{X}_e(c) \in \mathfrak{X}_s$  consiste em determinar a condição inicial  $x_e[0]$  que minimiza o custo garantido. Em contrapartida, no caso  $\mathcal{H}_\infty$  o procedimento produz o mesmo limitante superior  $\rho$  para todas as versões deslocadas, pois o problema de otimização do Corolário 5.2 é independente de  $x_e[0]$ . No próximo, exemplo, colocamos em evidência a eficácia das metodologias propostas nos Corolários 5.1 e 5.2.

**Exemplo 5.2.** Considere o sistema afim com comutação (5.1)-(5.2) composto por três subsistemas instáveis definidos por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0 \\ -0,2 & 0,8 & 0,1 \\ -3 & -3,5 & 0,9 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0,05 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,01 \\ -0,3 \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.43)$$

e as matrizes de saída dadas por  $E_i = I_3$  e  $G_i = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Neste exemplo, o objetivo é manter o valor médio da primeira componente do estado próximo de 1 quando a trajetória do sistema (5.1)-(5.2) atingir o regime permanente. Neste sentido, para  $\kappa = 3$ , utilizamos o critério (5.11) adotando  $\Gamma = [1 \ 0 \ 0]$  e  $x_\star = [1 \ ? \ ?]'$ , em que o símbolo “?” indica termos sem importância. Como resultado, obtivemos um subconjunto com 13 ciclos limites candidatos  $\mathfrak{X}_s \subset \mathfrak{X}$ .

Assim, para ilustrar os resultados relacionados ao projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ , resolvemos o problema de otimização do Corolário 5.1 para o subconjunto  $\mathfrak{X}_s \in \mathfrak{X}$  e  $\sigma[-1] = q = 2$ . Para este caso, obtivemos o custo garantido de  $J_{2s} = 27,6896$  associado à sequência de comutação  $c = (2 \ 3 \ 3)$  e o ciclo limite ótimo  $\mathcal{X}_e^*$  definido pela sequência

$$(x_e[0], x_e[1], x_e[2]) = \left( \begin{bmatrix} 0,6272 \\ -0,6108 \\ 0,8385 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,5661 \\ -0,7108 \\ 0,1338 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,5950 \\ -0,6785 \\ 0,6099 \end{bmatrix} \right) \quad (5.44)$$

Utilizando as matrizes  $P[n]$  fornecidas pela solução do Corolário 5.1, implementamos a regra de comutação (5.20) e obtivemos o custo verdadeiro  $J_2(\sigma) = 17,3450$ . As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam as trajetórias do estado  $\xi[n]$  e a sequência de comutação  $\sigma[n]$  obtidas. A Figura 5.6 apresenta o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  com a trajetória  $x[n]$  evoluindo de  $x[0] = [-0.4728 \ 0.2215 \ 1.1251]'$ , enquanto que a Figura 5.7 exibe apenas o ciclo limite obtido. Como esperado, note que as trajetórias  $x[n]$  convergiram para o ciclo limite projetado, enquanto  $\xi[n]$  convergiu para a origem.

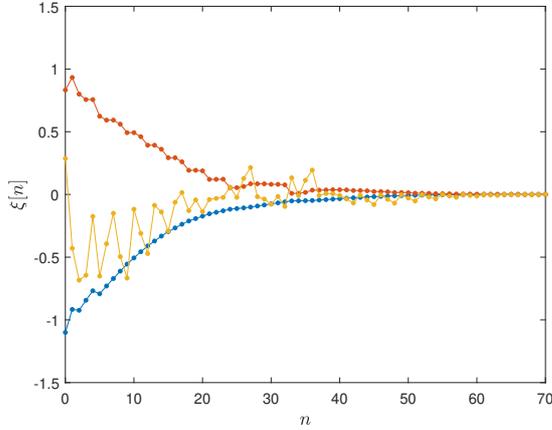


Figura 5.4: Trajetória do estado auxiliar  $\xi[n]$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

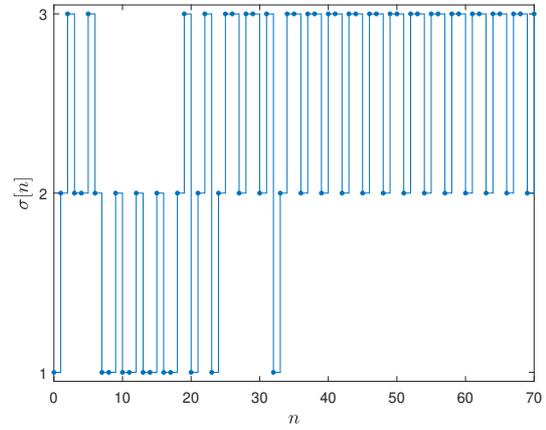


Figura 5.5: Sequência de comutação (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

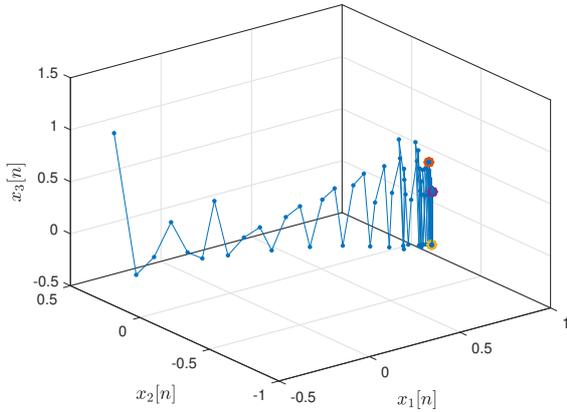


Figura 5.6: Trajetórias de estado convergindo para o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

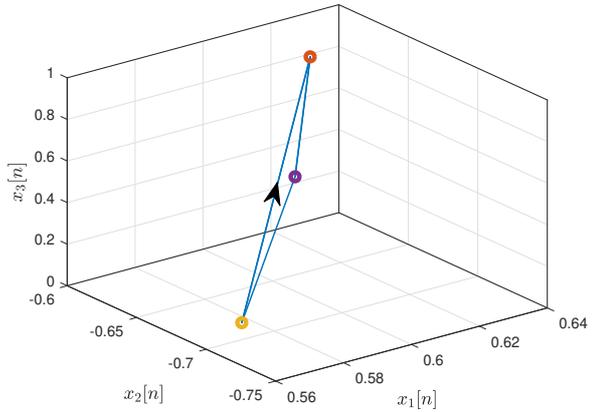


Figura 5.7: Zoom no ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

Para ilustrar os resultados relacionados ao projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , adotamos o mesmo critério para o regime permanente, o que implica na utilização do mesmo subconjunto de ciclos limites candidatos, dados por  $\mathfrak{X}_s \subset \mathfrak{X}$ . Resolvemos o problema de otimização do Corolário 5.2 e obtivemos o custo garantido  $\sqrt{\rho} = 22,1196$  associado a três diferentes sequências de comutação deslocadas entre si  $\{(1 \ 3 \ 3), (3 \ 1 \ 3), (3 \ 3 \ 1)\}$ . Este resultado já era esperado visto que o problema de otimização para o caso  $\mathcal{H}_\infty$  independe da condição inicial. Adotando a primeira sequência de comutação  $c = (1 \ 3 \ 3)$ , o ciclo limite ótimo  $\mathcal{X}_e^*$  é dado por

$$(x_e[0], x_e[1], x_e[2]) = \left( \begin{bmatrix} 1,4724 \\ -1,0239 \\ -0,9988 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,4700 \\ -1,0239 \\ 1,7103 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,4676 \\ -0,9521 \\ 0,4129 \end{bmatrix} \right) \quad (5.45)$$

Para a entrada externa

$$w[n] = \begin{cases} 5\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right), & n \in [10, 40) \\ -5, & n \in [60, 80) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.46)$$

implementamos a regra de comutação (5.35) obtendo as trajetórias do estado auxiliar  $\xi[n]$  e a sequência de comutação  $\sigma[n]$  apresentadas nas Figuras 5.8 e 5.9, respectivamente. Podemos observar que mesmo diante da perturbação  $w \in \mathcal{L}_2$  as trajetórias de  $\xi[n]$  convergiram para a origem.

Os resultados apresentados neste exemplo destacaram a eficácia das regras de comutação (5.20) e (5.35) propostas neste capítulo.

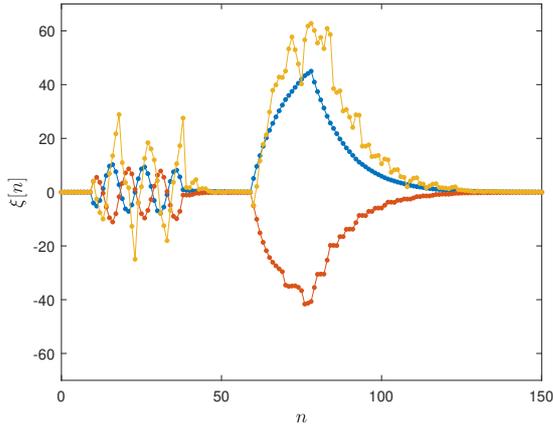


Figura 5.8: Trajetória do estado auxiliar  $\xi[n]$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

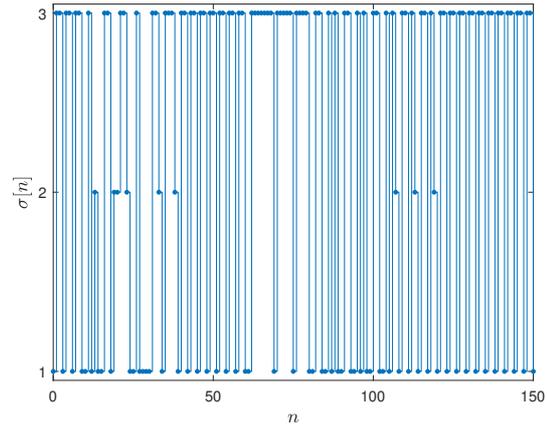


Figura 5.9: Sequência de comutação (projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

## 5.5 Considerações finais

Neste capítulo, fornecemos condições suficientes para o projeto de uma regra de comutação dependente do estado que assegura estabilidade assintótica global de um ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$ , projetado a partir de algum critério de interesse para as trajetórias do estado no regime permanente. A metodologia consiste em determinar um subconjunto de ciclos limites candidatos  $\mathcal{X}_s$ , dentro do qual o ciclo limite ótimo  $\mathcal{X}_e^* \in \mathcal{X}_s$  é selecionado a partir da minimização de um índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . Além disso, as condições propostas são baseadas em uma função de Lyapunov convexa e variante no tempo e são descritas em termos de desigualdades matriciais lineares. É importante destacar que as metodologias que lidam com estabilidade prática não são capazes de assegurar o desempenho das trajetórias no regime permanente e não permitem a otimização de índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , que estão diretamente relacionadas à estabilidade assintótica do sistema. Diferente destas metodologias, além de levar em conta a otimização destes índices, a técnica proposta nesta tese permite um desempenho satisfatório tanto no regime transitório como no permanente. Exemplos acadêmicos ilustraram a metodologia proposta e evidenciaram a eficácia da mesma. Um tópico interessante para pesquisa futura é a generalização desses resultados para tratar o problema de controle de sistemas afins com dados amostrados e incertezas no modelo.

---

“Porque um menino nos nasceu, um filho nos foi dado, e o governo está sobre os seus ombros.  
E ele será chamado Maravilhoso Conselheiro, Deus Poderoso, Pai Eterno, Príncipe da Paz.”

— ISAÍAS 9:6

Neste capítulo, o objetivo é aplicar alguns dos resultados apresentados nos capítulos anteriores em problemas práticos de engenharia. Na primeira seção, o sistema considerado é uma suspensão ativa baseada no modelo de um quarto de veículo, que pode ser representada matematicamente por um sistema linear. O objetivo é projetar uma lei de controle com comutação de forma a otimizar índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste mecanismo, supomos que o estado não está disponível para a realimentação e realizamos o projeto de controle baseado em duas técnicas distintas. Na primeira, utilizamos as condições de projeto  $\mathcal{H}_2$  obtidas no Capítulo 3, que tratam realimentação estática de saída, e projetamos, de forma independente, duas estruturas de controle. Primeiramente, determinamos para cada subsistema o ganho ótimo de realimentação estática de saída através do método de Kleinman-Newton Generalizado. Em um segundo momento, com os subsistemas em malha fechada completamente definidos, projetamos a função de comutação dependente da saída medida através das condições do Teorema 3.1. Na segunda técnica, utilizamos os resultados do Teorema 4.2 obtidos no Capítulo 4 para o projeto de controle dinâmico via realimentação de saída visando otimizar um índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste caso, o intuito é projetar de maneira conjunta um controlador dinâmico de ordem completa e uma regra de comutação que, além de assegurar estabilidade exponencial global da origem, minimiza a influência da entrada de perturbação na saída controlada, o que é definido como um problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Na segunda seção, o exemplo considerado é fornecido pela referência Benmiloud et al. [2019] e consiste no controle de um conversor CC-CC alimentando uma carga indutiva, que é modelado como um sistema afim com comutação. Neste caso, consideramos que o estado está disponível para realimentação e utilizamos os resultados apresentados no Capítulo 5 para tratar o projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de forma a assegurar estabilidade assintótica global de um ciclo limite. Nosso objetivo é otimizar o desempenho do sistema tanto do regime transitório como no regime permanente. O regime permanente é regulado através do projeto adequado do ciclo limite, enquanto que o regime transitório é otimizado através da minimização dos índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . No caso  $\mathcal{H}_2$  será analisado o sistema de partida (*system start-up*) em que as condições iniciais são nulas, enquanto que no caso  $\mathcal{H}_\infty$  analisaremos a atenuação pela regra de comutação de alguma perturbação na fonte de alimentação, como oscilações ou quedas bruscas de tensão.

## 6.1 Suspensão Ativa

O sistema utilizado para a validação experimental das técnicas de controle dos Teoremas 3.1 e 4.2 é uma suspensão ativa que representa o modelo de um quarto de veículo. Esta suspensão consiste em três placas, que

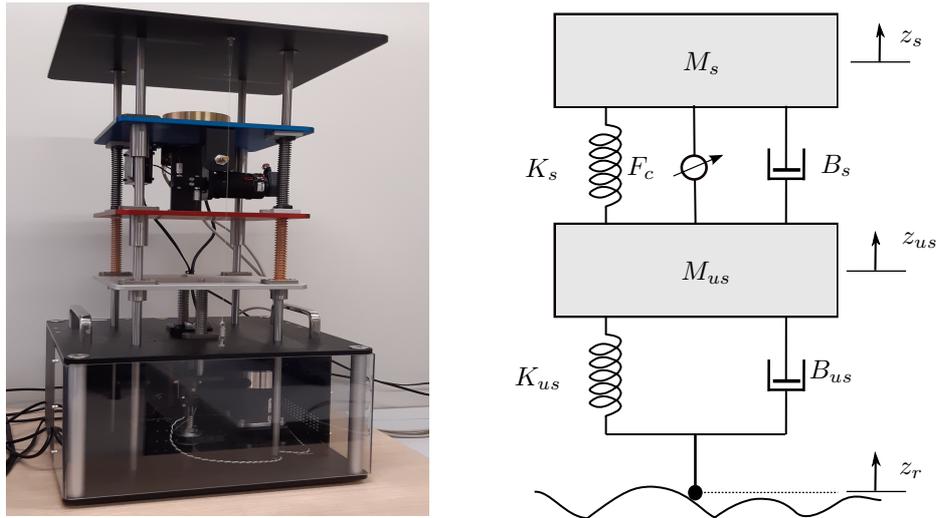


Figura 6.1: Sistema de suspensão ativa (à esquerda) e diagrama esquemático (à direita)

Parâmetros da suspensão ativa		
$M_s$	Massa suspensa (massa de um quarto do chassi)	2,45 [kg]
$M_{us}$	Massa não-suspensa (massa da roda)	1,00 [kg]
$K_s$	Coefficientes de rigidez linear da suspensão	980,00 [N/m]
$K_{us}$	Coefficientes de rigidez linear do pneu	2.500,00 [N/m]
$B_s$	Coefficientes de amortecimentos linear da suspensão	7,50 [Ns/m]
$B_{us}$	Coefficientes de amortecimentos linear do pneu	5,00 [Ns/m]

Tabela 6.1: Parâmetros da suspensão ativa

deslizam ao longo de eixos verticais através de rolamentos lineares, ou seja, os amortecedores, e são suportadas por um conjunto de molas, como ilustrado na Figura 6.1 à esquerda. A placa superior (em azul) representa a massa de um quarto do chassi do veículo, também denominada massa suspensa. A placa intermediária (em vermelho) corresponde a uma das rodas do veículo, e é denominada massa não-suspensa. Por último, a placa inferior (em cinza) simula as perturbações proveniente do solo. A placa superior é conectada a um motor CC através de um controlador que atua no sentido de compensar dinamicamente os movimentos introduzidos pelo solo. A placa inferior é acionada por um motor CC, que é utilizado para simular diferentes perfis de solo. A Figura 6.1 à direita ilustra um diagrama esquemático do modelo dinâmico da suspensão ativa e a Tabela 6.1 apresenta a descrição dos parâmetros da suspensão e seus respectivos valores numéricos, os quais são fornecidos pela referência Quanser [2012].

No que se refere às variáveis do sistema, temos que  $z_s$  e  $z_{us}$  correspondem, respectivamente, aos deslocamentos verticais das massas suspensa e não-suspensa com relação às suas posições estáticas. A entrada de controle é fornecida pelo atuador que gera a força  $F_c$  e o deslocamento proveniente do solo é denotado por  $z_r$ . Definindo o vetor de estado como  $x = [z_s - z_{us} \quad \dot{z}_s \quad z_{us} - z_r \quad \dot{z}_{us}]'$ , a entrada de controle como  $u = F_c$  e a entrada externa como  $w = \dot{z}_r$ , a suspensão ativa é representada pela seguinte realização em espaço de estado no domínio

do tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) + \mathcal{H}w(t) \quad (6.1)$$

$$z(t) = \mathcal{E}_\sigma x(t) + \mathcal{F}_\sigma u(t) \quad (6.2)$$

$$y(t) = \mathcal{C}x(t) \quad (6.3)$$

com as matrizes

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_s}{M_s} & -\frac{B_s}{M_s} & 0 & \frac{B_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} & -\frac{K_{us}}{M_{us}} & -\frac{B_s + B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{B_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

e as matrizes  $\mathcal{E}_i$  e  $\mathcal{F}_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , que serão definidas mais adiante com dois possíveis critérios conflitantes. Além disso, note que a matriz  $\mathcal{C}$  indica que apenas  $y = [z_s - z_r \ z_s]'$  está disponível para medição.

Efetuada a descrição do sistema no domínio do tempo contínuo, assumimos que a entrada de controle é constante por partes

$$u(t) = u(t_n) = u(nh) = u[n], \quad t \in [t_n, t_{n+1}) \quad (6.6)$$

em que  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  são sucessivos instantes de amostragem e  $h > 0$  é o período de amostragem tal que  $h = t_{n+1} - t_n$ . Em aplicações práticas, essa restrição é importante para evitar que a entrada de controle  $u(t)$  seja atualizada em tempo real, o que geralmente é muito difícil devido a restrições físicas do equipamento, como por exemplo, o tempo de processamento no caso de sistemas embarcados, a limitação da largura de banda do canal de comunicação no caso de controle em rede, entre outras. Assumindo também que a entrada externa é constante por partes, obtemos o seguinte sistema linear com comutação no domínio do tempo discreto

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] + Hw[n] \quad (6.7)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + F_\sigma u[n] \quad (6.8)$$

$$y[n] = Cx[n] \quad (6.9)$$

que é equivalente a (6.1)-(6.3) no sentido de que fornece o mesmo desempenho, veja [Souza et al. \[2014\]](#) para maiores detalhes. As matrizes do sistema (6.7)-(6.9) são obtidas pelo procedimento proposto na referência [Souza et al. \[2014\]](#), que fornece as seguintes identidades

$$\begin{bmatrix} A & B_a \\ 0 & I \end{bmatrix} = e^{\tilde{A}h}, \quad \begin{bmatrix} E'_i \\ F'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_i \\ F'_i \end{bmatrix}' = \int_0^h e^{\tilde{A}'_i t} \tilde{\mathcal{E}}'_i \tilde{\mathcal{E}}_i e^{\tilde{A}_i t} dt \quad (6.10)$$

com

$$\tilde{\mathcal{A}}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_i = [\mathcal{E}_i \ \mathcal{F}_i] \quad (6.11)$$

No caso do índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ , definimos  $B_a = B$ ,  $\mathcal{B}_a = \mathcal{B}$  e  $H = \mathcal{H}$ , o que fornece uma saída controlada que satisfaz

$$\|z[n]\|_2^2 = \|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)'z(t)dt \quad (6.12)$$

No que se refere ao índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ , temos que  $B_a = [B \ H]$  e  $\mathcal{B}_a = [\mathcal{B} \ \mathcal{H}]$ , o que assegura a seguinte igualdade

$$\sup_{w_n \in \mathcal{L}_2} \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} z[n]'z[n]}{h \sum_{n \in \mathbb{N}} w[n]'w[n]} = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\int_0^\infty z(t)'z(t)dt}{\int_0^\infty w(t)'w(t)dt} \quad (6.13)$$

Para ambos os casos, a saída medida é tal que  $C = \mathcal{C}$ . Após apresentar o método de discretização do sistema (6.1)-(6.3), o objetivo agora é validar experimentalmente os projetos de controle propostos nos Teoremas 3.1 e 4.2, como é realizado em sequência.

### 6.1.1 Realimentação estática de saída

Considerando a lei de controle (3.4) dada por

$$u[n] = L_\sigma y[n] \quad (6.14)$$

o objetivo é o projeto de uma regra de comutação dependente da saída medida  $\sigma(y)$  e de ganhos de realimentação de saída  $L_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , que assegurem estabilidade exponencial global da origem e um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  para o sistema (6.7)-(6.9). Para esta finalidade, adotamos as seguintes matrizes, que definem a saída controlada

$$\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Utilizando o método de discretização definido por (6.10) e (6.11) com  $h = 50$  [ms] para o caso  $\mathcal{H}_2$ , obtivemos o sistema com comutação (6.7)-(6.9).

A ideia agora é realizar o projeto dos ganhos  $L_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , e da regra de comutação  $\sigma(y)$  de forma independente. Para a determinação dos ganhos ótimos de cada subsistema, resolvemos o problema (3.42) com o ganho pertence à classe  $\mathcal{L}_o$  dado em (3.43). Este problema é não-convexo e foi resolvido através do método de Kleinman-Newton Generalizado descrito no Algoritmo 1, o que resultou nos ganhos de realimentação estática de saída

$$L_1 = [58,1079 \quad -12,1830], \quad L_2 = [-519,8825 \quad -72,9635] \quad (6.16)$$

que nos permite obter as matrizes do sistema em malha fechada definidas por (3.41). Os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  associados a cada um dos subsistemas são dados por  $J_{2s} \in \{0,1701; 0,1812\}$ , respectivamente. Adotando as matrizes em malha fechada  $(A_{L_i}, E_{L_i})$ ,  $i = \{1, 2\}$  e resolvendo as condições do Teorema 3.1 com as substituições  $(A_{L_i}, E_{L_i}) \rightarrow (A_i, E_i)$ ,  $\kappa = 2$  e  $\sigma[-1] = q = 1$ , obtivemos o custo garantido  $J_{2s} = 0,1212$ , o que indica uma melhoria de desempenho superior a 28% quando comparado ao caso em que  $\sigma[n] = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , que corresponde ao melhor custo  $\mathcal{H}_2$  para caso em que o sistema não comuta. Além disso, associado ao custo garantido ótimo

obtivemos a sequência de comutação  $\mathfrak{C}_2^*(2) = (1 \ 2)$  e as matrizes  $U[n]$ ,  $P[n]$  e  $R_i[n]$ , para todo  $n \in [0, \kappa)$  e  $i = i[n] \in \mathbb{K}$ . As duas primeiras matrizes são utilizadas no Corolário 3.1 para obter  $R_i[n]$ ,  $\forall i \neq i[n]$ . As matrizes  $L_i$  e  $R_i(n)$  definidas para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $n \in [0, \kappa)$  são então usadas para sintetizar a lei de controle de interesse (6.14).

Para o deslocamento proveniente do solo  $z_r$ , consideramos um sinal de onda quadrada com amplitude de 0,02 [m], período de 4 [s] e 50% de largura de pulso. No intuito de obter a entrada externa  $w = \dot{z}_r$ , o deslocamento  $z_r$  foi diferenciado por um filtro, cuja função de transferência é apresentada abaixo.

$$G_{trans}(s) = \frac{s}{(0.001s + 1)^2} \quad (6.17)$$

Assim, considerando a entrada externa descrita anteriormente e as variáveis matriciais obtidas da solução do Teorema 3.1 e do Corolário 3.1, implementamos a lei de controle (6.14) com a regra de comutação (3.14). Este experimento é dividido em duas situações. Na primeira, que ocorre no intervalo  $t \in [0, 4)$ , o sistema está em malha aberta, ou seja,  $u(t) = 0, \forall t \in [0, 4)$ . Na segunda, que corresponde ao intervalo  $t \in [4, 8]$ , adotamos a lei de controle (6.14). As Figuras 6.2 e 6.3 apresentam, respectivamente, a aceleração  $\ddot{z}_s$  e o deslocamento  $z_s$  da massa suspensa. A Figura 6.4 apresenta o deslocamento da massa não-suspensa dado por  $z_{us}$ . Finalmente, as Figuras 6.5 e 6.6 ilustram, respectivamente, a entrada de controle  $u$  e a sequência de comutação  $\sigma$ . Com a finalidade de facilitar a compreensão do leitor, as linhas sólidas representam as medidas, as linhas tracejadas os dados de simulação, e as linhas pontilhadas o deslocamento proveniente do solo  $z_r$ . É importante salientar que existe uma pequena diferença (cerca de 2 [mm]) entre os deslocamentos experimentais e simulado no regime permanente, isso ocorre devido à presença de algumas não linearidades comuns em sistemas mecânicos que não consideramos no modelo da suspensão como, por exemplo, o atrito de Coulomb. Todavia, observando os resultados apresentados nas Figuras 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 e 6.6 podemos afirmar que a regra de comutação foi muito eficaz no controle da suspensão ativa e, portanto, válida a teoria proposta no Capítulo 3.

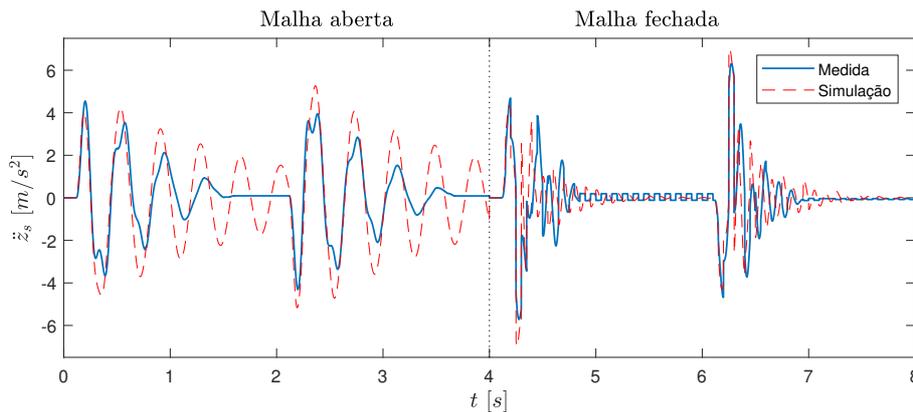


Figura 6.2: Aceleração da massa suspensa  $\ddot{z}_s(t)$  (Realimentação estática de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

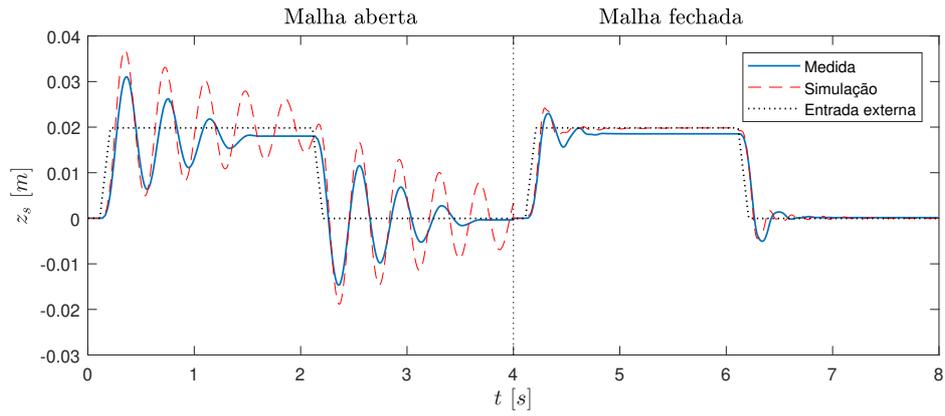


Figura 6.3: Deslocamento da massa suspensa  $z_s(t)$  (Realimentação estática de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

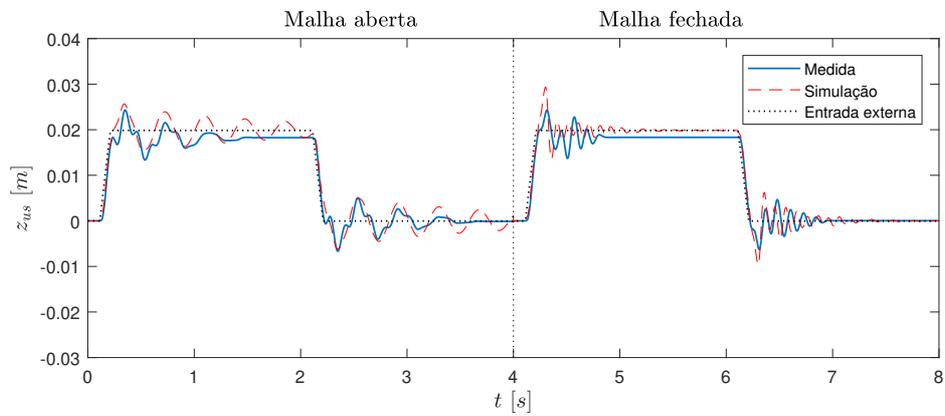


Figura 6.4: Deslocamento da massa não-suspensa  $z_{us}(t)$  (Realimentação estática de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

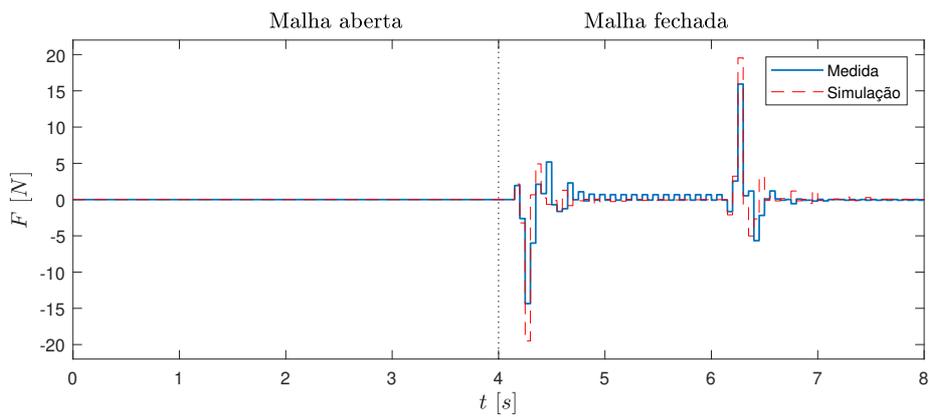


Figura 6.5: Esforço de controle  $u[n]$  (Realimentação estática de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

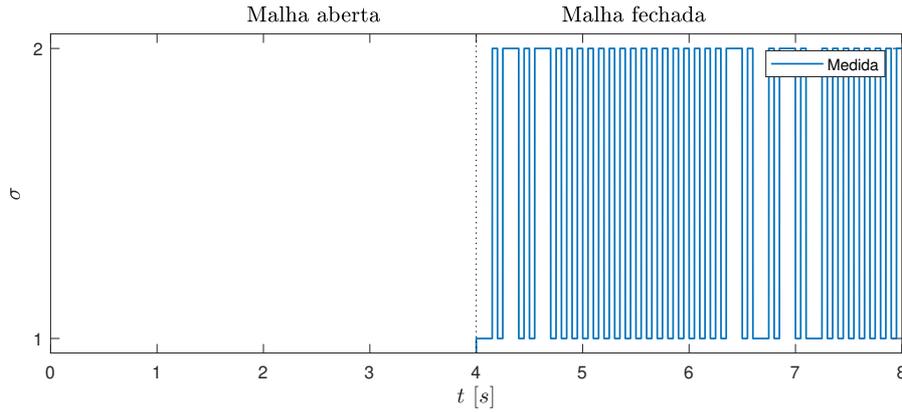


Figura 6.6: Sequência de comutação  $\sigma(y)$  (Realimentação estática de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

## 6.1.2 Realimentação dinâmica de saída

Nesta subseção, o objetivo é aplicar os resultados do Teorema 4.2 para realizar o controle  $\mathcal{H}_\infty$  da suspensão ativa apresentada anteriormente.

Mais especificamente, desejamos projetar conjuntamente uma regra de comutação dependente da saída medida, definida por (4.20), e um controlador dinâmico com comutação, dado por (4.4)-(4.5), que assegurem estabilidade exponencial global da origem e garantam um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$ . Note que diferente da regra de comutação (3.14) que depende diretamente da saída medida  $y$ , implementada na subseção anterior, a adotada nesta abordagem, definida por (4.20), depende de  $y$  por meio do estado do controlador  $\hat{x}$ .

Para este caso, as matrizes da saída controlada são dadas por

$$\mathcal{E}_1 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,05 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Considerando a lei de controle constante por partes (6.6), o sistema a tempo discreto (6.7)-(6.9) equivalente ao modelo (6.1)-(6.3) da suspensão ativa é obtido por (6.10)-(6.11) com  $h = 10$  [ms]. Para fins de comparação, resolvemos para cada subsistema o problema de otimização convexa proposto em de Oliveira et al. [2002], que trata do projeto de um controlador dinâmico  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares invariantes no tempo. De acordo com esta referência, para esta classe de sistemas existe um controlador da forma (4.4)-(4.5), considerando  $\sigma_c[n] = i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , tal que  $J_\infty(\sigma_c) = \rho$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $P$ ,  $M$  e matrizes  $J$ ,  $Q$ ,  $X$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $Y$ ,  $T$ ,  $S$  solução do seguinte problema de otimização convexa

$$\inf_{P>0, J, M, Q, X, L, R, Y, T, S} \rho \quad (6.19)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} P & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ J' & M & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ X'A' + L'B' & Q' & X + X' - P & \bullet & \bullet & \bullet \\ A' + C'R'B' & A'Y' + C'T' & I + S - J' & Y + Y' - M & \bullet & \bullet \\ H' + D'R'B' & H'Y' + D'T' & 0 & 0 & I & \bullet \\ 0 & 0 & EX + FL & E + FRC & G + FRD & \rho I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.20)$$

Por se tratar de um único subsistema, omitimos a dependência de índice destas LMIs. Resolvendo o problema de otimização (6.19) obtivemos  $\sqrt{\rho_1} = 2,2372$  e  $\sqrt{\rho_2} = 1,8052$  para o primeiro e segundo subsistemas, respectivamente.

Posteriormente, para avaliar o efeito da lei de controle com comutação, resolvemos o problema de otimização (4.55) do Teorema 4.2 para  $\kappa = 2$ , obtendo  $\sqrt{\rho} = 1,3532$  associado à sequência ótima  $\mathfrak{C}_3^*(2) = (2 \ 1)$ . Comparando este resultado com menor custo individual dos subsistemas, podemos verificar que houve uma redução superior a 25%.

Adotando  $V = I$  obtivemos as matrizes do controlador dinâmico com comutação (4.4)-(4.5) utilizando (4.36) e as matrizes  $\hat{R}_i[n]$  para  $i \in \mathbb{K}$  importantes para a implementação da regra de comutação. Vale lembrar que  $\hat{R}_i[n]$  é determinada diretamente da solução do Teorema 4.2 para  $i = i[n]$  e obtida de (4.66) para o caso em que  $i \neq i[n]$ .

Como na subseção anterior, a validação experimental é dividida em duas situações. Na primeira, que ocorre para  $t \in [0; 2,5)$ , o sistema está em malha aberta. Na segunda, que corresponde a  $t \in [2,5; 5]$ , o sistema está em malha fechada com a entrada de controle dada por  $u(t) = \hat{C}_\sigma \hat{x}[t_n] + \hat{D}_\sigma y[t_n]$ ,  $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$ . A variação do deslocamento proveniente do solo é uma função constante por partes definida como  $\dot{z}_r(t) = 0,02\text{sen}(\pi t_n)$ ,  $t \in [t_n, t_{n+1})$  durante o intervalo de tempo  $[0; 1,5)$  e  $\dot{z}_r(t) = 0$  caso contrário. Para  $t \geq 2,5$ , adotamos a mesma função mas deslocada de 2,5 segundos. As Figuras 6.7 e 6.8, apresentam, respectivamente, a aceleração  $\ddot{z}_s$  e o deslocamento  $z_s$  da massa suspensa. A Figura 6.9 apresenta o deslocamento da massa não-suspensa dado por  $z_{us}$ . Finalmente, as Figuras 6.10 e 6.11 ilustram, respectivamente, a entrada de controle  $u$  e a sequência de comutação  $\sigma$ . Nestas figuras, linhas sólidas representam os dados experimentais, linhas tracejadas representam os dados simulados e as pontilhadas o deslocamento proveniente do solo  $z_r$ . O resultado da aplicação prática coloca em evidência a eficácia e a validade da metodologia proposta no Capítulo 4.

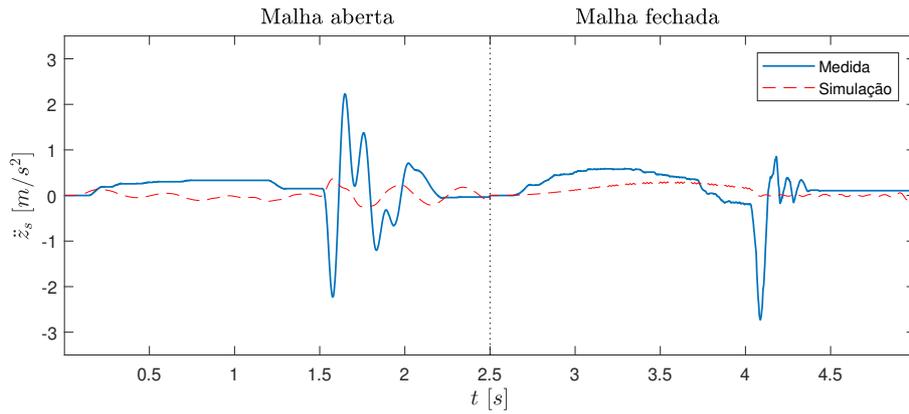


Figura 6.7: Aceleração da massa suspensa  $\ddot{z}_s(t)$  (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

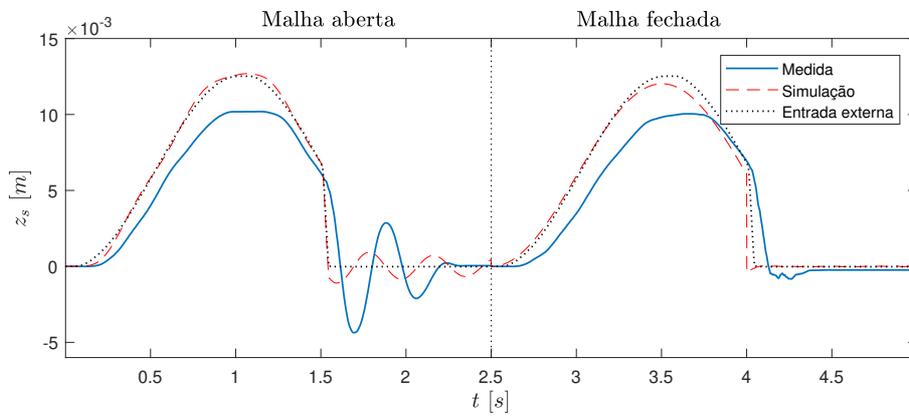


Figura 6.8: Deslocamento da massa suspensa  $z_s(t)$  (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

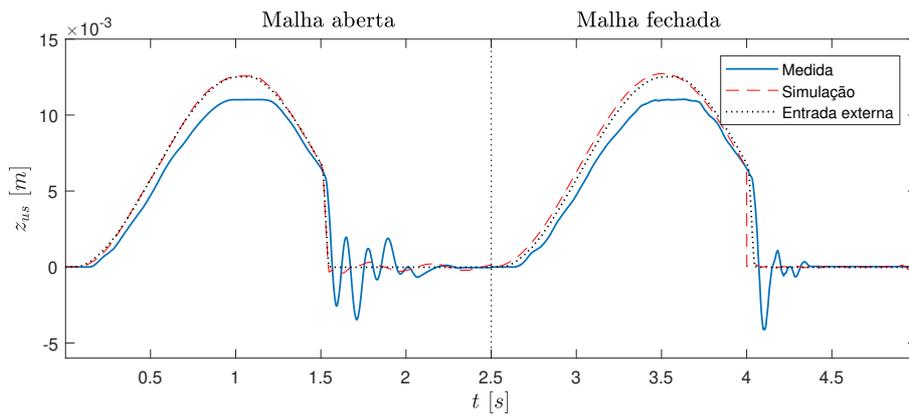


Figura 6.9: Deslocamento da massa não-suspensa  $z_{us}(t)$  (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

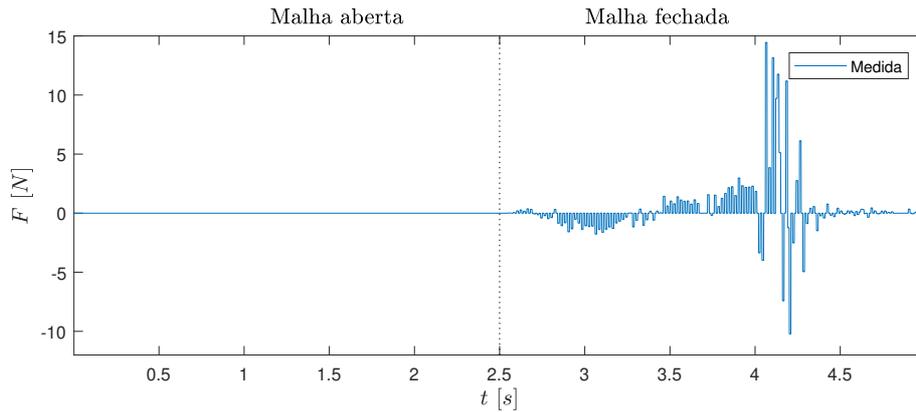


Figura 6.10: Esforço de controle  $u[n]$  (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

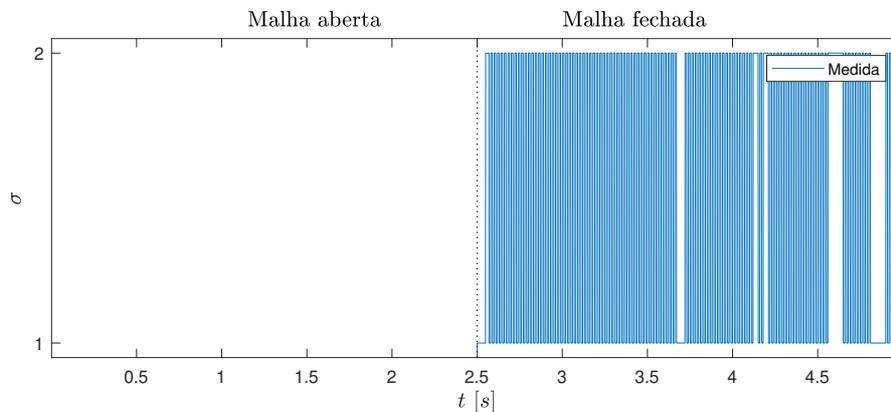


Figura 6.11: Sequência de comutação  $\sigma(y)$  (Realimentação dinâmica de saída, projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

## 6.2 Conversor CC-CC

Este sistema foi retirado da referência [Benmiloud et al. \[2019\]](#) que, assim como o Capítulo 5, trata estabilidade assintótica de um ciclo limite. Entretanto, [Benmiloud et al. \[2019\]](#) considera sistemas afins com comutação no domínio do tempo contínuo e garante apenas estabilidade local. O modelo dinâmico consiste de um conversor CC-CC que alimenta uma carga indutiva e é composto por uma associação de três células, cada uma delas com um par de comutadores que operam de forma complementar (isto é, quando  $s_1$  está aberto  $s_4$  está fechado). O sinal de controle associado à  $k$ -ésima célula de comutação é denotado por  $\eta_k$ ,  $k = \{1, 2, 3\}$ , em que  $\eta_k = 1$  ( $\eta_k = 0$ ) indica que a chave superior está fechada (aberta) e a chave inferior está aberta (fechada). A Figura 6.12 apresenta o esquemático deste sistema, cujos parâmetros são  $\mathcal{V}_{dc} = 60$  [V],  $C_{a1} = C_{a2} = 40$  [ $\mu\text{F}$ ],  $L_c = 5$  [mH] e  $R_c = 20$  [ $\Omega$ ].

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\eta_1$	0	1	0	1	0	1	0	1
$\eta_2$	0	0	1	1	0	0	1	1
$\eta_3$	0	0	0	0	1	1	1	1

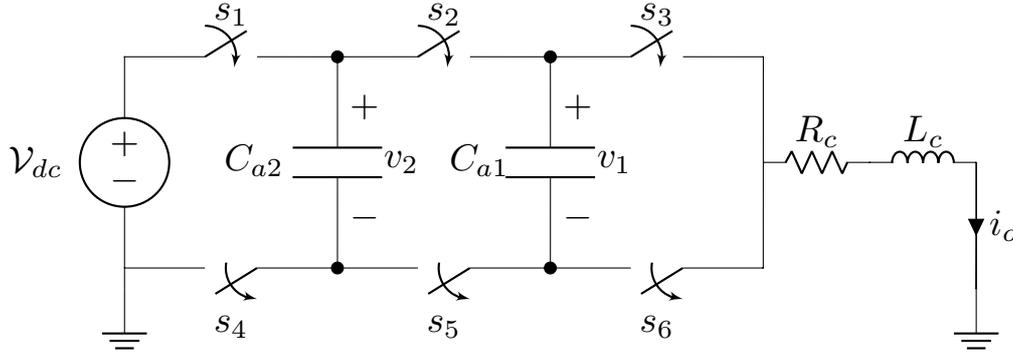
Tabela 6.2: Valores  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , e  $\eta_3$  para cada modo de operação  $i$ 

Figura 6.12: Diagrama esquemático de um conversor de três células.

Essa topologia apresenta  $N = 8$  modos de operação (ou subsistemas) que dependem do estado (aberto ou fechado) das chaves de cada uma das células  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$ , que são usadas para definir a regra de comutação  $\sigma$  como apresentada na Tabela 6.2.

Este conversor pode ser modelado como um sistema afim com comutação no domínio do tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}_\sigma x(t) + g_\sigma + \mathcal{H}_\sigma w(t) \quad (6.21)$$

$$z_c(t) = \mathcal{E}_\sigma x(t) + \mathcal{G}_\sigma w(t) \quad (6.22)$$

em que o estado é definido como  $x(t) = [v_1(t) \ v_2(t) \ i_o(t)]'$ . A entrada de perturbação  $w(t)$  representa um distúrbio e  $\sigma$  é a regra de comutação a ser projetada. As matrizes do sistema são dadas por

$$\mathcal{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\eta_2 - \eta_1}{C_{a1}} \\ 0 & 0 & \frac{\eta_3 - \eta_2}{C_{a2}} \\ \frac{\eta_1 - \eta_2}{L_c} & \frac{\eta_2 - \eta_3}{L_c} & \frac{-R_c}{L_c} \end{bmatrix}, \quad g_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V_{dc}\eta_3}{L_c} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$\mathcal{G}_i = 0$  e  $\mathcal{H}_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , que será definida mais adiante. Para tratar este problema no domínio do tempo discreto, garantindo um limitante superior para a frequência de comutação, um período de amostragem  $h = 0,1$  [ms] foi utilizado, de forma a fazer com que a regra de comutação respeite a restrição

$$\sigma(t) = \sigma(t_n) = \sigma[n], \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}) \quad (6.24)$$

em que  $t_n = nh$  é o  $n$ -ésimo instante de amostragem. Denotando  $x(t_n) = x[n]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , consideramos novamente o procedimento de discretização exata proposto na referência Souza et al. [2014], que fornece uma saída controlada satisfazendo (6.12). Logo, a norma  $\mathcal{L}_2$  das saídas controladas  $z(t)$  e  $z[n]$  são idênticas. Assim, adotando o

procedimento mencionado, obtemos o seguinte sistema afim com comutação no domínio do tempo discreto

$$x[n+1] = A_\sigma x[n] + b_\sigma + H_\sigma w[n] \quad (6.25)$$

$$z[n] = E_\sigma x[n] + G_\sigma w[n] \quad (6.26)$$

cujas as matrizes são dadas por

$$\begin{bmatrix} A_i & [b_i & H_i] \\ 0 & I \end{bmatrix} = e^{\tilde{A}_i h}, \quad \begin{bmatrix} E'_i \\ G'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_i \\ G'_i \end{bmatrix}' = \int_0^h e^{\tilde{A}'_i t} \tilde{\mathcal{E}}'_i \tilde{\mathcal{E}}_i e^{\tilde{A}_i t} dt \quad (6.27)$$

com

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i & [g_i & \mathcal{H}_i] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_i = [\mathcal{E}_i & \mathcal{G}_i] \quad (6.28)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ , assumindo que a entrada externa  $w(t) = w(t_n)$ ,  $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$ , é constante por partes, o que de fato é uma aproximação razoável para uma perturbação em baixa frequência  $w(t)$ .

No que se refere ao sistema a tempo discreto, nosso objetivo é projetar um ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  e uma regra de comutação  $\sigma(\xi[n])$  capaz de conduzir as trajetórias do estado  $x[n]$  a partir de uma condição inicial arbitrária até o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  projetado, assegurando um índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ . Estes índices são tratados de maneira separada na sequência. Diferente dos resultados propostos em [Benmiloud et al. \[2019\]](#), que garantem apenas a estabilidade local, a metodologia desenvolvida no Capítulo 5 assegura estabilidade assintótica global do ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$ .

Entretanto, antes de prosseguir com o projeto de controle, um conjunto de ciclos limites candidatos deve ser determinado. Assim sendo, o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  deve ser selecionado com a finalidade de manter uma distância máxima adequada do estado do sistema em regime permanente ao ponto de referência  $x_\star = [\mathcal{V}_{dc}/3 \quad 2\mathcal{V}_{dc}/3 \quad I_{ref}]$ , com a variável livre  $I_{ref} \in [0, I_{max}]$ , em que  $I_{max} = \mathcal{V}_{dc}/R_c$  é a máxima corrente possível na saída do conversor. Note que  $x_\star$  não é ponto de equilíbrio de nenhum dos subsistemas e, conseqüentemente, estabilidade assintótica para este ponto é impossível no domínio do tempo discreto. Nosso objetivo é alcançado considerando  $\kappa = 6$  e adotando (5.12) com

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

a fim de construir o conjunto de ciclos limites candidatos  $\mathfrak{X}_s$ . Logo, utilizando estes parâmetros, obtivemos trinta ciclos limites candidatos, a partir dos quais aquele que fornece a melhor resposta transitória é escolhido. Observe que a matriz  $\Gamma$  impõe que as tensões  $v_1$  e  $v_2$  não devem diferir mais que 2 [V] dos valores especificados em  $x_\star$  durante o regime permanente.

### 6.2.1 Projeto de controle $\mathcal{H}_2$

Nesta subseção, o objetivo é o projeto de uma regra de comutação  $\sigma(\xi[n])$  que otimiza a resposta em regime transitório do sistema a tempo discreto (6.25)-(6.26), evoluindo de uma condição inicial nula  $x[0] = 0$ , o que representa o sistema de partida (*system start-up*). Considerando que, no caso  $\mathcal{H}_2$ , a entrada externa não

é constante por partes, mas do tipo impulsiva, as matrizes  $H_i, \forall i \in \mathbb{K}$ , são determinadas de forma diferente do procedimento de discretização fornecido em (6.27)-(6.28). Para  $w[n] = \delta[n + 1]$ ,  $x[-1] = x_e[-1]$  e escolhendo  $\sigma[-1] = c[\kappa - 1] = q$ , as matrizes no domínio do tempo discreto são dadas por  $H_i = -x_e[0], \forall i \in \mathbb{K}$ , o que implica na condição inicial  $x[0] = 0$ . Sob estas considerações, resolvendo o problema de otimização (5.28) presente no Corolário 5.1, obtivemos o custo garantido  $J_{2s} = 37,7903$  associado à sequência  $c = (5 \ 1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 1)$  e o ciclo limite ótimo  $\mathcal{X}_e^*$  definido pelo período fundamental

$$(x_e[0], \dots, x_e[5]) = \left( \begin{bmatrix} 19,5989 \\ 39,4582 \\ 0,4031 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19,5989 \\ 40,7315 \\ 0,5983 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19,5989 \\ 40,7315 \\ 0,4011 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20,8722 \\ 39,4582 \\ 0,5961 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20,8722 \\ 39,4582 \\ 0,3996 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19,5989 \\ 39,4582 \\ 0,6014 \end{bmatrix} \right) \quad (6.30)$$

Implementando a regra de comutação  $\sigma(\xi[n]), \forall n \in \mathbb{N}$ , dada por (5.20), obtemos as Figuras 6.13 e 6.14 que apresentam, respectivamente, as tensões e a corrente ao longo do tempo enquanto que a Figura 6.15 exibe sequência de comutação correspondente. O plano de fase das trajetórias do sistema em direção ao ciclo limite é ilustrado na Figura 6.16 e um destaque no ciclo limite operando em regime permanente é apresentado na Figura 6.17, em que a seta indica a direção da trajetória do estado. Avaliando numericamente o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  dado por (2.63), obtivemos o custo verdadeiro  $J_2 = 1,0424$ , o que coloca em evidência a eficácia da regra de comutação (5.20), visto que adotando a regra de comutação periódica  $\sigma[n] = c[n - m_n]$  o valor do custo garantido é  $J_{2s} = 37,7903$ .

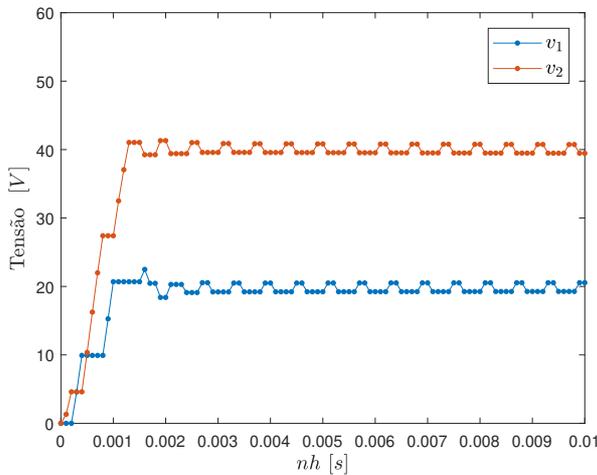


Figura 6.13: Tensões nos capacitores  $c_1$  e  $c_2$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

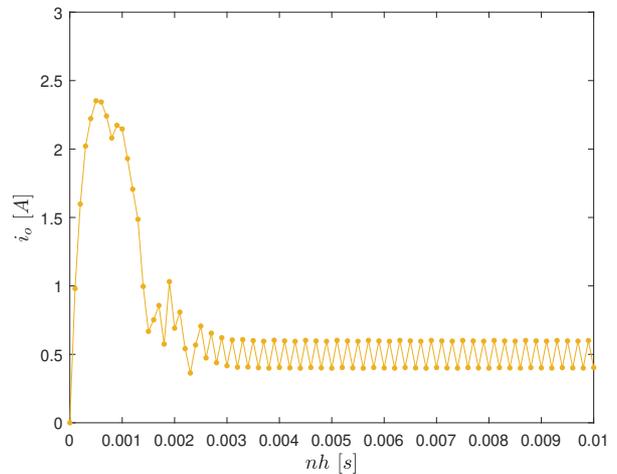
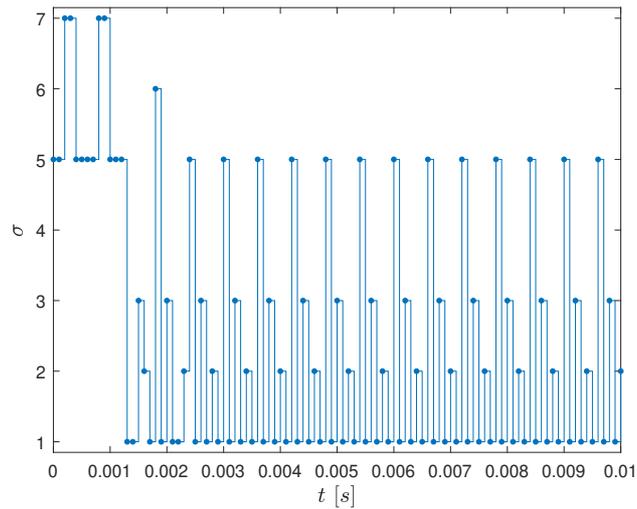
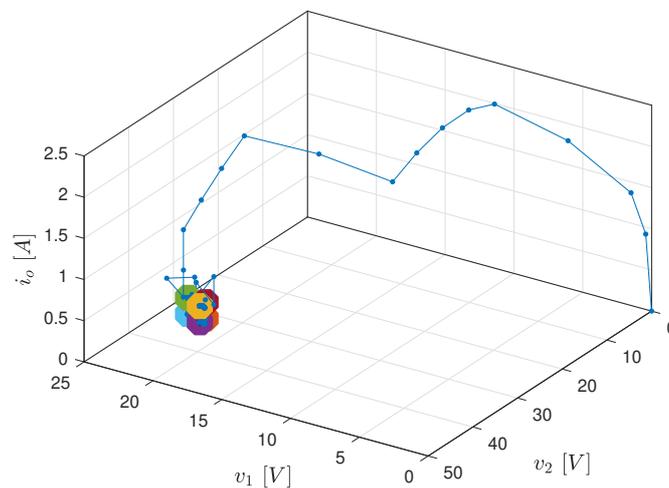


Figura 6.14: Corrente  $i_o$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

## 6.2.2 Projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$

Neste momento, o objetivo é o projeto de uma regra da comutação  $\sigma(\xi[n])$  que atenua a influência de uma entrada externa, representando uma oscilação ou queda de tensão na fonte de entrada  $\mathcal{V}_{dc}$ . As quedas de

Figura 6.15: Sequência da comutação (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )Figura 6.16: Trajetórias de estado convergindo para o ciclo limite  $\mathcal{X}_e^*$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

tensão são eventos recorrentes que depreciam a qualidade da potência e podem gerar falhas nos equipamentos sensíveis à variação de tensão como, por exemplo, equipamento médicos, automações industriais, entre outros, veja a referência [Dargahi et al. \[2012\]](#) para detalhes.

Neste caso, consideramos as matrizes no domínio do tempo contínuo  $\mathcal{H}_i = [0 \ 0 \ \eta_3/L_c]'$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , que modela a entrada externa  $w(t)$  como uma variação da tensão de entrada em torno do valor de  $\mathcal{V}_{dc}$ . Adotando o sistema a tempo discreto (6.25)-(6.26) com as matrizes dadas por (6.27) e (6.28), um ciclo limite  $\mathcal{X}_e^* \in \mathfrak{X}_s$  deve ser escolhido com a finalidade de minimizar o parâmetro  $\rho$ . Deste modo, resolvendo o problema de otimização (5.32) do Corolário 5.2, obtivemos o custo garantido  $\sqrt{\rho} = 0,01906$  associado à sequência de comutação  $c = (3 \ 1 \ 2 \ 1 \ 5 \ 1)$  que corresponde ao ciclo limite ótimo  $\mathcal{X}_e^*$ , coincidente com ciclo limite ótimo do caso  $\mathcal{H}_2$  deslocado de duas posições. Implementando a regra de comutação  $\sigma(\xi[n])$  dada por (5.35), iniciando o sistema de  $x[0] = x_e[0] = [19,5989 \ 40,7315 \ 0,4011]'$  e considerando a seguinte entrada externa

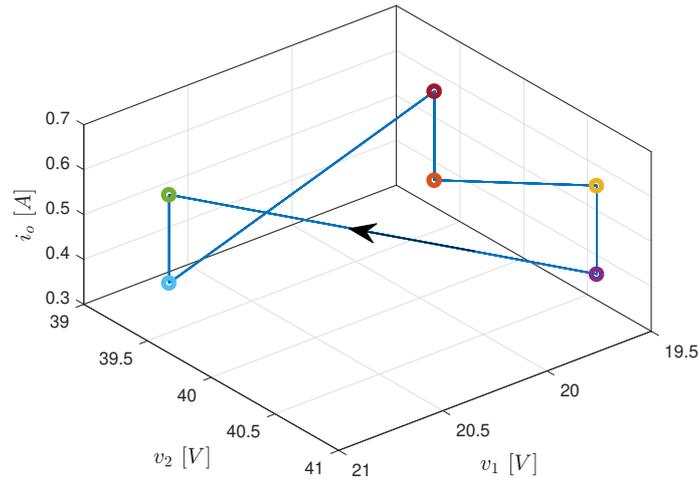


Figura 6.17: Zoom no ciclo limite  $\mathcal{X}_c^*$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_2$ )

$$w[n] = \begin{cases} 10\text{sen}(120\pi hn), & n \in [0, 1/h; 0, 2/h) \\ -20, & n \in [0, 3/h; 0, 4/h) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.31)$$

obtivemos as trajetórias do estado auxiliar  $\xi[n]$  exibidas na Figura 6.18. As tensões nos capacitores e a corrente de saída estão apresentadas, respectivamente, nas Figuras 6.19, 6.20 e 6.21. Além disso, o valor eficaz da corrente de saída  $i_o[n]$  foi calculado em três intervalos diferentes, a saber, oscilação de tensão  $n \in [0, 1/h; 0, 2/h)$ , queda de tensão  $n \in [0, 3/h; 0, 4/h)$  e operação regular  $n \in [0; 0, 1/h)$  fornecendo 0,5161 [A], 0,4231 [A] e 0,5096 [A], respectivamente. Estes valores demonstram que a regra de comutação projetada é muito eficiente na redução da influência de entrada de perturbação  $w[n]$  no sistema, garantindo uma variação do valor eficaz da corrente de aproximadamente 17% durante uma queda de tensão de 33%, em comparação com a operação regular.

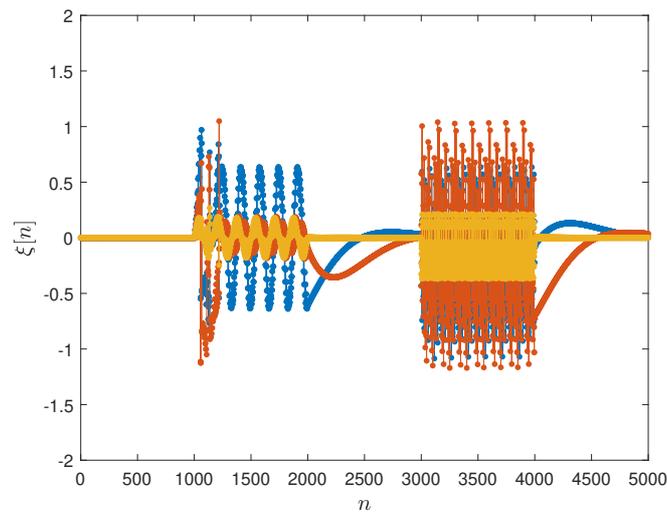
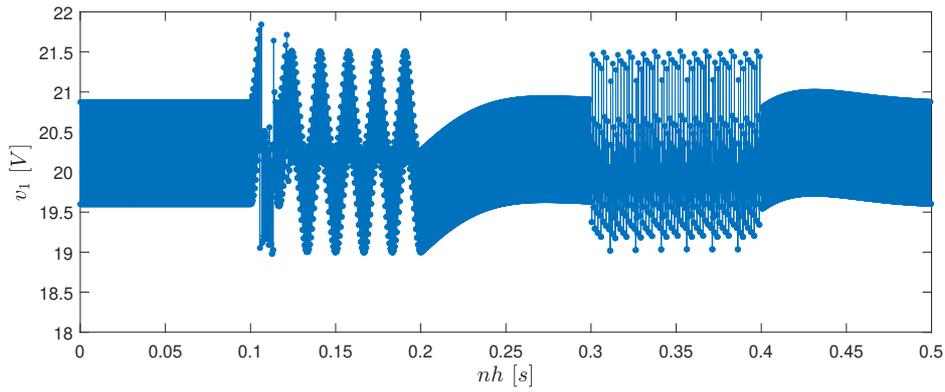
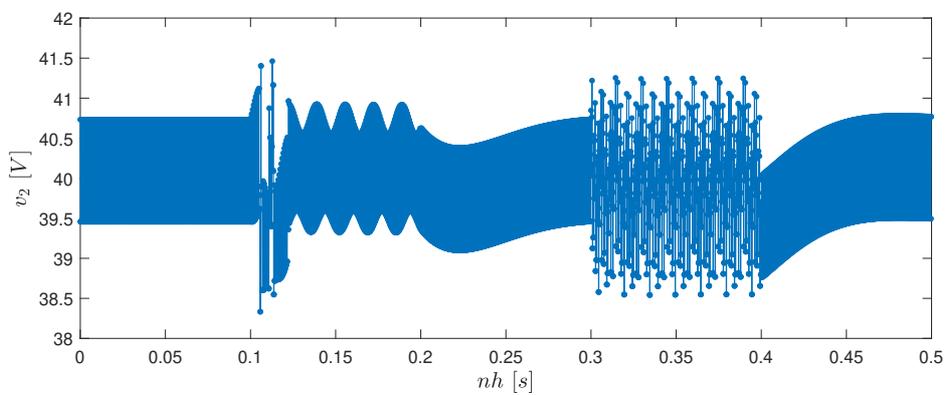
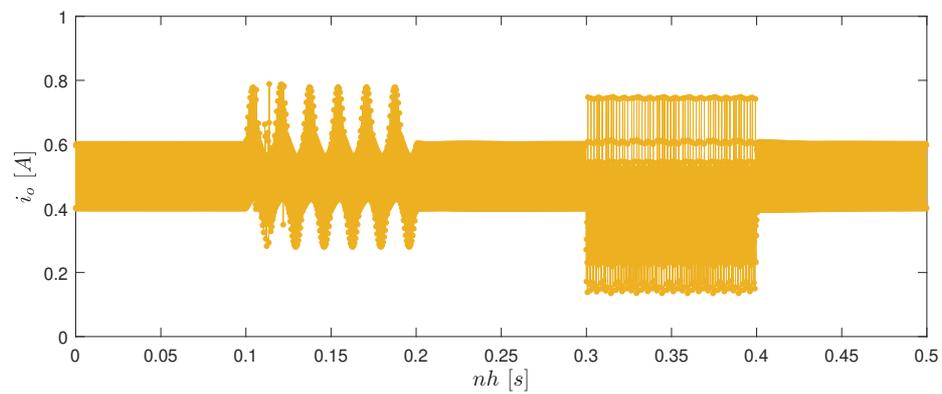


Figura 6.18: Trajetórias do estado  $\xi[n]$  no domínio do tempo discreto (projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

Figura 6.19: Tensão no capacitor  $v_1$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )Figura 6.20: Tensão no capacitor  $v_2$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )Figura 6.21: Corrente  $i_o$  (projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$ )

### 6.3 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentadas duas aplicações práticas. A primeira delas foi uma suspensão ativa, que modelamos como um sistema linear. Nesta aplicação validamos experimentalmente duas técnicas de controle

com comutação apresentadas nos Capítulos 3 e 4, respectivamente, baseadas em realimentação de saída. A diferença entre as técnicas é que uma delas leva em conta realimentação estática enquanto que a outra considera realimentação dinâmica de saída. Para a primeira, o projeto dos ganhos de realimentação de saída e da regra de comutação foram realizados de forma independente, sendo o objetivo assegurar estabilidade exponencial global da origem e fornecer um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ . A segunda técnica leva em conta o projeto conjunto de um controlador dinâmico de ordem completa e uma regra de comutação satisfazendo os mesmos objetivos de estabilidade, mas assegurando um custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  de desempenho. Ambas foram validadas experimentalmente. A segunda aplicação consistiu no controle de um conversor CC-CC, o qual é descrito como um sistema afim com comutação. Neste caso, um conjunto de ciclos limites foi determinado de forma a assegurar um bom desempenho no regime permanente. Posteriormente, uma regra de comutação foi projetada de forma a assegurar estabilidade assintótica global de um dos ciclos limites dentro deste conjunto e garantir um bom desempenho no regime transitório através da minimização de índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . As aplicações colocam em evidência a eficácia das metodologias apresentadas neste trabalho, tanto aquelas relacionadas aos sistemas lineares quanto aos sistemas afins.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

“Eu lhes asseguro: Quem ouve a minha palavra e crê naquele que me enviou, tem a vida eterna e não será condenado, mas já passou da morte para a vida.”

— JESUS (O NAZARENO)

Neste capítulo vamos destacar as principais contribuições apresentadas nesta tese. Primeiramente, alguns conceitos fundamentais foram apresentados no Capítulo 2, que serviram de base para os capítulos subsequentes. Mais especificamente, apresentamos alguns dos principais resultados da literatura referentes aos sistemas lineares com comutação, que foram utilizados para comparação e validação da teoria desenvolvida nos capítulos seguintes. Além disso, fornecemos alguns resultados de estabilidade para sistemas afins com comutação a tempo contínuo e destacamos a necessidade e importância, do ponto de vista teórico e prático, de se obter condições que levem em conta uma limitação na sua frequência de comutação. Esta restrição sempre aparece em sistemas a tempo discreto, devido à própria natureza discreta do sistema. Para esta classe de sistemas, a literatura apresenta condições para estabilidade prática que não são eficazes para garantir um desempenho adequado no regime permanente. Vale ressaltar que todos os resultados propostos neste trabalho são baseados em uma função de Lyapunov convexa, porém variante no tempo, o que de fato ainda não havia sido plenamente explorado em sistemas dinâmicos com comutação.

No contexto dos sistemas lineares com comutação no domínio do tempo discreto, a primeira contribuição importante foi proposta no Capítulo 3, em que são fornecidas condições para o projeto de controle via realimentação estática de saída de uma regra de comutação que assegura estabilidade assintótica da origem e custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . No caso  $\mathcal{H}_\infty$ , propusemos uma regra de comutação mais geral que, além da saída medida, depende também da entrada externa, sempre que esta última estiver disponível para medição. Além disso, consideramos o caso em que o sistema apresenta uma lei de controle adicional e realizamos o projeto de um conjunto de ganhos reais de realimentação de saída e da regra de comutação de forma independente. Para o projeto dos ganhos resolvemos, para cada subsistema isolado, o problema não-convexo de realimentação estática de saída através do método de Kleinman-Newton Generalizado para, posteriormente, realizar o projeto da regra de comutação. Devemos destacar que as condições fornecidas contém como caso particular a regra de comutação dependente do estado e, para esta situação específica, foi proposta uma solução para o projeto conjunto dos ganhos de realimentação de estado e da regra de comutação. Este último resultado foi generalizado no Capítulo 4 para o co-projeto de um controlador dinâmico de ordem completa e uma regra de comutação dependente da saída medida, os quais garantem estabilidade exponencial global da origem e um limitante superior para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Todos os resultados propostos nos Capítulos 3 e 4 foram ilustrados e comparados com outras técnicas presentes na literatura através de exemplos acadêmicos. O projeto da regra de comutação dependente da saída medida para o caso  $\mathcal{H}_2$ , proposta no Capítulo 3, e o co-projeto do controlador dinâmico e da regra de comutação para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , fornecido no Capítulo 4, foram validados experimentalmente no controle de uma suspensão ativa, como apresentado no Capítulo 6. Os problemas abordados nos Capítulos 3

e 4 apresentam como solução condições expressas em termos de desigualdades matriciais lineares que são mais simples de resolver do que outros métodos disponíveis na literatura como, por exemplo, aqueles baseados em desigualdades de Lyapunov-Metzler, mas felizmente, não são mais conservadoras.

No Capítulo 5, nosso foco foram os sistemas afins com comutação no domínio do tempo discreto. No intuito de esclarecer a contribuição desta tese para esta classe de sistemas, é necessário recapitular que eles são mais abrangentes do que os lineares por possuírem vários pontos de equilíbrio compondo uma região de grande interesse no espaço de estado. Além disso, normalmente, o ponto de equilíbrio de interesse não coincide com o de nenhum dos subsistemas e, conseqüentemente, estabilidade assintótica deste ponto só é possível às custas de uma frequência de comutação arbitrariamente elevada. Na maioria das vezes, esta frequência não é implementável devido à limitações físicas, como por exemplo, o tempo de resposta das chaves ou o período de amostragem em sistemas embarcados. A literatura apresenta vários resultados lidando com a estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio desejado, mas sem considerar nenhum limite sobre a frequência de comutação. Entretanto, quando algum limite é imposto, os resultados disponíveis garantem apenas que as trajetórias são guiadas para uma região, tão pequena quanto possível, contendo o ponto de equilíbrio de interesse. Portanto, nada pode ser concluído a respeito das trajetórias quando as mesmas se encontram em regime permanente no interior da região de atração. Assim sendo, não é possível levar em conta índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , pois eles são definidos somente para sistemas assintoticamente estáveis. Neste sentido, a contribuição dos resultados fornecidos no Capítulo 5 consiste no fato de que a solução proposta garante estabilidade assintótica global de um ciclo limite e, portanto, permite levar em conta estes índices de desempenho. Além disso, este ciclo limite é projetado de forma a satisfazer critérios de interesse do projetista no regime permanente cobrindo, assim, uma limitação existente nas técnicas disponíveis na literatura. Ademais, ressaltamos que, como no caso dos sistemas lineares, as condições são descritas em termos de desigualdades lineares sendo, portanto, simples de serem resolvidas por algoritmos disponíveis na literatura. Os resultados obtidos neste capítulo foram validados por exemplos acadêmicos e, também, no controle de um conversor CC-CC, como apresentado no Capítulo 6.

Nossas perspectivas para trabalhos futuros são listadas abaixo:

- Desenvolvimento de condições baseadas em uma função de Lyapunov convexa variante no tempo para o controle de sistemas lineares com comutação no domínio do tempo contínuo. Como no caso do tempo discreto, o objetivo é assegurar estabilidade exponencial global e um limitante superior para os índices de desempenho  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Em outras palavras, desejamos tratar problemas equivalentes aos apresentados nos Capítulos 3 e 4, mas para sistemas a tempo contínuo.
- Desejamos realizar o projeto conjunto da regra de comutação e de ganhos de realimentação estática de saída para ambos os domínios de tempo.
- Desejamos generalizar os resultados aqui apresentados para tratar controle de sistemas com incertezas politópicas.
- Investigar a consistência da regra de comutação aqui proposta cujas condições de estabilidade são baseadas em uma função de Lyapunov convexa variante no tempo.

# Referências Bibliográficas

- C. Albea-Sanchez, G. Garcia, H. Sabrina, W. P. M. H. Heemels, and L. Zaccarian. Practical stabilisation of switched affine systems with dwell-time guarantees. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019. doi: 10.1109/TAC.2019.2907381.
- L. I. Allerhand and U. Shaked. Robust stability and stabilization of linear switched systems with dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56:381–386, 2010.
- L. I. Allerhand and U. Shaked. Robust state-dependent switching of linear systems with dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58:994–1001, 2013.
- M. Benmiloud, A. Benaïa, M. Djemai, and M. Defoort. On the local stabilization of hybrid limit cycles in switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64:841–846, 2019.
- S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic Systems: Filtering and Control*. Springer, London, 2009.
- F. Blanchini and C. Savorgnan. Stabilizability of switched linear systems does not imply the existence of convex Lyapunov functions. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 119–124. IEEE, 2006.
- F. Blanchini, D. Casagrande, P. Gardonio, and S. Miani. Constant and switching gains in semi-active damping of vibrating structures. *International Journal of Control*, 85:1886–1897, 2012.
- V. Blondel and J. N. Tsitsiklis. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35:2118–2127, 1997.
- P. Bolzern and W. Spinelli. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3890–3895, 2004.
- S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- M. S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:475–482, 1998.
- R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, and M. R. Covacic. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 56: 3505–3513, 2009.
- R. Cardim, M. C. M. Teixeira, E. Assunção, J. M. S. Ribeiro, M. R. Covacic, and R. Gaino. Robust switched control based on strictly positive real systems and variable structure control techniques. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30:1244–1268, 2016.

- G. Chesi, P. Colaneri, J. C. Geromel, R. Middleton, and R. Shorten. A nonconservative LMI condition for stability of switched systems with guaranteed dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57: 1297–1302, 2011.
- H. R. Daiha and G. S. Deaecto.  $\mathcal{H}_2$  static output feedback switching function design based on a time-varying Lyapunov function approach. *International Journal of Control*, 2019a. doi: 10.1080/00207179.2019.1657241.
- H. R. Daiha and G. S. Deaecto. A time-varying convex Lyapunov function approach for dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of switched linear systems. In *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 581–586, 2019b.
- H. R. Daiha, L. N. Egidio, G. S. Deaecto, and J. C. Geromel.  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback control design of discrete-time switched linear systems. In *Proceedings of the 56th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5882–5887, 2017.
- V. Dargahi, A. K. Sadigh, M. R. A. Pahlavani, and A. Shoulaie. DC (direct current) voltage source reduction in stacked multicell converter based energy systems. *Energy*, 46:649–663, 2012.
- M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75:666–679, 2002.
- G. S. Deaecto. *Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação*. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- G. S. Deaecto. Dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of continuous-time switched affine systems. *Automatica*, 71:44–49, 2016.
- G. S. Deaecto and H. R. Daiha. LMI conditions for output feedback control of switched systems based on a time-varying convex Lyapunov function. Submetido.
- G. S. Deaecto and L. N. Egidio. Practical stability of discrete-time switched affine systems. In *European Control Conference*, pages 2048–2053, 2016.
- G. S. Deaecto and J. C. Geromel. Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62:4058–4065, 2017.
- G. S. Deaecto and J. C. Geromel. Stability and performance of discrete-time switched linear systems. *Systems & Control Letters*, 118:1–7, 2018.
- G. S. Deaecto and G. C. Santos. State feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control design of continuous-time switched affine systems. *IET Control Theory & Applications*, 9:1511–1516, 2015.
- G. S. Deaecto, J. C. Geromel, F. S. Garcia, and J. A. Pomilio. Switched affine systems control design with application to DC–DC converters. *IET Control Theory & Applications*, 4:1201–1210, 2010.

- G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. Dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of switched linear systems. *Automatica*, 47:1713–1720, 2011.
- G. S. Deaecto, A. R. Fioravanti, and J. C. Geromel. Suboptimal switching control consistency analysis for discrete-time switched linear systems. *European Journal of Control*, 19:214–219, 2013.
- G. S. Deaecto, M. Souza, and J. C. Geromel. Discrete-time switched linear systems state feedback design with application to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60:877–881, 2015.
- R. A. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. In *Proceedings of the IEEE*, pages 1069–1082, 2000.
- L. N. Egidio and G. S. Deaecto. Novel practical stability conditions for discrete-time switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019. doi: 10.1109/TAC.2019.2904136.
- L. N. Egidio, H. R. Daiha, and G. S. Deaecto. Global asymptotic stability of limit cycle and  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  performance of discrete-time switched affine systems. *Automatica*, 2020. doi: 10.1016/j.automat.2020.108927.
- E. Feron. *Quadratic Stabilizability of Switched Systems via State and Output Feedback*. Center for Intelligent Control Systems, MIT Publication CICS-P 468, 1996.
- M. Fiacchini and M. Jungers. Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched system: A set-theory approach. *Automatica*, 50:75–83, 2014.
- M. Fiacchini and S. Tarbouriech. Control co-design for discrete-time switched linear systems. *Automatica*, 82:181–186, 2017.
- M. Fiacchini, A. Girard, and M. Jungers. On the stabilizability of discrete-time switched linear systems: Novel conditions and comparisons. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61:1181–1193, 2016.
- J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of discrete time switched systems. *International Journal of Control*, 79:719–728, 2006a.
- J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of continuous-time switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45:1915–1930, 2006b.
- J. C. Geromel and G. S. Deaecto. Generalized Kleinman-Newton method in discrete-time. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):6697–6702, 2017.
- J. C. Geromel and G. S. Deaecto. Generalized Kleinman-Newton method. *Optimal Control Applications and Methods*, 39:1130–1140, 2018.
- J. C. Geromel and R. H. Korogui. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaios Práticos e Exercícios*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, SP, 2011.
- J. C. Geromel, P. Colaneri, and P. Bolzern. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53:720–733, 2008.

- J. C. Geromel, G. S. Deaecto, and J. Daafouz. Suboptimal switching control consistency analysis for switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58:1857–1861, 2013.
- J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1954.
- P. Hauroigne, P. Riedinger, and C. Jung. Switched affine systems using sampled-data controllers: Robust and guaranteed stabilization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56:2929–2935, 2011.
- E. Hernandez-Vargas, P. Colaneri, R. Middleton, and F. Blanchini. Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21:1093–1111, 2011.
- J. P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle’s invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49:470–482, 2004.
- J. P. Hespanha and A. S. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2655–2660. IEEE, 1999.
- L. Hetel and E. Fridman. Robust sampled-data control of switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58:2922–2928, 2013.
- D. Kleinman. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13:114–115, 1968.
- D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19:59–70, 1999.
- H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54:308–322, 2009.
- D. G. Luenberger. *Introduction to Dynamic Systems; Theory, Models, and Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1979.
- E. I. Mainardi Júnior, M. C. M. Teixeira, R. Cardim, E. Assunção, M. R. Moreira, D. R. de Oliveira, and A. A. Carniato. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 26:455–465, 2015.
- A. P. Molchanov and Y. S. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems & Control Letters*, 13:59–64, 1989.
- Y. Nesterov and A. Nemirovskii. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, 1994.
- M. C. Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37:261–265, 1999.

- D. Patino, P. Riedinger, and F. Ruiz. A predictive control approach for DC-DC power converters and cyclic switched systems. In *International Conference on Industrial Technology*, pages 1259–1264, 2010.
- Quanser. *Active Suspension System: User Manual*. Quanser Corporation, 2012.
- G. C. Santos. *Controle via Realimentação de Estado de Sistemas Afins com Comutação a Tempo Contínuo*. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, 2015.
- C. C. Scharlau, M. C. de Oliveira, A. Trofino, and T. J. Dezuo. Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule. *Systems & Control Letters*, 68:1–8, 2014.
- C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3, 2000.
- C. Seatzu, D. Corona, A. Giua, and A. Bemporad. Optimal control of continuous-time switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51:726–741, 2006.
- A. Sferlazza, L. Martínez-Salamero, C. Albea-Sanchez, G. Garcia, and C. Alonso. Min-type control strategy of a DC-DC synchronous boost converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019. doi: 10.1109/TIE.2019.2908597.
- R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review*, 49:545–592, 2007.
- I. Song, S. Kim, and F. Karray. A real-time scheduler design for a class of embedded systems. *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, 13:36–45, 2008.
- M. Souza, G. S. Deaecto, J. C. Geromel, and J. Daafouz. Self-triggered linear quadratic networked control. *Optimal Control Applications and Methods*, 35:524–538, 2014.
- Z. Sun and S. S. Ge. *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer, 2005.
- A. Trofino, C. C. Scharlau, T. J. M. Dezuo, and M. C. de Oliveira. Switching rule design for affine switched systems with  $\mathcal{H}_\infty$  performance. In *Proceedings of the 51th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1923–1928, 2012.
- M. A. Wicks, P. Peleties, and R. A. DeCarlo. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *Proceedings of the 33th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3492–3497, 1994.
- G. Zhai. Quadratic stabilizability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2165–2166. IEEE, 2001.
- W. Zhang, A. Abate, J. Hu, and M. P. Vitus. Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems. *Automatica*, 45:2526–2536, 2009.

# RESULTADOS AUXILIARES EM ANÁLISE MATRICIAL

“Desde os tempos antigos ninguém ouviu, nenhum ouvido percebeu, e olho nenhum viu outro Deus, além de ti, que trabalha para aqueles que nele esperam.”

— ISAÍAS 64:4

Neste apêndice, apresentamos alguns resultados utilizados neste trabalho. O primeiro é a definição das desigualdades matriciais lineares e, em seguida, o Complemento de Schur.

## A.1 Desigualdades matriciais lineares

As desigualdades matriciais lineares surgiram como uma ferramenta poderosa para abordar problemas de controle aparentemente difíceis, senão impossíveis, de serem resolvidos de forma analítica. Segundo a referência [Scherer and Weiland \[2000\]](#), embora a história das desigualdades matriciais lineares remonte à década de quarenta, com grande ênfase em seu papel no projeto de controle nos anos sessenta, através do trabalho de Kalman, Yakubovich, Popov e Willems, apenas durante as últimas décadas, técnicas poderosas de pontos interiores foram desenvolvidas para resolver as desigualdades matriciais lineares de maneira praticamente eficiente, para detalhes consulte [Nesterov and Nemirovskii \[1994\]](#). Atualmente, estão disponíveis vários pacotes de *softwares* comerciais e não-comerciais que permitem codificações simples de problemas gerais de controle em classes bem definidas de problemas de otimização. Essas classes de otimização incluem, por exemplo: problemas lineares e quadráticos, problemas semi-definidos, otimizações quadráticas de cone de segunda ordem, problema de soma de quadrados e otimizações robustas. De acordo com a referência [Boyd et al. \[1994\]](#), uma desigualdade matricial linear é definida da seguinte forma

$$F(\zeta) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i < 0 \quad (\text{A.1})$$

em que  $F_0, \dots, F_n$  são matrizes simétricas reais e  $x = [x_1, \dots, x_n]$  é um vetor de variáveis de decisão escalares reais desconhecidas.

A desigualdade  $F(\zeta) < 0$  significa que  $x$  deve tornar a matriz simétrica  $F(\zeta)$  negativa definida, ou seja, o máximo autovalor de  $F(\zeta)$  deve ser negativo. No contexto de desigualdades matriciais lineares, duas abordagens são consideradas

- O problema de factibilidade que é equivalente a testar se existem variáveis reais  $x_1, \dots, x_n$  tal que (A.1) seja garantida.
- O problema de otimização que equivale a minimizar uma função custo  $c(x) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$  tal que satisfaça a restrição (A.1).

Os problemas do tipo linear são perfeitamente adequados ao formalismo, mas também problemas quadráticos convexos com restrições quadráticas podem ser reformuladas nesta configuração. Observe que o problema

de otimização é uma generalização natural do caso linear no qual as desigualdades são determinadas por um cone convexo de matrizes positivas definidas. Consideramos as desigualdades na sua forma mais geral, dada por

$$F(X) < 0 \quad (\text{A.2})$$

em que  $X$  é uma matriz que pertence a um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  de matrizes com dimensão arbitrariamente finita e em que  $F(X) : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{S}^n$  é uma função afim, sendo  $\mathbb{S}^n$  o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem  $n$ . As funções afins são apresentadas na seguinte forma  $F(x) = F_0 + T(x)$  em que  $F_0$  é fixo e  $T(x)$  é uma transformação linear. Assim, estas funções afins são transformações lineares acrescentadas de um valor deslocado.

## A.2 Complemento de Schur

Este resultado é uma das mais importantes ferramentas matemáticas no contexto da otimização convexa. Isso porque ele fornece condições equivalentes de descrever uma desigualdade matricial, o que permite manipulações algébricas importantes. O próximo lema apresenta o Complemento de Schur como formulado na referência Geromel and Korogui [2011].

**Lema A.1.** *Seja uma matriz simétrica  $S(\zeta) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  e  $\zeta \in \mathbb{R}^s$  uma variável. Defina-se  $S(\zeta)$  de forma particionada como:*

$$S(\zeta) = \begin{bmatrix} Y(\zeta) & V(\zeta) \\ V(\zeta)' & X(\zeta) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.3})$$

sendo  $V(\zeta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $X(\zeta) \in \mathbb{S}^n$  e  $Y(\zeta) \in \mathbb{S}^m$ . A desigualdade matricial linear (A.3) é equivalente às seguintes desigualdades matriciais não lineares

$$Y(\zeta) - V(\zeta)X(\zeta)^{-1}V(\zeta)' > 0 \quad e \quad X(\zeta) > 0 \quad (\text{A.4})$$

$$X(\zeta) - V(\zeta)'Y(\zeta)^{-1}V(\zeta) > 0 \quad e \quad Y(\zeta) > 0 \quad (\text{A.5})$$

**Prova:** Neste primeiro momento, o objetivo é provar a equivalência entre (A.3) e (A.4). Assim sendo, definindo as seguintes funções matriciais

$$\mathcal{U}(\zeta) = \begin{bmatrix} I & V(\zeta)X(\zeta)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}(\zeta) = \begin{bmatrix} Y(\zeta) - V(\zeta)X(\zeta)^{-1}V(\zeta)' & 0 \\ 0 & X(\zeta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Note que (A.3) poder ser reescrita como  $S(\zeta) = \mathcal{U}(\zeta)\mathcal{N}(\zeta)\mathcal{U}(\zeta)'$ . Assim, temos que  $S(\zeta) > 0$  se e somente se  $\mathcal{N}(\zeta) > 0$ . A prova entre (A.3) e (A.5) é realizada de forma análoga, para isso basta redefinir as funções matriciais (A.6) como

$$\mathcal{U}(\zeta) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ V(\zeta)'Y(\zeta)^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}(\zeta) = \begin{bmatrix} Y(\zeta) & 0 \\ 0 & X(\zeta) - V(\zeta)'Y(\zeta)^{-1}V(\zeta) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Concluindo assim a prova.  $\square$