

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

**Modelo de Programação da Operação
Hidrotérmica de Curto Prazo Usando
Programação Semidefinida**

Miguel Paredes Quiñones

Campinas

2016



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Miguel Paredes Quiñones

Modelo de Programação da Operação Hidrotérmica de Curto Prazo Usando Programação Semidefinida

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Secundino Soares Filho

Co-orientador: Dr. Leonardo Silveira de Albuquerque Martins

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Miguel Paredes Quiñones, e orientada pelo Prof. Dr. Secundino Soares Filho

Campinas

2016

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

P214m Paredes Quiñones, Miguel, 1985-
Modelo de programação da operação hidrotérmica de curto prazo usando programação semidefinida / Miguel Paredes Quiñones. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Secundino Soares Filho.

Coorientador: Leonardo Silveira de Albuquerque Martins.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistema de energia elétrica hidrotérmica. 2. Programação quadrática. 3. Técnicas relaxação. 4. Métodos de relaxação (Matemática). 5. Métodos de relaxação. 6. Geração de energia. 7. Energia elétrica - Produção - Planejamento. I. Soares Filho, Secundino, 1949-. II. Martins, Leonardo Silveira de Albuquerque. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Short term hydrothermal operation planning model using semidefinite programming

Palavras-chave em inglês:

Hydrothermal power system

Quadratic programming

Relaxation techniques

Relaxation methods (Mathematics)

Relaxation methods

Power generation

Área de concentração: Energia Elétrica

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Secundino Soares Filho [Orientador]

André Luiz Diniz Souto Lima

Alexandre Street de Aguiar

Paulo Augusto Valente Ferreira

Marcos Julio Rider Flores

Data de defesa: 05-02-2016

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA-TESE DE DOUTORADO

Candidato: Miguel Paredes Quiñones

Data da Defesa: 5 de fevereiro de 2016

Título da Tese: "Modelo de Programação da Operação Hidrotérmica de Curto Prazo Usando Programação Semidefinida"

Prof. Dr. Secundino Soares Filho (Presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. André Luiz Diniz Souto Lima (Centro de Pesquisas de Energia Elétrica)

Prof. Dr. Alexandre Street de Aguiar (Pontifícia universidade Católica do Rio de Janeiro)

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Marcos Julio Rider Flores (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedico esta tese a minha família.

Agradecimentos

- Agradeço aos meus pais e meus irmãos que sempre tiveram disposição de criar as condições para me poder dedicar inteiramente aos meus estudos.
- Foi um prazer trabalhar junto com excelentes pessoas e profissionais como são Secundino Soares e Leonardo Martins. Além de serem assessores na área da pesquisa, eles também foram no campo pessoal.
- Obrigado aos amigos do COSE, Mateus Neves, Cassio Fujisawa, Thayze Costa, Catarina Junqueira, Maiana Lopes, Liz Alvarez e Luis Barrientos. Por compartilhar momentos memoráveis dentro e fora do nosso querido laboratório.
- Muito especialmente, desejo agradecer aos meus amigos da república adegas: Ricardo Prado, Carlos Iramina, Stanley Nogueira, Mateus Takaki, Jose Correia, Victor Viana e Thiago Marques pelos momentos de entusiasmo partilhados em conjunto.
- À comunidade peruana na Unicamp, pelos alegres momentos nas reuniões e também pelas dicas para sobreviver no Brasil.
- Um especial agradecimento para Marcos Rider e Ruben Romero pela ajuda durante a época do mestrado, que sem dúvida contribuiu ao desenvolvimento da minha carreira profissional.
- A quem me brindou com um grande apoio durante minha estadia nos EUA: Mary Besore e Barbara Newberg.
- Obrigado ao Makoto Kadowaki por fornecer os dados para poder criar os casos-teste contidos nesta tese.
- A CAPES e FAPESP (Processo Nº 2013/07570-7) pelo apoio financeiro na realização desta tese.

“O cientista não é a pessoa que dá as respostas certas; é aquele que faz as perguntas certas.”
(Claude Lévi-Strauss)

Resumo

A presente pesquisa considera o desenvolvimento de dois modelos de otimização para o problema de planejamento da operação de curto prazo de sistemas hidroelétricos e termoeletricos de potência (POCP). Cada um destes problemas foi formulado como um modelo não-linear inteiro misto de grande porte, resolvido usando as vantagens da programação semidefinida (SDP) aplicada a relaxação de problemas quadrático na função objetivo e quadrático nas restrições (QCQP). Os modelos deverão encontrar uma programação de operação ótima das usinas hidroelétricas e termoeletricas para um horizonte de tempo de um dia ou uma semana, com discretização horária. A função-objetivo de minimização representa o custo do uso da água das usinas hidroelétricas e no caso do modelo termoeletrico considera os custos dos combustíveis, sendo nos dois casos são considerados custos de arranque das unidades. O uso de variáveis binárias para despacho de máquinas e restrições não-lineares produto da modelagem do sistema de transmissão, tornam estes problemas de uma alta complexidade. A técnica de solução para o modelo hidroelétrico utilizou um algoritmo de B&B com uma heurística alternativa para problemas de grande porte. No caso do modelo termoeletrico foi aplicada uma decomposição inteira-SDP baseada na decomposição de Benders.

Palavras-chaves: Geração Hidrotérmica, Despacho da Geração, Despacho de unidades, Programação Quadrática, Métodos de Relaxação.

Abstract

This research considers the development of two optimization models for short-term hydroelectric and thermoelectric scheduling (STHTS). Each of these problems has been formulated as a nonlinear mixed model integer large scale, solved using the advantages of semidefinite programming (SDP) applied to relaxation of quadratic constrained quadratic programming (QCQP). The models should find optimal operation scheduling of hydroelectric and thermoelectric plants for a time horizon of a day or a week discretized in hours. The objective function to be minimized is the cost of water use of hydroelectric power plants and for thermoelectric model considers the combustible costs, also in both cases the units start-up costs are considered. The use of binary variable for unit commitment representation and non-linear constraints of the transmission system, turn those problems a high complexity problem. The solution technique for the hydropower model was by a B & B algorithm with a heuristic alternative to large scale problems. In the case of thermoelectric model was applied a decomposition integer SDP based on Benders decomposition.

Keywords: Hydroelectric power generation, power generation dispatch, unit commitment, quadratic programming, relaxation methods.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Elementos da POCP	26
Figura 2 – Diagrama de Venn da SDP	39
Figura 3 – Alternativas de configurações de máquinas a serem sincronizadas para uma usina h no tempo t	48
Figura 4 – Curva colina típica para uma unidade geradora.	49
Figura 5 – Curvas de nível de uma curva colina típica de uma unidade geradora e a faixa operativa de rendimentos correspondente a duas configurações de máquinas, com uma e com duas unidades sincronizadas, para uma dada cota de montante \bar{h} constante.	50
Figura 6 – Descarga de água em função da potência de saída para duas configurações de unidades sincronizadas de uma usina hidrelétrica real.	50
Figura 7 – Limites de Geração.	55
Figura 8 – Evolução do $\tilde{\nu}_{t,h}$ para a usina h no tempo t durante o período de $T = 24$	60
Figura 9 – Evolução do $\inf(\nu_{t,h})$ para a usina h no tempo t durante o período de $T = 24$	61
Figura 10 – Esquema do Procedimento.	84
Figura 11 – Limitante Inferior Linear	87
Figura 12 – Sistema hidráulico para o caso 3-GENH.	91
Figura 13 – Configuração do sistema de transmissão do caso 3-GENH	92
Figura 14 – Despacho de unidades das usinas para o caso 3-GENH.	95
Figura 15 – Trajetória do reservatório de $G3$ para o caso 3-GENH.	95
Figura 16 – Despacho de geração horária para o caso 3-GENH.	96
Figura 17 – Tensão nas barras do caso 3-GENH em cada hora.	96
Figura 18 – Convergência dos limitantes superior e inferior para o caso 3-GENT.	98
Figura 19 – Progresso iterativo do despacho de unidades para o gerador $G2$ do caso 3-GENT.	99
Figura 20 – Despacho ótimo de unidades para o caso-teste 3-GENT.	100
Figura 21 – Despacho de geração de potência ativa para o caso-teste 3-GENT.	100

Lista de acrônimos e abreviações

CA	Corrente Alternada
CC	Corrente Contínua
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
LP	Programação Linear
LR	Lagrangiano Relaxado
MILP	Programação Linear Inteira Mista
POPCP	Programação da Operação de Curto Prazo
QP	Programação Quadrática
SDP	Programação Semidefinida
SOCP	Programação Cônica de Segunda Ordem

Lista de símbolos

$x_{t,h,u}$	Variável binária associada à configuração u da usina hidroelétrica h no tempo t .
$P_{t,h,u}$	Geração de potência ativa associada à configuração u da usina hidroelétrica h no tempo t .
$Q_{t,h,u}$	Geração de potência reativa associada à configuração u da usina hidroelétrica h no tempo t .
$q_{t,h,u}$	Vasão de água turbinada associada à configuração u da usina hidroelétrica h no tempo t .
s_h	Vasão de água vertida associada à usina h .
a_h	Vasão de água afluyente associada à usina h .
ϱ	Constate de conversão de unidades.
$\eta_{t,h,u}$	Eficiência do gerador associada à configuração u da usina hidroelétrica h no tempo t .
\bar{h}_h	Altura líquida da usina h .
\hat{h}_h	Altura de montante da usina h .
\check{h}_h	Cota do canal de fuga da usina h .
$\hat{\bar{h}}_{h,u}$	Perda de queda devido ao atrito nos condutos forçados associada a configuração de máquinas u da usina hidroelétrica h .
$\Delta P_{t,h,u}$	Geração de potência ativa acima da mínima $\underline{P}_{h,u}$.
$\Delta Q_{t,h,u}$	Geração de potência reativa acima da mínima $\underline{Q}_{h,u}$.
$\underline{P}_{h,u}$	Potência ativa mínima para a configuração de máquinas u na usina h .
$\overline{P}_{h,u}$	Potência ativa máxima para a configuração de máquinas u na usina h .
$\underline{Q}_{h,u}$	Potência reativa mínima para a configuração de máquinas u na usina h .
$\overline{Q}_{h,u}$	Potência reativa máxima para a configuração de máquinas u na usina h .

$\alpha_{h,u}$	Coeficiente quadrático de $P_{t,h,u}$ em função de $q_{h,t,u}$ associado a usina hidroelétrica h no tempo t .
$\beta_{h,u}$	Coeficiente linear de $P_{t,h,u}$ em função de $q_{h,t,u}$ associado a usina hidroelétrica h no tempo t .
$\gamma_{h,u}$	Coeficiente independente de $P_{t,h,u}$ em função de $q_{h,t,u}$ associado a usina hidroelétrica h no tempo t .
T	Número de períodos temporais de análise.
N_H	Número total de usinas hidroelétricas.
$Nu_{t,h}$	Número total de unidades disponíveis na usina h no tempo t .
$WC_{t,h,u}$	Custo da água associado à configuração u da usina hidroelétrica h no tempo t .
λ_h	Custo unitário do uso da água da usina hidroelétrica h .
$SC_{t,h}$	Custos de partida de máquinas da usina hidroelétrica h no tempo t .
δ_h	Custo de partida de uma unidade da usina h .
$y_{t,h}$	Número de máquinas adicionais sincronizadas da usina hidroelétrica h no tempo t .
N_B	Número total de barras do sistema de transmissão.
$Pd_{i,t}$	Demanda de potência ativa na barra i no tempo t .
$Qd_{i,t}$	Demanda de potência reativa na barra i no tempo t .
$e_{t,i}$	Parte real da tensão na representação cartesiana na barra i para o tempo t .
$f_{t,i}$	Parte imaginária da tensão na representação cartesiana na barra i para o tempo t .
Ψ_i	Conjunto de usinas hidroelétricas ligadas na na barra i .
Ω_i	Conjunto de barras ligadas na na barra i .
i_0	Índice da barra slack.
$g_{i,j}$	Condutância da linha (i, j) .
$b_{i,j}$	Susceptância da linha (i, j) .

V_0	Modulo da tensão da barra slack.
\mathcal{L}	Conjunto de linhas de transmissão.
$F_{t,i,j}$	Fluxo de potência na linha (i,j) no tempo t .
$\underline{F}_{i,j}$	Limite mínimo de fluxo de potência na linha (i,j) .
$\overline{F}_{i,j}$	Limite máximo de fluxo de potência na linha (i,j) .
\underline{V}_i	Limite mínimo do modulo da tensão na barra i .
\overline{V}_i	Limite máximo do modulo da tensão na barra i .
$\nu_{t,h}$	Volume de armazenamento da usina hidroelétrica h no tempo t .
$\omega_{t,\tilde{h}}$	Vazões provenientes das usinas hidroelétricas a montante \tilde{h} no tempo t .
Θ_h	Conjunto de usinas hidroelétricas a montante da usina h .
ϑ	Constante de conversão de unidades.
$\underline{\nu}_h$	Volume mínimo de armazenamento da usina hidroelétrica h .
$\overline{\nu}_h$	Volume máximo de armazenamento da usina hidroelétrica h .
$\tau_{\tilde{h}}$	Tempo de viagem da água desde a usina a montante \tilde{h} .
$\mathbf{1}_{w \in A}$	É a função indicadora onde é 1, se $w \in A$; 0, caso contrário.
m_h	Metas de geração de longo prazo da usina hidroelétrica h .
$\Omega_1(\mathbf{x})$	Conjunto de variáveis $x_{t,h,u}$ não inteiras da solução \mathbf{x} .
$\Omega_2(\mathbf{x})$	Conjunto de variáveis $x_{t,h,u}$ inteiras da solução \mathbf{x} .
v	Variável auxiliar da relaxação de Shor.
$\tilde{\nu}_{t,h}$	Máximo volume total turbinável pela usina hidroelétrica h até a hora t .
$\underline{\nu}_{t,h}$	Mínimo volume total turbinável pela usina hidroelétrica h até a hora t .
q_h	Limite mínimo de vazão turbinável da usina hidroelétrica h .
\overline{q}_h	Limite máximo de vazão turbinável da usina hidroelétrica h .
νd_h	Volume-alvo do reservatório da usina hidroelétrica h .
\tilde{t}_h	Tempo máximo onde a usina h pode turbinar a vazão máxima \overline{q}_h .

\underline{t}_h	Tempo máximo onde a usina h pode turbinar a vazão mínima \underline{q}_h .
$\inf(\nu_{t,h})$	Limitante inferior do volume $\nu_{t,h}$ do reservatório da usina h no tempo t .
$\sup(\nu_{t,h})$	Limitante superior do volume $\nu_{t,h}$ do reservatório da usina h no tempo t .
C1	Matriz $\in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X1}) \times \dim(\mathbf{X1})}$, que representa os custos do uso da água para as variáveis indefinidas em $\Omega_1(\mathbf{x})$.
C2	Matriz $\in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X2}) \times \dim(\mathbf{X2})}$, que representa os custos de uso da água para as variáveis definidas em $\Omega_2(\mathbf{x})$.
Υ	Soma das constantes $\hat{\gamma}_{t,h,u} \forall (t, h, u) \in \Omega_2(\mathbf{x})$.
ξ_i	Vetor normalizado básico do espaço euclidiano de dimensões apropriadas.
c	Vetor $\in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{y})}$ dos custos de partida.
X1	Matriz $\in \mathbb{R}^{3 \cdot \Omega_1(\mathbf{x}) \times 3 \cdot \Omega_1(\mathbf{x}) }$ que contém as variáveis indefinidas.
X2	Matriz $\in \mathbb{R}^{3 \cdot \Omega_2(\mathbf{x}) \times 3 \cdot \Omega_2(\mathbf{x}) }$ que contém as variáveis indefinidas.
V	Matriz $\in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_B \times 2 \cdot T \cdot N_B}$ que contém as variáveis de tensão.
y	Vector $\in \mathbb{R}^{ \Omega_1(\mathbf{x}) }$ que contém as variáveis $y_{t,h}$.
$\varrho_1(t, h, u)$	Função que fornece a posição no conjunto $\Omega_1(\mathbf{x})$.
$\varrho_2(t, h, u)$	Função que fornece a posição no conjunto $\Omega_2(\mathbf{x})$.
a1	Vetor que representa as demandas ativas.
a2	Vetor que representa as demandas reativas.
A1 (\cdot)	Mapeamento linear que representa a geração de potência ativa de usinas com despacho de máquinas indefinido.
A2 (\cdot)	Mapeamento linear que representa a geração de potência ativa de usinas com despacho de máquinas definido.
Y1 (\cdot)	Mapeamento linear que representa as injeções de potência ativa nas barras do sistema de transmissão.
A3 (\cdot)	Mapeamento linear que representa a geração de potência reativa de usinas com despacho de máquinas indefinido.

x3	Vetor que contém as potências reativas de cada gerador.
$\mathcal{Y}2(\cdot)$	Mapeamento linear que representa as injeções de potência reativa nas barras do sistema de transmissão.
a3	Vetor que contém as metas de geração de potência ativa.
$\mathcal{A}4(\cdot)$	Mapeamento linear que representa a geração de potência ativa de usinas com despacho de máquinas indefinido acumulada no período de análise T .
$\mathcal{A}5(\cdot)$	Mapeamento linear que representa a geração de potência ativa de usinas com despacho de máquinas definido acumulada no período de análise T .
$\mathcal{A}6(\cdot)$	Mapeamento linear que define a variável auxiliar.
a4	Vetor que representa a tensão na barra slack.
$\mathcal{Y}3(\cdot)$	Mapeamento linear que extrai a tensão da barra slack.
a5	Vetor que representa a restrição de configuração única de unidades.
$\mathcal{A}7(\cdot)$	Mapeamento linear que extrai as variáveis de configuração única de unidades.
b1	Vetor de limites de potência ativa das usinas hidroelétricas com despacho de unidades indefinido.
$\mathcal{B}1(\cdot)$	Mapeamento linear que representa as variações de geração $\Delta P_{t,h,u}$ de potência ativa com despacho de unidades indefinido.
b2	Vetor de limites de potência reativa das usinas hidroelétricas com despacho de unidades definido.
$\mathcal{B}2(\cdot)$	Mapeamento linear que representa as variações de geração $\Delta Q_{t,h,u}$ de potência reativa com despacho de unidades definido.
b3	Vetor de limites de potência reativa.
b4	Vetor de limites de volume nos reservatórios.
$\mathcal{B}3$	Mapeamento linear que extrai a dinâmica do reservatório para as usinas com despacho de máquinas indefinido.
$\mathcal{B}4$	Mapeamento linear que extrai a dinâmica do reservatório para as usinas com despacho de máquinas definido.

b5	Vetor de limites de transmissão.
$\mathcal{Y}4(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí os fluxos de potência ativa entre as barras.
$\mathcal{Y}5(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí os módulos das tensões ao quadrado das barras.
$\mathcal{E}(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí as partidas de máquinas entre dois tempos para usinas com despacho de máquinas indefinido.
g	Partidas de máquinas entre dois tempos para usinas com despacho de máquinas definido.
\mathbf{x}_{SDP}^*	Solução ótima do problema SDP.
$f o_{SDP}^*$	Valor da função objetivo para o ótimo do problema SDP.
UB	Limite superior.
LB	Limite inferior.
Λ	Lista de nós no algoritmo B&B.
C3	Custo do uso da água no problema OPF durante para a heurística de arredondamento.
a6	Vetor de demandas de potência ativa nas barras.
$\mathcal{A}8(\cdot)$	Mapeamento linear de geração de potência ativa nas barras.
$\mathcal{X}5$	Matriz com variáveis de potência ativa.
a7	Vetor de demandas de potência reativa nas barras.
x6	Vetor com as variações de geração de potência reativa.
a8	Vetor de metas de geração de longo prazo.
$\mathcal{A}9(\cdot)$	Mapeamento linear que extrai o somatório da geração de potência ativa ao longo do período de análise para cada usina.
a9	Vetor preenchido de 1 que representam a condição das variáveis auxiliares.
$\mathcal{A}10(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí as variáveis auxiliares.
$\mathcal{B}5(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí as variáveis que representam os limites de geração.

$\mathcal{B}6$	Mapeamento linear que extraí as variáveis que representam a dinâmica do reservatório.
$\mathbf{b}7$	Vetor que contém os parâmetros fixos da dinâmica do reservatório.
$\varrho_3(t, h)$	Função de posição dada uma dupla (t, h) .
\mathbf{P}	Matriz com as multiplicações das potências ativas dos geradores.
\mathbf{x}	Vetor com os status (ligada ou desligada) das usinas.
\mathbf{y}	Vetor com as partidas das unidades.
\mathbf{z}	vetor com as paradas das unidades.
$\mathbf{C}4$	Matriz de coeficientes quadráticos e lineares de custo do combustível.
$\mathbf{c}2$	Vetor de custos fixos dos combustíveis.
\mathbf{u}	Vetor de custos de partida.
\mathbf{s}	Vetor de custos de parada.
\mathbf{U}	Matriz que extrai a variação entre dois status consecutivos de uma usina.
$\mathbf{a}10$	Vetor das restrições de partida.
$\mathbf{M}1$	Matriz que extrai os tempos de ligado.
$\mathbf{M}2$	Matriz que extrai os tempos de desligado.
$\mathbf{a}11$	Vetor que extraí os tempos mínimos de desligado.
$\mathcal{A}11(\cdot)$	Mapeamento linear que extrai as variações de geração de potência ativa em cada barra.
$\underline{\mathbf{P}}1$	Matriz com as gerações mínimas das usinas.
\mathbf{d}	Vetor com as demandas de potência ativa.
$\mathcal{A}12(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí as variações de geração ativa.
$\overline{\mathbf{P}}1$	Matriz com os limites de geração ativa.
$\mathcal{A}13(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí as diferenças entre a geração e a geração máxima para a restrição de reserva girante.
$\overline{\mathbf{P}}2$	Matriz que extraí os limites máximos e mínimos de geração de potência ativa.

\mathbf{r}	Vetor com as reservas girantes para cada tempo.
$\mathcal{A}14(\cdot)$	Mapeamento linear que extraí as variações de potência ativa entre dois intervalos de tempo.
$\overline{\mathbf{P}3}$	Matriz que extraí os valores de geração mínima.
$\mathbf{g1}$	Vetor com os valores de rampa de subida.
$\mathbf{g2}$	Vetor com os valores de rampa de descida.
\mathbf{p}	Vetor com as variáveis de potência ativa.
\mathbf{H}	Matriz que extraí as variáveis de potência para a representação do subproblema relaxado a ser incluído no problema mestre.
\mathbf{Q}	Matriz que extraí as variáveis de status de usinas para a representação do subproblema relaxado a ser incluído no problema mestre.
\mathbf{h}	Vetor que contém as constantes da relaxação do subproblema no problema mestre.
\mathbf{m}	Vetor que contém os coeficientes da potência ativa na linearização da função objetivo.
\mathbf{n}	Vetor que contém os coeficientes das variáveis de status na linearização da função objetivo.
w	Variável de suporte entre o problema mestre e os cortes que representam o subproblema.
σ	Fator de penalidade das infactibilidades no problema mestre.
s	Variável de folga de infactibilidade para o subproblema.
$\varrho_4(t, g)$	Função que da posição da dupla (t, g) dentro dos vetores e matrizes.
$\omega(t, \tau)$	Função de tempo mínimo para t e para um $\tau = T_{on}$ ou $\tau = T_{off}$.
\mathbf{A}	matriz que extraí as componentes de geração ativa da matriz $\mathbf{P}_{t,g}$.
Φ_i	Conjunto de usinas termoeletricas na barra i .
N_G	Número total de usinas termoeletricas.
α_g	Coefficiente quadrático do custo do combustível da usina termoeletrica g .
β_g	Coefficiente linear do custo do combustível da usina termoeletrica g .

γ_g	Termo independente do custo combustível da usina termoeletrica g .
\bar{p}_g	Potência ativa máxima da usina termoeletrica g .
\underline{p}_g	Potência ativa mínima da usina termoeletrica g .
$x_{t,g}$	Variável de status da usina g no tempo t .
$P_{t,g}$	Geração de potência ativa de usina termoeletrica g no tempo t .
\mathbf{V}_t	Matriz $\mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$ que contém os valores das componentes real e imaginária nas barras do sistema de transmissão no tempo t .
SR_t	Reserva girante para o tempo t .
RU_g	Rampa de subida para usina termoeletrica g .
RD_g	Rampa de descida para a usina termoeletrica g .
$x_{0,g}$	Estado anterior ao tempo de análise da usina g .
$T_{0,g}$	Tempo em que permaneceu no estado anterior ao tempo de análise da usina g .
λ	Variável dual do subproblema FPO.
$\lambda^{(k)}$	Variável dual do subproblema FPO factível na iteração k .
$\mu_1^{(k)}$	Variável dual do subproblema FPO infactível na iteração k .
\mathcal{F}_k	Conjunto de cortes de factibilidade na iteração k .
\mathcal{O}_k	Conjunto de cortes de otimalidade na iteração k .
\mathbf{L}_t	Perdas de potência ativa no sistema de transmissão no tempo t .
\mathbf{D}_r	Matriz de perturbação da solução \mathbf{V}^* para reduzir o rank dela.
\mathbf{S}_r	Matriz que captura a estrutura comum das restrições no esquema de redução de rank na iteração r .
\mathbf{R}_r	Matriz obtida mediante a decomposição de Cholesky $\mathbf{V}_r^* = \mathbf{R}_r^\top \mathbf{R}_r$.
\mathbf{Z}_r	Matriz que assegura que \mathbf{D}_r continue sendo factível.
ϕ_z	Fator que mantêm a matriz \mathbf{D}_r semidefinida positiva enquanto \mathbf{Z}_r seja definida.
w_r	Fator de forma da matriz \mathbf{D}_r para eliminar um autovalor da matriz \mathbf{V}_r^* .

Sumário

1	Introdução	25
1.1	Sistemas Termoelétricos	27
1.2	Sistemas Hidroelétricos	30
1.3	Sistemas Hidrotérmicos	32
1.4	Escopo da Tese	37
1.4.1	Relevância	37
1.4.2	Objetivos	37
1.4.2.1	Objetivo geral	38
1.4.2.2	Objetivos específicos	38
1.4.3	Hipóteses	38
2	Introdução à Programação Semidefinida	39
2.1	Álgebra Linear Envolvida	40
2.1.1	Matrizes Semidefinidas	40
2.1.2	Operadores Importantes	41
2.1.3	Complemento Shur	41
2.2	O Problema de Programação Semidefinida	42
2.3	Problema dual da Programação Semidefinida	42
2.4	Minimizadores Locais e Globais	44
2.5	Escalamento de um Problema SDP	45
2.6	Relaxação SDP para Problemas MIQCQP	46
2.6.1	Rank baixo em soluções de problemas de programação semidefinida	47
3	Modelo do POCP Hidroelétrico	48
3.1	Função-objetivo	51
3.1.1	Custo da Água	51
3.1.2	Custo de Partida	51
3.2	Restrições do problema	51
3.2.1	Partida de Máquinas	51
3.2.2	Balanço de Potência	52
3.2.3	Barra <i>Slack</i>	52
3.2.4	Limites nas Linhas de Transmissão	53
3.2.5	Limites na Tensão	53
3.2.6	Dinâmica do Reservatório e Limites de Armazenamento	54
3.2.7	Metas de Geração de Longo Prazo	55
3.2.8	Limites de Potência	55
3.2.9	Configuração Única de Unidades	56
3.2.10	Condição de Integralidade	56

3.3	Metodologia de Solução	56
3.3.1	Formulação QCQP	56
3.4	Heurística de Eliminação de Restrições de Reservatório	59
3.5	Relaxação SDP	62
3.5.1	Matrizes SDP	63
3.5.2	Função-objetivo	64
3.5.3	Balanco de Potência	64
3.5.4	Tensão na Barra Slack	66
3.5.5	Limites nas Linhas de Transmissão	66
3.5.6	Limites de Tensão	66
3.5.7	Metas de Geração do Longo Prazo	67
3.5.8	Condição Auxiliar	67
3.5.9	Limites de Geração	67
3.5.10	Dinâmica do Reservatório	68
3.5.11	Configuração Única de Unidades	69
3.5.12	Custos de Partida	69
3.6	Algoritmo B&B	70
3.6.1	Soluções Factíveis na Árvore de B&B	71
3.7	Heurística de Arredondamento	72
3.7.1	Solução dos Despachos de Unidades Indefinidas	73
3.7.2	Re-otimização do OPF	74
3.7.2.1	Matrizes SDP	74
3.7.2.2	Função-Objetivo	75
3.7.2.3	Balanco de Potência	75
3.7.2.4	Metas de Geração do Longo Prazo	76
3.7.2.5	Condição Auxiliar	76
3.7.2.6	Limites de Geração	77
3.7.2.7	Dinâmica do Reservatório	77
4	Modelo do POCP Termoelétrico	78
4.1	POCP Termoelétrico Como um Problema Convexo	78
4.1.1	Variáveis	78
4.1.2	Função-Objetivo	79
4.1.3	Restrições	79
4.1.3.1	Custo de Geração	79
4.1.3.2	Custos de Arranque e Parada	80
4.1.3.3	Tempo Mínimo Ligado e Desligado	80
4.1.3.4	Balanco de Potência	81
4.1.3.5	Limites de Geração de Potência Ativa	82
4.1.3.6	Reserva Girante	82

4.1.3.7	Limite Máximo de Rampa de Carga	83
4.2	Metodologia de Solução	83
4.2.1	Decomposição Baseada em Benders	84
4.2.1.1	Problema-Mestre de Despacho de Unidades	84
4.2.1.2	Subproblema de Fluxo Ótimo	85
4.2.1.3	Problema-Mestre Modificado	86
4.2.2	Procedimento de Redução de Rank	88
5	Resultados	91
5.1	Resultados para o POCP Hidroelétrico	91
5.1.1	Resultados Para a Heurística de Arredondamento	96
5.2	Resultados Para o POCP Termoelétrico	97
6	Conclusões	102
	Referências	105
	Apêndices	111
	APÊNDICE A Dados Detalhados dos Casos-Teste	112
A.1	Dados dos Casos-Teste do POCP Hidroelétrico	112
A.1.1	Dados para caso-teste 3-GENH	112
A.1.2	Dados para caso-teste IEEE-14H	115
A.1.3	Dados para caso-teste IEEE-30H	121
A.2	Dados dos Casos-Teste do POCP Termoelétrico	132
A.2.1	Dados para caso-teste 3-GENT	132
	APÊNDICE B Resultados para os Casos-Teste	134
B.1	Resultados para o POCP Hidroelétrico	134
B.1.1	Resultados para caso-teste 3-GENH	134
B.1.1.1	Voltagens nas Barras	139
B.1.2	Despacho de geração do caso-teste IEEE-14H	140
B.1.3	Despacho de geração do caso-teste IEEE-30H	141
B.1.4	Despacho de geração do caso-teste IEEE-57H	143
B.2	Resultados para o POCP Termoelétrico	145
B.2.1	Resultados para o caso-teste 3-GENT	145
B.2.2	Resultados para o caso-teste IEEE-118T	146
	APÊNDICE C Trabalhos publicados pelo autor	157

1 Introdução

Existem diversos objetivos do POCP encontrados na literatura, entretanto, em mercados de energia regulados este sempre procura determinar estratégias de operação que minimizem o custo de operação, maximizando a eficiência da operação ou bem-estar econômico dos participantes do sistema durante um período de tempo (normalmente um dia ou uma semana). O objetivo clássico desta etapa é promover a operação econômica e em segurança aproveitando-se os recursos hidráulicos fornecidos pelo planejamento de médio prazo de tal forma que atenda a demanda (WOOD; WOLLENBERG, 1984), assim como as restrições do sistema de transmissão.

O POCP em sistemas hidrotérmicos é um problema complexo e de grande porte, com dependência dos planejamentos de longo e médio prazos (PADHY, 2004). No entanto, este problema não pode ser extrapolado a horizontes maiores devido ao custo computacional (SARAVANAN *et al.*, 2013). Os modelos de curto prazo requerem informações detalhadas da operação do sistema, tais como: tempo de percurso de água entre usinas hidroelétricas em cascata, rampa de tomada de carga das máquinas, custo de arranque, fluxo de potência horário, etc. Para resolver este problema, existe uma ampla variedade de metodologias entre as quais destacam-se a programação linear, programação linear inteira mista, programação dinâmica e os métodos de relaxação Lagrangiana.

Historicamente, este tipo de problema é modelado segundo o tipo de geração predominante no sistema, termoelétrica ou hidroelétrica, de forma que o problema seja simplificado. Esta diversidade de elementos do POCP é mostrada na Figura 1, onde podemos observar as principais restrições do POCP agrupadas segundo os sistemas que a compõem, para efeitos de curto prazo na maioria das abordagens os modelos são totalmente determinísticos e elementos como a previsão das vazões e demanda são assumidos dados de entrada. Outro fator a considerar entre a diferença das metodologias é que o setor elétrico experimentou uma série de mudanças recentes ao passar de mercados regulados a desregulados, o que aconteceu em alguns países. Este tipo de troca nas políticas de regulamentação significaram uma troca também nos objetivos de otimização (RICHTER C. W.; SHEBLE, 2000).



Figura 1 – Elementos da POCP

Um ponto que em muitos trabalhos é omitido é a modelagem das usinas hidroelétricas por unidade de geração. Estas simplificações podem ser coerentes em modelos de longo e médio prazo ou quando o sistema tem demasiadas usinas hidroelétricas menores, mas em modelos de curto prazo com usinas de grande porte, é necessário representar o despacho individual das máquinas de uma usina hidroelétrica e a variação das produtividades hidroelétricas decorrente do despacho.

Independentemente da geração predominante no sistema, a inclusão de restrições da rede elétrica implica adicionar uma não-linearidade às restrições, seja esta modelada como uma rede CC ou CA. Poucos são os trabalhos que incluem uma modelagem CA devido ao aumento da dificuldade do problema ao adicionar funções senoidais às restrições. Porém, é necessária a inclusão das restrições de operação da rede de transmissão, pois a validação dos resultados da operação do sistema todo depende fortemente do sistema de transmissão.

1.1 Sistemas Termoeletricos

Classicamente o POCP de sistemas termoeletricos é tratado somente do ponto de vista econômico, simplificando-se as considerações da rede de transmissão e ocasionando eventualmente inviabilidade dos resultados (SHAHIDEHPOUR; FU, 2005). Os modelos procuram minimizar o custo quadrático de produção termoeletrica ou maximizar o lucro da produção de energia termoeletrica, considerando custos de arranque e parada das máquinas. Algumas delas substituem a minimização dos custos de arranque e parada, limitando o número de arranques e paradas das unidades num dia (HABIBOLLAHZADEH; BUBENKO, 1986). As restrições que normalmente são consideradas são de rampa de carga, intervalos de tempos mínimos para ligar ou desligar uma máquina, e limites de geração. Com a evolução de técnicas de otimização, os modelos foram considerando cada vez mais características do sistema elétrico. Existem várias abordagens para resolver este problema, desde simples regras para operar o sistema até métodos teoricamente complicados.

Um dos primeiros a modelar este problema como um problema estocástico foi (GUY, 1971). Em seu trabalho assume-se que a operação das usinas pode ser modelada como um processo discreto e contínuo de transição Markoviana, associando-se probabilidades para a ligação de uma máquina conforme suas estatísticas de falhas e manutenção. O custo de arranque de uma máquina é determinado pelo decaimento exponencial da temperatura desde que esta foi desligada pela última vez.

Matematicamente, este é um dos problemas de otimização combinatorial mais complexos (SASAKI *et al.*, 2000), neste mesmo trabalho é explorada uma técnica heurística para resolver um problema de fluxo de potência ótimo (FPO). Esta heurística precisa de uma inicialização, onde as usinas são ordenadas para entrar em funcionamento segundo um custo de operação médio, sendo desta forma distribuída a demanda na ordem destes custos médios, testando a factibilidade da solução mediante a avaliação de um FPO. Se a solução for válida, pode servir para determinar quais usinas podem ser desligadas por estarem perto da potência mínima. Esta técnica resolve o problema de maneira rudimentar, pois ter-se-ia que analisar a sensibilidade entre a aproximação de declarar uma usina desligada e o custo da sua operação.

A linearização deste problema é feita de uma maneira a calcular limitantes inferiores em (HABIBOLLAHZADEH; BUBENKO, 1986) e aproximar a função-objetivo com uma linearização por partes baseada num desenvolvimento de Taylor de primeira ordem. A rede de transmissão é totalmente linearizada, o que permite utilizar um esquema de aproximações. O resultado da formulação é uma serie de problemas MILP a serem resolvi-

dos. O processo obtém limitantes inferiores e limitantes superiores de maneira a convergir estes dois.

À medida que apareceram a programação cônica e especificamente a programação semidefinida, estas foram usadas como métodos de aproximação para problemas combinatoriais. Uma das primeiras experiências em tentar resolver o POCP sem considerar a rede de transmissão com esta técnica foi (MADRIGAL; QUINTANA, 1999). Devido ao problema ser representado inicialmente como um problema não-linear inteiro misto de grande porte, este teve que adotar as relaxações usualmente empregadas para levá-lo à forma de um problema de programação semidefinida. Os autores explicam a diferença entre utilizar este método e o uso clássico de programação dinâmica, a qual não pode lidar diretamente com restrições de rampa das unidades térmicas. Esta formulação é resolvida com o método de pontos interiores.

Uma formulação promissora para resolver a parte combinatorial do POCP termoeletrico é (YANG *et al.*, 2015). Esta técnica considera barramento único e representa a rede de transmissão em forma de perdas pre-calculadas. Também são representadas as restrições de operação da usina termoeletrica. O problema é reformulado usando a técnica de “lift-and-project”. Basicamente esta técnica projeta o espaço das variáveis contínuas de potência no intervalo de 0-1 e resolve um problema aproximado, pois, ao fazer esta projeção, algumas restrições tornam-se redundantes e podem ser eliminadas na solução do problema. Depois é feita uma relaxação do problema usando-se programação semidefinida. Este tipo de relaxação pode ser resolvido com técnicas de programação sobre uma bola de raio unitário (LI *et al.*, 2012).

Existem modelos totalmente linearizados como (VIANA; PEDROSO, 2013). Esta modelagem tem uma característica iterativa de aproximações lineares sucessivas para a função de custo quadrático das unidades térmicas. O modelo também considera custos de arranque e parada, entretanto a rede de transmissão não é considerada. A técnica de solução para esta modelagem é o método de *branch-and-cut* que é implementado normalmente nos *solvers* comerciais como o *CPLEX*.

Técnicas de solução baseadas na decomposição de Benders e a inclusão da rede elétrica como um modelo CA com restrições de segurança são as contribuições de (SHAHI-DEHPUR; FU, 2005) para a solução do POCP. Esta decomposição é feita separando-se o problema econômico num problema principal e rodando fluxos de potência para validar as condições de operação da rede de transmissão. Se o despacho não é válido, é criado um corte de Benders e adicionado ao problema principal. O processo termina quando todas

as violações na rede AC são eliminadas. Os fluxos AC são resolvidos usando-se o método de Newton-Raphson. Uma característica deste modelo é que considera limites mínimos e máximos de consumo de combustível nas usinas geradoras. A grande contribuição deste trabalho é representar a rede de transmissão como um problema de FPO que considera restrições de voltagem e *taps* nas barras.

Alguns autores levam em consideração modelos com demanda variável. Entre eles, (ZHAO; GUAN, 2013) formula uma combinação de programação estocástica e robusta, num problema linear inteiro misto. A programação estocástica tem como problema a quantidade de cenários a considerar na hora de resolver o problema; a segunda, uma natureza conservadora na hora de fornecer os resultados. São introduzidos pesos para a parte estocástica e a parte robusta da função-objetivo, sendo esses pesos ajustados mediante operadores. Finalmente, para resolver este problema é usado o algoritmo de Benders gerando cortes para a parte estocástica e a parte robusta.

Uma das dificuldades do uso de Benders no POCP é que a principal condição para este ser aplicado é que o subproblema deve ser convexo. Classicamente a forma de ser aplicado é incorreta, pois muitas vezes o subproblema é caracterizado como um FPO de natureza não-linear (MA *et al.*, 1997), ou o FPO é linearizado, descaracterizando a operação de curto prazo. Outra questão no momento de resolver o problema-mestre é este ser um problema puramente inteiro. Algumas alternativas para resolvê-lo é usar *branch-and-bound*, embora este método não seja tão eficiente quando tem-se soluções múltiplas (TURGEON, 1978).

A reestruturação dos sistemas eletro-energéticos também adiciona uma modelagem diferente para o problema de despacho de máquinas (MOTTO; GALIANA, 2004) deixando este de ser um POCP, pois o ISO (Operador independente do sistema pelas siglas em inglês Independent System Operator) não faz a programação do despacho de máquinas e geração, e sim usa um leilão no qual o mercado é autorregulado mediante lances dos geradores e consumidores. Este problema é formulado como um problema de otimização binível, no qual temos um problema principal que decide o despacho de máquinas, e subproblemas por gerador que decidem o despacho de geração. Estes subproblemas fornecem, iterativamente, esse despacho para o problema principal e, este, fornece os custos e o despacho de máquinas para os subproblemas.

Uma alternativa eficiente que usa programação semidefinida para resolver o problema, adicionando-se restrições de segurança, é apresentada em (BAI; WEI, 2009). No trabalho, são ressaltadas as vantagens e a facilidade de otimizar problemas inteiros usando

programação semidefinida. A grande vantagem deste método é que converte o domínio do problema a um domínio convexo de uma forma simplificada. No entanto, um fator de erro a ser considerado é que uma estratégia simples de arredondamento das variáveis inteiras é usada na solução final, poderia-se estabelecer um critério mais analítico para a escolha da precisão no arredondamento.

1.2 Sistemas Hidroelétricos

A consideração da geração hidroelétrica como um fator a ser otimizado dentro do POCP é de importância crescente, sendo considerado necessário este tipo de modelo onde os sistemas são predominantemente hidroelétricos. Entre as características dos modelos de curto prazo está a consideração das restrições de limites de geração, a modelagem das bacias, assim como curvas de rendimento das máquinas, sendo que em muitos poucos artigos são abordadas modelagens do despacho das máquinas devido à sua complexidade. A seguir, algumas dessas referências são comentadas.

Os primeiros esforços para resolver estes problemas têm uma formulação contínua no tempo como estratégia de solução. Em (GLIMN; KIRCHMAYER, 1958) analisa-se o efeito da variação da altura de montante numa usina hidroelétrica fixando diferentes valores. Neste trabalho também é apresentado um fator de correção por efeito da altura de queda como ferramenta para lidar com usinas onde a variabilidade da altura durante o período de operação tem que ser considerada.

Uma das mais simples formulações do problema é abordada em (RUX, 1993). Com o propósito de otimizar a bacia do rio Colorado nos EUA, o trabalho cria um modelo simplificado onde para cada unidade de geração é atribuída uma função de custo definida como a quantidade de energia potencial requerida por um conjunto turbina-gerador para produzir uma parte do total da energia da bacia. Esta função é atualizada em cada usina. No entanto, esta função tem um comportamento em alguns casos não-convexo, sendo simplificado com o cálculo da média entre o mínimo e o máximo da função. Estas funções servem para olhar o balanço de energia e sugerir o aumento ou diminuição da energia na unidade mais eficiente ou ineficiente, respectivamente para compensar o desbalanço.

Um fator importante no despacho das unidades hidroelétricas é o custo de arranque de uma unidade geradora, sendo alguns critérios para determinar e modelar este custo apresentados em (BAKKEN; BJORKVOLL, 2002). Um desses critérios é considerar os tipos de arranques de uma máquina (normal ou frustrado). Esses causam um desgaste no

conjunto turbina-gerador. Para mitigar o desgaste é necessária uma manutenção periódica ou mesmo de emergência. Então pode-se concluir que os custos de arranque são variantes no tempo e incrementais segundo o número acumulado de arranques como produto do desgaste da unidade geradora. Este custo é dependente do valor atualizado do custo de manutenção. Um trabalho que explora a inclusão dos custos de arranque para um POCP hidroelétrico é (NILSSON; SJELVGREN, 1997).

Um modelo de POCP hidroelétrico que minimiza as perdas de geração e transmissão em sistemas de energia hidroelétrica, é (SOARES; SALMAZO, 1997). O modelo foi aplicado as usinas hidroelétricas da COPEL. Neste modelo são incluídas restrições de demanda, geração, transmissão e restrições operacionais de intercâmbio. No trabalho é mostrado que a perda na geração hidroelétrica está associada a uma redução do rendimento do conjunto turbina-gerador e à altura de queda efetiva. Esta última é devido às variações da altura do canal de fuga e das perdas hidráulicas no sistema de adução. Para o cálculo das perdas na geração hidroelétrica é considerado que as perdas são zero quando é atingida a produtividade máxima. A perda na transmissão é calculada como uma função quadrática do fluxo de potência ativa, tal como é representado num modelo de fluxo de carga CC. A função-objetivo é calculada mediante uma ponderação das duas perdas. A técnica de solução usada foi a relaxação Lagrangeana.

Uma modelagem alternativa de como pode-se incluir a operação individual das máquinas numa usina hidroelétrica é apresentada em (FINARDI; SILVA, 2006), onde o modelo todo é representado como um problema de restrições quadráticas ao incluir a função de eficiência das máquinas na produção de energia. O problema é resolvido com um método de relaxação Lagrangeana baseado em um método de empacotamento, incluindo variáveis artificiais para as desigualdades de limites de potência das máquinas, limites do reservatório e reserva girante das usinas. A ideia é relaxar o acoplamento espacial e temporal das restrições da topologia das bacias, limites de reservatórios, e restrições impostas pelos modelos de longo prazo, tornando este um problema linear. Depois é construído um subproblema não-linear inteiro produto das restrições de operação das usinas incluindo as zonas proibidas de operação das usinas, de forma que estejam desacopladas no tempo. Segundo o trabalho, isto ajuda a ter menores *gap* de dualidade por iteração em comparação com a relaxação clássica tradicional. Cada um dos subproblemas da relaxação lagrangiana é resolvido mediante um algoritmo quase-Newton que implementa a *SQP* (Programação quadrática sequencial pelas siglas em inglês Sequential Quadratic Programming).

O desenvolvimento de técnicas eficientes para tratar problemas inteiros mistos permitam que o POCP seja formulado como um problema de programação linear inteira

mista em (BORGHETTI *et al.*, 2008). Neste trabalho é desenvolvida uma técnica de linearização da função de produção de energia nas usinas hidroelétricas, bem como é considerado um conjunto de restrições lineares que limitam inferiormente a função objetivo, esta técnica é baseada num método de combinação convexa (KEHA *et al.*, 2004). No modelo também é considerada a transição de uma usina reversível na fase de turbinagem e bombeamento. Outra particularidade do modelo é a representação da função-objetivo com vistas a maximizar o lucro da produção de energia e ao mesmo tempo minimizar o custo dos arranques e paradas das unidades hidroelétricas, assim como o custo das transições para usinas reversíveis.

1.3 Sistemas Hidrotérmicos

O POCP é de importância em sistemas mistos onde ambos os tipos de geração tem uma porcentagem equilibrada no sistema. A necessidade de modelar a influência dos dois tipos de geração surge comumente devido a que em sistemas que inicialmente são predominantemente hidroelétricos, e depois por causa do incremento da demanda é necessário aumentar a participação da geração térmica, terminando por igualar ou até ultrapassar a porcentagem hidroelétrica com o tempo. Nesse contexto a operação das usinas termoelétricas é modelada com um maior detalhe. As modelagens deste problema usualmente não consideram o preço da água nem muito menos o despacho das máquinas das usinas como características do problema. A seguir são apresentadas algumas das técnicas mais utilizadas para abordar estes problemas.

Uma primeiras formas de abordar a solução de este problema foi considerar a operação em forma de variáveis contínuas no tempo. Usando este foco, no trabalho (CHANDLER *et al.*, 1953) é explorada uma técnica de solução baseada no calculo de variações que procura minimizar o custo combustível ao longo de um tempo. O funcional das restrições inclui as variações das perdas nas linhas de transmissão referente as usinas hidroelétricas e termoelétricas assim como o incremental da vazão turbinada das usinas hidroelétricas, este ultimo funcional deve de respeitar uma meta de volume de água turbinada. Algumas outras abordagens melhoram e simplificam esta técnica de solução (ARISMUNANDAR; NOAKES, 1962), também em (RINGLEE, 1965) foi explorado o calculo de limitantes inferiores fazendo uso das condições de Kuhn e Tucker aplicadas ao problema representado mediante calculo de .

A simplificação da solução de este problema mediante discretização das variáveis temporais da como origem aos primeiros métodos de decomposição heurística ite-

rativa (BONAERT *et al.*, 1972) o qual divide o problema em dois subproblemas: um subproblema térmico e outro hidráulico. O subproblema de otimização hidráulico usa a função de custo marginal do sistema térmico para alocar eficientemente os recursos de água dentro do horizonte de tempo. Uma vez definidas as contribuições da geração hidráulica subtraídas da demanda do sistema, o subproblema térmico é solucionado como um problema de despacho de máquinas clássico. A parte hidráulica do problema é resolvida com métodos de fluxo de redes ou programação linear. O subproblema térmico é resolvido mediante o método de lista de usinas mais eficientes.

O método Algoritmo de otimalidade progressiva (ou POA pelas siglas em inglês) que segue estes passos iterativos é apresentado em (NANDA; BIJWE, 1981), nele é mostrado uma heurística iterativa que inclui operação térmica e do sistema de transmissão com modelo AC assim como uma detalhada operação do reservatório. Esta operação do sistema hidráulico considera tempos de vigem e é multi-reservatório. Também é considerando a variabilidade da altura de montante. Ao analisar os resultados dos estudos resolvidos com esta técnica, não parece afetar muito a operação de curto prazo do reservatório, ao olhar os fatores de correção por variabilidade da altura de montante estes parecem ser muito pequenos.

Entre os trabalhos que exploram melhor estes métodos heurísticos está (LE *et al.*, 1983), onde estas técnicas foram usadas pela South Carolina Electric and Gas Co. para despachar suas usinas térmicas e usinas hidroelétricas reversíveis. O modelo introduz o conceito de custo incremental da rede de transmissão. Basicamente o método é realizado em três etapas: pré-otimização, otimização e re-despacho final. Na primeira etapa são despachadas as usinas hidroelétricas como usinas de base para atender à demanda. Também é criada uma lista de despacho termoelétrico. Depois a geração hidroelétrica é abatida da demanda com a finalidade de iniciar a segunda etapa, na qual será otimizado o despacho das usinas térmicas seguindo conceitos de programação dinâmica. Também nessa etapa é usada uma heurística para selecionar combinações que não estejam na lista de despacho. Depois é feito um re-despacho final das usinas hidroelétricas de forma a validar o resultado.

Estes métodos heurísticos são rápidos e fáceis de ser implementados porque seguem lógicas simples, mas, em geral, determinam uma programação de despacho com custos relativos altos, porque são impostas numerosas simplificações ao modelo, o que não permite saber se a solução atingiu o ótimo global do problema.

Uma alternativa para resolver este problema é usar o método do Lagrangeano aumentado, tal como é abordado em (AL-AGTASH, 2001). Nesse trabalho é moldada

a função Lagrangeana como uma penalidade hiper-paraboloide associada na direção das restrições de acoplamento. Os sistemas testados com esta metodologia consideram usinas hidroelétricas de bombeamento e armazenamento e um maior detalhe da rede de transmissão. Esta metodologia tem um bom desenvolvimento para fazer o despacho a um custo operativo mínimo, sem violação das restrições. Entretanto este tipo de algoritmo baseado no Lagrangeano aumentado pode ter uma convergência de forma oscilante do mínimo tal como foi descrito em (GUAN *et al.*, 1995) e (LUH *et al.*, 1998).

A relaxação Lagrangeana é uma técnica para resolver problemas restritos mediante um problema simplificado. A ideia básica é reformular o problema relaxando as restrições de balanço de potência usando os multiplicadores de Lagrange, gerando um novo problema conhecido como problema dual. Esta relaxação causa uma diferença chamada *gap* de dualidade. O método de relaxação Lagrangeana decompõe o problema num subproblema por unidade térmica e um subproblema por sistema hidroelétrico, que podem ser facilmente resolvidos por técnicas de otimização convencionais. Estes métodos normalmente são implementados mediante um processo iterativo onde os subproblemas relaxados são resolvidos e os multiplicadores de Lagrange são atualizados segundo o grau da violação das restrições de reserva girante e de balanço de potência ativa (REDONDO; CONEJO, 1999).

Um trabalho que explora bem o uso da relaxação Lagrangeana para resolver o problema termoelétrico e usa um método de fluxo em redes para resolver o problema hidroelétrico é (LI *et al.*, 1997). Basicamente este método desagrega o problema num problema térmico e subproblemas hidráulicos, enquanto o problema de despacho das máquinas é resolvido usando-se programação dinâmica. Para resolver os subproblemas, primeiro são otimizados os fluxos nas bacias individualmente sem considerar tempos de viagem entre pontos do sistema, e depois são simplificadas todas as usinas em uma usina equivalente. Por último, é usada a informação anterior para desagregar as usinas, desta vez considerando os tempos de viagem e custos de arranque e parada das máquinas. Este último despacho hidrotérmico é feito mediante um método iterativo que calcula os custos marginais de produção das usinas hidroelétricas, e atualiza para gerar uma nova lista de despacho das unidades hidroelétricas. A relaxação Lagrangeana também pode ser misturada com heurísticas “bundle methods” para a solução do problema dual.

Outra técnica comumente usada na literatura é programação dinâmica. Em (KADOWAKI, 2012) esta técnica é combinada a heurística que relaxa as restrições hidráulicas com uma validação final do sistema hidráulico mediante uma simulação. O problema é desagregado em dois subproblemas, um de despacho de máquinas e o outro de despacho da geração. O primeiro subproblema usa duas abordagens. A primeira considera o problema

sem custos de arranques e paradas, fazendo um FPO de mínima perda na transmissão. A segunda resolve mediante programação dinâmica levando em conta as perdas na transmissão e os custos de arranques e paradas. O problema de despacho da geração é resolvido como uma combinação dos métodos de relaxação de restrições e de conjuntos ativos e o método de Newton.

O método de decomposição de Benders é um dos métodos de decomposição sugeridos para resolver o POCP (SHAHIDEHPOUR; FU, 2005). Neste método o problema da coordenação hidrotérmica é separado num problema-mestre inteiro (que representa o despacho das unidades) e um subproblema de variáveis contínuas (geração das unidades). Uma vez que o problema-mestre é resolvido e o despacho das unidades geradoras são determinados, o despacho é validado nos subproblemas que determinam as gerações das máquinas despachadas. Depois de resolvido o subproblema, um corte de Benders será gerado, que será adicionado no problema-mestre e feito um novo re-despacho. Opcionalmente o subproblema pode ser decomposto em um subproblema hidráulico e outro térmico aumentando a eficiência computacional. Uma das dificuldades deste método é a determinação da solução do problema-mestre, pois este termina sendo um problema de grande porte devido à grande quantidade de restrições adicionadas.

O algoritmo de Benders apresenta dois problemas principais: a lenta convergência final chamada efeito “tailing-off” (ou escorregamento), assim como um alto custo computacional do problema-mestre (WATKINS JR.; MCKINNEY, 1998). Algumas técnicas (SIFUENTES; VARGAS, 2007) para reduzir estes efeitos são: manter as restrições ativas no problema-mestre e ir descartando as restrições inativas. Isso é dado com uma tolerância, pois em alguns casos estas restrições são ativadas posteriormente. As primeiras iterações são feitas com modelos relaxados, pois o problema-mestre tem poucas informações.

As metaheurísticas são normalmente inspiradas em processos otimizadores naturais de forma a aproveitar a estrutura do problema. A vantagem de empregar estas técnicas está no fato de que a implementação é simples, não precisando de uma função-objetivo explícita. As soluções podem ser múltiplas e somente pode ser analisada a qualidade da solução, não havendo um critério de convergência global. Consequência destas abordagens simples é que possuem menor esforço computacional por iteração que as técnicas clássicas.

A busca tabu é um método iterativo que entrega uma lista de soluções com as quais pode ser minimizada a função objetivo, mediante regras que evitam ficar em torno de um ótimo local. Em (BAI; SHAHIDEHPOUR, 1996) é mostrado um algoritmo baseado em busca tabu e decomposição de Benders para resolver o POCP. As iterações são iniciadas

com uma técnica heurística combinada com a otimização do subproblema térmico através da programação dinâmica e do subproblema hidráulico através de fluxo em redes. Inicialmente, tem-se que determinar uma vizinhança a partir da solução inicial trocando-se os estados das unidades nas horas de carga pesada e de transição. Adicionalmente são dados critérios para a seleção de avaliação da função-objetivo. O critério de aspiração que foi selecionado para substituir o status tabu permite que em torno da solução atual, os estados das unidades, além dos estados vizinhos, estejam temporariamente fixados. Assim, a viabilidade de verificar os estados das unidades e cálculo de custos de arranque podem ser feitos considerando-se apenas uma fração das unidades e períodos de tempo.

Outra das metaheurísticas que pode ser aplicadas é a técnica de *simulated annealing*, a qual é baseada no processo físico do esfriamento dos metais. Este método é aplicado para resolver o POCP em (WONG; WONG, 1994). Para a obtenção de uma solução inicial é usado um método aleatório, depois é validada a solução resolvendo-se o problema hidroelétrico e, depois, o problema térmico. As soluções que são consideradas com temperatura alta são perturbadas aleatoriamente na geração dependente (geração escolhida aleatoriamente para complementar o despacho). Esta perturbação é feita mediante uma distribuição probabilística gaussiana. O critério de aceitação é dado quando uma função probabilística da variação do custo de operação é superior a um número aleatório entre um e zero. O critério de parada depende do valor da temperatura final, normalmente baixo em comparação com a temperatura inicial.

Com a popularidade resultante da fácil implementação dos algoritmos genéticos como técnica de solução de problemas combinatoriais, em (CHEN; CHANG, 1996) o POCP é abordado discretizando-se a faixa de operação das usinas hidroelétricas e tomados alegoricamente como linhas de cromossomo. O vertimento é penalizado na função-objetivo e o despacho das térmicas é resolvido de maneira individual mediante programação dinâmica. A função de mérito é calculada como uma ponderação entre o melhor cromossomo e o cromossomo avaliado afetado por um fator de escala. A seleção do cruzamento é feita mediante uma escolha randômica tipo roleta de um número que determina o limite superior da função de aceitação do cromossomo descendente.

Em (FUENTES-LOYOLA; QUINTANA, 2003) o método baseado em SDP para resolver problemas de programação inteira é usado em conjunto com técnicas de pontos interiores para obter uma solução aproximada em tempo polinomial. Como parte da formulação SDP, as variáveis são utilizadas para construir uma matriz definida positiva. Depois é formulado como um problema de otimização convexa, sem declarar explicitamente as variáveis inteiras de despacho das máquinas. A solução ótima é encontrada no

cone convexo definido pelo conjunto das restrições quadráticas produto da multiplicação das restrições originais, sendo estas depois transformadas em um problema SDP. A solução para sistemas de grande porte dá como resultado um menor número de variáveis de despacho não-inteiras em comparação com métodos de relaxação Lagrangeana. Entretanto, o fato de ter variáveis de estado não-inteiras indica que a solução é infactível.

Como podemos ver, na literatura são poucas as modelagens de um sistema hidrotérmico onde as particularidades da operação das usinas hidroelétricas sejam incluídas, tais como arranques e paradas de cada uma das máquinas de uma usina assim como a consideração da eficiência da geração hidroelétrica. Além disso, à medida que as metodologias foram se desenvolvendo, a possibilidade de representar a rede elétrica foi se tornando viável, observando-se na literatura desde modelos em CC até modelos em CA da rede elétrica. Os modelos CA refletem melhor a operação do sistema para a discretização temporal deste tipo de problema. Entretanto a alta não-linearidade deste modelo faz com que a inclusão do modelo CA seja usada para validação da solução, não fazendo parte do processo de otimização.

1.4 Escopo da Tese

1.4.1 Relevância

O uso da energia elétrica tem que ser otimizado ao longo de sua cadeia de produção deste recurso. Sendo assim, são necessários de modelos matemáticos para planejar o uso eficiente da energia elétrica. Mais especificamente é possível aproveitar as certezas do horizonte de curto prazo para formular um modelo matemático mais exato. Modelos de otimização mais exatos podemos fornecer um uso mais eficiente da energia elétrica decorrendo em menores custos e um sistema elétrico mais confiável. Neste contexto é imperativo pesquisar o uso de novas metodologias. Esta tese explora uma reformulação da representação matemática do POCP hidroelétrico e termoelétrico para depois fazer uso da programação semidefinida em conjunto com técnicas de otimização global como Branch-and-Bound e decomposição de Benders como técnicas de solução, ademais são exploradas características estruturais de cada um dos problemas.

1.4.2 Objetivos

A tese apresentada tem os seguintes objetivos:

1.4.2.1 Objetivo geral

Desenvolver uma nova metodologia de despacho da geração hidroelétrica e termelétrica de curto prazo para sistemas de médio e grande porte, que considere como função-objetivo o custo da operação das usinas hidrelétricas e térmicas e os custos de partida e parada das máquinas termoeletricas e hidroelétricas. Dentro das restrições será modelada a rede de transmissão assim como as características não lineares da modelagem da operação das usinas termoeletricas e hidroelétricas. Como técnica de solução será empregada a SDP. No final obter-se-á dois modelos de POCP especializados para cada tipo de geração predominante.

1.4.2.2 Objetivos específicos

Além do objetivo geral, outros objetivos poderão ser mencionados, tais como:

- Analisar separadamente o POCP de sistemas termoeletricos e hidroelétricos como ponto de partida para o melhor entendimento dos sistemas hidrotérmicos.
- Representar as restrições de segurança da rede de transmissão da maneira mais precisa possível, sem comprometer o custo computacional.
- Acoplar o POCP ao planejamento de médio prazo, usando o custo da água e as metas de geração hidroelétrica para o período de análise, assim como o vertimento.
- Explorar a estrutura das formulações matemáticas.
- Aplicar esta metodologia em casos-teste didáticos e de mediano porte para entender a efetividade da solução.

1.4.3 Hipóteses

1. Variações diárias na cota de montante do reservatório das usinas hidroelétricas podem ser desprezadas em termos do cálculo da sua produtividade.
2. O vertimento não pode ser considerado uma variável a ser determinada no planejamento do curto prazo, pois esta não é operada de maneira horária, ficando então como uma variável de entrada dada pelo planejamento de médio prazo.
3. As máquinas numa usina hidroelétrica são iguais e não apresentam áreas descontínuas de operação.
4. As soluções decorrentes dos problemas SDP apresentados tem posto baixo.
5. O POCP termoeletrico realiza o despacho de potência ativa e considera o problema de despacho de potência reativa como um despacho a ser feito separadamente.

2 Introdução à Programação Semidefinida

Neste capítulo é feita uma revisão dos principais conceitos de programação semidefinida (SDP) que serão usados nos capítulos posteriores e facilitarão o entendimento do modelo desenvolvido. Começa-se com as definições e propriedades, da álgebra linear necessárias. Na sequência, são apresentados os conceitos de SDP. Por ultimo, é mostrada a relaxação SDP para problemas quadráticos na função objetivo e nas restrições.

A SDP tem como intuito resolver os problemas em que a função objetivo é uma função linear de uma matriz simétrica \mathbf{X} , a qual é otimizada sujeita a um conjunto de restrições lineares dos elementos da matriz \mathbf{X} . A restrição adicional é que a solução tem que ser semidefinida positiva. Estas restrições são não-lineares e não-suaves, mas o problema formulado assim é convexo (VANDENBERGHE; BOYD, 1996). SDP é usada para realizar boas aproximações em problemas inteiros de grande porte e complexidade (LAURENT; RENDL, 2005), porém pode ser aplicada a uma variedade de áreas, como controle, projeto de circuitos e alocação de redes de sensores, por exemplo. Podemos observar subconjuntos de um domínio semidefinido nos quais existem a programação quadrática (QP) a programação linear (LP) e a programação cônica de segunda ordem (SOCP) como é mostrado na Figura 2.

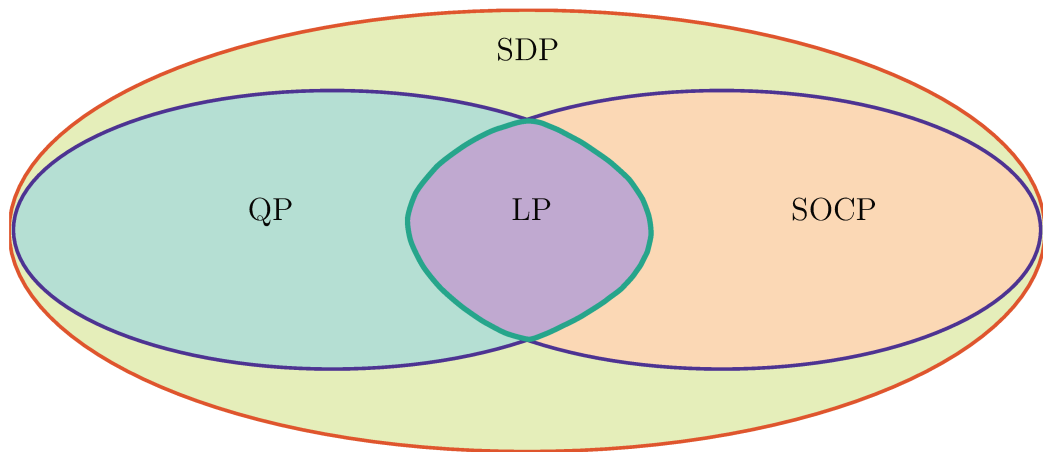


Figura 2 – Diagrama de Venn da SDP

Fazendo-se um paralelo com a programação linear, existe o método simplex, o qual resolve de maneira eficiente este tipo de problemas. Mas para a programação semidefinida um método equivalente ainda não foi desenvolvido, tendo havido tentativas, mas com problemas de convergência. Por outro lado, com a aparição de métodos de pontos interiores, foi possível obter grandes avanços tanto na programação linear quanto na programação semidefinida. Mas o desempenho numérico de métodos atuais ainda é limitado: depende de

quão denso (m restrições $\ll n$ variáveis) seja o sistema, afetando a eficiência em $\mathcal{O}(m^2n)$. Os métodos baseados em pontos interiores produzem soluções boas até com uma precisão de $1\text{E} - 8$. Os atuais solvers podem resolver unicamente problemas com $n \leq 100.000$ variáveis sem perda de precisão ou aumento do tempo computacional consideráveis.

Este tipo de programação tem um desenvolvimento recente e promissor pois engloba a diversos tipo de programação já estudados, como a programação linear, a programação quadrática e a programação cônica de segunda ordem; alguns deles ainda não resolvidos por outras técnicas de otimização convexa (BEN-TAL; A., 2001).

2.1 Álgebra Linear Envolvida

Como primeiro passo para entender o espaço das matrizes semidefinidas é preciso ter presente alguns conceitos de álgebra linear, apresentados a seguir.

2.1.1 Matrizes Semidefinidas

Definição Seja \mathbf{X} uma matriz simétrica $\mathbb{R}^{n \times n}$. \mathbf{X} é semidefinida positiva (SDP) sempre que:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{X} \mathbf{v} \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

Além disso:

- S^n denota o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$
- S_+^n denota o conjunto das matrizes SDP $n \times n$
- Dado $\mathbf{X} \in S^n$, “ $\mathbf{X} \succeq 0$ ” denota que \mathbf{X} é SDP.
- “ $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Y}$ ” denota que “ $\mathbf{X} - \mathbf{Y} \succeq 0$ ”.

Onde $S_+^n = \{\mathbf{X} \in S^n | \mathbf{X} \succeq 0\}$ é um cone convexo.

Prova Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e duas matrizes $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in S_+^n$, então:

$$\alpha \mathbf{v}^T \mathbf{X} \mathbf{v} \geq 0 \text{ e } \beta \mathbf{v}^T \mathbf{Y} \mathbf{v} \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}^T (\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y}) \mathbf{v} \geq 0$$

Então a combinação convexa de \mathbf{X} e \mathbf{Y} que corresponde a dois pontos em S_+^n pertence também ao conjunto S_+^n .

2.1.2 Operadores Importantes

O produto escalar padrão para matrizes simétricas é dado por $\bullet: \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$. Dadas as matrizes $\mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definido como:

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} := \text{Tr}(\mathbf{C}\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (2.2)$$

em que uma das propriedades deste produto é a distributividade. Dada as matrizes simétricas \mathbf{A}, \mathbf{B} e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ temos a seguinte propriedade de associatividade.

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} \quad (2.3)$$

O mapeamento linear $\mathcal{A}(\cdot): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dadas as matrizes $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é definido da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}(\mathbf{X}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \bullet \mathbf{X} \\ \mathbf{A}_2 \bullet \mathbf{X} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \bullet \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

O mapeamento linear transposto $\mathcal{A}^T(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ de um vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{A}^T(\mathbf{q}) \equiv [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m] \begin{bmatrix} q_1 \mathbf{I}_{n \times n} \\ \vdots \\ q_m \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m q_i \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.5)$$

, sendo $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ matrizes simétricas S^n .

O produto Kronecker é o produto de duas matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de tamanhos arbitrários para constituir uma matriz de maior ordem $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(m \cdot n) \times (m \cdot n)}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & \cdots & a_{nn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

2.1.3 Complemento Shur

A definição de complemento Shur é importante para demonstrar se algumas matrizes compostas são semidefinidas positivas baseado nas características das submatrizes. Seja a matriz \mathbf{X} representada por blocos:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, e assumindo-se que \mathbf{A} possui inversa, então a matriz $\mathbf{C} - \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ é o complemento Shur de \mathbf{A} em \mathbf{X} . Consequentemente, pode-se afirmar o seguinte:

$$\mathbf{X} \succeq \mathbf{0} \iff \mathbf{A} \succeq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{C} - \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \succeq \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Para demonstrar isto, pode-se fazer uma decomposição da matriz \mathbf{X} da seguinte maneira:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{P}, \text{ onde } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Pode-se observar que para que $\mathbf{X} \succeq \mathbf{0}$ tem-se que necessariamente ter que $\mathbf{P}^{-\top} \mathbf{X} \mathbf{P}^{-1} \succeq \mathbf{0}$ o que é equivalente a dizer que $\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$ e ao mesmo tempo $\mathbf{C} - \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \succeq \mathbf{0}$ simultaneamente.

2.2 O Problema de Programação Semidefinida

O problema da programação semidefinida é um problema particular da programação cônica (YAMASHITA *et al.*, 2012), apresentando a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \\ \text{s.a.} \quad & \mathcal{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{a} \\ & \mathcal{B}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde $\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$

2.3 Problema dual da Programação Semidefinida

O problema da programação semidefinida (2.10) é convertido ao problema primal padrão semidefinido (PSDP) (2.11) estando este representado como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X} \succeq \mathbf{0}} \quad & \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \\ \text{s.a.} \quad & \mathcal{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{a} \\ & \mathcal{B}(\mathbf{X}) + \mathbf{s} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \succeq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Formula-se então a função Lagrangeana do problema (2.11):

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) := \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} + \mathbf{y}^\top (\mathbf{a} - \mathcal{A}(\mathbf{X})) + \mathbf{w}^\top (\mathbf{b} - \mathbf{s} - \mathcal{B}(\mathbf{X})) \quad (2.12)$$

O Lagrangeano pode ser reformulado para um valor fixo de \mathbf{X} e \mathbf{s} :

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) := \mathbf{a}^\top \mathbf{y} + \mathbf{b}^\top \mathbf{w} - \mathbf{s}^\top \mathbf{w} + (\mathbf{C} - \mathcal{A}^\top(\mathbf{y}) - \mathcal{B}^\top(\mathbf{w})) \bullet \mathbf{X} \quad (2.13)$$

O ponto ótimo d^* do problema dual é formulado em termos do Lagrangeano e é expresso como:

$$d^* = \max_{\mathbf{y}, \mathbf{w} \geq 0} \min_{\mathbf{X}, \mathbf{s} \geq 0} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) \quad (2.14)$$

Para que o mínimo do Lagrangeano exista é preciso que $\mathbf{w} \leq 0$ uma vez que $\mathbf{s} \geq 0$, e que $(\mathbf{C} - \mathcal{A}^\top(\mathbf{y}) - \mathcal{B}^\top(\mathbf{w})) \succeq 0$ uma vez que $\mathbf{X} \succeq 0$. Estas condições são então representadas como restrições do problema dual:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{Z}} \quad & \min_{\mathbf{X}, \mathbf{s} \geq 0} \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{s}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) \\ \text{s.a.} \quad & \mathcal{A}^\top(\mathbf{y}) + \mathcal{B}^\top(\mathbf{w}) + \mathbf{Z} = \mathbf{C} \\ & \mathbf{Z} \succeq 0, \quad \mathbf{w} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

O Problema dual da programação semidefinida (DSDP) é obtido observando-se que no mínimo do Lagrangiano, $\mathbf{s}^\top \mathbf{w} = 0$ e $(\mathbf{C} - \mathcal{A}^\top(\mathbf{y}) - \mathcal{B}^\top(\mathbf{w})) \bullet \mathbf{X} = 0$.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}, \mathbf{y}, \mathbf{Z}} \quad & \mathbf{a}^\top \mathbf{y} - \mathbf{b}^\top \mathbf{w} \\ \text{s.a.} \quad & \mathcal{A}^\top(\mathbf{y}) - \mathcal{B}^\top(\mathbf{w}) + \mathbf{Z} = \mathbf{C} \\ & \mathbf{Z} \succeq 0, \quad \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

O gap entre o problema primal e o problema dual pode ser observado tomando-se a diferença entre as duas funções objetivo. A equivalência para a expressão é então dada:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - (\mathbf{a}^\top \mathbf{y} - \mathbf{b}^\top \mathbf{w}) &= (\mathcal{A}^\top(\mathbf{y}) - \mathcal{B}^\top(\mathbf{w}) + \mathbf{Z}) \bullet \mathbf{X} - (\mathbf{a}^\top \mathbf{y} - \mathbf{b}^\top \mathbf{w}) \\ &= (\mathcal{A}^\top(\mathbf{X})\mathbf{y} + \mathcal{B}^\top(\mathbf{X})\mathbf{w}) + \mathbf{Z} \bullet \mathbf{X} - (\mathbf{a}^\top \mathbf{y} - (\mathcal{B}(\mathbf{X}) + \mathbf{s})^\top \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{Z} \bullet \mathbf{X} + \mathbf{s}^\top \mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Analisando-se o sinal da expressão:

$$\mathbf{Z} \bullet \mathbf{X} = \text{Tr}(\mathbf{X}^{1/2} \mathbf{Z}^{1/2} \mathbf{X}^{1/2}) = \|\mathbf{X}^{1/2} \mathbf{Z}^{1/2}\|^2 \geq 0 \quad (2.18)$$

e dado que $\mathbf{s}^\top \mathbf{w} \geq 0$ porque $\mathbf{s} \geq 0$, $\mathbf{w} \geq 0$, pode-se concluir que o gap de dualidade é positivo $\rightarrow \mathbf{Z} \bullet \mathbf{X} + \mathbf{s}^\top \mathbf{w} \geq 0$. Isto é chamado de “Teorema da dualidade fraca”, dada a dupla de soluções factíveis \mathbf{X} de um PSDP e (\mathbf{y}, \mathbf{Z}) do DSPD correspondente, o gap de dualidade é:

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} - (\mathbf{a}^\top \mathbf{y} - \mathbf{b}^\top \mathbf{w}) = \mathbf{Z} \bullet \mathbf{X} + \mathbf{s}^\top \mathbf{w} \geq 0 \quad (2.19)$$

Então pode-se deduzir que a função-objetivo primal factível é sempre maior que a solução dual correspondente:

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \geq \mathbf{a}^\top \mathbf{y} - \mathbf{b}^\top \mathbf{w} \quad (2.20)$$

Se assumimos que o problema primal possui ótimo em $(\mathbf{X}^*, \mathbf{s}^*)$ e conseguimos demonstrar que existem pelo menos uma solução dual equivalente e a ao mesmo tempo

esta solução dual $(\mathbf{y}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{Z}^*)$ é o ótimo do problema dual (Condição de qualificação de restrições de Slater). Então na solução ótima tem-se que:

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X}^* = \mathbf{a}^\top \mathbf{y}^* - \mathbf{b}^\top \mathbf{w}^* \quad (2.21)$$

ou equivalentemente tem-se que o gap de dualidade é zero (teorema da dualidade forte).

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X}^* - (\mathbf{a}^\top \mathbf{y}^* - \mathbf{b}^\top \mathbf{w}^*) = 0 \quad (2.22)$$

Se $(\mathbf{X}^*, \mathbf{s}^*)$ e $(\mathbf{y}^*, \mathbf{w}^*, \mathbf{Z}^*)$ são soluções ótimas do PSDP e DSPD respectivamente, estas soluções tem que cumprir com as restrições de factibilidade primal (2.23) e factibilidade dual (2.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{X}^*) &= \mathbf{a}^* \\ \mathcal{B}(\mathbf{X}^*) + \mathbf{s}^* &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X}^* &\succeq 0, \quad \mathbf{s}^* \geq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\top(\mathbf{y}^*) - \mathcal{B}^\top(\mathbf{w}^*) + \mathbf{Z}^* &= \mathbf{C} \\ \mathbf{Z}^* &\succeq 0, \quad \mathbf{w}^* \geq 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

O resultado da complementariedade vem derivado da dualidade forte. Este também pode ser expresso como:

$$\mathbf{Z}^* \bullet \mathbf{X}^* + \mathbf{S}^* \bullet \mathbf{W}^* = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{Z}^* \mathbf{X}^* = \mathbf{0}_{n \times n} ; \quad \mathbf{S}^* \mathbf{W}^* \mathbf{e} = \mathbf{0}_l \quad (2.25)$$

onde: $\mathbf{S}^* = \text{diag}(\mathbf{s}^*)$, $\mathbf{W}^* = \text{diag}(\mathbf{w}^*)$ e $\mathbf{e} = [1, \dots, 1]^\top$.

2.4 Minimizadores Locais e Globais

Uma das propriedades da programação semidefinida herdada da programação convexa é que todo mínimo local é um mínimo global ao mesmo tempo. Um minimizador local de um problema de programação semidefinida $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_+$ tem a propriedade de que numa vizinhança em torno de si o valor da função objetivo é o menor possível.

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} = \inf \{ \mathbf{C} \bullet \mathbf{W} : \mathbf{W} \text{ pertence a vizinhança } \|\mathbf{X} - \mathbf{W}\| \leq \epsilon \} \quad (2.26)$$

onde $\|\mathbf{X} - \mathbf{W}\|$ é uma distância entre duas matrizes \mathbf{X} e \mathbf{W} , também $\epsilon \geq 0$ é o raio da hipersfera em torno de \mathbf{X} que representa sua vizinhança. Para demonstrar que a otimalidade local equivale à otimalidade global em programação semidefinida, toma-se uma solução factível \mathbf{Y} não pertencente à vizinhança de \mathbf{X} , de modo que a distância $\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \geq 0$, e assume-se que \mathbf{Y} seja de melhor qualidade que a solução ótima local \mathbf{X} ,

ou seja, $\mathbf{C} \bullet \mathbf{Y} < \mathbf{C} \bullet \mathbf{X}$. Definimos uma combinação convexa \mathbf{Z} tal que:

$$\mathbf{Z} = (1 - \alpha) \mathbf{X} + \alpha \mathbf{Y} \quad (2.27)$$

se $\alpha \in [0, 1]$, então observamos que $\mathbf{Z} \succeq 0$. Sem perda de generalidade, fazemos $\alpha = \frac{\epsilon}{2\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|}$, e obtemos que $\|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\| = \epsilon/2$, com isto podemos deduzir que \mathbf{Z} está na vizinhança de \mathbf{X} .

$$\mathbf{X} - \mathbf{Z} = \mathbf{X} - [(1 - \alpha) \mathbf{X} + \alpha \mathbf{Y}] = \mathbf{X} - \mathbf{X} + \alpha \mathbf{X} - \alpha \mathbf{Y} = \alpha (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \frac{\epsilon}{2\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|} (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \rightarrow \|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\| = \epsilon/2 \quad (2.28)$$

Também como as matrizes \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} pertencem a um conjunto convexo e \bullet é uma função convexa afim temos:

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{Z} \leq (1 - \alpha) \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} + \alpha \mathbf{C} \bullet \mathbf{Y} < \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \quad (2.29)$$

O qual contradiria o fato de que \mathbf{X} seja um ótimo local.

2.5 Escalamento de um Problema SDP

Devido a diferentes grandezas entre as variáveis e dados, no momento de implementar um programa computacional é preciso ter em consideração a estabilidade numérica do mesmo (TUNCEL, 1998). Para resolver este problema deve-se buscar uma representação equivalente ao SDP em questão. Então podemos sugerir uma troca de variável do tipo $\mathbf{W} = \mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{Q}^\top$ para uma matriz simétrica ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top$) não singular \mathbf{Q} . Tem que se garantir que a operação $\mathbf{Q}(\cdot)\mathbf{Q}^\top$ mantenha as características de \mathbf{X} em \mathbf{W} (manter a característica de ser simétrica e positividade semidefinida após a operação), e então pode-se chamar esta operação de escalamento de \mathbf{X} .

Para escalar a matriz \mathbf{X} na matriz $\mathbf{W} = \mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{Q}^\top$ deve-se substituir esta nova variável no problema (2.10) e obter um problema equivalente. Observando a função-objetivo do problema (2.10), esta pode ser modificada da seguinte maneira:

$$\mathbf{C} \bullet \mathbf{X} = \mathbf{C} \bullet (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{Q}^{-\top}) = (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}^{-\top}) \bullet \mathbf{W} \quad (2.30)$$

Então, de igual maneira para as matrizes dos mapeamentos lineares $\mathcal{A}(\cdot)$ e $\mathcal{B}(\cdot)$ do problema (2.10), aplica-se a mesma transformação, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{C}} &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}^{-\top} ; \overline{\mathbf{A}}_i = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{Q}^{-\top} ; \overline{\mathbf{B}}_j = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}_j \mathbf{Q}^{-\top} \\ i &= 1, \dots, m ; j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (2.31)$$

Então, o problema equivalente é:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \overline{\mathbf{C}} \bullet \mathbf{W} \\
 s.a. \quad & \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{W}) = \mathbf{a} \\
 & \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{W}) \leq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{W} \succeq 0
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

2.6 Relaxação SDP para Problemas MIQCQP

SDP é aplicada eficientemente no cálculo de limitantes inferiores em programação não-convexa assim como em otimização combinatória (SHOR, 1987). Em alguns problemas, por exemplo, ela serve para calcular limitantes inferiores computacionalmente eficientes para serem usados em algoritmos de B&B.

Seja o seguinte problema inteiro misto quadrático nas restrições e quadrático na função-objetivo (MIQCQP):

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_0 \mathbf{x} + \mathbf{a}_0^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 \\
 s.a. \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_j \mathbf{x} + \mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\
 & x_k \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, p
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

sendo $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_m$ matrizes simétricas. A representação do problema (2.33) como um problema de programação semidefinida pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{X}, \mathbf{x}} \quad & \mathbf{Q}_0 \bullet \mathbf{X} + \mathbf{a}_0^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 \\
 s.a. \quad & \mathbf{Q}_j \bullet \mathbf{X} + \mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\
 & X_{kk} = x_k \quad k = 1, \dots, p \\
 & \mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $p \leq n$. Relaxando-se a restrição não-convexa $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ do problema (2.34) transformando-a em $\mathbf{X} \succeq \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$, obtém-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{X}, \mathbf{x}} \quad & \mathbf{Q}_0 \bullet \mathbf{X} + \mathbf{a}_0^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 \\
 s.a. \quad & \mathbf{Q}_j \bullet \mathbf{X} + \mathbf{a}_j^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\
 & X_{kk} = x_k \quad k = 1, \dots, p \\
 & \mathbf{X} \succeq \mathbf{x}\mathbf{x}^\top
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

o que é equivalente a relaxar a restrição intrínseca $\text{rank}(\mathbf{X}) = 1$, pois a restrição $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ implica que $\mathbf{X} \succeq \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ e $\text{rank}(\mathbf{X}) = 1$, se as seguintes substituições forem feitas no

problema (2.35)

$$\widetilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^\top & 1 \end{bmatrix}; \quad \widetilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}_j & \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_j^\top & \mathbf{b}_j \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, m \quad (2.36)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \min_{\widetilde{\mathbf{X}}} \quad & \widetilde{\mathbf{Q}}_0 \bullet \widetilde{\mathbf{X}} \\ \text{s.a.} \quad & \widetilde{\mathbf{Q}}_j \bullet \widetilde{\mathbf{X}} \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ & \widetilde{X}_{kk} = \widetilde{X}_{kn} \quad k = 1, \dots, p \\ & \widetilde{\mathbf{X}} \succeq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.37)$$

A relação $\mathbf{X} \succeq \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ ou, equivalentemente $\mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top \succeq \mathbf{0}$, é substituída por $\widetilde{\mathbf{X}} \succeq \mathbf{0}$, pois se aplicando-se o complemento Schur da matriz $\widetilde{\mathbf{X}}$ obtém-se $\mathbf{X} - \mathbf{x}\mathbf{x}^\top \succeq \mathbf{0}$.

2.6.1 Rank baixo em soluções de problemas de programação semidefinida

Barvinok (BARVINOK, 2001) propôs a existência limitantes superiores de rank de uma solução de um problema de programação semidefinida, devido à interseção do cone formado pelo espaço semidefinido com um espaço afim. Para isto considera-se uma matriz $\mathbf{X} \in \mathcal{S}^n$ que satisfaz:

$$\mathbf{X} \succeq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_j \bullet \mathbf{X} = b_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.38)$$

Dada matrizes linearmente independentes (vetorizadas) e não nulas $\mathbf{A}_j \in \mathcal{S}^n$ e um real b_j , define-se um subconjunto afim:

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{X} | \mathbf{A}_j \bullet \mathbf{X} = b_j, \quad j = 1, \dots, m\} \subseteq \mathcal{S}^n \quad (2.39)$$

Se a interseção $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}_+^N$ é não-nula para um número m de desigualdades, então existe uma matriz $\mathbf{X} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}_+^n$ que atenda a seguinte desigualdade:

$$\text{rank}(\mathbf{X}) (\text{rank}(\mathbf{X}) + 1) / 2 \leq m \quad (2.40)$$

onde podemos achar um limitante superior:

$$\text{rank}(\mathbf{X}) \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{8m+1} - 1}{2} \right\rfloor \quad (2.41)$$

Baseando-se num ponto extremo \mathbf{X} do conjunto \mathcal{A} pode-se afirmar que:

$$\text{rank}(\mathbf{X}) (\text{rank}(\mathbf{X}) + 1) / 2 - \text{rank}[\text{svec}(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}) \cdots \text{svec}(\mathbf{A}_m \mathbf{X})] = 0 \quad (2.42)$$

o que, a partir da última fórmula, pode-se deduzir o limitante para a desigualdade (2.40).

3 Modelo do POCP Hidroelétrico

A definição do problema POCP assume, sem perda de generalidade, que os geradores de uma usina hidrelétrica têm curvas colina iguais. Por isso, é formulado como uma binarização das possibilidades de configurações das unidades, onde u é o número da configuração de unidades sincronizadas e $x_{t,h,u} \in \{0, 1\}$ é a variável binária associada à configuração de unidades u da usina hidrelétrica h na hora t . A suposição de máquinas iguais parte da limitação dos dados disponíveis para esta tese, porém é possível uma formulação com máquinas distintas, dado que nosso modelo trata com número de configurações de máquinas e não com número de máquinas. Esta modelagem é ilustrada na Figura 3. Além disso, este modelo é focado em sistemas hidro-dominantes, e pressupõe-se que a geração de energia a partir de outras fontes é previamente calculada ou conhecida.

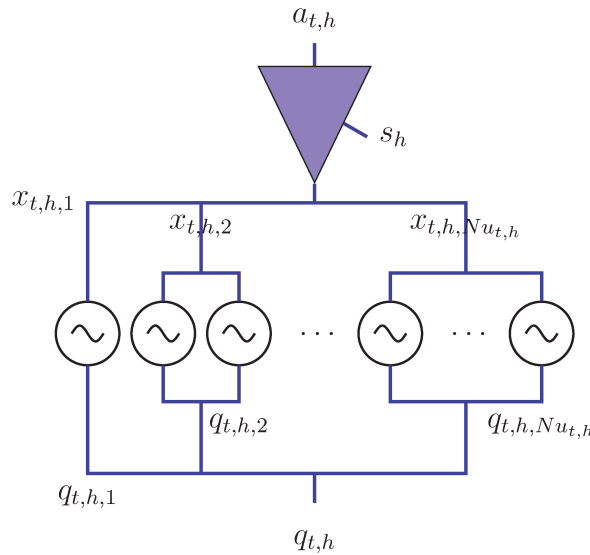


Figura 3 – Alternativas de configurações de máquinas a serem sincronizadas para uma usina h no tempo t .

A geração de energia hidroelétrica de uma determinada configuração de unidades u na usina h pode ser descrita como uma função dependente da eficiência da turbina-gerador, a altura líquida e a descarga de água $q_{t,h,u}$, para qualquer t :

$$P_{t,h,u} \doteq \varrho \cdot \eta_{t,h,u} \cdot \hat{h}_{t,h,u} \cdot q_{t,h,u}, \quad (3.1)$$

onde ϱ é uma constante, $\eta_{t,h,u}$ é a eficiência do gerador dependente da altura líquida, e $\hat{h}_{t,h,u}$ é a altura líquida. A altura líquida é uma função da altura de montante \hat{h}_h , da altura do canal de fuga \check{h}_h e da perda de altura devido ao atrito nos condutos forçados $\mathring{h}_{h,u}$:

$$\hat{h}_{t,h,u}(q_{t,h,u}, s_h) \doteq \hat{h}_h - \check{h}_h(q_{t,h,u}, s_h) - \mathring{h}_{h,u}(q_{t,h,u}), \quad (3.2)$$

onde s_h representa o vertimento de água. Na operação de curto prazo de reservatórios de grande e médio porte normalmente encontrados em sistemas hidro-dominantes, pode-se supor que o vertimento s_h é uma constante conhecida decidida pelo planejamento de médio prazo e não varia em base horária, e que variações horárias em \hat{h}_h são insignificantes no que diz respeito ao cálculo da produtividade, como dada pela relação entre $P_{t,h,u}$ e $q_{t,h,u}$. Consequentemente $q_{t,h,u}$ é a única variável de decisão. Portanto, é possível escrever (3.2) como uma função de apenas $q_{t,h,u}$:

$$\bar{h}_{t,h,u}(q_{t,h,u}) \doteq \hat{h}_h - \check{h}_h(q_{t,h,u}) - \mathring{h}_{h,u}(q_{t,h,u}). \quad (3.3)$$

Curvas de nível do gráfico de uma curva colina (Figura 4) são ilustradas na Figura 5. A eficiência do gerador é, portanto, expressa como uma função de $q_{t,h,u}$, tal que $\eta_{h,u}(\bar{h}_{t,h,u}, q_{t,h,u}) = \eta_{h,u}(q_{t,h,u})$ é uma função do número de unidades sincronizadas para geração.

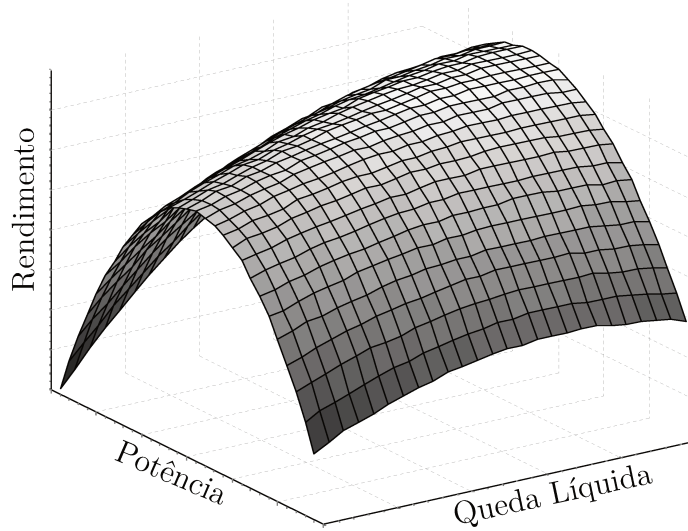


Figura 4 – Curva colina típica para uma unidade geradora.

Para cada uma das configurações de unidades u dada, tem-se limites inferiores e superiores de $q_{t,h,u}$ assim $P_{t,h,u}$ também é limitado por restrições físicas. Portanto, a potência ativa e reativa pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_{t,h,u} &= \Delta P_{t,h,u} + \underline{P}_{h,u} x_{t,h,u}, \\ Q_{t,h,u} &= \Delta Q_{t,h,u} + \underline{Q}_{h,u} x_{t,h,u}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\Delta P_{t,h,u}$ e $\Delta Q_{t,h,u}$ representa a saída adicional de potência ativa e reativa, em referência aos mínimos $\underline{P}_{h,u}$ e $\underline{Q}_{h,u}$, respectivamente. Como é mostrado na Figura 6, $q_{t,h,u}$ pode ser satisfatoriamente aproximada por uma função quadrática de $P_{t,h,u}$ com coeficientes $\alpha_{h,u}$, $\beta_{h,u}$ e $\gamma_{h,u}$. A vazão turbinada pode então ser expressa como uma função de $\Delta P_{t,h,u}$:

$$q_{t,h,u}(\Delta P_{t,h,u}, x_{t,h,u}) \doteq \alpha_{h,u} \Delta P_{t,h,u}^2 + \hat{\beta}_{h,u} \Delta P_{t,h,u} + \hat{\gamma}_{h,u} x_{t,h,u}, \quad (3.5)$$

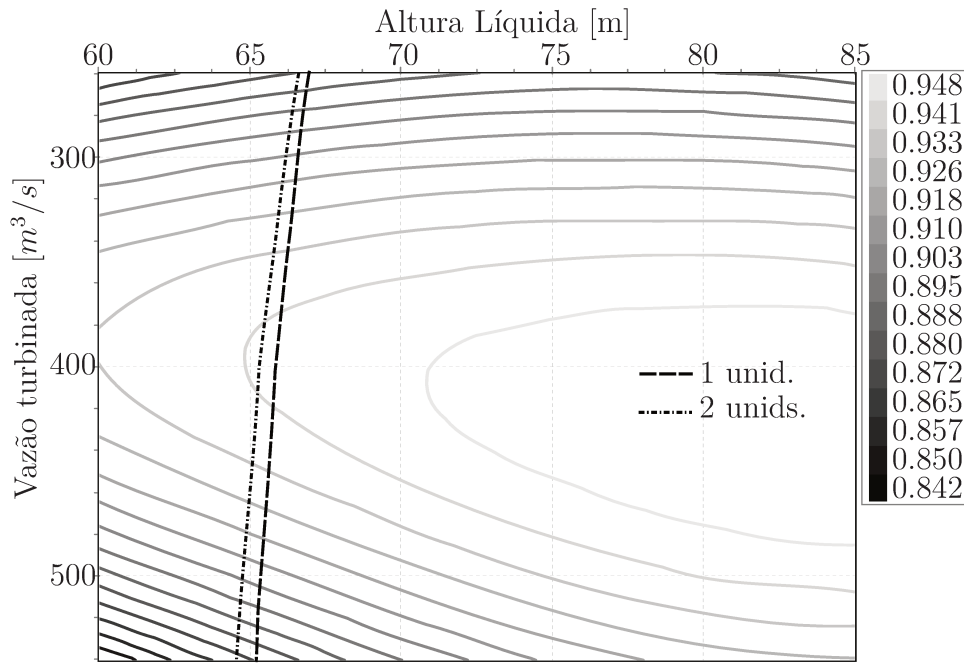


Figura 5 – Curvas de nível de uma curva colina típica de uma unidade geradora e a faixa operativa de rendimentos correspondente a duas configurações de máquinas, com uma e com duas unidades sincronizadas, para uma dada cota de montante \bar{h} constante.

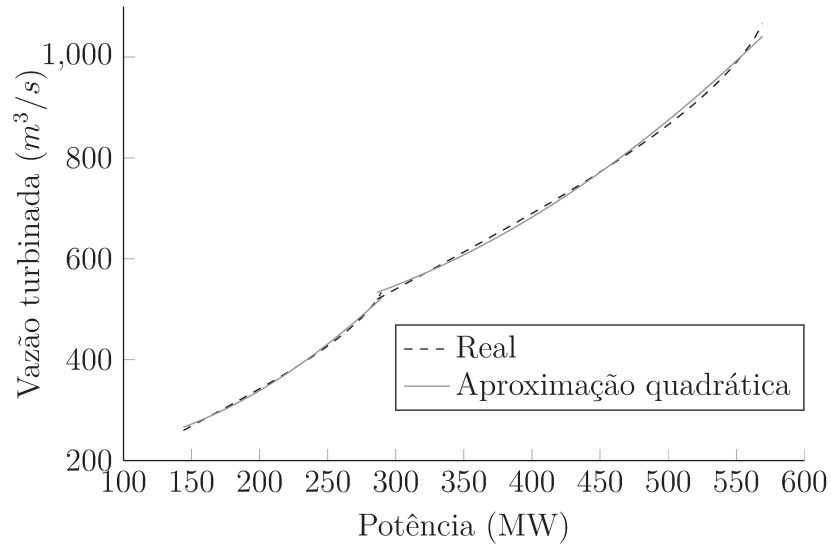


Figura 6 – Descarga de água em função da potência de saída para duas configurações de unidades sincronizadas de uma usina hidrelétrica real.

onde

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{h,u} &\doteq 2\alpha_{h,u}\underline{P}_{h,u} + \beta_{h,u}, \\ \hat{\gamma}_{h,u} &\doteq \alpha_{h,u}\underline{P}_{h,u}^2 + \beta_{h,u}\underline{P}_{h,u} + \gamma_{h,u}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

3.1 Função-objetivo

É definida como a minimização da soma dos custos da água $WC_{t,h,u}$ e os custos de partida de uma máquina $SC_{t,h}$, constituindo o custo total de geração de energia hidrelétrica para um sistema hidrelétrico:

$$\min_{\substack{\Delta P, \Delta Q, \\ x, y, e, f}} \sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^{N_H} \left(SC_{t,h} + \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} WC_{t,h,u} \right), \quad (3.7)$$

onde T e N_H representam o número de horas no horizonte de planejamento e de usinas hidrelétricas, respectivamente. $Nu_{t,h}$ é o número total de configurações de unidades disponíveis na usina h e hora t . O objetivo é encontrar um equilíbrio que maximiza a eficiência do uso da água assim como a vida útil do gerador.

3.1.1 Custo da Água

Estes custos são representados pelo produto do custo (custo de oportunidade ou valor) da água λ_h , calculado pelos modelo de otimização de planejamento de longo prazo de sistemas hidrotérmicos, pela vazão turbinada como descrita em (3.5):

$$WC_{t,h,u}(\Delta P_{t,h,u}, x_{t,h,u}) \doteq \lambda_h \left(\alpha_{h,u} \Delta P_{t,h,u}^2 + \hat{\beta}_{h,u} \Delta P_{t,h,u} + \hat{\gamma}_{h,u} x_{t,h,u} \right) \quad (3.8)$$

for $t = 1, \dots, T$, $h = 1, \dots, N_H$ and $u = 1, \dots, Nu_{t,h}$.

3.1.2 Custo de Partida

Existem custos associados à manutenção decorrentes do desgaste resultante da partida e parada das unidades de geração (NILSSON; SJELVGREN, 1997). Por uma questão de simplificação, os custos de parada são incluídos nos custos de partida. Portanto, o custo total de inicialização da unidade de uma usina hidroelétrica h em uma dada hora t é dada por:

$$SC_{t,h} \doteq \delta_h \cdot y_{t,h}, \quad (3.9)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$, onde δ_h é o custo de partida de uma unidade da usina h , e $y_{t,h}$ é igual ao número de unidades arrancadas entre as horas $t - 1$ e t .

3.2 Restrições do problema

3.2.1 Partida de Máquinas

O cálculo de $y_{t,h}$ é feito segundo (3.10) associando-se o número de unidades adicionais sincronizadas $y_{t,h} \geq 0$ na hora t com a diferença entre o número de máquinas

operando na hora t e o número de máquinas operando na hora $t - 1$:

$$\sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} (u \cdot x_{t,h,u}) - \sum_{u=1}^{Nu_{t-1,h}} (u \cdot x_{t-1,h,u}) \leq y_{t,h}, \quad (3.10)$$

onde $x_{0,h,u}$ a configuração de máquinas conhecidamente operando na última hora do período anterior. Podemos notar que (3.10) estará ativa na solução ótima em um processo de minimização com coeficientes positivos na função-objetivo quando esta representa a partida de unidades adicionais durante essa hora. Do contrário, esta variável será nula.

3.2.2 Balanço de Potência

A cada hora t na barra i do sistema de transmissão, a demanda de potência ativa $Pd_{t,i}$ e reativa $Qd_{t,i}$ deve ser fornecida pela geração de potência ativa e reativa assim como pelas injeções de fluxos das linhas ligadas na barra, de modo que:

$$\sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} (\Delta P_{t,h,u} + \underline{P}_{h,u} x_{t,h,u}) + \sum_{j \in \Omega_i} ((e_{t,i} e_{t,j} + f_{t,i} f_{t,j}) g_{i,j} + (f_{t,i} e_{t,j} - e_{t,i} f_{t,j}) b_{i,j}) = Pd_{t,i}, \quad (3.11)$$

e

$$\sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} (\Delta Q_{t,h,u} + \underline{Q}_{h,u} x_{t,h,u}) + \sum_{j \in \Omega_i} ((f_{t,i} e_{t,j} - e_{t,i} f_{t,j}) g_{i,j} - (e_{t,i} e_{t,j} + f_{t,i} f_{t,j}) b_{i,j}) = Qd_{t,i}, \quad (3.12)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N_B$, onde N_B é o número de barras, Ψ_i e Ω_i são o conjunto de usinas ligadas na barra i e o conjunto de barras ligadas na barra i , respectivamente, assim como $e_{t,i}$ e $f_{t,i}$ são a parte real e imaginária da tensão na barra i na representação cartesiana, respectivamente. Finalmente, $g_{i,j}$ e $b_{i,j}$ representam a condutância e a susceptância da linha (i, j) , respectivamente.

3.2.3 Barra Slack

A barra *slack*, ou barra de referência, é aquela que controla a tensão do sistema e, portanto, a ela é imposta uma restrição de valor de tensão fixo:

$$\begin{aligned} e_{t,i_0} &= V_0, \\ f_{t,i_0} &= 0, \end{aligned}$$

para $t = 1, \dots, T$, onde i_0 é o índice da barra slack e V_0 é a tensão de referência. Esta tensão V_0 garante que o sistema opere nos níveis de tensão aceitáveis, não ultrapassando os limites dados pela equação (3.14). Outro critério para obter este valor é proveniente dos estudos de estabilidade do sistema, onde V_0 deve também garantir uma confiabilidade

na rede para um conjunto de contingências dadas. A barra slack é comumente definida pela usina de maior capacidade instalada com uma localização central da rede (SINGH, 2006).

3.2.4 Limites nas Linhas de Transmissão

O que limita uma linha de transmissão para entregar potência ativa de um lugar para outro da rede depende da diferença angular entre os dois barramentos ligados, quedas de tensão numa linha e efeitos térmicos nas linhas de transmissão, assim como equipamentos das subestações. Os efeitos que afetam os limites de transmissão podem ser resumidos em:

Limites físicos do condutor Causados pelo efeito Joule na resistência das linhas de transmissão, limitando a corrente que pode passar por uma linha de transmissão sem danificar o próprio condutor.

Segurança Com o incremento da corrente, o fio aquece, amolece, e como as linhas são pesadas, seu peso faz com que eles se movam e incrementem o calor, fazendo com que seja mais fácil que objetos como água, árvores ou algum outro colida com a linha.

Contingências Os operadores do sistema incluem limites nas linhas de transmissão para poder fazer frente a possíveis cenários de contingências, e para que os fluxos de potências pela linha possam ser incrementados se for necessário.

Limites de equipamentos Os transformadores entre sistemas de diferentes níveis de tensão impõem limites de corrente que podem passar entre eles.

O limite mínimo e máximo são usados para representar é usado para representar os limites de transmissão no modelo aqui apresentado. Assim, o fluxo de potência $F_{t,i,j}$ da barra i a barra j é limitado por \underline{F}_{ij} e \overline{F}_{ij} :

$$\underline{F}_{i,j} \leq F_{t,i,j} \leq \overline{F}_{i,j} \quad (3.13)$$

para $t = 1, \dots, T$, $(i, j) \in \mathcal{L}$, onde \mathcal{L} é o conjunto de linhas de transmissão.

3.2.5 Limites na Tensão

Com o objetivo de garantir a qualidade de energia fornecida em cada barra (SIVANAGARAJU, 2008), limites de tensão são impostos em razão do fato de equipamentos elétricos não poderem operar em faixas de tensão muito distintas da nominal. Adicionalmente, a estabilidade do sistema de transmissão pode ser afetada caso estes limites sejam

ultrapassados. Assim, o módulo da tensão é limitado inferiormente por \underline{V}_i e superiormente por \overline{V}_i :

$$\underline{V}_i^2 \leq (e_{t,i}^2 + f_{t,i}^2) \leq \overline{V}_i^2 \quad (3.14)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N_B$.

3.2.6 Dinâmica do Reservatório e Limites de Armazenamento

A dinâmica simplificada de um reservatório é classicamente dada pela equação de balanço da água num reservatório de forma recursiva (HAWARY; CHRISTENSEN, 1979). Nela, o volume de armazenamento $\nu_{t,h}$ pode ser representado segundo a equação (3.15), em que são conhecidas as vazões provenientes de usinas a montante $\tilde{h} \in \Theta_h$ do dia anterior $w_{t,\tilde{h}}$ e recebidas pelo reservatório, assim como as vazões afluentes incrementais $a_{t,h}$. Neste trabalho, assume-se conhecido também o vertimento s_h naquele dia.

$$\nu_{t,h} = \nu_{t-1,h} + \vartheta (a_{t,h} - s_h - q_{t,h}) + \vartheta \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} (\mathbf{1}_{t \leq \tau_{\tilde{h}}} \cdot w_{t-\tau_{\tilde{h}},\tilde{h}} + \mathbf{1}_{t \geq \tau_{\tilde{h}}} [q_{t-\tau_{\tilde{h}},\tilde{h}} + s_{\tilde{h}}]) \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{1}_{w \in A} = \{1, \text{ se } w \in A; 0, \text{ caso contrário}\}$ é a função indicadora e $\tau_{\tilde{h}}$ é o tempo de deslocamento necessário para a água sair da usina \tilde{h} e chegar à usina h , e ϑ é uma constante de conversão de acordo com as unidades usadas.

Tem-se que garantir que ao longo da operação de curto prazo do reservatório, o volume de armazenamento esteja entre os limites mínimo $\underline{\nu}_h$ e máximo $\overline{\nu}_h$:

$$\underline{\nu}_h \leq \nu_{t,h} \leq \overline{\nu}_h \quad (3.16)$$

Faz-se o uso da recursividade e do conhecimento do volume inicial $\nu_{0,h}$ para obter-se a solução geral de (3.17):

$$\nu_{t,h} \doteq \nu_{0,h} + \vartheta \sum_{i=1}^t (a_{i,h} - s_h - q_{i,h}) + \vartheta \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} \left(\sum_{i=1}^{\min\{t, \tau_{\tilde{h}}\}} w_{i-\tau_{\tilde{h}},\tilde{h}} + \sum_{i=1}^{t-\tau_{\tilde{h}}} q_{i,\tilde{h}} \right) \quad (3.17)$$

No presente trabalho, representa-se as equações (3.16) e (3.17) combinadas numa só, em que o volume de armazenamento $\nu_{t,h}$ pode ser expresso como uma função quadrática da geração de potência ativa da usina h e das usinas a montante $\tilde{h} \in \Theta_h$:

$$\begin{aligned} \underline{\nu}_h \leq & \nu_{0,h} + \vartheta \sum_{i=1}^t \left[a_{i,h} - s_h - \sum_{u=1}^{Nu_{i,h}} \left(\alpha_{h,u} \Delta P_{i,h,u}^2 + \hat{\beta}_{h,u} \Delta P_{i,h,u} + \hat{\gamma}_{h,u} x_{i,h,u} \right) \right] \\ & + \vartheta \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{t, \tau_{\tilde{h}}\}} w_{i-\tau_{\tilde{h}},\tilde{h}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{t-\tau_{\tilde{h}}} \left[\sum_{u=1}^{Nu_{i,\tilde{h}}} \left(\alpha_{\tilde{h},u} \Delta P_{i,\tilde{h},u}^2 + \hat{\beta}_{\tilde{h},u} \Delta P_{i,\tilde{h},u} + \hat{\gamma}_{\tilde{h},u} x_{i,\tilde{h},u} \right) + s_{\tilde{h}} \right] \right\} \leq \overline{\nu}_h, \end{aligned} \quad (3.18)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.2.7 Metas de Geração de Longo Prazo

A operação horária das usinas hidroelétricas deve ser coordenada com as metas de operação de longo prazo dos reservatórios (SOARES; SALMAZO, 1997). Este acoplamento com os modelos de longo prazo podem ser do tipo primal mediante metas de geração ou volume final do reservatório, mas também pode ser do tipo dual mediante a utilização de uma função de custo futuro ou valor da água. Neste trabalho esta coordenação é feita mediante metas de geração e valor da água. As metas de m_h para cada usina podem ser expressas em termos de energia:

$$\frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} (\Delta P_{t,h,u} + \underline{P}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}) = m_h,$$

para $h = \{1, \dots, N_H\} \setminus h_0$, onde h_0 é a usina hidrelétrica conectada à barra slack. A geração média de h_0 não é fixada para poder também atender à carga que representam as perdas no sistema de transmissão as quais são dificilmente calculadas com precisão nos modelos de planejamento de longo prazo.

3.2.8 Limites de Potência

Os limites de geração de uma unidade de conjunto turbina-gerador são dados de maneira real pela curva de capacidade (ALLEY, 1977), ilustrada na Figura 7a. Esta curva leva em consideração limites tanto do gerador quanto do fornecimento de potência da turbina hidráulica. Entretanto, na prática são usados limites simplificados, como ilustrados na Figura 7b, os quais são baseados na curva de capacidade.

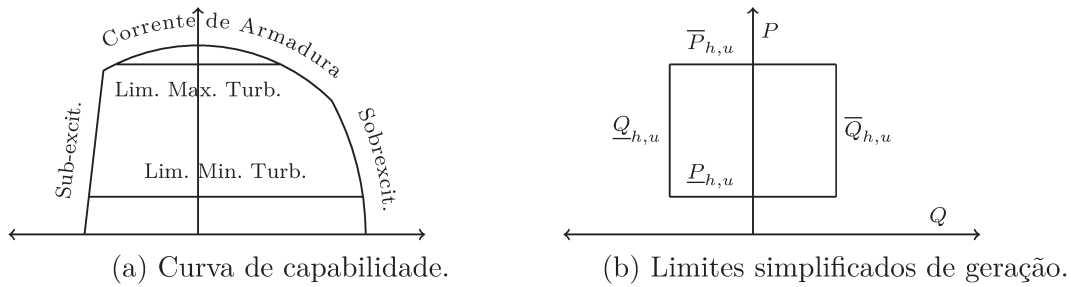


Figura 7 – Limites de Geração.

No presente modelo os limites mínimos e máximos de geração da potência ativa e reativa são expressos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta P_{t,h,u} &\leq \overline{\Delta P}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}, \\ \Delta Q_{t,h,u} &\leq \overline{\Delta Q}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P}_{h,u} &= \overline{P}_{h,u} - \underline{P}_{h,u}, \\ \overline{\Delta Q}_{h,u} &= \overline{Q}_{h,u} - \underline{Q}_{h,u}, \end{aligned}$$

para $t = 1, \dots, T$, $h = 1, \dots, N_H$ e $u = 1, \dots, Nu_{t,h}$. É possível representar zonas proibidas de operação nas unidades de geração colocando apropriadamente novos limites de potência ativa gerada e adicionalmente variáveis binárias apropriadamente para trechos descontínuos de operação para cada configuração de unidades.

3.2.9 Configuração Única de Unidades

É necessário garantir, para a factibilidade da solução, que apenas uma configuração das $Nu_{t,h}$ seja escolhida para a usina h no tempo t :

$$\sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} x_{t,h,u} = 1, \quad (3.19)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$. Pode-se notar que (3.19) é uma condição de igualdade se assumirmos que pelo menos uma unidade deve estar arrancada para que esta usina entre no esquema de despacho para este dia. A variável dual representa o custo marginal associado ao uso de uma configuração de máquinas diferente (FUENTES-LOYOLA; QUINTANA, 2003). Esta informação econômica pode ser útil tanto para as empresas geradoras como para o operador do sistema na ocorrência de re-despachos diferentes do planejado.

3.2.10 Condição de Integralidade

Para que nosso modelo seja viável,

$$x_{t,h,u} \in \{0, 1\}, \quad (3.20)$$

para $t = 1, \dots, T$, $h = 1, \dots, N_H$ e $u = 1, \dots, Nu_{t,h}$. Então temos um modelo MIQCQP para o POCP.

3.3 Metodologia de Solução

3.3.1 Formulação QCQP

Se a condição de integralidade (3.20) é por:

$$x_{t,h,u}^2 - x_{t,h,u} = 0, \quad (3.21)$$

para $t = 1, \dots, T$, $h = 1, \dots, N_H$ and $u = 1, \dots, Nu_{t,h}$, então obtem-se uma formulação QCQP do POCP, na qual $x \in \{0, 1\}$ é substituído por $x = x^2$ segundo (SHERALI; ADAMS, 1990). Tal substituição de variável torna (3.19) e (3.21) redundantes, como

consequência da natureza binária de x . Como resultado, pode-se expressar (3.19) em forma quadrática:

$$\sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} x_{t,h,u}^2 = 1, \quad (3.22)$$

para $t = 1, \dots, T$, e $h = 1, \dots, N_H$. Esta reformulação procura estrutura diagonal dentro das matrizes de restrições o qual facilita o processo de otimização.

O algoritmo de B&B proposto neste trabalho faz relaxações SDP sucessivas do MIQCQP até a convergência para numa solução inteira. É necessário, portanto, reformular o MIQCQP como um problema QCQP com respeito a dois conjuntos ordenados gerados por uma solução prévia $\mathbf{x} = \{x_{t,h,u}\}$, onde $\Omega_1(\mathbf{x})$ é o conjunto de variáveis não integrais e $\Omega_2(\mathbf{x})$ é o conjunto de variáveis fixadas em 1 numa dada iteração de B&B. Os elementos dos conjuntos são ordenados do menor ao maior valor para cada componente do vetor (t, h, u) . Variáveis fixadas em 0 são ignoradas, haja vista que existe apenas uma unidade ligada em cada tempo. Então tem-se:

$$\Omega_1(\mathbf{x}) = \{(t, h, u) : 1 < x_{t,h,u} < 1\}, \quad (3.23)$$

$$\Omega_2(\mathbf{x}) = \{(t, h, u) : x_{t,h,u} = 1\}. \quad (3.24)$$

Consequentemente, a formulação do problema devem ser revista para poder representar a formulação QCQP com a separação de variáveis. O problema é então redefinido da seguinte forma:

$$\min_{\substack{\Delta P, \Delta Q, \\ x, y, e, f}} \sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^{N_H} SC_{t,h} + \sum_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} WC_{t,h,u} + \sum_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} WC_{t,h,u} \quad (3.25)$$

onde o custo total do uso da água é definido como:

$$WC_{t,h,u}(\cdot) \doteq \lambda_h \left(\alpha_{h,u} \cdot \Delta P_{t,h,u}^2 + \hat{\beta}_{h,u} \cdot \Delta P_{t,h,u} \cdot x_{t,h,u} + \hat{\gamma}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^2 \right), \quad (3.26)$$

para $t = 1, \dots, T$, $h = 1, \dots, N_H$ and $u = 1, \dots, Nu_{t,h}$, sujeito ao balanço de potência ativa:

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \left[\mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \left(\Delta P_{t,h,u} \cdot x_{t,h,u} + \underline{P}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \left(\Delta P_{t,h,u} \cdot v + \underline{P}_{h,u} \cdot v^2 \right) \right] \\ & - \sum_{j=1}^{N_B} [(e_{t,i} \cdot e_{t,j} + f_{t,i} \cdot f_{t,j}) G_{i,j} + (f_{t,i} \cdot e_{t,j} - e_{t,i} \cdot f_{t,j}) B_{i,j}] = Pd_{i,t}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

e

$$v^2 = 1 \quad (3.28)$$

é uma restrição com a variável auxiliar v , esta variável auxiliar assim como a restrição 3.28 permitem ter posições na ultima fila e coluna das matrizes as quais correspondem

aos valores das outras variáveis (LOVÁSZ; SCHRIJVER, 1991). A restrição de potência reativa é modificada também:

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \left[\mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \left(\Delta Q_{t,h,u} \cdot x_{t,h,u} + \underline{Q}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \left(\Delta Q_{t,h,u} \cdot v + \underline{Q}_{h,u} \cdot v^2 \right) \right] \\ & - \sum_{j=1}^{N_B} [(f_{t,i} \cdot e_{t,j} - e_{t,i} \cdot f_{t,j}) G_{i,j} - (e_{t,i} \cdot e_{t,j} + f_{t,i} \cdot f_{t,j}) B_{i,j}] = Qd_{i,t}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N_B$. A barra slack é também redefinida assim:

$$e_{t,i_0}^2 = V_0^2, \quad (3.30)$$

$$f_{t,i_0}^2 = 0, \quad (3.31)$$

para $t = 1, \dots, T$. As equações (3.13) e (3.14) são mantidas sem quaisquer alterações. Limites de armazenamento dos reservatórios são representados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \underline{\nu}_h & \leq \nu_{t,h} \doteq \nu_{0,h} + \vartheta \sum_{i=1}^t \left\{ a_{i,h} - s_h - \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \left[\mathbf{1}_{(i,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \right. \right. \\ & \quad \cdot \left(\alpha_{h,u} \Delta P_{i,h,u}^2 + \hat{\beta}_{h,u} \Delta P_{i,h,u} x_{i,h,u} + \hat{\gamma}_{h,u} x_{i,h,u}^2 \right) \\ & \quad \left. \left. + \mathbf{1}_{(i,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot \left(\alpha_{h,u} \Delta P_{i,h,u}^2 + \hat{\beta}_{h,u} \Delta P_{i,h,u} v + \hat{\gamma}_{h,u} v^2 \right) \right] \right\} \\ & + \vartheta \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} \left\{ \sum_{i=1}^{\min\{t, \tau_{\tilde{h}}\}} w_{i-\tau_{\tilde{h}}, \tilde{h}} + \sum_{i=1}^{t-\tau_{\tilde{h}}} \left[\sum_{u=1}^{Nu_{i,\tilde{h}}} \left(\mathbf{1}_{(i,\tilde{h},u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \right. \right. \right. \\ & \quad \cdot \left(\alpha_{\tilde{h},u} \Delta P_{i,\tilde{h},u}^2 + \hat{\beta}_{\tilde{h},u} \Delta P_{i,\tilde{h},u} x_{i,\tilde{h},u} + \hat{\gamma}_{\tilde{h},u} x_{i,\tilde{h},u}^2 \right) \\ & \quad \left. \left. \left. + \mathbf{1}_{(i,\tilde{h},u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot \left(\alpha_{\tilde{h},u} \Delta P_{i,\tilde{h},u}^2 + \hat{\beta}_{\tilde{h},u} \Delta P_{i,\tilde{h},u} v + \hat{\gamma}_{\tilde{h},u} v^2 \right) \right) + s_{\tilde{h}} \right] \right\} \leq \bar{\nu}_h, \end{aligned} \quad (3.32)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$. As metas de potência ativa da usina do médio prazo também são reformuladas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \left[\mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \left(\Delta P_{t,h,u} \cdot x_{t,h,u} + \underline{P}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot \left(\Delta P_{t,h,u} \cdot v + \underline{P}_{h,u} \cdot v^2 \right) \right] = m_h, \end{aligned} \quad (3.33)$$

para $h = \{1, \dots, N_H\} \setminus h_0$, assim como as restrições em potência ativa e reativa são reformuladas, de maneira que:

$$\Delta P_{t,h,u} \cdot x_{t,h,u} \leq \overline{\Delta P}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^2, \quad (3.34)$$

$$\Delta Q_{t,h,u} \cdot x_{t,h,u} \leq \overline{\Delta Q}_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^2, \quad (3.35)$$

para todo $(t, h, u) \in \Omega_1(\mathbf{x})$, e:

$$\Delta P_{t,h,u} \cdot v \leq \overline{\Delta P}_{h,u} \cdot v^2, \quad (3.36)$$

$$\Delta Q_{t,h,u} \leq \overline{\Delta Q}_{h,u}, \quad (3.37)$$

para todo $(t, h, u) \in \Omega_2(\mathbf{x})$. Também são reformuladas as restrições de configuração única de máquinas para todo $\{(t, h) : (t, h, u) \in \Omega_1(\mathbf{x})\}$, representadas da seguinte maneira:

$$\sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot x_{t,h,u}^2 = 1. \quad (3.38)$$

Finalmente, restrições na partida de máquinas são dadas por:

$$\begin{aligned} y_{t,h} \geq & \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \left(\mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot u \cdot x_{t,h,u}^2 + \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot u \right) \\ & - \sum_{u=1}^{Nu_{t-1,h}} \left(\mathbf{1}_{(t-1,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot u \cdot x_{t-1,h,u}^2 + \mathbf{1}_{(t-1,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot u \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.4 Heurística de Eliminação de Restrições de Reservatório

É comum na literatura (FARHAT; EL-HAWARY, 2009) usar as equações de balanço da água para representar explicitamente a dinâmica do reservatório em programação de curto prazo para todos os tipos de reservatório. A formulação proposta no presente modelo permite que as restrições de limites de volume nas restrições de dinâmica do reservatório sejam eliminadas seletivamente de maneira conjunta. Tal proposta constitui-se de uma heurística que calcula limitantes inferiores $\inf(\nu_{t,h})$ e superiores $\sup(\nu_{t,h})$ para o armazenamento do reservatório no curso do dia seguinte, assumindo-se uma operação em condições extremas. Se $\underline{\nu}_h \leq \inf(\nu_{t,h})$, então é esperado que o volume de armazenamento nunca seja menor que o limitante inferior para qualquer solução factível, e, como consequência, pode-se concluir que as restrições de volume de armazenamento mínimo para o tempo t são desnecessárias. Define-se assim o máximo volume total turbinável $\tilde{\nu}_{t,h}$ e o mínimo volume total turbinável $\underline{\nu}_{t,h}$ de descarga de água até a hora t para a usina h que esteja de acordo com a meta de geração m_h e seja expressa em termos do volume-alvo turbinável do reservatório νd_h :

$$\tilde{\nu}_{t,h} = \min \left\{ \vartheta \cdot \bar{q}_h \cdot t, \nu d_h - \vartheta (T - t) \underline{q}_h \right\} \quad (3.40)$$

$$\underline{\nu}_{t,h} = \max \left\{ \vartheta \cdot \underline{q}_h \cdot t, \nu d_h - \vartheta (T - t) \bar{q}_h \right\} \quad (3.41)$$

onde \bar{q}_h e \underline{q}_h são limites mínimos e máximos de descarga, respectivamente, e ϑ é uma constante de conversão de unidades de vazão em volume.

Pode-se observar na Figura 8 como o volume máximo turbinável varia de acordo com o tempo t . Existe um tempo \tilde{t}_h em que a usina h não pode turbinar mais a vazão máxima \bar{q}_h e deve, então, começar a turbinar a vazão mínima \underline{q}_h para atender, no final do período T a meta de armazenamento do reservatório νd_h . Similarmente, existe \underline{t}_h para $\underline{\nu}_{t,h}$ em que a usina h não pode turbinar mais a vazão mínima \underline{q}_h e deve, então, começar a

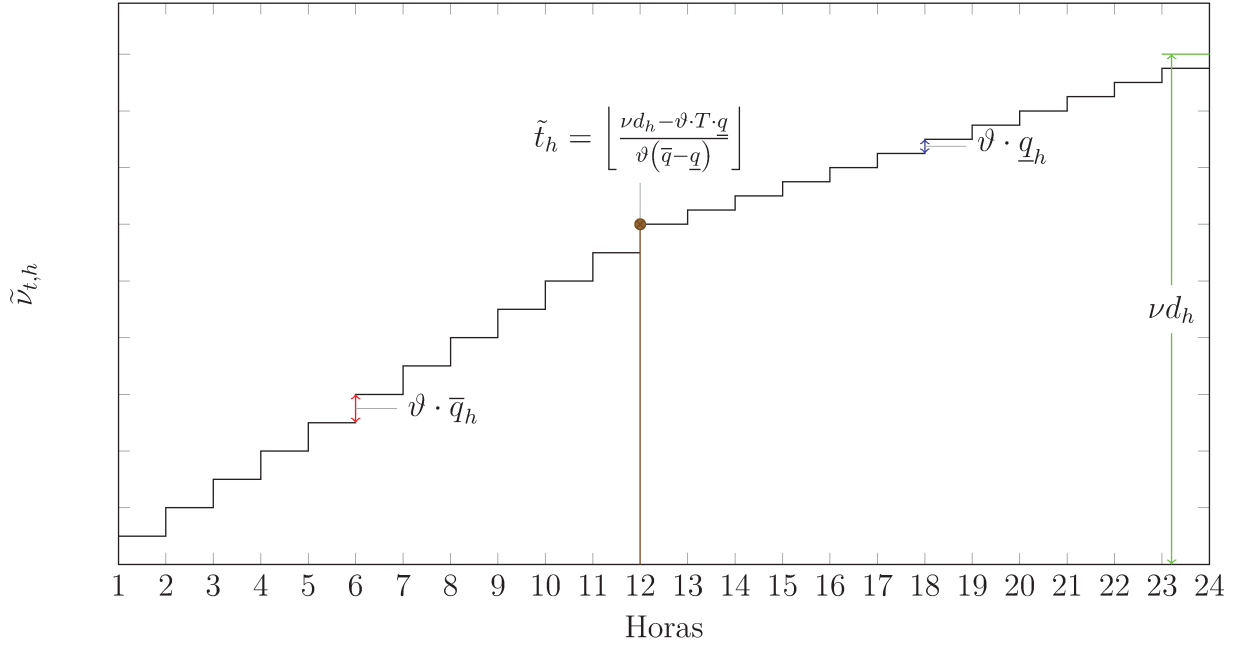


Figura 8 – Evolução do $\tilde{\nu}_{t,h}$ para a usina h no tempo t durante o período de $T = 24$.

turbinar a vazão máxima \bar{q}_h para atender no final do período T à meta de armazenamento do reservatório νd_h .

Para $\inf(\nu_{t,h})$, é assumido que h consome o máximo volume de água possível ($\tilde{\nu}_{t,h}$), enquanto o mínimo possível ($\underline{\nu}_{t,\tilde{h}}$) é consumido pelas usinas que estão a montante \tilde{h} , para uma vazão afluyente conhecida $a_{i,h}$:

$$\begin{aligned} \inf(\nu_{t,h}) = & \nu_{0,h} - \tilde{\nu}_{t,h} + \vartheta \sum_{i=1}^t (a_{i,h} - s_h) \\ & + \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} \left[\vartheta \left(\sum_{i=1}^{\min\{t, \tau_{\tilde{h}}\}} w_{i-\tau_{\tilde{h}}, \tilde{h}} + \sum_{i=1}^{t-\tau_{\tilde{h}}} s_{\tilde{h}} \right) + \mathbf{1}_{t \in (\tau_{\tilde{h}}, T]} \cdot \underline{\nu}_{t-\tau_{\tilde{h}}, \tilde{h}} \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

No que diz respeito ao limitante inferior $\inf(\nu_{t,h})$, pode-se observar diferentes variações ao longo do tempo na Figura 9. De maneira a analisar este comportamento, reduz-se o número de usinas a montante a uma única e procede-se com a observação sobre como três constantes definem a trajetória deste limitante inferior. A primeira é $\tau_{\tilde{h}}$, com a qual podemos saber a quantidade de água que chega ao reservatório desde o dia anterior. Em seguida é assumido que atinge-se a mínima turbinagem na usina \tilde{h} , ao passo que na usina h turbinar-se a máxima vazão até o tempo \tilde{t}_h , e, logo após, turbinar-se a mínima vazão até que, no tempo $\tilde{t}_{\tilde{h}}$, a usina \tilde{h} começa a turbinar a vazão máxima. Com isso, pode-se observar que as restrições em (3.18) para os períodos $1, \dots, 9, 22, 23$ e 24 podem ser eliminadas uma vez que o limitante inferior não ultrapassou os limites mínimos de volume.

Analogamente, se $\bar{\nu}_h \geq \sup(\nu_{t,h})$, então os limites superiores de volume não são necessários. De igual maneira, para $\sup(\nu_{t,h})$ é assumido que h consome $\underline{\nu}_{t,h}$, ao passo que

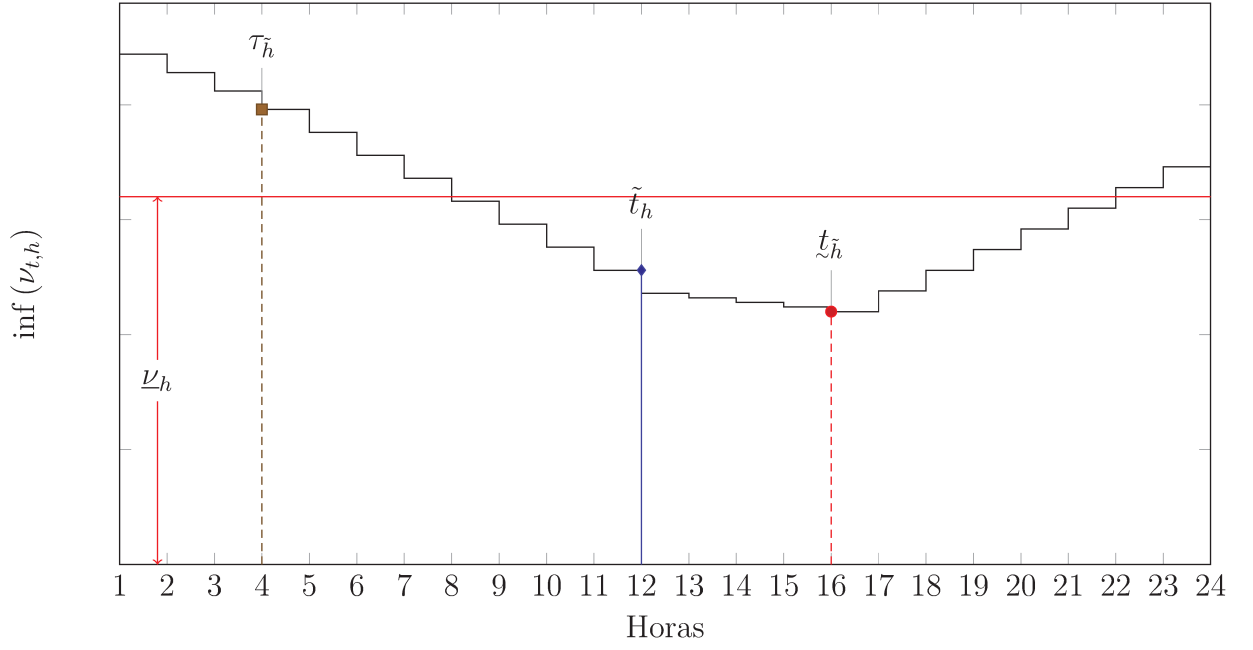


Figura 9 – Evolução do $\inf(\nu_{t,h})$ para a usina h no tempo t durante o período de $T = 24$.

as usinas a montante consomem $\tilde{\nu}_{t,\tilde{h}}$:

$$\begin{aligned}
 \sup(\nu_{t,h}) = & \nu_{0,h} - \nu_{t,h} + \vartheta \sum_{i=1}^t (a_{i,h} - s_h) \\
 & + \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} \vartheta \left(\sum_{i=1}^{\min\{t, \tau_{\tilde{h}}\}} w_{i-\tau_{\tilde{h}}, \tilde{h}} + \sum_{i=1}^{t-\tau_{\tilde{h}}} s_{\tilde{h}} \right) + \mathbf{1}_{t \in (\tau_{\tilde{h}}, T]} \tilde{\nu}_{t-\tau_{\tilde{h}}, \tilde{h}}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

3.5 Relaxação SDP

A relaxação SDP (NESTEROV *et al.*, 2000) da formulação QCQP pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll}
 \min_{\mathbf{X1}, \mathbf{X2}, \mathbf{V}, \mathbf{x3}, \mathbf{y}} & \mathbf{C1} \bullet \mathbf{X1} + \mathbf{C2} \bullet \mathbf{X2} + \Upsilon + \mathbf{c}^T \mathbf{y} \\
 \text{s. a.} & \mathbf{a1} = \mathcal{A1}(\mathbf{X1}) + \mathcal{A2}(\mathbf{X2}) + \mathcal{Y1}(\mathbf{V}) \quad \text{Balanço de potência ativa.} \\
 & \mathbf{a2} = \mathcal{A3}(\mathbf{X1}) + \mathbf{x3} + \mathcal{Y2}(\mathbf{V}) \quad \text{Balanço de potência reativa.} \\
 & \mathbf{a3} = \mathcal{A4}(\mathbf{X1}) + \mathcal{A5}(\mathbf{X2}) \quad \text{Metas de geração.} \\
 & \mathbf{1} = \mathcal{A6}(\mathbf{X2}) \quad \text{Variável auxiliar.} \\
 & \mathbf{a4} = \mathcal{Y3}(\mathbf{V}) \quad \text{Barra Slack.} \\
 & \mathbf{a5} = \mathcal{A7}(\mathbf{X1}) \quad \text{Configuração única.} \\
 & \mathbf{b1} \geq \mathcal{B1}(\mathbf{X1}) \quad \text{Limites de potência ativa.} \\
 & \mathbf{b2} \geq \mathcal{B2}(\mathbf{X2}) \quad \text{Limites de potência ativa.} \\
 & \mathbf{b3} \geq \mathbf{x3} \quad \text{Limites de potência reativa.} \\
 & \mathbf{b4} \geq \mathcal{B3}(\mathbf{X1}) + \mathcal{B4}(\mathbf{X2}) \quad \text{Dinâmica do Reservatório.} \\
 & \mathbf{b5} \geq \mathcal{Y4}(\mathbf{V}) \quad \text{Limites de transmissão.} \\
 & \mathbf{b6} \geq \mathcal{Y5}(\mathbf{V}) \quad \text{Limites de Tensão.} \\
 & \mathbf{y} \geq \mathcal{E}(\mathbf{X1}) + \mathbf{g} \quad \text{Custo de partida.} \\
 & \mathbf{0} \preceq \mathbf{X1}, \mathbf{X2}, \mathbf{V} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{x3}, \mathbf{y} \\
 & \mathbf{1} = \text{rank}(\mathbf{X1}) = \text{rank}(\mathbf{X2}) = \text{rank}(\mathbf{V})
 \end{array}$$

onde as restrições de rank $\mathbf{X1}$, $\mathbf{X2}$ e \mathbf{V} são relaxadas, \bullet é o produto interno de Frobenius e $\mathcal{A1}(\cdot), \dots, \mathcal{A9}(\cdot), \mathcal{B1}(\cdot) \dots \mathcal{B4}(\cdot), \mathcal{Y1}(\cdot), \dots, \mathcal{Y4}(\cdot), \mathcal{E}(\cdot)$ são mapeamentos lineares.

A relaxação SDP apresentada é baseada no método de relaxação de Shor (SHOR, 1987), o qual provê um limitante inferior do problema original tal como é explicado na seção 2.6, sempre que o domínio do problema atenda à Hipótese 1.1 de (ANJOS; LASSERRE, 2012), em que o domínio é compacto e constitui um conjunto semi-algébrico. Como consequência disso, o problema atende ao Teorema 1.12 (a) de (ANJOS; LASSERRE, 2012). Outra colocação importante é que a função-objetivo apresentada é uma função definida positiva, tal como pode-se observar na Figura 6, e uma relaxação convexa sobre o domínio do problema original resulta em limitantes inferiores do problema original. No entanto, essa relaxação SDP não garante encontrar soluções factíveis no final da árvore de B&B para o problema original MIQCQP devido à relaxação da restrição de rank-1. Entretanto, devido à representação bloco-diagonal de $\mathbf{X1}$, é possível obter matrizes de rank baixo, e isto também pode ser explicado através da equação que relaciona o número de restrições R e o rank das matrizes-solução de um problema SDP: $\text{rank}(\mathbf{X})(\text{rank}(\mathbf{X}) + 1)/2 \leq R$ (BARVINOK, 2001). Resultados computacionais na seção mostram que em todos os casos é obtida uma solução factível e de boa qualidade para o problema POCP.

3.5.1 Matrizes SDP

Na nomenclatura utilizada a seguir, será feito o uso das seguintes funções que fornecem a posição de um elemento nos vetores de variáveis dada uma tripla (t, h, u) :

$$\varrho_1(t, h, u) = \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{N_H} \sum_{k=1}^{Nu_{i,j}} \mathbf{1}_{(i,j,k) \in \Omega_1(\mathbf{x})} + \sum_{j=1}^{h-1} \sum_{k=1}^{Nu_{t,j}} \mathbf{1}_{(t,j,k) \in \Omega_1(\mathbf{x})} + \sum_{k=1}^u \mathbf{1}_{(t,h,k) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \quad (3.44)$$

$$\varrho_2(t, h, u) = \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=1}^{N_H} \sum_{k=1}^{Nu_{i,j}} \mathbf{1}_{(i,j,k) \in \Omega_2(\mathbf{x})} + \sum_{j=1}^{h-1} \sum_{k=1}^{Nu_{t,j}} \mathbf{1}_{(t,j,k) \in \Omega_2(\mathbf{x})} + \sum_{k=1}^u \mathbf{1}_{(t,h,k) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \quad (3.45)$$

A matriz $\mathbf{X1} \in \mathbb{R}^{3 \cdot |\Omega_1(\mathbf{x})| \times 3 \cdot |\Omega_1(\mathbf{x})|}$ não é exatamente o produto interno tal como foi colocado anteriormente, e por praticidade no armazenamento de matrizes bloco diagonais, tem-se que:

$$\mathbf{X1} = \sum_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \mathbf{x1}_{t,h,u} \mathbf{x1}_{t,h,u}^\top \quad (3.46)$$

onde $\boldsymbol{\xi}_i$ é o vetor normalizado básico do espaço euclidiano de dimensões apropriadas (neste caso $\mathbb{R}^{|\Omega_1(\mathbf{x})|}$). O vetor $\mathbf{x1}_{t,h,u} \in \mathbb{R}^3$ tem a seguinte forma:

$$\mathbf{x1}_{t,h,u} = [\Delta P_{t,h,u}, x_{t,h,u}, \Delta Q_{t,h,u}]^\top \quad (3.47)$$

A estrutura da matriz $\mathbf{X2} \in \mathbb{R}^{(|\Omega_2(\mathbf{x})|+1) \times (|\Omega_2(\mathbf{x})|+1)}$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{X2} = & \sum_{(t_1,h_1,u_1) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \sum_{(t_2,h_2,u_2) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \left(\mathbf{x2}_{t_1,h_1} \mathbf{x2}_{t_2,h_2}^\top + \mathbf{x2}_{t_2,h_2} \mathbf{x2}_{t_1,h_1}^\top \right) \\ & + \sum_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} v \left(\mathbf{x2}_{t,h} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{X2})}^\top + \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{X2})} \mathbf{x2}_{t,h}^\top \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{x2}_{t,h} = \Delta P_{t,h} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \quad (3.49)$$

O vetor $\mathbf{x3} \in \mathbb{R}^{|\Omega_2(\mathbf{x})|}$ tem a seguinte forma:

$$x3_{\varrho_2(t,h,u)} = \Delta Q_{t,h,u} \quad (3.50)$$

para todo $(t, h, u) \in \Omega_2(\mathbf{x})$.

A estrutura da matriz $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$ tem a seguinte forma:

$$\mathbf{V} = \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\xi}_t \boldsymbol{\xi}_t^\top \otimes \mathbf{v}_t \mathbf{v}_t^\top \quad (3.51)$$

onde:

$$\mathbf{v}_t = [e_{t,1}, \dots, e_{t,N_B}, f_{t,1}, \dots, f_{t,N_B}]^\top \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B} \quad (3.52)$$

Finalmente o vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{|\Omega_1(\mathbf{x})|}$ tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{y} = \left\{ y_{\varrho_1(t,h,u)} \right\} ; \forall (t, h, u) \in \Omega_1(\mathbf{x}) \quad (3.53)$$

3.5.2 Função-objetivo

A matriz $\mathbf{C1} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x1}) \times \dim(\mathbf{x1})}$, que representa os custos do uso da água para as variáveis indefinidas em $\Omega_1(\mathbf{x})$ tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{C1} = \sum_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \lambda_h \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C1}}_{h,u} \quad (3.54)$$

sendo que a submatriz $\widehat{\mathbf{C1}}_{h,u} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é definida para cada usina h e configuração de unidades u :

$$\widehat{\mathbf{C1}}_{h,u} = \begin{bmatrix} \alpha_{h,u} & \frac{\hat{\beta}_{h,u}}{2} & 0 \\ \frac{\hat{\beta}_{h,u}}{2} & \hat{\gamma}_{h,u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

A matriz $\mathbf{C2} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x2}) \times \dim(\mathbf{x2})}$ que representa os custos de uso da água para as variáveis definidas em $\Omega_2(\mathbf{x})$ tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{C2} = \sum_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \lambda_h \left(\alpha_{h,u} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)}^\top + \frac{\hat{\beta}_{h,u}}{2} \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})}^\top + \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)}^\top \right) \right) \quad (3.56)$$

A constante Υ é a soma das constantes $\hat{\gamma}_{t,h,u} \forall (t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})$:

$$\Upsilon = \sum_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \lambda_h \cdot \hat{\gamma}_{t,h,u} \quad (3.57)$$

O vetor dos custos de partida $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{y})}$ é definido como:

$$c_{\varrho_1(t,h,u)} = \delta_h ; \forall (t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x}) \quad (3.58)$$

3.5.3 Balanço de Potência

A geração de potência ativa e reativa para a usina h com u unidades ligadas para as variáveis indefinidas é representado pelas submatrizes $\widehat{\mathbf{A1}}_{h,u}$ e $\widehat{\mathbf{A3}}_{h,u} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, respectivamente, com a seguinte estrutura:

$$\widehat{\mathbf{A1}}_{h,u} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \underline{P}_{h,u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \widehat{\mathbf{A3}}_{h,u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Q}_{h,u} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

O mapeamento linear $\mathcal{A1}(\cdot)$ e $\mathcal{A3}(\cdot)$ tem como elementos as matrizes $\mathbf{A1}_r$ e $\mathbf{A3}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x1}) \times \dim(\mathbf{x1})}$, respectivamente, as quais são definidas como:

$$\mathbf{A1}_r = \sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A1}}_{h,u} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{3}_r = \sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A}\mathbf{3}}_{h,u} \quad (3.61)$$

O mapeamento linear $\mathcal{A}\mathbf{2}(\cdot)$ representa as gerações de potência ativa das usinas com variável definida tendo como elementos as matrizes $\mathbf{A}\mathbf{2}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x}\mathbf{2}) \times \dim(\mathbf{x}\mathbf{2})}$, definidas como:

$$\mathbf{A}\mathbf{2}_r = \sum_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x}\mathbf{2})}^\top + \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x}\mathbf{2})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)}^\top \right) \quad (3.62)$$

Para representar as injeções de potência ativa provenientes das linhas de transmissão é usado o mapeamento linear $\mathcal{Y}_1(\cdot)$, que tem como elementos as matrizes $\mathbf{Y}\mathbf{1}_r \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$, definidas como:

$$\mathbf{Y}\mathbf{1}_r = \mathbf{Y}_i = - \sum_{j \in \Omega_i} \mathbf{Y}_{i,j} \quad (3.63)$$

onde:

$$\mathbf{Y}_{i,j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_{i,j} + G_{i,j}^\top & B_{i,j}^\top - B_{i,j} \\ B_{i,j} - B_{i,j}^\top & G_{i,j} + G_{i,j}^\top \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$G_{i,j} = g_{i,j} \left(\boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top - \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_j^\top \right) \text{ e } B_{i,j} = b_{i,j} \left(\boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top - \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_j^\top \right) \quad (3.65)$$

Para representar as injeções de potência reativa provenientes das linhas de transmissão é usado o mapeamento linear $\mathcal{Y}\mathbf{2}(\cdot)$, que tem como elementos as matrizes $\mathbf{Y}\mathbf{2}_r \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$, definidas como:

$$\mathbf{Y}\mathbf{2}_r = \overline{\mathbf{Y}}_i = - \sum_{j \in \Omega_i} \overline{\mathbf{Y}}_{i,j} \quad (3.66)$$

onde:

$$\overline{\mathbf{Y}}_{i,j} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_{i,j} + B_{i,j}^\top & G_{i,j}^\top - G_{i,j} \\ G_{i,j} - G_{i,j}^\top & B_{i,j} + B_{i,j}^\top \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Os vetores $\mathbf{a}\mathbf{1}$ e $\mathbf{a}\mathbf{2}$ representam as demandas ativa e reativa, respectivamente, subtraídas as gerações mínimas das usinas com variáveis definidas:

$$a1_r = Pd_{t,i} - \sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{\Omega_2(h,u)} \cdot \underline{P}_{t,h,u} \quad (3.68)$$

$$a2_r = Qd_{t,i} - \sum_{h \in \Psi_i} \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{\Omega_2(h,u)} \cdot \underline{Q}_{t,h,u} \quad (3.69)$$

onde $r = (t-1) \cdot N_B + i$ para todo $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, N_B$.

3.5.4 Tensão na Barra Slack

A regulação de tensão por meio da barra slack é representada pelo mapeamento linear $\mathcal{Y}3(\cdot)$, que tem como elementos as matrizes $\mathbf{Y}3_t \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$, definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}3_t &= \boldsymbol{\xi}_{i_{slack}} \boldsymbol{\xi}_{i_{slack}}^\top \\ \mathbf{Y}3_{T+t} &= \boldsymbol{\xi}_{N_B+i_{slack}} \boldsymbol{\xi}_{N_B+i_{slack}}^\top \end{aligned} \quad (3.70)$$

As componentes do vetor $\mathbf{a}4 \in \mathbb{R}^{2 \cdot T}$ são dadas por:

$$a4_t = 1 ; a4_{T+t} = 0 \quad (3.71)$$

para todo $t = 1, \dots, T$.

3.5.5 Limites nas Linhas de Transmissão

Para representar os fluxos de potência ativa numa linha de transmissão, é usado o mapeamento linear $\mathcal{Y}4(\cdot)$, que tem como elementos as matrizes $\mathbf{Y}4_r \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$, definidas como:

$$\mathbf{Y}4_r = \mathbf{Y}_{i,j} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{Y}4_{T \cdot N_L + r} = -\mathbf{Y}_{i,j} \quad (3.73)$$

O vetor $\mathbf{b}5 \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_L + 2 \cdot N_B}$ tem como elementos:

$$b5_r = b5_{T \cdot N_L + r} = \overline{P}f_{i,j} \quad (3.74)$$

onde $r = N_L(t-1) + l$ para todo $t = 1, \dots, T$; $(i, j) \in \mathcal{L}$.

3.5.6 Limites de Tensão

Para obter as variáveis de tensão da barra i e, posteriormente, limitá-las, é utilizado o mapeamento linear $\mathcal{Y}5(\cdot)$, que contém matrizes do tipo $\mathbf{Y}5_{2 \cdot N_L + r} \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B \times 2 \cdot N_B}$, definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}5_r &= \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top + \boldsymbol{\xi}_{N_B+i} \boldsymbol{\xi}_{N_B+i}^\top \\ \mathbf{Y}5_{T \cdot N_B + r} &= -\left(\boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top + \boldsymbol{\xi}_{N_B+i} \boldsymbol{\xi}_{N_B+i}^\top \right) \end{aligned} \quad (3.75)$$

e as componentes do vetor $\mathbf{b}6 \in \mathbb{R}^{2 \cdot N_B}$ são:

$$b6_r = \overline{V}_i ; b6_{N_B \cdot T + r} = -\underline{V}_i \quad (3.76)$$

onde $r = (N_B - 1)t + i$ para todo $t = 1, \dots, T$; $i = \{1, \dots, N_B\} \setminus i_{slack}$.

3.5.7 Metas de Geração do Longo Prazo

Para obter as metas de geração de potência ativa de cada período t para uma usina h e configuração de máquinas u com variáveis não definidas, é usado o mapeamento linear $\mathcal{A4}(\cdot)$, o qual contém matrizes do tipo $\mathbf{A4}_h \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x1}) \times \dim(\mathbf{x1})}$, definidas assim:

$$\mathbf{A4}_h = \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A1}}_{h,u} \quad (3.77)$$

Para obter a geração de potência ativa de cada período para uma usina h com variáveis definidas é usado o mapeamento linear $\mathcal{A5}(\cdot)$, que contém matrizes do tipo $\mathbf{A5}_h \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x2}) \times \dim(\mathbf{x2})}$, definidas como:

$$\mathbf{A5}_h = \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})}^\top + \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)}^\top \right) \quad (3.78)$$

em que a componente do vetor $\mathbf{a3} \in \mathbb{R}^{N_H-1}$ que contém as metas, subtraídos os limites mínimos de geração de potência ativa das usinas com variáveis definidas, é definida por:

$$a3_h = m_h - \sum_{t=1}^T \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot \underline{P}_{h,u} \quad (3.79)$$

para todo $h = \{1, \dots, N_H\} \setminus h_{slack}$.

3.5.8 Condição Auxiliar

Para garantir a condição auxiliar é usado o mapeamento linear $\mathcal{A6}(\cdot)$, o qual é definido pela matriz $\mathbf{A6}_1 \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x2}) \times \dim(\mathbf{x2})}$ como:

$$\mathbf{A6}_1 = \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})}^\top \quad (3.80)$$

3.5.9 Limites de Geração

Os limites máximos de geração de potência ativa e reativa são representados pelas matrizes $\overline{\mathbf{P}}_{h,u}$ e $\overline{\mathbf{Q}}_{h,u} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, cujas estruturas são dadas por:

$$\overline{\mathbf{P}}_{h,u} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\overline{\Delta P}_{h,u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathbf{Q}}_{h,u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{\Delta Q}_{h,u} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

O mapeamento linear $\mathcal{B1}(\cdot)$ contém matrizes do tipo $\mathbf{B1}_{\varrho_1(t,h,u)} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x1}) \times \dim(\mathbf{x1})}$, definidas como:

$$\mathbf{B1}_{\varrho_1(t,h,u)} = \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \overline{\mathbf{P}}_{h,u} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{B1}_{|\Omega_1(\mathbf{x})| + \varrho_1(t,h,u)} = \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \overline{\mathbf{Q}}_{h,u} \quad (3.83)$$

$\forall (t, h, u) \in \Omega_1(\mathbf{x})$ e o vetor $\mathbf{b1} \in \mathbb{R}^{2 \cdot |\Omega_1(t, h, u)|} = \mathbf{0}$.

Para os limites de geração de potência ativa das usinas com variáveis definidas no tempo t e as usinas h , o mapeamento linear $\mathcal{B2}(\cdot)$, que contém as matrizes $\mathbf{B2}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x2}) \times \dim(\mathbf{x2})}$, apresenta a seguinte estrutura:

$$\mathbf{B2}_{\varrho_2(t, h, u)} = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t, h, u)} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})}^\top + \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t, h, u)}^\top \right) \quad (3.84)$$

$\forall (t, h, u) \in \Omega_2(\mathbf{x})$. O vetor $\mathbf{b2} \in \mathbb{R}^{|\Omega_2(\mathbf{x})|}$, que contém os limites máximos para as usinas h no tempo t , tem as componentes $b2_{\varrho_2(t, h, u)}$:

$$b2_r = \overline{\Delta P}_{t, h, u} \quad (3.85)$$

Para a componente reativa, os seguintes limites estão representados por $\mathbf{b3} \in \mathbb{R}^{|\Omega_2(\mathbf{x})|}$ com componentes $b3_{\varrho_2(t, h, u)}$:

$$b3_{\varrho_2(t, h, u)} = \overline{\Delta Q}_{t, h, u} \quad (3.86)$$

$\forall (t, h, u) \in \Omega_2(\mathbf{x})$.

3.5.10 Dinâmica do Reservatório

Tendo as usinas h com a configuração de máquinas u indefinidas estas são representadas na dinâmica do reservatório mediante o mapeamento linear $\mathcal{B3}(\cdot)$ que tem as matrizes $\mathbf{B3}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X1}) \times \dim(\mathbf{X1})}$ com a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \mathbf{B3}_r = & \vartheta \sum_{i=1}^t \left(\sum_{u=1}^{Nu_{i, h}} \mathbf{1}_{(i, h, u) \in \Omega_1(i, h, u)} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(i, h, u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(i, h, u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C1}}_{h, u} \right. \\ & \left. + \sum_{\bar{h} \in \Theta_h} \sum_{u=1}^{Nu_{i-\tau, \bar{h}}} \mathbf{1}_{(i-\tau, \bar{h}, u) \in \Omega_1(i-\tau, \bar{h}, u)} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(i-\tau, \bar{h}, u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(i-\tau, \bar{h}, u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C1}}_{\bar{h}, u} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{B3}_{T \cdot N_H + r} = -\mathbf{B3}_r \quad (3.88)$$

Similarmente, para usinas com variáveis definidas é usado o mapeamento linear $\mathcal{B4}(\cdot)$, $\mathbf{B4}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X2}) \times \dim(\mathbf{X2})}$ definido por:

$$\mathbf{B4}_r = \vartheta \sum_{i=1}^t \left(\widehat{\mathbf{B4}}_{i, h} + \sum_{\bar{h} \in \Theta_h} \widehat{\mathbf{B4}}_{i-\tau, \bar{h}} \right) \quad (3.89)$$

$$\mathbf{B4}_{T \cdot N_H + r} = -\mathbf{B4}_{\varrho_2(t, h, u)} \quad (3.90)$$

sendo que a matriz $\widehat{\mathbf{B4}}_{t,h} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x2})}$ é definida como:

$$\widehat{\mathbf{B4}}_{t,h} = \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \left(\alpha_{h,u} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)}^\top + \frac{\widehat{\beta}_{h,u}}{2} \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})}^\top + \boldsymbol{\xi}_{\dim(\mathbf{x2})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_2(t,h,u)}^\top \right) \right) \quad (3.91)$$

e as componentes do vetor $\mathbf{b4} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ são definidos como:

$$b4_r = \bar{\nu}_h - \nu_{oh} - \vartheta \sum_{i=1}^t \left(af_{h,i} - s_h + \sum_{\tilde{h} \in \Theta_h} \left(\sum_{u=1}^{Nu_{i-\tau,h}} \mathbf{1}_{(i-\tau,\tilde{h},u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \cdot \widehat{\gamma}_{\tilde{h},u} + s_{\tilde{h}} \right) \right) \quad (3.92)$$

$$b4_{T \cdot N_H + r} = \bar{\nu}_h - \nu_h - b4_r$$

onde $r = N_H \cdot (t - 1) + h$ para todo $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.5.11 Configuração Única de Unidades

Para obter as variáveis de status das configurações de unidades e colocá-las na equação de configuração única de unidades, utiliza-se o mapeamento linear $\mathcal{A7}(\cdot)$ composto pelas matrizes $\mathbf{A7}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x2})}$, que apresentam a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A7}_r = \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A7}} \quad (3.93)$$

onde a matriz $\widehat{\mathbf{A7}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é dada por:

$$\widehat{\mathbf{A7}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

e as componentes do vetor $\mathbf{a5} \in \mathbb{R}^{|\{ \exists u \setminus (i,j,u) \in \Omega_1(\mathbf{x}) \}|}$ são:

$$a5_r = 1 \quad (3.95)$$

onde $r = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^h \mathbf{1}_{\exists u \setminus (i,j,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})}$ para todo $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.5.12 Custos de Partida

Para extrair as variáveis de decisão e colocá-las nas restrições de partida é usado o mapeamento linear $\mathcal{E}(\cdot)$ composto pelas matrizes $\mathbf{E}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{x})}$, apresentando a seguinte estrutura:

$$\mathbf{E}_r = \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h,u)}^\top - \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t-1,h,u)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t-1,h,u)}^\top \right) \otimes \widehat{\mathbf{E}}_u \quad (3.96)$$

onde a matriz $\hat{\mathbf{E}}_u \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ é:

$$\hat{\mathbf{E}}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Para as variáveis fixadas esta quantidade é conhecida, então o vetor $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ é definido por:

$$\mathbf{g}_r = \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} u \cdot \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} - \sum_{u=1}^{Nu_{t-1,h}} u \cdot \mathbf{1}_{(t-1,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \quad (3.98)$$

onde $r = N_H(t-1) + h$ para todo $t = 1, \dots, T$; $h = 1, \dots, N_H$.

3.6 Algoritmo B&B

O esquema do algoritmo de B&B descrito em (HORST *et al.*, 2000) foi implementado para a busca de soluções ótimas globais para a formulação QCQP do problema POCP. A cada avaliação do nó B&B, uma relaxação SDP é calculada, e $\Omega_1(\mathbf{x})$ e $\Omega_2(\mathbf{x})$ são obtidos a partir do nó anterior. O algoritmo é iniciado com um limite superior infinito UB , e a primeira solução da relaxação SDP (\mathbf{x}_{SDP}^* , com a respectiva função-objetivo fo_{SDP}^*) para $\Omega_2(\mathbf{x}) = \emptyset$ é adicionada à lista de nós $\Lambda = \{\mathbf{x}_i, LB_i\}$. O nó B&B seguinte a ser explorado é escolhido baseado no máximo decremento da função-objetivo. Então, Λ é ordenado do mínimo para o máximo LB . Consequentemente, a variável binária indefinida tem que ser fixada para a avaliação do nó. Escolhe-se, então, a maior indefinição, ou seja, o valor mais próximo a 0,5. A exploração do nó consiste na fixação de uma configuração de despacho de máquinas para uma usina e para um tempo, eliminando-se todas as outras possíveis configurações da mesma usina e tempo. Se a solução da nova relaxação SDP ($\hat{\mathbf{x}}$ com função-objetivo \hat{fo}) é inteira e menor que UB , então a nova solução incumbente é encontrada (\mathbf{x}^* com a função-objetivo fo^*), e os nós em Λ com LB maiores que a nova incumbente podem ser eliminados—haja vista que a formulação SDP é convexa, e UB é então atualizada. Do contrário, a solução do nó SDP é adicionada à lista Λ . O algoritmo termina quando não existirem mais nós a serem explorados.

Em cada nó de B&B, apenas os valores de $x_{t,h,u}$ são relevantes na determinação dos conjuntos $\Omega_1(\mathbf{x})$ e $\Omega_2(\mathbf{x})$. A técnica para obtenção dessas variáveis consiste da observação dos elementos da diagonal $X1_{ii}$ que representam os valores de $x_{t,h,u}^2$. Para obter os valores de $P_{t,h}$ na relaxação final, é usada a última coluna da matriz $\mathbf{X2}$ onde o vetor $P_{t,h}$, 1 aparece. Para a matriz \mathbf{V} , os valores importantes para nossos resultados são dados pela raiz quadrada da soma da diagonal $e_{ii}^2 + f_{ii}^2$, com a qual obtém-se o módulo da tensão, e, com a raiz quadrada de $e_{i,j}^2 / f_{i,j}^2$, obtém-se o ângulo de potência da tensão. Um procedimento semelhante é descrito em (BAI; WEI, 2009).

Algoritmo 3.1 Pseudo-código do algoritmo B&B.

```

1: Resolver o problema SDP e obter  $\mathbf{x}_{SDP}^*$  e  $fo_{SDP}^*$ .
2:  $UB \leftarrow \infty$ , limitante superior.
3:  $\Lambda \leftarrow (\mathbf{x}_{SDP}^*, LB_0 \leftarrow fo_{SDP}^*)$ , lista de nós.
4: while ( $\Lambda \neq \emptyset$ ) do
5:    $i \leftarrow \operatorname{argmin}_{(\mathbf{x}_i, LB_i) \in \Lambda} \{LB_i\}$ , novos nós a explorar.
6:    $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 
7:    $\Omega_1(\mathbf{x}) \leftarrow \{(t, h, u) : x_{t,h,u} \notin \{0, 1\}\}$ 
8:    $\Omega_2(\mathbf{x}) \leftarrow \{(t, h, u) : x_{t,h,u} = 1\}$ 
9:    $(\tilde{t}, \tilde{h}, \tilde{u}) \leftarrow \operatorname{argmin}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \{|x_{t,h,u} - 0.5|\}$ , critério para obter a variável binária a ser
      fixada.
10:  for all  $\{u : (\tilde{t}, \tilde{h}, u) \in \Omega_1(\mathbf{x})\}$  do
11:    for all  $\{u_1 : (\tilde{t}, \tilde{h}, u_1) \in \Omega_1(\mathbf{x})\}$  do
12:       $x_{\tilde{t}, \tilde{h}, u_1} \leftarrow 0$ , fixar variável.
13:       $\Omega_1(\mathbf{x}) \leftarrow \Omega_1(\mathbf{x}) \setminus (\tilde{t}, \tilde{h}, u_1)$ 
14:    end for
15:     $x_{\tilde{t}, \tilde{h}, u} \leftarrow 1$ , fixar variável.
16:     $\Omega_2(\mathbf{x}) \leftarrow \Omega_2(\mathbf{x}) \cup (\tilde{t}, \tilde{h}, u)$ 
17:    resolver o SDP e obter  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $LB \leftarrow \widehat{fo}$ .
18:    if ( $LB < UB$ ) then
19:      if ( $\Omega_1(\hat{\mathbf{x}}) = \emptyset$ ) then
20:         $UB \leftarrow LB$ 
21:         $\mathbf{x}^* \leftarrow \hat{\mathbf{x}}$ , atualizar a solução incumbente.
22:         $fo^* \leftarrow \widehat{fo}$ 
23:        for ( $j \leftarrow \{1 \dots |\Lambda|\}$ ) do
24:          if ( $UB \leq LB_j$ ) then
25:             $\Lambda \leftarrow \Lambda \setminus (\mathbf{x}_j, LB_j)$ 
26:          end if
27:        end for
28:      else
29:         $\Lambda \leftarrow \Lambda \cup (\mathbf{x}, LB)$ 
30:      end if
31:    end if
32:  end for
33: end while
34: return ( $\mathbf{x}^*, fo^*$ ).

```

3.6.1 Soluções Factíveis na Árvore de B&B

Pode-se observar que se no nó k tem-se a solução $x_{t,h,u}^{(k)}, P_{t,h,u}^{(k)}$ factível, e, num dos nós seguintes $k+1$, com o despacho de potência igual a $P_{t,h,u}^{(k)}$, a solução do próximo estágio tem ao menos uma configuração factível $x_{t,h,u}^{(k+1)}, P_{t,h,u}^{(k+1)}$. Por exemplo, explorando-se a usina \tilde{h} no tempo \tilde{t} (linhas 10-32 do algoritmo de B&B), a solução factível no nó k satisfaz a seguinte equação:

$$P_{\tilde{t},\tilde{h}}^{(k)} = \sum_{u=1}^{Nu_{\tilde{h}}} \left(\Delta P_{t,h,u}^{(k)} \cdot x_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{(k)} + \underline{P}_{\tilde{h},u} \cdot x_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{2(k)} \right) \leq \sum_{u=1}^{Nu_{\tilde{h}}} \overline{P}_{\tilde{h},u} \cdot x_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{2(k)} \quad (3.99)$$

onde $P_{\tilde{t},\tilde{h}}^{(k)}$ é a solução para o despacho de potência sem configuração definida, mas factível do ponto de vista de atendimento da carga:

$$\sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} x_{t,h,u}^2 = 1 \quad (3.100)$$

$$\sum_{u=1}^{Nu_{\tilde{h}}} \overline{P}_{\tilde{h},u} \cdot x_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{2(k)} = \overline{P}_{\tilde{h}}^{(k+1)} - \sum_{u=1}^{Nu_{\tilde{h}}} \left(\overline{P}_{\tilde{h}}^{(k+1)} - \overline{P}_{\tilde{h},u} \right) x_{\tilde{t},\tilde{h},u}^2 \quad (3.101)$$

$$\rightarrow P_{\tilde{t},\tilde{h}}^{(k)} \leq \sum_{u=1}^{Nu_{\tilde{h}}} \overline{P}_{\tilde{h},u} \cdot x_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{2(k)} \leq \overline{P}_{\tilde{h}}^{(k+1)} \quad (3.102)$$

onde $\overline{P}_{\tilde{t},\tilde{h}}^{(k+1)} = \max_u \{ \mathbf{1}_{(\tilde{t},\tilde{h},u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \overline{P}_{\tilde{h},u} \}$. Um procedimento similar pode ser feito para o limite mínimo $\underline{P}_{\tilde{t},\tilde{h}}^{(k+1)} = \min_u \{ \mathbf{1}_{(\tilde{t},\tilde{h},u) \in \Omega_2(\mathbf{x})} \underline{P}_{\tilde{h},u} \}$. Então as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\underline{P}_{\tilde{h}}^{(k+1)} \leq P_{\tilde{t},\tilde{h}}^{(k)} \leq \overline{P}_{\tilde{h}}^{(k+1)} \quad (3.103)$$

Então é possível ter $P_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{(k+1)} = P_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{(k)}$ com uma configuração fixada dentro do algoritmo de B&B. Se $P_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{(k+1)} = P_{\tilde{t},\tilde{h},u}^{(k)}$, então a solução é factível para as equações de balanço de potência ativa, assim como para metas de geração de longo prazo. A factibilidade das desigualdades de limites de volume de armazenamento é garantida desde que as metas de longo prazo estejam corretamente calculadas e exista uma configuração factível.

3.7 Heurística de Arredondamento

Nesta seção é apresentada uma heurística de arredondamento da primeira relaxação semidefinida do problema (3.44). Este problema, por ser de grande porte, apresenta uma convergência lenta no momento de resolver mediante o método especificado no algoritmo 3.2. O objetivo do POCP é maximizar a eficiência do uso da água e minimizar os custos unitários de partida na operação diária de várias usinas hidrelétricas sujeitas a restrições de operação do reservatório, assim como a dinâmica de conservação de água do reservatório, e as metas de curto prazo. Restrições de transmissão são representadas por um modelo de fluxo de potência AC aproximada. No método aqui proposto, o programa matemático está equivalentemente formulado como um problema resolvido pela relaxação QCQP convexa e, posteriormente, resolvido como um problema de programação semidefinida, seguido por uma solução de MILP de despacho de unidades indefinidas pertencentes ao conjunto $\Omega_1(\mathbf{x})$, bem como um processo de redução de classificação. A

eficácia da heurística de arredondamento é comparada às soluções B&B, a qual garante uma solução ótima.

Em (HELBERG, 2000) é mostrado como um problema de otimização combinatorial 0 – 1 pode ser transformado num problema do tipo *max-cut*. Nessa técnica, é possível usar uma heurística de arredondamento baseada num hiperplano de corte aleatório, como formulado por (GOEMANS; WILLIAMSON, 1995). Qualquer que seja o critério de escolha do hiperplano de corte que atenda às condições do método aleatório mencionado como, por exemplo, selecionando uma solução factível a partir da solução relaxada, obtém-se a mesma garantia de subotimalidade que aquela proporcionada pelo método de (GOEMANS; WILLIAMSON, 1995). No Algoritmo 3.2 é descrita a heurística de arredondamento após a primeira relaxação.

Algoritmo 3.2 Algoritmo de solução

- 1: Resolver o problema (3.44) para obter \tilde{p}, \tilde{x}
 - 2: $\Omega_1(\tilde{\mathbf{x}}) \leftarrow \{(t, h, u) : \tilde{x}_{t,h,u} \notin \{0, 1\}\}$
 - 3: $\Omega_2(\tilde{\mathbf{x}}) \leftarrow \{(t, h, u) : \tilde{x}_{t,h,u} = 1\}$
 - 4: Dado $\tilde{p}_{t,h} \leftarrow \sum_{u=1}^{N_{U_{t,h}}} \tilde{p}_{t,h,u} \cdot \tilde{x}_{t,h,u}$
 - 5: Resolver o MILP (3.107) para $\tilde{p}, \tilde{x} \in \Omega_2(\tilde{\mathbf{x}})$ obtendo $x^* \in \{0, 1\}$
 - 6: Resolver o FPO (3.108) para x^* obtendo $\hat{p}, \hat{q}, \hat{e}, \hat{f}$
 - 7: **Return** $p^*, x^*, q^*, y^*, e^*, f^*$
-

3.7.1 Solução dos Despachos de Unidades Indefinidas

Um despacho factível \tilde{p} é obtido a partir da solução da relaxação semidefinida (3.44), que contém diferentes possibilidades de configurações de despacho de máquinas representados pelo conjunto $\Omega_1(\tilde{\mathbf{x}}) \doteq \{(t, h, u) : 0 < \tilde{x}_{t,h,u} < 1\}$. A solução apresenta então a seguinte forma:

$$P_{t,h}^* = \sum_{u=1}^{N_{U_{t,h}}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\mathbf{x})} \cdot (\Delta P_{t,h}^* + \underline{P}_h \cdot x_{t,h}^*) \quad (3.104)$$

Cada uma das configurações indefinidas tem custos de uso da água, além dos custos de partida associados:

$$WC_{t,h}(\Delta P_{t,h,u}^*, x_{t,h,u}^*) = \lambda_h \left(\alpha_{h,u} \cdot P_{t,h}^{*2} + \beta_{h,u} \cdot P_{t,h}^* + \gamma_{h,u} \cdot x_{t,h,u}^* \right) \quad (3.105)$$

$$SC_{t,h}(y_{t,h}^*) = \delta_h \cdot y_{t,h}^* \quad (3.106)$$

Portanto, para a escolha da melhor configuração u para uma determinada geração $P_{t,h}^*$, formula-se um MILP apenas com variáveis de configuração de unidades. Este novo problema tomará como domínio o conjunto $\Omega_1(\mathbf{x})$ sobre as restrições em que aparece

somente o despacho de máquinas. Tais restrições são aquelas de configuração única de unidades (3.38) e partida de unidades (3.39):

$$\begin{aligned}
 \min_{x \in \Omega_1(\tilde{\mathbf{x}}), y} \quad & \sum_{\substack{(t,h,u) \\ \in \Omega_1(\tilde{\mathbf{x}})}} WC_{t,h}(\Delta P_{t,h,u}^*, x_{t,h,u}^*) \cdot x_{t,h,u} + \sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^{N_H} \delta_h \cdot y_{t,h} \\
 \text{s. a.} \quad & \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\tilde{\mathbf{x}})} \cdot x_{t,h,u} = 1 \\
 & \sum_{u=1}^{Nu_{t,h}} \left(\mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_1(\tilde{\mathbf{x}})} \cdot u \cdot x_{t,h,u} + \mathbf{1}_{(t,h,u) \in \Omega_2(\tilde{\mathbf{x}})} \cdot u \right) \\
 & - \sum_{u=1}^{Nu_{t-1,h}} \left(\mathbf{1}_{(t-1,h,u) \in \Omega_1(\tilde{\mathbf{x}})} \cdot u \cdot x_{t-1,h,u} + \mathbf{1}_{(t-1,h,u) \in \Omega_2(\tilde{\mathbf{x}})} \cdot u \right) \leq y_{t,h}
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

para $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.7.2 Re-otimização do OPF

Como o despacho de geração de potência ativa $P_{t,h}^*$ não foi atualizado e otimizado para a configuração de unidades $u_{t,h}^*$ encontrada ao resolver-se o problema (3.107), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{V}, \mathbf{X5}, \mathbf{x6}} \quad & \mathbf{C3} \bullet \mathbf{X5} \\
 \text{s. a.} \quad & \mathbf{a6} = \mathcal{A8}(\mathbf{X5}) + \mathcal{Y1}(\mathbf{V}) \quad \text{Balanço de potência ativa.} \\
 & \mathbf{a7} = \mathbf{x6} + \mathcal{Y2}(\mathbf{V}) \quad \text{Balanço de potência reativa.} \\
 & \mathbf{a8} = \mathcal{A9}(\mathbf{X5}) \quad \text{Metas de longo prazo.} \\
 & \mathbf{a9} = \mathcal{A10}(\mathbf{X5}) \quad \text{Condição auxiliar.} \\
 & \mathbf{0} \geq \mathcal{B5}(\mathbf{X5}) \quad \text{Limites de geração ativa.} \\
 & \mathbf{b6} \geq \mathbf{x6} \quad \text{Limites de geração reativa.} \\
 & \mathbf{b7} \geq \mathcal{B6}(\mathbf{X5}) \quad \text{Dinâmica do reservatório.} \\
 & \mathbf{0} \preceq \mathbf{V}, \mathbf{X5} \\
 & \mathbf{0} \leq \mathbf{x6}
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Algumas expressões que representam o sistema de transmissão são idênticas às presentes nas seções (3.5.4), (3.5.5) e (3.5.6).

3.7.2.1 Matrizes SDP

Na nomenclatura apresentada, foi introduzida uma função pela qual é fornecida a posição de um elemento nos vetores de variáveis dada uma dupla (t, h) :

$$\varrho_3(t, h) = N_H(t - 1) + h \tag{3.109}$$

A matriz $\mathbf{X5} \in \mathbb{R}^{(2T \cdot N_H) \times (2T \cdot N_H)}$ não é exatamente o produto interno, tal como colocado anteriormente, por motivos de praticidade no armazenamento de matrizes bloco-diagonais:

$$\mathbf{X5} = \sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^{N_H} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{X5}}_{t,h} \quad (3.110)$$

onde:

$$\widehat{\mathbf{X5}}_{t,h} = \begin{bmatrix} \Delta P_{t,h}^2 & \Delta P_{t,h} \cdot v_{t,h} \\ \Delta P_{t,h} \cdot v_{t,h} & v_{t,h}^2 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

A estrutura do vetor $\mathbf{x6} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ tem a seguinte forma:

$$\mathbf{x6} = [\Delta Q_{1,1}, \dots, \Delta Q_{1,N_H}, \dots, \Delta Q_{T,1}, \dots, \Delta Q_{T,N_H}]^\top \quad (3.112)$$

Finalmente, a matriz \mathbf{V} é utilizada tal qual na formulação do problema (3.44).

3.7.2.2 Função-Objetivo

A matriz $\mathbf{C3} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X5}) \times \dim(\mathbf{X5})}$, que representa os custos do uso da água, apresenta a seguinte estrutura:

$$\mathbf{C3} = \sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^{N_H} \lambda_h \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C3}}_{t,h} \quad (3.113)$$

em que a submatriz $\widehat{\mathbf{C3}}_{t,h} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida para cada usina h e tempo t é dada por:

$$\widehat{\mathbf{C3}}_{t,h} = \begin{bmatrix} \alpha_{h,u_{t,h}^*} & \frac{\hat{\beta}_{h,u_{t,h}^*}}{2} \\ \frac{\hat{\beta}_{h,u_{t,h}^*}}{2} & \hat{\gamma}_{h,u_{t,h}^*} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

3.7.2.3 Balanço de Potência

A geração de potência ativa e reativa para a usina h no tempo t é representada pelas submatrizes $\widehat{\mathbf{A8}}_{t,h} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ com a seguinte estrutura:

$$\widehat{\mathbf{A8}}_{t,h} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \underline{P}_{h,u_{t,h}^*} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

O mapeamento linear $\mathcal{A8}(\cdot)$ tem como elementos as matrizes $\mathbf{A8}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X5}) \times \dim(\mathbf{X5})}$ as quais são definidas como:

$$\mathbf{A8}_r = \sum_{h \in \Psi_i} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A8}}_{t,h} \quad (3.116)$$

Para representar as injeções de potência ativa e reativa provenientes das linhas de transmissão são usados os mapeamentos lineares $\mathcal{Y1}(\cdot)$ e $\mathcal{Y2}(\cdot)$, respetivamente.

Os vetores **a6** e **a7** representam as demandas ativa e reativa, respectivamente, subtraídas as gerações mínimas das usinas:

$$a6_r = Pd_{t,i} - \sum_{h \in \Psi_i} P_{h,u_h,u_{t,h}^*} \quad (3.117)$$

$$a7_r = Qd_{t,i} - \sum_{h \in \Psi_i} Q_{h,u_h,u_{t,h}^*} \quad (3.118)$$

onde $r = (t - 1) \cdot N_B + i$ para todo $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, N_B$.

3.7.2.4 Metas de Geração do Longo Prazo

Para obter a geração de potência ativa de cada período t para uma usina h , é usado o mapeamento linear $\mathcal{A9}(\cdot)$, o qual contém matrizes do tipo $\mathbf{A9}_h \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X5}) \times \dim(\mathbf{X5})}$, definidas assim:

$$\mathbf{A9}_h = \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_1(t,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A8}}_{t,h} \quad (3.119)$$

Finalmente, a componente do vetor $\mathbf{a8} \in \mathbb{R}^{N_H-1}$ que contém as metas abatidas dos limites mínimos de geração ativa das usinas com variáveis definidas, é expressa como:

$$a8_h = m_h - \sum_{t=1}^T P_{h,u_h,u_{t,h}^*} \quad (3.120)$$

para todo $h = \{1, \dots, N_H\} \setminus h_{slack}$.

3.7.2.5 Condição Auxiliar

Para garantir a condição auxiliar na variável $v_{t,h}$, é usado o mapeamento linear $\mathcal{A10}(\cdot)$, que é definido pela matriz $\mathbf{A10}_{\varrho_3(t,h)} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X5}) \times \dim(\mathbf{X5})}$:

$$\mathbf{A10}_{\varrho_3(t,h)} = \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{A10}} \quad (3.121)$$

onde:

$$\widehat{\mathbf{A10}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Por sua vez, a componente do vetor $\mathbf{a9} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ tem como elementos:

$$a9_{\varrho_3(t,h)} = 1 \quad (3.123)$$

para todo $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.7.2.6 Limites de Geração

Os limites máximos de geração de potência ativa são representados pelas matrizes $\widehat{\mathbf{B5}}_{t,h}$, que apresentam a seguinte estrutura:

$$\widehat{\mathbf{B5}}_{t,h} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\overline{\Delta P}_{h,u_{t,h}^*} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

O mapeamento linear $\mathbf{B5}(\cdot)$ contém matrizes do tipo $\mathbf{B5}_{\varrho_1(t,h,u)} \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X5}) \times \dim(\mathbf{X5})}$, definidas assim:

$$\mathbf{B5}_{\varrho_3(t,h,u)} = \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(t,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{B5}}_{t,h} \quad (3.125)$$

Para os limites de geração potência reativa, o vetor $\mathbf{b6} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ apresenta os seguintes elementos:

$$b6_{\varrho_3(t,h)} = \overline{\Delta Q}_{h,u_{t,h}^*} \quad (3.126)$$

para todo $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

3.7.2.7 Dinâmica do Reservatório

A dinâmica do reservatório para uma usina h no tempo t é representada pelo mapeamento linear $\mathbf{B6}(\cdot)$, cujas matrizes $\mathbf{B6}_r \in \mathbb{R}^{\dim(\mathbf{X5}) \times \dim(\mathbf{X5})}$ apresentam a seguinte estrutura:

$$\mathbf{B6}_{\varrho_3(t,h)} = \vartheta \sum_{i=1}^t \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(i,h)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(i,h)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C3}}_{t,h} + \sum_{\bar{h} \in \Theta_h} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(i-\tau, \bar{h})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_3(i-\tau, \bar{h})}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C3}}_{i, \bar{h}} \right) \quad (3.127)$$

$$\mathbf{B6}_{T \cdot N_H + \varrho_3(t,h)} = -\mathbf{B6}_{\varrho_3(t,h)} \quad (3.128)$$

Finalmente, as componentes do vetor $\mathbf{b7} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_H}$ são definidos como:

$$b7_{\varrho_3(t,h)} = \bar{\nu}_h - \nu_{o_h} - \vartheta \sum_{i=1}^t \left(af_{h,i} - s_h + \sum_{\bar{h} \in \Theta_h} \left(\hat{\gamma}_{\bar{h}, u_{t, \bar{h}}} + s_{\bar{h}} \right) \right) \quad (3.129)$$

$$b7_{T \cdot N_H + \varrho_3(t,h)} = \bar{\nu}_h - \underline{\nu}_h - b7_{\varrho_3(t,h)} \quad (3.130)$$

para todo $t = 1, \dots, T$ e $h = 1, \dots, N_H$.

4 Modelo do POCP Termoelétrico

4.1 POCP Termoelétrico Como um Problema Convexo

O POCP termoelétrico nesta seção é formulado como um problema de programação semidefinida inteira mista. É possível empregar uma técnica geral de Benders ([LAVAEI; LOW, 2012](#)), aplicando-se uma relaxação convexa ao subproblema FPO não-convexo.

$$\begin{aligned}
 & \min_{\substack{\mathbf{P}, \mathbf{V}, \\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}}} && \mathbf{C4} \bullet \mathbf{P} + \mathbf{c2}^T \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{y} + \mathbf{s}^T \mathbf{z} \\
 \text{s. a.} && \mathbf{Ux} - \mathbf{y} \leq \mathbf{a10} && \text{Restrição de partida.} \\
 && -\mathbf{Ux} - \mathbf{z} \leq -\mathbf{a10} && \text{Restrição de parada.} \\
 && \mathbf{M1x} \leq \mathbf{0} && \text{Tempo minimo de ligado.} \\
 && \mathbf{M2x} \leq \mathbf{a7} && \text{Tempo minimo de desligado.} \\
 && \mathcal{A11}(\mathbf{P}) + \mathbf{P1x} + \mathcal{Y1}(\mathbf{V}) = \mathbf{d} && \text{Balanço de potência ativa.} \\
 && \mathcal{A12}(\mathbf{P}) - \mathbf{P1x} \leq \mathbf{0} && \text{Limite de potência ativa.} \\
 && \mathcal{A13}(\mathbf{P}) + \mathbf{P2x} \leq \mathbf{r} && \text{Reserva girante.} \\
 && \mathcal{A14}(\mathbf{P}) + \mathbf{P3x} \leq \mathbf{g1} && \text{Rampa de carga.} \\
 && -\mathcal{A14}(\mathbf{P}) - \mathbf{P3x} \leq \mathbf{g2} && \text{Rampa de carga.} \\
 && \mathcal{Y3}(\mathbf{V}) \leq \mathbf{f} && \text{Limite de fluxos.} \\
 && \mathcal{Y4}(\mathbf{V}) \leq \mathbf{b} && \text{Limite de modulos de tensão.} \\
 && \mathbf{0} \preceq \mathbf{P}, \mathbf{V} \\
 && \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{0, 1\}^{T \cdot N_G}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1.1 Variáveis

O modelo desenvolvido usa a potência ativa $P_{t,g}$ e o incremento de potência ativa $\Delta P_{t,g}$, tomando como referência a potência mínima \underline{P}_g :

$$\Delta P_{t,g} = P_{t,g} - \underline{P}_g \tag{4.2}$$

A matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_G \times 2 \cdot T \cdot N_G}$ é uma matriz bloco-diagonal com matrizes da forma $\mathbf{P}_{t,g} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ na diagonal:

$$\mathbf{P} = \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^T \otimes \mathbf{P}_{t,g} \tag{4.3}$$

onde T e N_G representam o horizonte de programação e o número total de usinas termoelétricas geradoras, respectivamente. E, de maneira similar à seção anterior, é definida a

função $\varrho_4(t, g)$ para uma dada dupla (t, g) :

$$\varrho_4(t, g) = N_G (t - 1) + g \quad (4.4)$$

Os vetores com componentes binárias \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} representam o estado, partida e parada de uma unidade geradora térmica respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_{1,1}, \dots, x_{1,N_G}, \dots, x_{T,1}, \dots, x_{T,N_G}]^\top \in \{0, 1\}^{T \cdot N_G} \\ \mathbf{y} &= [y_{1,1}, \dots, y_{1,N_G}, \dots, y_{T,1}, \dots, y_{T,N_G}]^\top \in \{0, 1\}^{T \cdot N_G} \\ \mathbf{z} &= [z_{1,1}, \dots, z_{1,N_G}, \dots, z_{T,1}, \dots, z_{T,N_G}]^\top \in \{0, 1\}^{T \cdot N_G} \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1.2 Função-Objetivo

Para o custo de combustível associado à geração de potência ativa de uma usina g é usada a matriz $\widehat{\mathbf{C4}}_g \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\widehat{\mathbf{C4}}_g = \begin{bmatrix} \alpha_g & \alpha_g \cdot \underline{p} + \beta_g/2 \\ \alpha_g \cdot \underline{p} + \beta_g/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Esta matriz $\widehat{\mathbf{C4}}_g$ faz parte da matriz $\mathbf{C4} \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_G \times 2 \cdot T \cdot N_G}$, cuja estrutura é dada por:

$$\mathbf{C4} = \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \otimes \widehat{\mathbf{C4}}_g \quad (4.7)$$

$$\mathbf{c2} = [c_{2,1}, \dots, c_{2,N_G}, \dots, c_{2,1}, \dots, c_{2,N_G}]^\top \in \mathbb{R}^{T \cdot N_G} \quad (4.8)$$

onde os elementos de $\mathbf{c2}$ são assim definidos:

$$c_{2,g} = \alpha_g \cdot \underline{p}_g^2 + \beta_g \cdot \underline{p}_g + \gamma_g \quad (4.9)$$

Também α_g , β_g e γ_g são coeficientes de custo quadrático de combustível dependente da potência ativa de uma unidade termoeletrica, sendo \mathbf{u} e \mathbf{s} vetores com os coeficientes de custo de arranque e parada.

4.1.3 Restrições

Além das restrições descritas nas equações das seções 3.5.4, 3.5.5 e 3.5.6, o problema está sujeito também aos seguintes conjuntos de restrições.

4.1.3.1 Custo de Geração

Se $0 \preceq \mathbf{P}_{t,g}$ e, em termos de $P_{t,g,1,2} = \Delta P_{t,g}$ e $P_{t,g,2,2} = 1$ da matriz $\mathbf{P}_{t,g}$, tem-se que o determinante de uma matriz semidefinida atende à seguinte propriedade:

$$P_{t,g,1,1} \cdot 1 - P_{t,g,1,2} \cdot P_{t,g,2,1} \geq 0 \quad (4.10)$$

$$\rightarrow P_{t,g,1,1} \geq \Delta P_{t,g}^2 \quad (4.11)$$

Ademais, se $a > 0$, então pode-se deduzir que a restrição:

$$\mathbf{C}_g \bullet \mathbf{P}_{t,g} \geq a_{t,g} \cdot P_{t,g}^2 + b_{t,g} \cdot P_{t,g} \quad (4.12)$$

está implícita em $0 \preceq \mathbf{P}_{t,g}$. Em um processo de minimização, a desigualdade (4.12) estará ativa caso $P_{t,g,1,1}$ não tenha outro limitante inferior maior que o mostrado. Pode-se deduzir que a solução ótima da matriz $\mathbf{P}_{t,g}$ é rank-1, e é representado por:

$$\mathbf{P}_{t,g} = \begin{bmatrix} \Delta P_{t,g}^2 & \Delta P_{t,g} \\ \Delta P_{t,g} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

4.1.3.2 Custos de Arranque e Parada

Para a variável de arranque $y_{t,g}$ num processo de minimização, uma dessas inequações se torna ativa e indica se um arranque aconteceu:

$$x_{t,g} - x_{t-1,g} \leq y_{t,g} \quad \text{e} \quad 0 \leq y_{t,g} \quad (4.14)$$

e, de maneira similar, para o custo de parada representado pela variável $z_{t,g}$:

$$x_{t-1,g} - x_{t,g} \leq z_{t,g} \quad \text{e} \quad 0 \leq z_{t,g} \quad (4.15)$$

A equação (4.14) pode ser expressa em função matricial através de $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(T \cdot N_G) \times (T \cdot N_G)}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - \sum_{t=2}^T \sum_{g=1}^{N_G} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1,g)}^\top \quad (4.16)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $g = 1, \dots, N_G$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade. O vetor $\mathbf{a10}$ tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{a10} = \sum_{g=1}^{N_G} x_{0,g} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \quad (4.17)$$

4.1.3.3 Tempo Mínimo Ligado e Desligado

A restrição de tempo mínimo ligado T_{on} é expressa pela desigualdade (4.18), onde a soma dos estados de ligado (lado esquerdo) depois de um arranque acontecer (lado direito) é igual ao número mínimo de horas $\omega(t, \tau)$ necessárias para estar ligado. A constante T_0 representa o tempo prévio que permaneceu num estado; se este estado é ligado, o valor é positivo e, se o estado é desligado, o valor é negativo.

$$\sum_{j=1}^{\omega(t, T_{on})} x_{j+t-1,g} \geq \omega(t, T_{on}) \left(x_{t,g} - \mathbf{1}_{(t>1)} \cdot x_{t-1,g} \right) \quad (4.18)$$

Para o tempo mínimo desligado T_{off} a expressão é similar:

$$\sum_{j=1}^{\omega(t, T_{off})} (1 - x_{j+t-1, g}) \geq \omega(t, T_{off}) \left(\mathbf{1}_{(t>1)} \cdot x_{t-1, g} - x_{t, g} \right) \quad (4.19)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $g = 1, \dots, N_G$, onde:

$$\omega(t, \tau) = \begin{cases} \min(\tau - T_0, \tau) & : t = 1 \\ \min(\tau, T - t + 1) & : t > 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

Colocando as equações (4.18) e (4.19) em forma matricial obtém-se $\mathbf{M1}$, e $\mathbf{M2} \in \mathbb{R}^{(T \cdot N_G) \times (T \cdot N_G)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M1} = \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} & \left(\omega(t, T_{on}) \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t, g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t, g)}^\top - \mathbf{1}_{(t>1)} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1, g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1, g)}^\top \right) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{\omega(t, T_{on})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(j+t-1, g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(j+t-1, g)}^\top \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M2} = \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} & \left(\omega(t, T_{off}) \left(\mathbf{1}_{(t>1)} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1, g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t, g)}^\top - \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1, g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1, g)}^\top \right) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{\omega(t, T_{off})} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(j+t-1, g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(j+t-1, g)}^\top \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Finalmente, o vetor $\mathbf{a11} \in \mathbb{R}^{T \cdot N_G}$ é definido como:

$$\mathbf{a11} = \sum_{g=1}^{N_G} \omega(t, T_{off}) \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t, g)} \quad (4.23)$$

4.1.3.4 Balanço de Potência

A geração de potência ativa $\mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t, g} + \underline{P}_g x_{t, g}$ e a injeção de fluxo de potência ativa $\mathbf{Y}_i \bullet \mathbf{V}_t$ na barra i fornecem a demanda $d_{t, i}$ no tempo t .

$$\sum_{g \in \Phi_i} \left(\mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t, g} + \underline{P}_g \cdot x_{t, g} \right) + \mathbf{Y}_i \bullet \mathbf{V}_t = d_{t, i} \quad (4.24)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{Y}_i = - \sum_{j \in \Omega_i} \mathbf{Y}_{i, j} \quad (4.26)$$

e Ω_i e Φ_i são os conjuntos de índices de barras e usinas termoelétricas ligadas na barra i , respectivamente.

O mapeamento linear $\mathcal{A}\mathbf{11}(\cdot)$ é composto pelas matrizes $\mathbf{A}\mathbf{11}_r \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_G \times 2 \cdot T \cdot N_G}$, que apresentam a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}\mathbf{11}_r = \sum_{g \in \Phi_i} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \otimes \mathbf{A} \quad (4.27)$$

A matriz $\mathbf{P}\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{(T \cdot N_B) \times (T \cdot N_G)}$ é definida assim:

$$\mathbf{P}\mathbf{1} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_B} \boldsymbol{\xi}_r \left(\sum_{g \in \Phi_i} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \right) \quad (4.28)$$

onde $r = N_B(t-1) + i$ para todo $t = 1, \dots, T$ e $i = 1, \dots, N_B$.

4.1.3.5 Limites de Geração de Potência Ativa

Os limites de geração de potência ativa são representados por:

$$0 \leq \mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t,g} \leq (\bar{p}_g - \underline{p}_g) x_{t,g} \quad (4.29)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $g = 1, \dots, N_G$.

O mapeamento linear $\mathcal{A}\mathbf{12}(\cdot)$ é composto pelas matrizes $\mathbf{A}\mathbf{12}_r \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_G \times 2 \cdot T \cdot N_G}$ com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}\mathbf{12}_r = \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \otimes \mathbf{A} \quad (4.30)$$

A matriz $\overline{\mathbf{P}\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^{(T \cdot N_B) \times (T \cdot N_G)}$ é dada por:

$$\overline{\mathbf{P}\mathbf{1}} = \sum_{t=1}^T \overline{\Delta P}_{t,g} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \quad (4.31)$$

4.1.3.6 Reserva Girante

A disponibilidade de geração de potência ativa SR_t nos geradores ligados no tempo t é expressa como:

$$SR_t \leq \sum_{g=1}^{N_G} \left((\bar{P}_g - \underline{P}_g) \cdot x_{t,g} - \mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t,g} \right) \quad (4.32)$$

O mapeamento linear $\mathcal{A}\mathbf{13}(\cdot)$ é composto pelas matrizes $\mathbf{A}\mathbf{13}_t \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_G \times 2 \cdot T \cdot N_G}$ com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A}\mathbf{13}_t = - \sum_{g=1}^{N_G} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \otimes \mathbf{A} \quad (4.33)$$

A matriz $\overline{\mathbf{P2}} \in \mathbb{R}^{(T \cdot N_B) \times (T \cdot N_G)}$ é dada por:

$$\overline{\mathbf{P2}} = \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \boldsymbol{\xi}_t \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top \quad (4.34)$$

E o vetor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^T$, é dado por elementos:

$$r_t = SR_t \quad (4.35)$$

para $t = 1, \dots, T$.

4.1.3.7 Limite Máximo de Rampa de Carga

Para o limite máximo da rampa de subida, a geração de potência ativa está sujeita à variação máxima RU_g entre as horas t e $t - 1$:

$$\left(\mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t,g} + \underline{P}_g \cdot x_{t,g} \right) - \left(\mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t-1,g} + \underline{P}_g \cdot x_{t-1,g} \right) \leq RU_g \quad (4.36)$$

e a rampa de descida, analogamente, está sujeita a um limite máximo de variação RD_g :

$$\left(\mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t-1,g} + \underline{P}_g \cdot x_{t-1,g} \right) - \left(\mathbf{A} \bullet \mathbf{P}_{t,g} + \underline{P}_g \cdot x_{t,g} \right) \leq RD_g \quad (4.37)$$

O mapeamento linear $\mathbf{A14}(\cdot)$ é composto pelas matrizes $\mathbf{A14}_{\varrho_4(t,g)} \in \mathbb{R}^{2 \cdot T \cdot N_G \times 2 \cdot T \cdot N_G}$ com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{A14}_{\varrho_4(t,g)} = \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top - \mathbf{1}_{(t>1)} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1,g)}^\top \right) \otimes \mathbf{A} \quad (4.38)$$

A matriz $\overline{\mathbf{P3}} \in \mathbb{R}^{(T \cdot N_B) \times (T \cdot N_G)}$ é definida assim:

$$\overline{\mathbf{P3}} = \sum_{t=1}^T \sum_{g=1}^{N_G} \underline{P}_g \left(\boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t,g)}^\top - \mathbf{1}_{(t>1)} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1,g)} \boldsymbol{\xi}_{\varrho_4(t-1,g)}^\top \right) \quad (4.39)$$

Finalmente, os elementos dos vetores $\mathbf{g1}$ e $\mathbf{g2} \in \mathbb{R}^T$ são definidos como abaixo:

$$g1_{\varrho_4(t,g)} = RU_g + \mathbf{1}_{(t=1)} \cdot x_{0,g} \quad (4.40)$$

$$g2_{\varrho_4(t,g)} = RD_g - \mathbf{1}_{(t=1)} \cdot x_{0,g} \quad (4.41)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $g = 1, \dots, N_G$.

4.2 Metodologia de Solução

A metodologia de solução proposta obtém uma solução de baixo rank para o problema equivalente relaxado. Como será possível observar nesta seção, antes da decomposição baseada em Benders semidefinido, obtém-se um despacho de máquinas factível e de geração, mas com o domínio das variáveis de geração numa relaxação convexa. Em (LAVAEI; LOW, 2012), o FPO é perturbado para obter uma solução de rank-2. Neste trabalho, uma técnica de redução de rank aplicada à obtenção das variáveis de tensão, como apresentada adiante, foi utilizada e apresentou bons resultados computacionais.

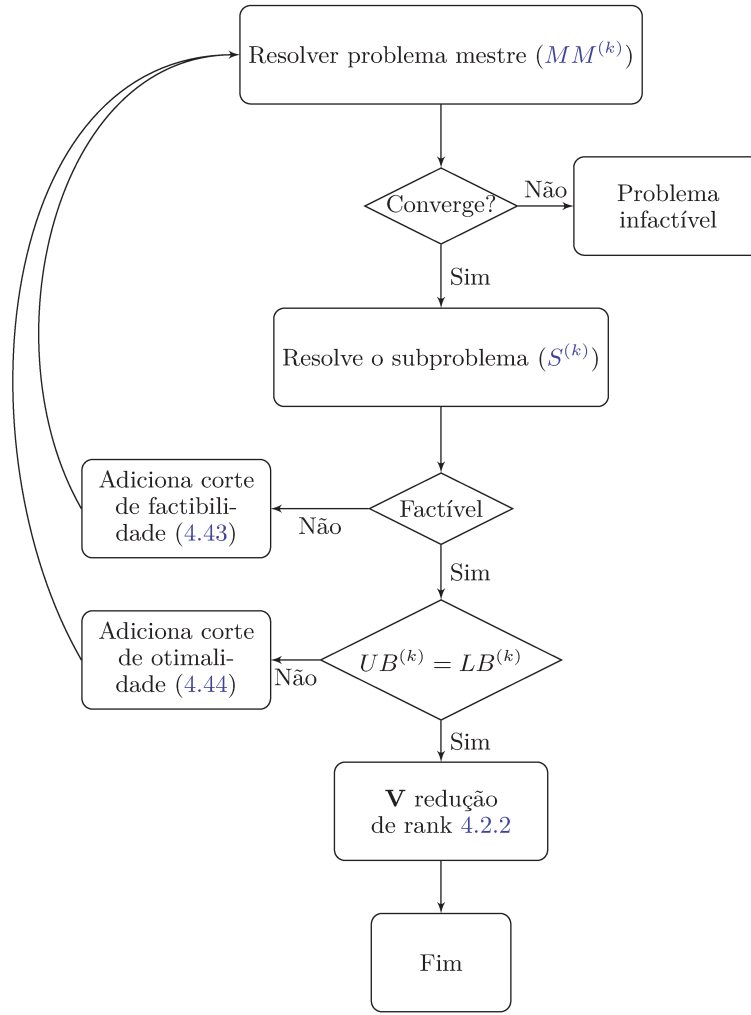


Figura 10 – Esquema do Procedimento.

4.2.1 Decomposição Baseada em Benders

Em (KLENIATI *et al.*, 2010), é mostrada uma decomposição semidefinida de Benders geral para um problema de otimização polinomial. Esta técnica é adaptada ao presente problema de POCP térmico, seguindo a técnica de decomposição de Benders clássica para problemas com variáveis inteiro-mistas (BENDERS, 2005). Nesta seção é apresentada a modificação da técnica aplicada a um problema semidefinido inteiro-misto (MI-SDP). O procedimento completo é mostrado na Figura 10. Em sequência, o problema convexo é representado numa notação matricial.

4.2.1.1 Problema-Mestre de Despacho de Unidades

O problema (4.1) é decomposto num problema-mestre ($M^{(k)}$) e um subproblema ($S^{(k)}$), que receberá soluções do problema-mestre a cada iteração k . Dependendo da natureza da solução do subproblema, se factível ou infactível, cortes (restrições) de otimalidade ou factibilidade, respectivamente, são adicionados às restrições do problema-mestre de despacho

de unidades na próxima iteração Benders. O problema-mestre é formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, w} \quad & w + \mathbf{c2}^\top \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{y} + \mathbf{s}^\top \mathbf{z} \\
 \text{s. a.} \quad & \mathbf{U}\mathbf{x} - \mathbf{y} \leq \mathbf{a6} \\
 & -\mathbf{U}\mathbf{x} - \mathbf{z} \leq -\mathbf{a6} \\
 & \mathbf{M1}\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\
 & \mathbf{M2}\mathbf{x} \leq \mathbf{a11} \\
 & 0 \leq w \\
 & \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{0, 1\}^{T \cdot N_G}
 \end{aligned} \tag{M^{(k)}}$$

4.2.1.2 Subproblema de Fluxo Ótimo

O subproblema ($S^{(k)}$) é parametrizado pela solução $\tilde{\mathbf{x}}^{(k)}$ do problema-mestre ($M^{(k)}$), que é modificado de acordo com os cortes de factibilidade ou otimalidade adicionados pela solução do subproblema. Isto é realizado adicionando-se uma variável de folga s , a qual é penalizada na função-objetivo pela constante $\sigma \gg 0$. Visando a uma boa estabilidade numérica durante o processo de otimização, nos experimentos computacionais conduzidos neste trabalho, o seguinte valor de s foi escolhido:

$$\sigma = \sum_{g=1}^{N_G} \alpha_g \cdot \bar{P}_g^2 + \beta_g \cdot \bar{P}_g + \gamma_g \tag{4.42}$$

o que representa um limitante superior da função-objetivo (3.7) e também um número suficientemente grande. Se $s > 0$, ou seja, se a restrição correspondente do problema dual ($SD^{(k)}$) é ativa na solução ótima, então ($S^{(k)}$) é infactível, e a solução $(\boldsymbol{\mu}_1^{(k)}, \dots, \boldsymbol{\mu}_6^{(k)})$ de ($SD^{(k)}$) é usada para construir o corte de factibilidade (4.43) a ser adicionado ao problema-mestre ($M^{(k)}$) como uma restrição. Se, pelo contrário, $s = 0$ na solução ótima, então ($S^{(k)}$) é factível e a solução $(\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_7)$ é usada para construir um corte de otimalidade (4.44), que será adicionado ao problema-mestre ($M^{(k)}$) como uma restrição. O subproblema de FPO é então formulado abaixo:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{P}, \mathbf{V}, s} \quad & \mathbf{C4} \bullet \mathbf{P} + \sigma \cdot s \\
 \text{s. a.} \quad & \mathcal{A11}(\mathbf{P}) - \mathcal{Y1}(\mathbf{V}) - \hat{\mathbf{e}}_1 s = \mathbf{d} - \mathbf{P1}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \\
 & \mathcal{A12}(\mathbf{P}) - \hat{\mathbf{e}}_2 s \leq \mathbf{P1}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \\
 & \mathcal{A13}(\mathbf{P}) - \hat{\mathbf{e}}_3 s \leq \mathbf{r} - \mathbf{P2}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \\
 & \mathcal{A14}(\mathbf{P}) - \hat{\mathbf{e}}_4 s \leq \mathbf{g1} - \mathbf{P3}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \\
 & -\mathcal{A14}(\mathbf{P}) - \hat{\mathbf{e}}_5 s \leq \mathbf{g2} + \mathbf{P3}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \\
 & \mathcal{Y3}(\mathbf{V}) - \hat{\mathbf{e}}_6 s \leq \mathbf{f} \\
 & \mathcal{Y4}(\mathbf{V}) - \hat{\mathbf{e}}_7 s \leq \mathbf{b} \\
 & 0 \leq \mathbf{P}, \mathbf{V} \\
 & 0 \leq s
 \end{aligned} \tag{S^{(k)}}$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_7$ são vetores com elementos iguais a um, e tamanho apropriado para cada equação. O problema dual do subproblema $(SD^{(k)})$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 \max_{\lambda_1, \dots, \lambda_7} \quad & \left(\mathbf{d} - \underline{\mathbf{P}}\mathbf{1}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right)^\top \lambda_1 + \left(\overline{\mathbf{P}}\mathbf{1}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right)^\top \lambda_2 + \left(\mathbf{r} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{2}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right)^\top \lambda_3 \\
 & + \left(\mathbf{g}\mathbf{1} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{3}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right)^\top \lambda_4 + \left(\mathbf{g}\mathbf{2} + \overline{\mathbf{P}}\mathbf{3}\tilde{\mathbf{x}}^{(k)} \right)^\top \lambda_5 + \mathbf{f}^\top \lambda_6 + \mathbf{b}^\top \lambda_7 \\
 \text{s. a.} \quad & \mathcal{A}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top(\lambda_1) + \mathcal{A}\mathbf{1}\mathbf{2}^\top(\lambda_2) + \mathcal{A}\mathbf{1}\mathbf{3}^\top(\lambda_3) + \mathcal{A}\mathbf{1}\mathbf{4}^\top(\lambda_4) - \mathcal{A}\mathbf{1}\mathbf{4}^\top(\lambda_5) \preceq \mathbf{C}\mathbf{4} \\
 & \mathcal{Y}\mathbf{1}^\top(\lambda_1) + \mathcal{Y}\mathbf{3}^\top(\lambda_6) + \mathcal{Y}\mathbf{4}^\top(\lambda_7) \preceq \mathbf{0} \\
 & -\hat{\mathbf{e}}_1^\top \lambda_1 - \hat{\mathbf{e}}_2^\top \lambda_2 - \hat{\mathbf{e}}_3^\top \lambda_3 - \hat{\mathbf{e}}_4^\top \lambda_4 - \hat{\mathbf{e}}_5^\top \lambda_5 - \hat{\mathbf{e}}_6^\top \lambda_6 - \hat{\mathbf{e}}_7^\top \lambda_7 \leq \sigma \\
 & \lambda_2, \dots, \lambda_7 \leq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{SD^{(k)}}$$

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{d} - \underline{\mathbf{P}}\mathbf{1}\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu}_1^{(k)} + (\overline{\mathbf{P}}\mathbf{1}\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu}_2^{(k)} + (\mathbf{r} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{2}\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu}_3^{(k)} + (\mathbf{g}\mathbf{1} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{3}\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu}_4^{(k)} \\
 & + (\mathbf{g}\mathbf{2} + \overline{\mathbf{P}}\mathbf{3}\mathbf{x})^\top \boldsymbol{\mu}_5^{(k)} + \mathbf{f}^\top \boldsymbol{\mu}_6^{(k)} + \mathbf{b}^\top \boldsymbol{\mu}_7^{(k)} \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{d} - \underline{\mathbf{P}}\mathbf{1}\mathbf{x})^\top \lambda_1^{(k)} + (\overline{\mathbf{P}}\mathbf{1}\mathbf{x})^\top \lambda_2^{(k)} + (\mathbf{r} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{2}\mathbf{x})^\top \lambda_3^{(k)} + (\mathbf{g}\mathbf{1} - \overline{\mathbf{P}}\mathbf{3}\mathbf{x})^\top \lambda_4^{(k)} \\
 & + (\mathbf{g}\mathbf{2} + \overline{\mathbf{P}}\mathbf{3}\mathbf{x})^\top \lambda_5^{(k)} + \mathbf{f}^\top \lambda_6^{(k)} + \mathbf{b}^\top \lambda_7^{(k)} \leq w
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Dependendo da natureza do corte gerado, ele é adicionado ao conjunto de cortes de factibilidade:

$$\mathcal{F}_k \doteq \left\{ \mathbf{x} : \text{sujeito a (4.43) if } s^{(k-1)} > 0 \right\} \cap \mathcal{F}_{k-1} \tag{4.45}$$

ou ao conjunto de cortes de otimalidade

$$\mathcal{O}_k \doteq \left\{ \mathbf{x} : \text{sujeito a (4.44) if } s^{(k-1)} = 0 \right\} \cap \mathcal{O}_{k-1} \tag{4.46}$$

4.2.1.3 Problema-Mestre Modificado

A linearização de $(S^{(k)})$ é feita no problema-mestre modificado $(MM^{(k)})$ de maneira a representar o subproblema de FPO de maneira relaxada no problema-mestre, restringindo assim as soluções inteiras, e, conseqüentemente, melhorando a convergência do problema. Para isto, as variáveis $P_{t,g}$ são introduzidas no problema-mestre, em conjunto com um modelo relaxado que representa as restrições de geração de potência ativa do subproblema de FPO, resultando nas seguintes equações de balanço:

$$\sum_{g=1}^{N_G} P_{t,g} - l_t^{(k-1)} = d_t \tag{4.47}$$

para $t = 1, \dots, T$; inequações de reserva girante:

$$d_t + l_t^{(k-1)} + SR_t \leq \sum_{g=1}^{N_G} \bar{P}_g \cdot x_{t,g} \tag{4.48}$$

para $t = 1, \dots, T$; inequações de mínima e máxima geração de potência ativa:

$$\underline{P}_g \cdot x_{t,g} \leq P_{t,g} \leq \overline{P}_g \cdot x_{t,g} \quad (4.49)$$

rampa de subida:

$$P_{t,g} - P_{t-1,g} \leq RU_g \quad (4.50)$$

e, finalmente, restrições de rampa de descida:

$$P_{t-1,g} - P_{t,g} \leq RD_g \quad (4.51)$$

para $t = 1, \dots, T$ e $g = 1, \dots, N_G$, onde $l_t^{(k-1)}$ representam as perdas atualizadas do problema (S^{k-1}). Note que, na primeira iteração, é assumida uma porcentagem da demanda (valor característico do sistema):

$$l_t^0 = \mathbf{L}_t \bullet \mathbf{V}_t \quad (4.52)$$

para $t = 1, \dots, T$, onde $\mathbf{L}_t \in \mathbb{R}^{(2 \cdot N_B) \times (2 \cdot N_B)}$ é a matriz de perdas do sistema de transmissão:

$$\mathbf{L}_t = \sum_{k=1}^{N_B} \sum_{m=1}^{N_B} g_{k,m} \cdot \boldsymbol{\xi}_t \boldsymbol{\xi}_t^\top \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes (\boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_k^\top - \boldsymbol{\xi}_k \boldsymbol{\xi}_m^\top - \boldsymbol{\xi}_m \boldsymbol{\xi}_k^\top) \quad (4.53)$$

Adicionalmente, a função-objetivo em 4.1.2 é aproximada por uma função linear, como ilustrado na Fig. 11. Esta aproximação linear representa um limitante inferior dos custos quadráticos do combustível, e são calculados mediante o uso do Teorema do Valor Médio para funções convexas:

$$(2 \cdot \alpha_g \cdot \hat{P}_g + \beta) (P_{t,g} - \hat{P}_g) + \alpha_g \cdot \hat{P}_g^2 + \beta_g \cdot \hat{P}_g + \gamma_g \leq \alpha_g \cdot P_{t,g}^2 + \beta_g \cdot P_{t,g} + \gamma_g \quad (4.54)$$

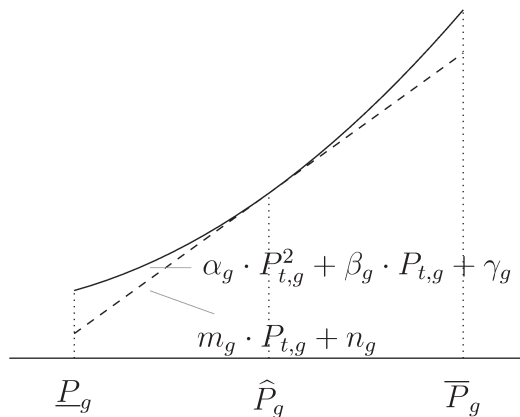


Figura 11 – Limitante Inferior Linear

Ademais, sem perda de generalidade, pode-se escolher:

$$\hat{P}_g = \frac{\overline{P}_g - \underline{P}_g}{2} \quad (4.55)$$

e, finalmente, obtém-se o limitante inferior linear para a função de custo representada por $w + \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$:

$$\mathbf{m}^\top \mathbf{p} + \mathbf{n}^\top \mathbf{x} \leq w + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad (4.56)$$

onde:

$$\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_{N_G}, \dots, m_1, \dots, m_{N_G}]^\top \in \mathbb{R}^{T \cdot N_G} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_{N_G}, \dots, n_1, \dots, n_{N_G}]^\top \in \mathbb{R}^{T \cdot N_G} \quad (4.58)$$

e:

$$m_g = 2 \cdot \alpha_g \cdot \hat{p}_g + \beta_g$$

$$n_g = -\alpha_g \cdot \hat{p}_g^2 + \gamma_g$$

para $t = 1, \dots, T$ and $g = 1, \dots, N_G$.

Finalmente, o problema-mestre modificado é mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \\ \mathbf{p}, w}} w + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{y} + \mathbf{s}^\top \mathbf{z} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{U}\mathbf{x} - \mathbf{y} \leq \mathbf{a6} \\ & -\mathbf{U}\mathbf{x} - \mathbf{z} \leq -\mathbf{a6} \\ & \mathbf{M1}\mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{M2}\mathbf{x} \leq \mathbf{a7} \\ & \mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \mathbf{h} \\ & \mathbf{m}^\top \mathbf{p} + \mathbf{n}^\top \mathbf{x} \leq w + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{F}_k \cap \mathcal{O}_k \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \{0, 1\}^{T \cdot N_G} \end{aligned} \quad (MM^{(k)})$$

onde $\mathbf{H}\mathbf{p} + \mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \mathbf{h}$ representa as restrições (4.47), (4.48), (4.49), (4.50), e (4.51). Os cortes de factibilidade \mathcal{F}_k e otimalidade \mathcal{O}_k são adicionados de maneira iterativa.

4.2.2 Procedimento de Redução de Rank

O procedimento de redução de rank (LAURENT, 1997) é baseado na adição de uma matriz de perturbação \mathbf{D}_r à matriz-solução de tensão \mathbf{V}^* do problema (4.1). A utilização do Algoritmo 4.1 para redução de rank permite a manutenção da factibilidade, como explicado posteriormente. Dado que \mathbf{V} não consta de nenhum termo da função-objetivo, a nova solução com rank reduzido não altera seu valor. A idéia principal desse procedimento consiste na criação de uma matriz de perturbação \mathbf{D} que mantenha, a cada iteração, as seguintes propriedades de \mathbf{V} : atendimento das restrições, redução do rank, e semi-definição da matriz.

Algoritmo 4.1 Procedimento de redução de rank.

```

1: Requare:  $\mathbf{V}^*$ ,  $\mathbf{Y}_i \forall i \in \{1, \dots, N_B\}$ ,  $\mathbf{Y}_{i,j} \forall (i,j) \in \mathcal{L}$ ,  $\mathbf{E}_l \forall l \in \{1, \dots, 2N_B\}$ 
2: for  $r \leftarrow 1, \dots, (\text{rank}(\mathbf{V}^*) + \varsigma - 1)$  do
3:   Obter  $\mathbf{R}_r$  da decomposição de Cholesky  $\mathbf{V}_r^* = \mathbf{R}_r \mathbf{R}_r^\top$ 
4:   Iniciar  $\mathbf{S}_r \leftarrow \mathbf{0}_{2N_B \times 2N_B}$ 
5:   for  $i \leftarrow 1, \dots, N_B$  do
6:      $\mathbf{S}_r \leftarrow \mathbf{S}_r + |\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_i \mathbf{R}_r|$ 
7:   end for
8:   for  $(i,j) \leftarrow \mathcal{L}$  do
9:      $\mathbf{S}_r \leftarrow \mathbf{S}_r + |\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_{i,j} \mathbf{R}_r|$ 
10:  end for
11:  for  $l \leftarrow 1, \dots, 2N_B$  do
12:     $\mathbf{S}_r \leftarrow \mathbf{S}_r + |\mathbf{R}_r^\top \mathbf{E}_l \mathbf{R}_r|$ 
13:  end for
14:  for all  $S_{i,j} \in \mathbf{S}_r \mid \mathbf{Z}_r \in \mathbb{R}^{2N_B \times 2N_B}$  do
15:     $Z_{i,j} \leftarrow \mathbf{1}_{(S_{i,j}=0)}$ 
16:  end for
17:  if  $\mathbf{Z}_r = \mathbf{0}$  then
18:    break
19:  end if
20:   $\phi_z \leftarrow 2 \cdot \mathbf{1}_{(\mathbf{z} \succeq \mathbf{0})} - 1$ 
21:   $\mathbf{D}_r \leftarrow -\phi_z \cdot \mathbf{R}_r \mathbf{Z}_r \mathbf{R}_r^\top$ 
22:   $\omega_r \leftarrow \max \{ \phi_z \cdot \underline{\lambda}_z \}^{-1}$ 
23:   $\mathbf{V}_{r+1}^* \leftarrow \mathbf{V}_r^* + \omega_r \mathbf{D}_r$ 
24:  if  $\text{rank}(\mathbf{V}_r^*) = 0$  then
25:    break
26:  end if
27: end for

```

O rank da matriz \mathbf{V} da solução do problema ($S^{(k)}$), após a convergência do procedimento da Figura 10, é limitado superiormente por uma expressão que depende do número de restrições, como explicado em (BARVINOK, 2001). Esta equação é dada por:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{V}_r^*) &\leq \text{rank}(\mathbf{V}_0^*) \\ &\leq \left\lfloor \frac{\sqrt{8(N_B + 2|\mathcal{L}| + 2N_B) + 1} - 1}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (4.59)$$

\mathbf{V}^* é atualizado como segue:

$$\mathbf{V}_{r+1}^* \leftarrow \mathbf{V}_r^* + \omega_r \cdot \mathbf{D}_r \quad (4.60)$$

onde ω_r é um parâmetro que garante que, em cada atualização de \mathbf{V}^* , esta permanece semidefinida. A matriz de perturbação \mathbf{D}_r está sujeita a:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_r \bullet \mathbf{Y}_i &= 0, \quad i = 1, \dots, N_B \\ \mathbf{D}_r \bullet \mathbf{Y}_{i,j} &= 0, \quad (i,j) \in \mathcal{L} \\ \mathbf{D}_r \bullet \mathbf{E}_l &= 0, \quad l = 1, 2, \dots, 2N_B \end{aligned} \quad (4.61)$$

e apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{R}_r \mathbf{Z}_r \mathbf{R}_r^\top \quad (4.62)$$

onde \mathbf{R}_r é obtida da decomposição de Cholesky de $\mathbf{V}^* = \mathbf{R}_r \mathbf{R}_r^\top$. Pela propriedade distributiva do produto interno de Frobenius em (2.3), obtém-se:

$$\mathbf{D}_r \bullet \mathbf{Y}_i = \mathbf{R}_r \mathbf{Z}_r \mathbf{R}_r^\top \bullet \mathbf{Y}_i = \mathbf{Z}_r \bullet \mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_i \mathbf{R}_r = 0 \quad (4.63)$$

$$\rightarrow \mathbf{Z}_r (\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_i \mathbf{R}_r) = \mathbf{0}. \quad (4.64)$$

Para atendimento da equação anterior, \mathbf{Z}_r é construída com elementos 0 e 1 de tal maneira que os valores 1 estejam na posição correspondente aos valores 0 verificados em cada matriz $(\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_i \mathbf{R}_r)$, $(\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_{i,j} \mathbf{R}_r)$ e $(\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Z}_l \mathbf{R}_r)$. Para identificar as posições dos zeros nas matrizes, soma-se o valor absoluto de todas as matrizes $|\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_i \mathbf{R}_r|$, $|\mathbf{R}_r^\top \mathbf{Y}_{i,j} \mathbf{R}_r|$ e $|\mathbf{R}_r^\top \mathbf{E}_l \mathbf{R}_r|$ in \mathbf{S}_r . Com este procedimento a nova solução atende (4.61).

Substituindo-se (4.62) em (4.60), obtém-se:

$$\mathbf{V}^* + \sum_{i=1}^r \omega_i \cdot \mathbf{D}_i = \mathbf{R}_r (\mathbf{I} - \omega_r \mathbf{Z}_r) \mathbf{R}_r^\top \quad (4.65)$$

De (4.65), depreende-se a condição necessária para que a nova solução seja semidefinida:

$$\left(\mathbf{V}^* + \sum_{i=1}^r \omega_i \cdot \mathbf{D}_i \right) \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow (\mathbf{I} - \omega_r \mathbf{Z}_r) \succeq \mathbf{0}$$

Posteriormente, avalia-se se $\mathbf{Z} \succeq \mathbf{0}$. Em caso negativo, multiplica-se por -1 . O parâmetro ϕ_z caracteriza este procedimento. Se \mathbf{Z}_r é indefinida, então o algoritmo não poderá reduzir o rank na iteração r . Mas ainda é possível sua redução, uma vez que $\mathbf{Z}_r \neq \mathbf{Z}_{r+1}$ decorrente das perturbações adicionadas e, também, pela formulação SDP do FPO garantir que pelo menos uma solução rank-1 existe. Nesse sentido, adiciona-se ς iterações extras. O parâmetro ω_r é uma constante que escala a matriz \mathbf{D}_r para reduzir pelo menos em 1 o rank da matriz \mathbf{V}^* , mediante a redução de rank da matriz $(\mathbf{I} - \omega_r \mathbf{Z}_r)$. Isso acontece quando a seguinte expressão é verdadeira:

$$\omega_r = \max \{ \phi_z \lambda_z \}^{-1} \quad (4.66)$$

onde λ_z é um autovalor da matriz \mathbf{Z}_r .

5 Resultados

5.1 Resultados para o POCP Hidroelétrico

O algoritmo B&B com avaliação paralela de nós foi implementado em MATLAB. Utilizou-se o SDPA (YAMASHITA *et al.*, 2012) como solver SDP. O SDPA implementa o método de pontos interiores primal-dual. Paralelamente, foram testados outros solvers (CSDP, DSDP e SeDuMi) para resolver os modelos de programação semidefinida. Obteve-se uma melhor performance com SDPA devido a sua implementação em C++, bem como à possibilidade de armazenar as matrizes do problema em termos de seus blocos diagonais, e de aproveitar suas simetrias.

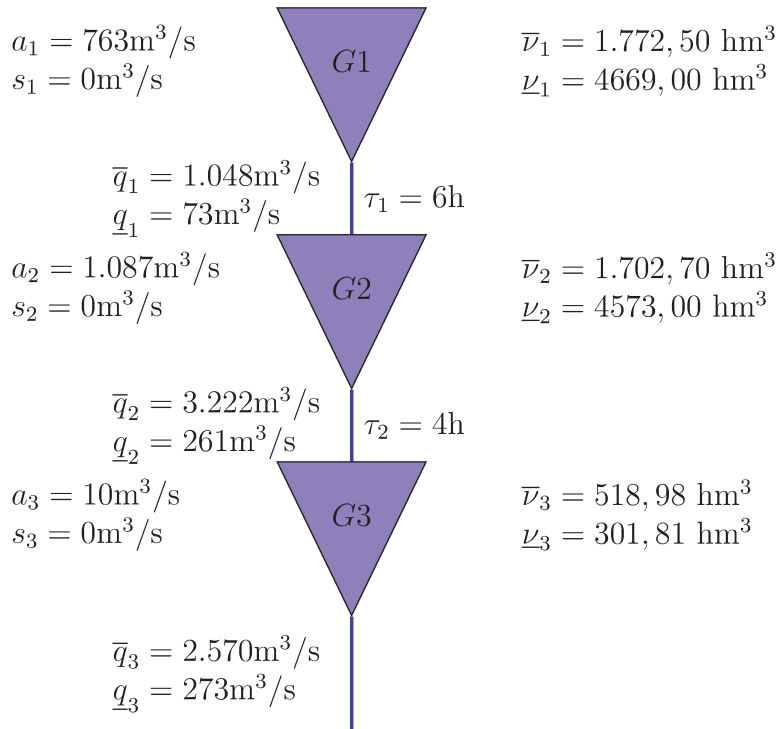


Figura 12 – Sistema hidráulico para o caso 3-GENH.

O caso de teste 3-GENH especificado na Figura 12 e Figura 13 foi criado com fins didáticos para facilitar o entendimento da dinâmica de um sistema em cascata de 3 usinas. Este sistema-teste tem como base as usinas de Emborcação (G1), Itumbiara (G2) e Cachoeira Dourada (G3). Em nenhum dos casos foi considerado congestionamento no sistema de transmissão.

Entre outros parâmetros, utilizou-se como tolerância 5% para fins de arredondamento de uma variável (BAI; WEI, 2009) para um balanço razoável entre desempenho e aproximação. No total foram feitos quatro casos de estudo a serem analisados. A Tabela 1 mostra a informação dos sistemas para cada um dos casos de estudo considerados. Dados concernentes à operação das usinas foram obtidos do Operador Nacional do Sistema Elétrico para o dia 28 de outubro de 2012. Em alguns casos, as posições dos taps e a carga reativa foram modificadas dos casos-teste IEEE para que estes sejam compatíveis com o novo nível de carregamento, assim como com os dados reais das usinas. Adicionalmente, a Tabela 2 mostra o tamanho dos problemas para os quatro casos com vistas a ilustrar a complexidade do problema QCQP. Utilizou-se como custo de arranque por MW instalado de 30R\$/MW baseados no trabalho (NILSSON; SJELVGREN, 1997).

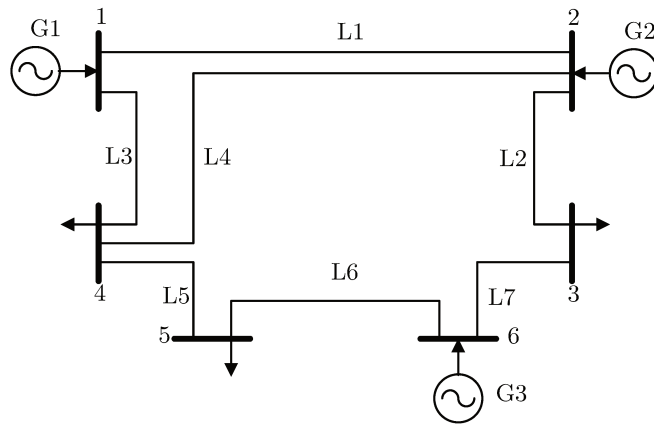


Figura 13 – Configuração do sistema de transmissão do caso 3-GENH

Tabela 1 – Informação dos sistemas.

Caso	Usinas hidro			Unidades	Barras	Linhas
	Fio d'água	Reservatório	Total			
3-GENH	1	2	3	20	6	7
IEEE-14H	1	3	4	26	14	20
IEEE-30H	1	5	6	64	30	41
IEEE-57H	3	5	8	90	57	80

Tabela 2 – Informação do problema de otimização

Caso	Variáveis			Restrições		
	Contínuas	Inteiras	Total	Igualdades	Desigualdades	Total
3-GENH	1248	549	1797	410	1872	2282
IEEE-14H	1920	716	2636	819	3360	4179
IEEE-30H	4512	1674	6186	1637	7200	8837
IEEE-57H	7056	2344	9400	2983	11856	14839

A Tabela 3 mostra os resultados para a primeira relaxação SDP em termos de variáveis binárias relaxadas na solução final. Em todos os casos de estudo, a porcentagem de variáveis aproximadas é maior que 80% com um tempo computacional coerente, como mostrado na Tabela 4. Os resultados da otimização da primeira relaxação e a relaxação final do algoritmo B&B são mostrados na Tabela 5. O número relativamente baixo de iterações do algoritmo de B&B é devido ao resultado de uma boa aproximação SDP convexa que calcula melhor os limitantes inferiores. Está evidenciado que existe um gap pequeno entre a solução inicial infactível e a solução final da árvore de B&B do problema QCQP. Uma análise detalhada dos resultados do sistema 3-GENH é mostrado a seguir nesta seção, bem como os resultados totais são mostrados no anexo A.

Tabela 3 – Primeiros resultados da relaxação SDP (variáveis binárias)

Caso	Indefinidas		Iguais a 1		Iguais a 0		Total
3-GENH	36	7,50%	54	11,25%	390	81,25%	480
IEEE-14H	35	5,60%	79	12,66%	510	81,73%	624
IEEE-30H	48	3,12%	120	7,81%	1.368	89,06%	1.536
IEEE-57H	73	3,38%	156	7,22%	1.931	89,40%	2.160

Tabela 4 – Número de iterações do algoritmo e tempo computacional

Caso	Iterações		Tempo (s)	
	SDP	B&B + SDP	SDP	B&B + SDP
3-GENH	28	204	0,78	45,64
IEEE-14H	28	66	1,83	46,72
IEEE-30H	38	170	10,00	560,594
IEEE-57H	39	807	33,03	10.475,46

Tabela 5 – Função-objetivo e gap SDP

Caso	Função-objetivo (\$)		SDP Gap (\$)
	SDP	B&B + SDP	
3-GENH	1.598.128,53	1.598.968,66	0,052 %
IEEE-14H	2.711.258,45	2.711.717,68	0,017 %
IEEE-30H	5.587.150,22	5.587.328,67	0,003 %
IEEE-57H	13.221.266,47	13.221.608,96	0,003 %

Os resultados do POCP para o caso 3-GEN são ilustrados na Figura 14. O caso foi construído a partir de uma cascata com 3 usinas. Neste caso-teste, *G3* é a única usina a fio-d'água localizada no fim da cascata. A vazão afluyente incremental e o armazenamento inicial foram artificialmente reduzidos dos valores originais para poder observar a efetividade da heurística de eliminação das restrições de limites de volume do reservatório. Entre as horas 3 e 6, a produção de energia é reduzida e a usina guarda água suficiente

para ser utilizada durante o horário de ponta no qual o armazenamento atingirá o limite inferior. Isto se dá porque os custos de arranque de uma unidade são relativamente baixos devido às baixas capacidades das unidades em comparação às usinas de Emborcação e Itumbiara. Como consequência, a heurística não elimina $\underline{\nu}$ (pois $\inf(\nu) < \underline{\nu}$), e logo $\underline{\nu}$ é ativo durante as horas 19 e 20, como ilustrado na Figura 15.

tempo	UH2M1	UH2M2	UH2M3	UH2M4	UH2M5	UH2M6
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0
7	0	0	$7.1 \cdot 10^{-2}$	0.93	0	0
8	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0.66	0.34	0
10	0	0	0	0	1	0
11	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	1	0
13	0	0	0	0	1	0
14	0	0	0	0	1	0
15	0	0	0	0	0.46	0.54
16	0	0	0	0	0.4	0.6
17	0	0	0	0	0.34	0.66
18	0	0	0	0	0	1
19	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	1
22	0	0	0	0	0	1
23	0	0	0	0.21	0.79	0
24	0	0	0.12	0.88	0	0

Tabela 6 – Resultado parcial da primeira relaxação para a usina G2, máquinas 1 a 6.

Nos casos-teste IEEE-14H, IEEE-30H, e IEEE-57H, não foram ativadas as restrições no resultado ótimo. Isto mostra que a heurística, além da natureza conservadora, e como consequência da insignificância da variação horária da produtividade devido à cota de montante, reduz a complexidade do problema enquanto mantém válida a operação do reservatório. Isto sugere que, para reservatórios de grande e médio porte, e mesmo para usinas fio d'água nas quais as metas de geração foram corretamente calculadas, as equações da dinâmica do reservatório podem não ser relevantes em operação de curto prazo.

Finalmente, a usina G2 é declarada como a usina slack responsável pela regulação da tensão, assim como por corrigir eventualmente o fornecimento e diferenças de demanda

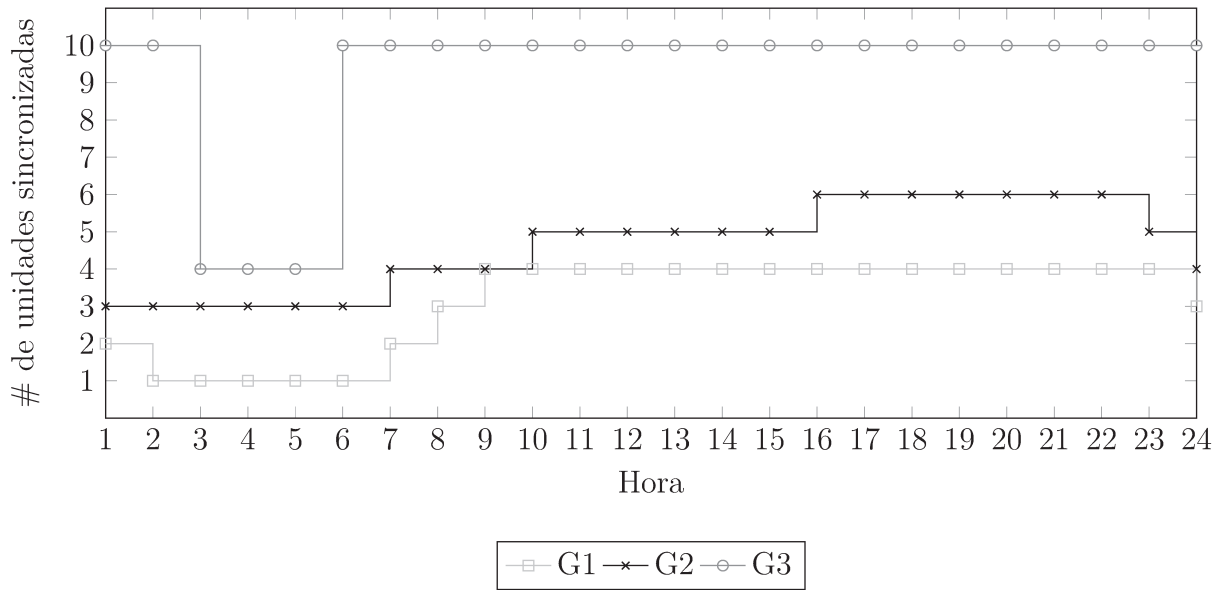
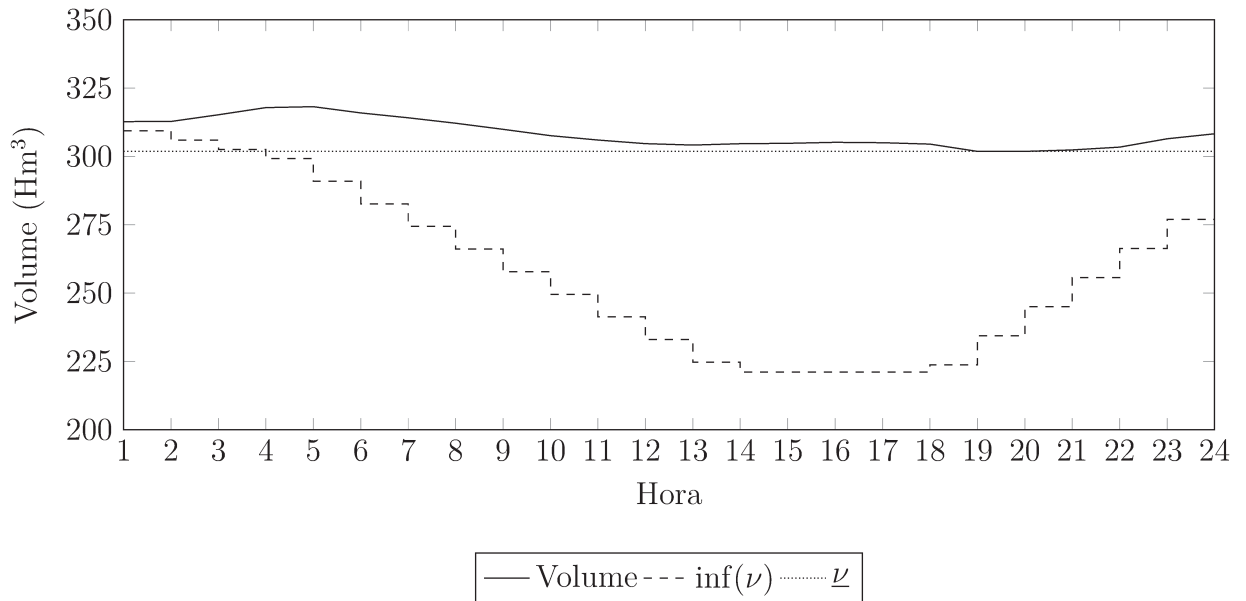


Figura 14 – Despacho de unidades das usinas para o caso 3-GENH.

Figura 15 – Trajetória do reservatório de $G3$ para o caso 3-GENH.

e perdas que não foram consideradas nas metas de geração. A geração horária de potência ativa de cada usina é mostrada em Figura 16. O módulo da tensão horária para cada barra é mostrado em Figura 17. As variações de tensão são limitadas a 0,05 p.u. As tensões são maiores nas barras 2, 3 e 6 por serem barras de geração. Por outra lado, a tensão é mais baixa nas barras de carga 4 e 5.

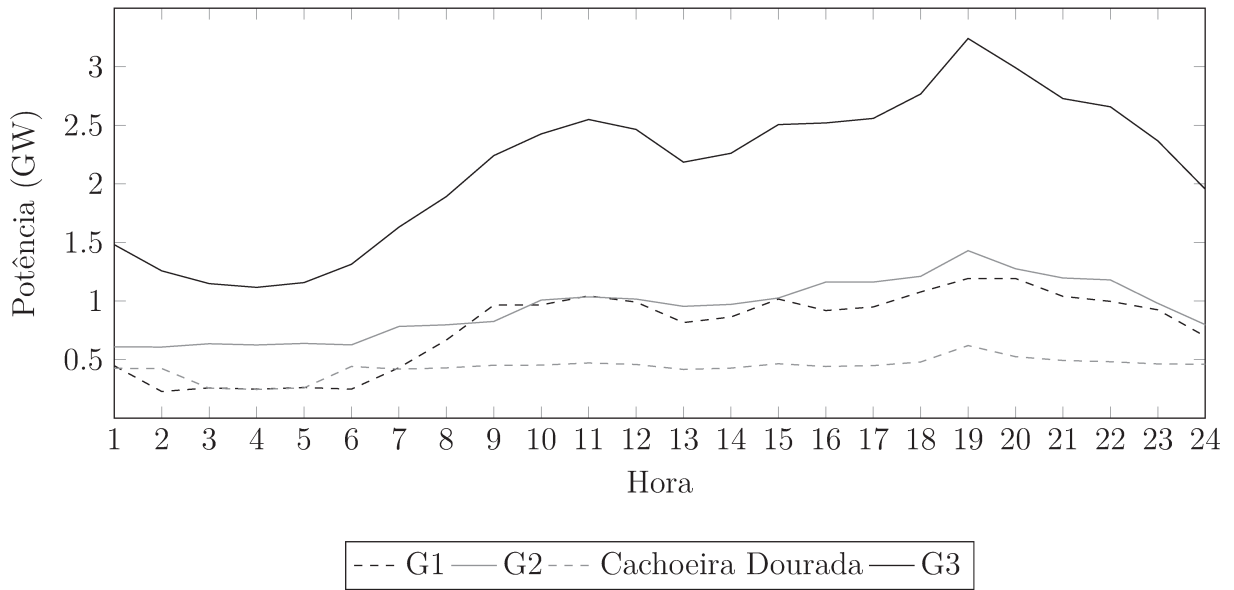


Figura 16 – Despacho de geração horária para o caso 3-GENH.

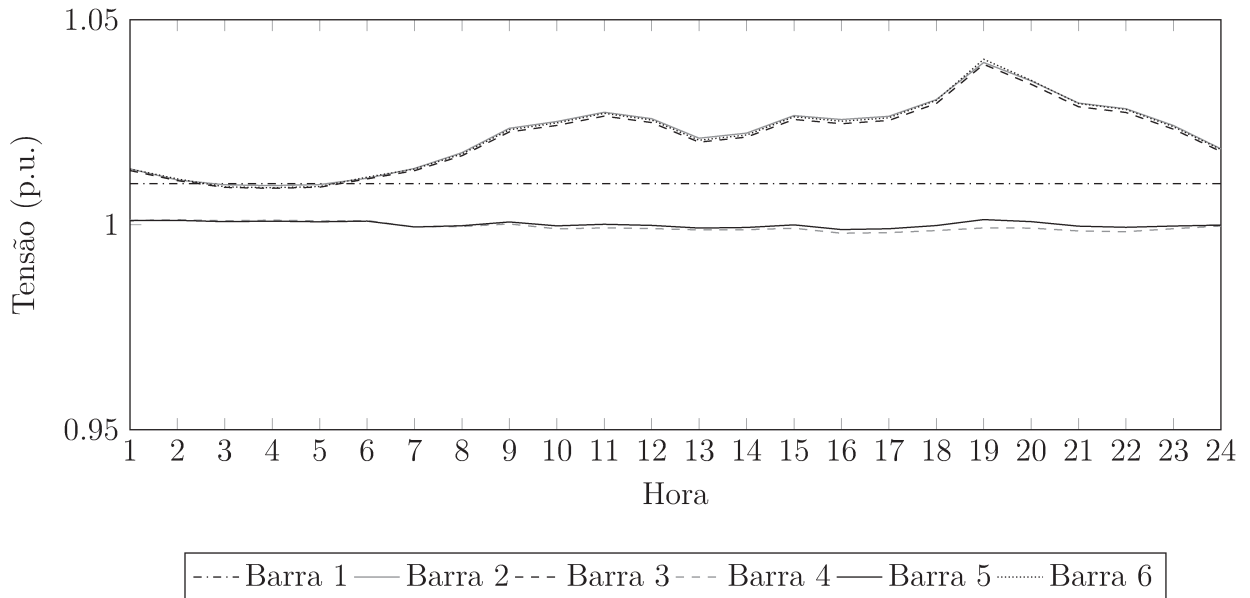


Figura 17 – Tensão nas barras do caso 3-GENH em cada hora.

5.1.1 Resultados Para a Heurística de Arredondamento

Para este algoritmo de arredondamento é usado o SDP para resolver a parte SDP e o CPLEX para a solução do problema inteiro de arredondamento. No total, cinco casos-teste foram estudados com diferentes escalas. A Tabela 7 mostra os resultados em termos de iterações e tempos computacionais para os casos-teste criados, onde SDP1 é a solução do primeiro problema SDP, B&B+SDP é a técnica baseada em B&B e SDP mostrada anteriormente e SDP1+RH é a heurística estudada nesta seção. Os casos comuns obtiveram soluções iguais ao mostrado na seção anterior, com diferença no caso IEEE-118H,

o qual, como pode ser visto na Tabela 7, não converge pelo método baseado em B&B devido à maior complexidade, apesar das simplificações e estratégias para aumento do desempenho. Para a heurística de arredondamento não foram colocados os números de iterações porque em cada caso são resolvidos 2 problemas SDP e 1 problema MILP.

Tabela 7 – Resultados para a heurística de arredondamento

Caso-Teste	Iterações		Tempo (s)		
	SDP1	B&B+SDP	SDP1	B&B+SDP	SDP1+RH
3-GENH	28	204	0,78	45,64	2,41
IEEE-14H	28	66	1,83	46,72	4,09
IEEE-30H	38	170	10,00	560,59	20,32
IEEE-57H	39	807	33,03	10.475,46	64,55
IEEE-118H	50	∞	270,15	∞	1.009,97

Tabela 8 – Função-objetivo e gap SDP

Caso-Teste	Função-objetivo (R\$)			Gap SDP (R\$)	
	SDP1	B&B	SDP1+RH	B&B	SDP+RH
3-GENH	1.598.128,53	1.598.968,66	1.598.973,76	0,052 %	0,053 %
IEEE-14H	2.711.258,45	2.711.717,68	2.711.702,95	0,017 %	0,020 %
IEEE-30H	5.587.150,22	5.587.328,67	5.588.811,34	0,003 %	0,030 %
IEEE-57H	13.221.266,47	13.221.608,96	13.222.069,89	0,003 %	0,006 %
IEEE-118H	29.659.376,66	-	29.703.638,99	-	0,149 %

Os resultados mostrados na Tabela 8 sugerem que, por causa da primeira relaxação estar muito próxima da solução ótima B&B, é possível aproximar a função-objetivo com pouca porcentagem de erro. Assim, é possível usar heurísticas de arredondamento mais conservadoras, mas sempre necessitando considerar o balanço entre o esforço computacional para resolver através da heurística e o gap resultante da relaxação semidefinida. Outra observação importante é que a heurística de arredondamento proposta tem valores esperados segundo a heurística de arredondamento de (GOEMANS; WILLIAMSON, 1995) a qual garante um gap de arredondamento máximo de 13% da função-objetivo SDP.

5.2 Resultados Para o POCP Termoelétrico

O algoritmo de decomposição baseada em Benders descrito na seção 4.2.1 foi implementado em MATLAB 8.1 com CPLEX 12.6 como solver do problema-mestre inteiro-misto, o qual usa o algoritmo de branch-and-cut interiormente, e o solver SDPA 7.3.5 para resolver a relaxação SDP do subproblema de FPO.

De maneira a validar a metodologia, foram construídos dois casos-teste: 3-GENT e IEEE-118. Novamente, um caso pequeno 3-GENT é usado de maneira didática para mostrar as características da solução de um problema de POCP térmico. Igualmente ao problema 3-GENH, este tem a mesma rede de transmissão apresentada na Figura 12, mas, desta vez, é considerado um sistema de transmissão com algumas linhas em congestão. Também são considerados 3 geradores com diferentes funções de custo. Os dados característicos dos geradores são mostrados na Tabela 9. Para este caso o gerador $G1$ é o menos custoso e tem uma capacidade maior, ao passo que os geradores $G2$ e $G3$ apresentam custos equivalentes dependendo da faixa de operação. Por outro lado, o objetivo do caso-teste IEEE-118 é testar efetivamente a metodologia proposta num problema de mediano porte. Para poder acelerar a convergência do algoritmo, adota-se a estratégia de assumir uma porcentagem da demanda total de perdas iniciais entre 5% e 10%. Esses valores são reconhecidamente característicos das perdas verificadas em sistemas reais.

Tabela 9 – Dados do caso-teste 3-GENT.

	\bar{p}	\underline{p}	α	β	γ	SU	SD	UR	DR	p_0	T_0	T_{on}	T_{off}
$G1$	210	100	0,00045	13,7	177	100	100	55	55	150	2	4	4
$G2$	100	10	0,001	40,0	130	200	200	50	50	0	-1	3	2
$G3$	70	10	0,005	17,7	137	50	50	15	15	15	1	2	2

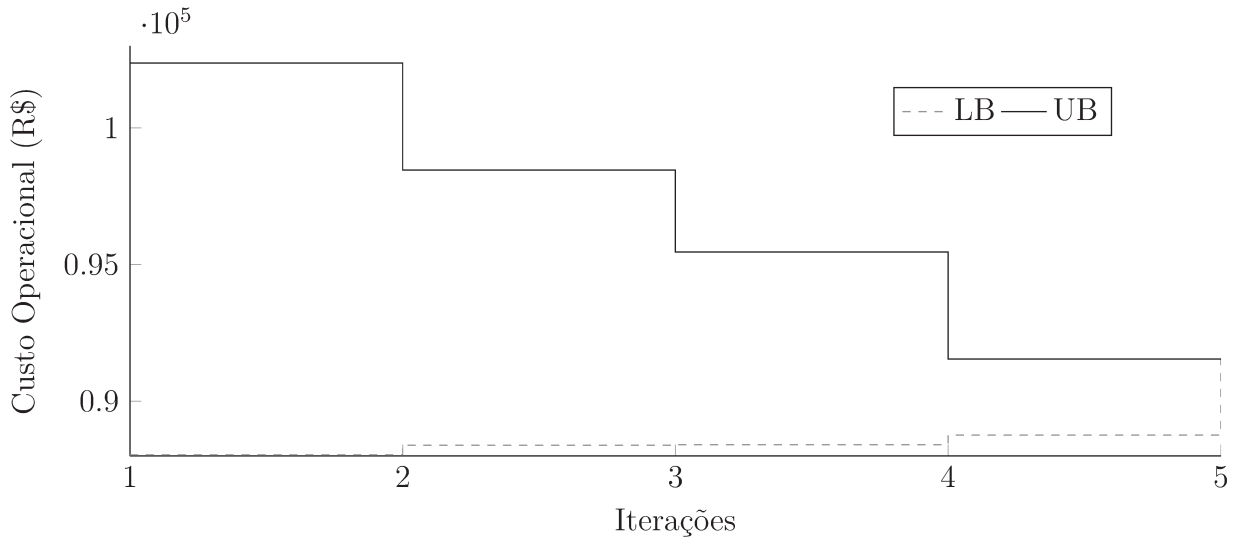


Figura 18 – Convergência dos limitantes superior e inferior para o caso 3-GENT.

Na Figura 18 é possível observar a evolução dos limites máximo e mínimo durante as iterações do algoritmo para resolver o caso-teste 3-GENT. Como era de se esperar, o gap entre os dois limitantes é bem grande na primeira iteração. Mas somente em 5 iterações o limitante inferior e superior convergem a um mesmo valor. Em outros experimentos

numéricos, verificou-se que a convergência fica mais lenta quando o problema-mestre não é modificado como descrito na seção 4.2.1.3. Ademais, as perdas de potência ativa no sistema de transmissão não foram consideradas nestes testes. Neste caso, com o problema-mestre modificado, foram necessárias apenas 5 iterações para convergência, ao passo que, para o caso sem modificação, um total de 13 iterações foram necessárias.

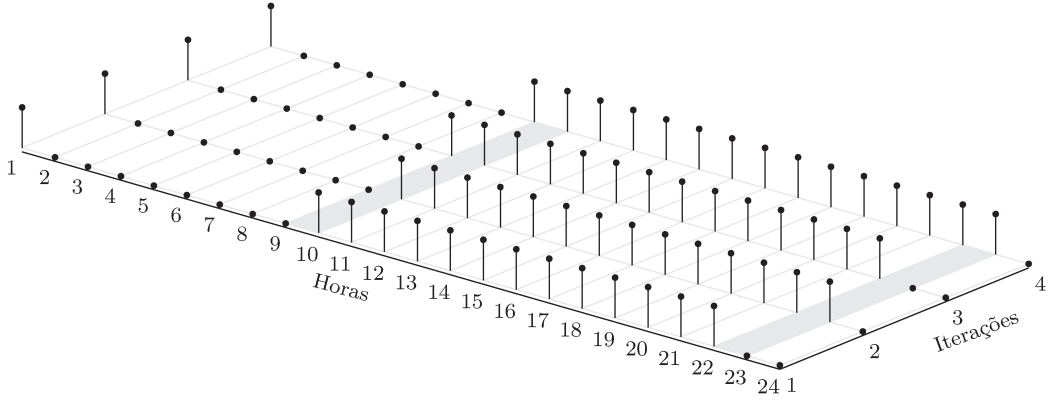


Figura 19 – Progresso iterativo do despacho de unidades para o gerador $G2$ do caso 3-GENT.

A característica dos métodos de decomposição tipo Benders é que as soluções inteiras no problema-mestre foram avaliadas como se fossem parâmetros de entrada do subproblema de FPO. Essas iterações entre o problema-mestre modificado e o subproblema de FPO explicam o comportamento observado na Figura 19, que ilustra como o despacho de máquinas do gerador $G2$ é modificado ao longo das iterações, na medida em que ele se adapta à inclusão das restrições do sistema de potência. Neste caso em particular, aos cortes associados à reserva girante e às restrições de rampa nas horas 9 e 23.

Os despachos de unidades e de geração de potência ativa são ilustrados na Figura 20 e Figura 21, respectivamente. Na Tabela 9 pode-se observar que o gerador $G1$ é o menos custoso, e na Figura 20 este gerador é despachado para gerar em todos os intervalos, ao passo que os geradores mais custosos $G2$ e $G3$ complementam a geração para atender às restrições de demanda e de reserva girante. Este comportamento na solução final evidencia coerência de otimalidade e factibilidade.

De maneira similar ao caso IEEE-118T, as unidades tem características similares de operação dos geradores usados no caso 3-GENT. A convergência deste caso de maior porte é alcançada em apenas 7 iterações, tal como ilustrado na Tabela 10. Para testar a metodologia proposta e a efetividade na resolução do modelo de fluxo de potência AC, reduziu-se os limites de potência ativa de algumas linhas de transmissão. Esta complexi-

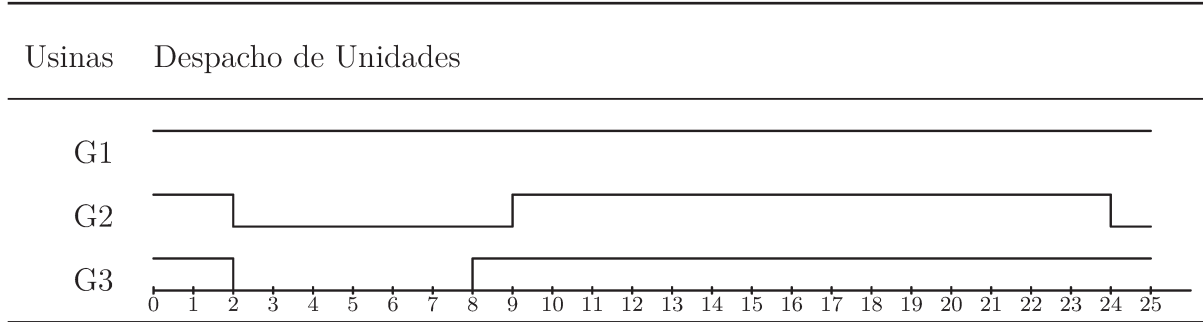


Figura 20 – Despacho ótimo de unidades para o caso-teste 3-GENT.

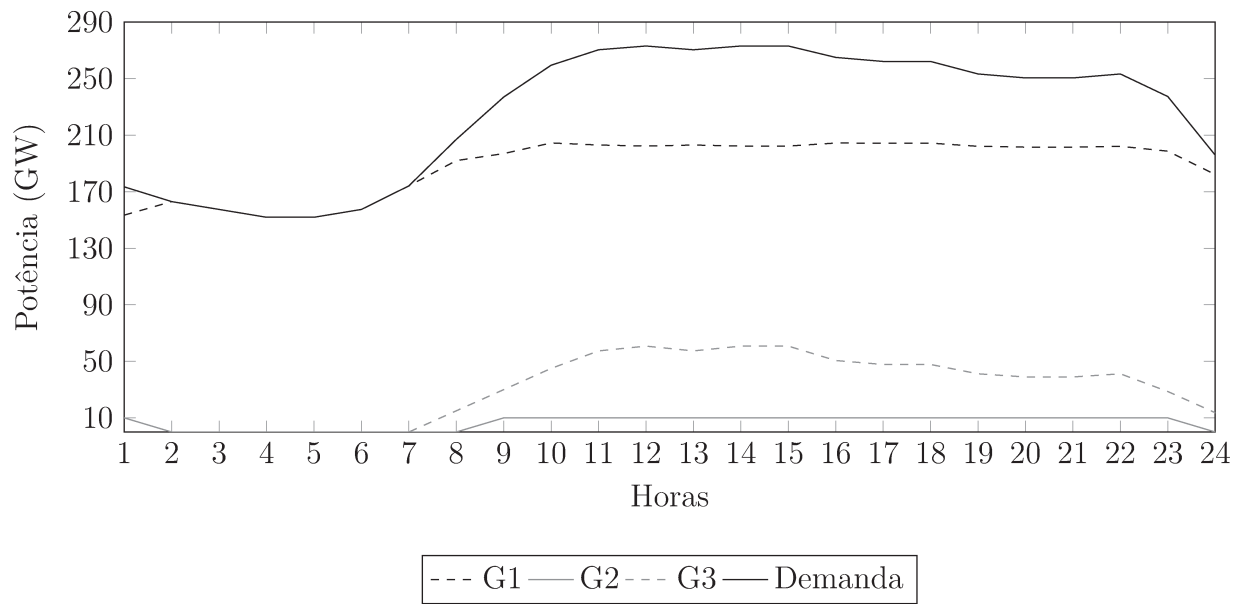


Figura 21 – Despacho de geração de potência ativa para o caso-teste 3-GENT.

dade adicional foi resolvida pela relaxação convexa SDP.

Tabela 10 – Convergência do limite inferior e superior para o caso-teste IEEE-118T.

Iteração	LB	UB
1	1.615.160,46	3.736.881,09
2	1.615.175,18	2.975.051,94
3	1.615.591,72	1.691.465,20
4	1.686.214,55	1.691.127,56
5	1.690.718,82	1.691.252,69
6	1.690.808,05	1.690.934,88
7	1.690.934,88	1.690.934,88

A fim de verificar a eficácia da heurística de redução de rank, a metodologia foi testada sem tal procedimento. No caso 3-GENT, um total de 5 de 24 matrizes eram rank-3 na solução final, ao passo que todas as outras eram rank-1. No caso IEEE-118T, por outro

lado, todas as 24 matrizes de tensão eram rank-3. Todas as matrizes rank-3 de ambos os casos foram reduzidas com sucesso para matrizes rank-2 quando a heurística de redução de rank foi habilitada no algoritmo.

6 Conclusões

Nesta tese foram desenvolvidas reformulações do POCP hidroelétrico e termoeletrico como problemas QCQP equivalentes. A primeira resolvida mediante um algoritmo de B&B com relaxações sucessivas e uma heurística de arredondamento para melhorar os tempos computacionais, a modelagem do problema assim como a combinação de estas técnicas de solução são inéditas na literatura. No caso do modelo de POCP termoeletrico utilizada na sua resolução com uma técnica baseada na decomposição de Benders, que embora clássica para resolver este problema, sua utilização na formulação apresentada, fazendo uso de variáveis inteiro mistas e SDP, é um ponto a se destacar neste trabalho. Os resultados apresentados para os sistemas de teste foram satisfatórios e refletiram com boa precisão o comportamento elétrico, hidrológico e termoeletrico dos sistemas para uma operação de curto prazo com horizonte de um dia. A modelagem apresentada inclui uma modelagem completa da rede de transmissão AC nos modelos desenvolvidos. A técnica utilizada para resolver os problemas SDP consiste do método de pontos interiores primal-dual, o qual requer tempo computacional de complexidade polinomial.

Se feita uma analogia com a programação linear, é possível melhorar o tempo de desempenho do algoritmo de B&B usando "*warm starts*" e pseudocustos (MITCHELL, 2000; GAUTHIER; RIBIÈRE, 1977). Também para o algoritmo de Benders, é possível adaptar as diferentes estratégias usadas na literatura (WU; SHAHIDEHPOUR, 2010; ZAKERI *et al.*, 2000; REI *et al.*, 2009; Côté; LAUGHTON, 1984) para acelerar a escolha ideal dos cortes introduzidos na programação linear.

Um ponto importante notado em (FUENTES-LOYOLA; QUINTANA, 2003) e que tem similaridade com o POCP abordado, é que este método obtém variáveis duais para a equação (3.19), e estas variáveis duais definem o custo marginal de arrancar uma nova máquina no sistema. Esta informação é útil tanto para os operadores do sistema como da usina no caso da necessidade de redespachos.

Baseado na insignificância da variação da produtividade devido à variação da cota de montante, é possível propor uma formulação do sistema de geração baseado somente em potência ativa e reativa. Com estas simplificações podemos chegar numa formulação não linear que permite a operação em cascata de reservatórios, como pôde ser observado nos resultados numéricos. Isso evidencia a efetividade da função-objetivo escolhida como um compromisso entre maximizar a produtividade e minimizar o número de máquinas

arrancadas.

Neste trabalho foram exploradas diversas técnicas para a aceleração do processo de otimização. Uma delas é combinar as equações de dinâmica de reservatório às limites de volume de armazenamento, as quais depois podem ser seletivamente eliminadas para reservatórios de grande capacidade em operação normal mediante a heurística de eliminação, ajudando a reduzir a dimensão do problema. Em alguns casos eliminar restrições pode ser um ponto negativo, pois em algoritmos baseados em pontos interiores uma restrição ajuda a convergência do algoritmo em menos iterações. No entanto a estrutura das matrizes que representam a dinâmica do reservatório é irregular, porém eliminar estas restrições apresenta uma vantagem na solução do problema.

Outra técnica explorada para acelerar o desempenho computacional da solução do problema é o uso da heurística de arredondamento baseada no fato de que o gap relativo entre a primeira relaxação SDP e a solução exata por B&B solução é pequena, tal como é explicado em (ANJOS; LASSERRE, 2012). Esta heurística nos permite lidar com problemas de grande porte pois a solução de um problema SDP é de baixo custo computacional tal como é observado nos resultados.

Outra notável contribuição é a estratégia de relaxação da equação de integralidade pela equação de configuração única de unidades, reduzindo o tempo computacional da resolução de uma relaxação. Outros problemas combinatoriais com mútua exclusão de decisões poderiam eventualmente usar esta estratégia.

Foi observado também que utilizar uma função para custos de arranque melhora a convergência do problema e elimina soluções inteiras múltiplas factíveis perto da solução ótima. Outra vantagem é que o número de máquinas despachadas na solução final não sofre variações abruptas durante a operação.

Para o modelo de POCP termoeletrico, especificamente no problema-mestre modificado, as soluções obtidas são de boa qualidade devido aos cortes gerados pelas aproximações lineares, que restringem a solução inteira do MILP. Esta estratégia de solução foi evidenciada na observação dos resultados onde pôde ser apreciada uma operação mais econômica no POCP, produto de uma modelagem que leva em consideração aspectos que outras abordagens não consideram, tais como uma modelagem AC ou uma modelagem não-linear do sistema hidráulico.

A formulação do POCP termoeletrico apresenta similaridades com a formulação do POCP hidroeletrico. A razão do uso de diferentes técnicas de solução para cada um dos tipos de geração dominante deve ao fato das pelas estruturas de cada um dos problemas serem diferentes. A diferença mais notável entre as duas formulações reside no uso da equação (3.19) no POCP hidroeletrico, o que não é possível no POCP termoeletrico. Nesse sentido um modelo unificado para mercados onde a geração hidroeletrica e termoeletrica sejam mais equilibradas pode ser desenvolvido baseados nos modelos anteriores, capturando as características dos dois sistemas e decidindo quais das metodologias de resolução seria a mais efetiva.

Também como trabalho futuro pode ser explorada a obtenção de restrições de segurança em cenários de contingências, pois tem-se um algoritmo de Benders que permite obter cortes de maneira eficiente, de maneira similar a (FU *et al.*, 2013). Pela natureza dos cortes gerados a partir de uma relaxação SDP, em oposição a um modelo linear, é de se esperar que o corte seja mais restritivo.

Referências

- AL-AGTASH, S. Hydrothermal scheduling by augmented lagrangian: consideration of transmission constraints and pumped-storage units. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 16, n. 4, p. 750–756, 2001. ISSN 0885-8950. Citado na página 33.
- ALLEY, W. Hydroelectric plant capability curves. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, v. 96, n. 3, p. 999–1003, May 1977. ISSN 0018-9510. Citado na página 55.
- ANJOS, M. F.; LASSERRE, J. B. Introduction to semidefinite, conic and polynomial optimization. In: ANJOS, M. F.; LASSERRE, J. B. (Ed.). *Handbook on Semidefinite, Conic, and Polynomial Optimization*. [S.l.]: Springer, 2012, (International Series in Operations Research & Management Science, v. 166). p. 1–24. ISBN 978-1-4614-0768-3. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 103.
- ARISMUNANDAR, A.; NOAKES, F. General time-dependent equations for short-range optimization of hydrothermal electric systems. *AIEE Transactions, pt III (Power Apparatus and Systems)*, v. 81, p. 88–93, 1962. Citado na página 32.
- BAI, X.; SHAHIDEHPOUR, S. M. Hydro-thermal, scheduling by tabu search and decomposition method. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 11, n. 2, p. 968–974, 1996. ISSN 0885-8950. Citado na página 35.
- BAI, X.; WEI, H. Semi-definite programming-based method for security-constrained unit commitment with operational and optimal power flow constraints. *Generation, Transmission Distribution, IET*, v. 3, n. 2, p. 182–197, 2009. ISSN 1751-8687. Citado 3 vezes nas páginas 29, 70 e 92.
- BAKKEN, B. H.; BJORKVOLL, T. Hydropower unit start-up costs. In: *Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 3, p. 1522–1527. Citado na página 30.
- BARVINOK, A. A remark on the rank of positive semidefinite matrices subject to affine constraints. *Discrete & Computational Geometry*, v. 25, n. 1, p. 23–31, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 47, 62 e 89.
- BEN-TAL, A.; A., N. 4. semidefinite programming. In: _____. *Lectures on Modern Convex Optimization*. [S.l.: s.n.], 2001. cap. 4, p. 139–334. Citado na página 40.
- BENDERS, J. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Computational Management Science*, Springer-Verlag, v. 2, n. 1, p. 3–19, 2005. ISSN 1619-697X. Citado na página 84.
- BONAERT, A. P.; EL-ABIAD, A. H.; KOIVO, A. J. Optimal scheduling of hydro thermal power systems by a decomposition technique using perturbations. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 91, n. 1, p. 263–270, 1972. Citado na página 33.

- BORGHETTI, A.; D'AMBROSIO, C.; LODI, A.; MARTELLO, S. An MILP approach for short-term hydro scheduling and unit commitment with head-dependent reservoir. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 3, p. 1115–1124, 2008. ISSN 0885-8950. Citado na página [32](#).
- CHANDLER, W. G.; DANDENO, P. L.; GLIMN, A. F. Short-range economic operation of a combined thermal and hydroelectric power system. *AIEE Transactions, pt III (Power Apparatus and Systems)*, v. 72, p. 1057–1065, 1953. Citado na página [32](#).
- CHEN, P.-H.; CHANG, H.-C. Genetic aided scheduling of hydraulically coupled plants in hydro-thermal coordination. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 11, n. 2, p. 975–981, 1996. ISSN 0885-8950. Citado na página [36](#).
- Côté, G.; LAUGHTON, M. A. Large-scale mixed integer programming: Benders-type heuristics. *European Journal of Operational Research*, v. 16, n. 3, p. 327 – 333, 1984. ISSN 0377-2217. Citado na página [102](#).
- FARHAT, I. A.; EL-HAWARY, M. E. Optimization methods applied for solving the short-term hydrothermal coordination problem. *Electric Power Systems Research*, v. 79, n. 9, p. 1308 – 1320, 2009. ISSN 0378-7796. Citado na página [59](#).
- FINARDI, E.; SILVA, E. da. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 21, n. 2, p. 835–844, 2006. ISSN 0885-8950. Citado na página [31](#).
- FU, Y.; LI, Z.; WU, L. Modeling and solution of the large-scale security-constrained unit commitment. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 28, n. 4, p. 3524–3533, Nov 2013. ISSN 0885-8950. Citado na página [104](#).
- FUENTES-LOYOLA, R.; QUINTANA, V. H. Medium-term hydrothermal coordination by semidefinite programming. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 18, n. 4, p. 1515–1522, 2003. ISSN 0885-8950. Citado 3 vezes nas páginas [36](#), [56](#) e [102](#).
- GAUTHIER, J. M.; RIBIÈRE, G. Experiments in mixed-integer linear programming using pseudo-costs. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 12, n. 1, p. 26–47, 1977. ISSN 0025-5610. Citado na página [102](#).
- GLIMN, A. F.; KIRCHMAYER, L. K. Economic operation of variable-head hydroelectric plants. *AIEE Transactions, pt III (Power Apparatus and Systems)*, v. 77, p. 1070–1079, 1958. Citado na página [30](#).
- GOEMANS, M. X.; WILLIAMSON, D. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM*, v. 42, p. 1115–1145, 1995. Citado 2 vezes nas páginas [73](#) e [97](#).
- GUAN, X.; LUH, P. B.; ZHANG, L. Nonlinear approximation method in lagrangian relaxation-based algorithms for hydrothermal scheduling. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 10, n. 2, p. 772–778, 1995. ISSN 0885-8950. Citado na página [34](#).
- GUY, J. D. Security constrained unit commitment. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, PAS-90, n. 3, p. 1385–1390, 1971. ISSN 0018-9510. Citado na página [27](#).

- HABIBOLLAHZADEH, H.; BUBENKO, J. Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydrothermal power system. *Power Engineering Review, IEEE*, PER-6, n. 2, p. 28–29, Feb 1986. ISSN 0272-1724. Citado na página 27.
- HAWARY, M. E.; CHRISTENSEN, G. *Optimal economic operation of electric power systems*. [S.l.]: Elsevier Science, 1979. (Mathematics in Science and Engineering). ISBN 9780080956527. Citado na página 54.
- HELBERG, C. *Semidefinite programming for combinatorial optimization*. [S.l.]: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 2000. (ZIB-Report). Citado na página 73.
- HORST, R.; PARDALOS, P. M.; THOAI, N. V. *Introduction to Global Optimization*. [S.l.]: Springer, 2000. (Nonconvex Optimization and Its Applications). ISBN 9780792367567. Citado na página 70.
- KADOWAKI, M. *Modelo de Programação da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Predominantemente Hidrelétricos*. Tese (Doutorado) — University of Campinas, Departament of Electric and Computing Engineering, July 2012. Citado na página 34.
- KEHA, A. B.; , I. R. d. F. J. ; NEMHAUSER, G. L. Models for representing piecewise linear cost functions. *Operations Research Letters*, v. 32, n. 1, p. 44–48, 2004. ISSN 0167-6377. Citado na página 32.
- KLENIATI, P.; PARPAS, P.; RUSTEM, B. Decomposition-based method for sparse semidefinite relaxations of polynomial optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer US, v. 145, n. 2, p. 289–310, 2010. ISSN 0022-3239. Citado na página 84.
- LAURENT, M. *Geometry of Cuts and Metrics*. [S.l.]: Springer, 1997. (Algorithms and Combinatorics). ISBN 9783540616115. Citado na página 88.
- LAURENT, M.; RENDL, F. Semidefinite programming and integer programming. In: AARDAL, G. N. K.; WEISMANTEL, R. (Ed.). *Discrete Optimization*. [S.l.]: Elsevier, 2005, (Handbooks in Operations Research and Management Science, v. 12). p. 393 – 514. Citado na página 39.
- LAVAEI, J.; LOW, S. Zero duality gap in optimal power flow problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 27, n. 1, p. 92–107, Feb 2012. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 78 e 83.
- LE, K. D.; DAY, J. T.; COOPER, B. L.; GIBBONS, E. W. A global optimization method for scheduling thermal generation, hydro generation, and economy purchases. *Power Engineering Review, IEEE*, PER-3, n. 7, p. 25–26, 1983. ISSN 0272-1724. Citado na página 33.
- LI, C.; SVOBODA, A.; TSENG, C.-L.; JOHNSON, R.; HSU, E. Hydro unit commitment in hydro-thermal optimization. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 12, n. 2, p. 764–769, 1997. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- LI, Z.; HE, S.; ZHANG, S. *Approximation Methods for Polynomial Optimization: Models, Algorithms, and Applications*. [S.l.]: Springer New York, 2012. (SpringerBriefs in Optimization). ISBN 9781461439844. Citado na página 28.

- LOVÁSZ, L.; SCHRIJVER, A. Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization. *SIAM Journal on Optimization*, v. 1, p. 166–190, 1991. Citado na página 58.
- LUH, P. B.; ZHANG, D.; TOMASTIK, R. N. An algorithm for solving the dual problem of hydrothermal scheduling. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 13, n. 2, p. 593–600, 1998. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- MA, H.; SHAHIDEHPOUR, S.; MARWALI, M. Transmission constrained unit commitment based on benders decomposition. In: *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997*. [S.l.: s.n.], 1997. v. 4, p. 2263–2267 vol.4. ISSN 0743-1619. Citado na página 29.
- MADRIGAL, M.; QUINTANA, V. H. Semidefinite programming relaxations for 0,1-power dispatch problems. In: *Power Engineering Society Summer Meeting, 1999. IEEE*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 2, p. 697–702. Citado na página 28.
- MITCHELL, J. E. Solving semidefinite programming problems using branch-and-bound. In: . IPM 2000 and EURO 2000, Budapest: [s.n.], 2000. Citado na página 102.
- MOTTO, A.; GALIANA, F. Unit commitment with dual variable constraints. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 1, p. 330–338, Feb 2004. ISSN 0885-8950. Citado na página 29.
- NANDA, J.; BIJWE, P. R. Optimal hydrothermal scheduling with cascaded plants using progressive optimality algorithm. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 100, n. 4, p. 2093–2099, 1981. Citado na página 33.
- NESTEROV, Y.; WOLKOWICZ, H.; YE, Y. Semidefinite programming relaxations of nonconvex quadratic optimization. In: WOLKOWICZ, H.; SAIGAL, R.; VANDENBERGHE, L. (Ed.). *Handbook of Semidefinite Programming*. [S.l.]: Springer, 2000, (International Series in Operations Research & Management Science, v. 27). p. 361–419. ISBN 978-1-4613-6970-7. Citado na página 62.
- NILSSON, O.; SJELVGREN, D. Variable splitting applied to modelling of start-up costs in short term hydro generation scheduling. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 12, n. 2, p. 770–775, 1997. ISSN 0885-8950. Citado 3 vezes nas páginas 31, 51 e 92.
- PADHY, N. Unit commitment-a bibliographical survey. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 2, p. 1196–1205, May 2004. ISSN 0885-8950. Citado na página 25.
- REDONDO, N. J.; CONEJO, A. J. Short-term hydro-thermal coordination by lagrangian relaxation: solution of the dual problem. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 14, n. 1, p. 89–95, 1999. ISSN 0885-8950. Citado na página 34.
- REI, W.; CORDEAU, J.-F.; GENDREAU, M.; SORIANO, P. Accelerating benders decomposition by local branching. *INFORMS Journal on Computing*, v. 21, n. 2, p. 333–345, 2009. Citado na página 102.
- RICHTER C. W., . J.; SHEBLE, G. B. A profit-based unit commitment ga for the competitive environment. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 15, n. 2, p. 715–721, 2000. ISSN 0885-8950. Citado na página 25.

- RINGLEE, R. J. Bounds for convex variational programming problems arising in power system scheduling and control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 10, p. 28–35, 1965. Citado na página 32.
- RUX, L. M. An incremental economic dispatch method for cascaded hydroelectric power plants. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 8, n. 3, p. 1266–1273, 1993. ISSN 0885-8950. Citado na página 30.
- SARAVANAN, B.; DAS, S.; SIKRI, S.; KOTHARI, D. P. A solution to the unit commitment problem—a review. *Frontiers in Energy*, v. 7, n. 2, p. 223–236, 2013. ISSN 2095-1698. Citado na página 25.
- SASAKI, H.; YAMAMOTO, T.; KUBOKAWA, J.; NAGATA, T.; FUJITA, H. A solution of unit commitment with transmission and voltage constraints by heuristic method and optimal power flow. In: *Power System Technology, 2000. Proceedings. PowerCon 2000. International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 1, p. 357–362. Citado na página 27.
- SHAHIDEHPOUR, M.; FU, Y. Benders decomposition: applying benders decomposition to power systems. *Power and Energy Magazine, IEEE*, v. 3, n. 2, p. 20–21, 2005. ISSN 1540-7977. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 35.
- SHERALI, H.; ADAMS, W. A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations for zero-one programming problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 3, n. 3, p. 411–430, 1990. Citado na página 56.
- SHOR, N. Z. Quadratic optimization problems. *Tekhnicheskaya Kybernetika*, v. 1, p. 128–139, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 62.
- SIFUENTES, W.; VARGAS, A. Hydrothermal scheduling using benders decomposition: Accelerating techniques. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 22, n. 3, p. 1351–1359, Aug 2007. ISSN 0885-8950. Citado na página 35.
- SINGH, L. *Advanced Power System Analysis and Dynamics*. [S.l.]: New Age International, 2006. ISBN 9788122417326. Citado na página 53.
- SIVANAGARAJU, S. *Electric Power Transmission and Distribution*. [S.l.]: Pearson/Dorling Kindersley (India), 2008. ISBN 9788131707913. Citado na página 53.
- SOARES, S.; SALMAZO, C. Minimum loss predispatch model for hydroelectric power systems. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 12, n. 3, p. 1220–1228, Aug 1997. ISSN 0885-8950. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 55.
- TUNCEL, L. Primal-dual symmetry and scale invariance of interior-point algorithms for convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, v. 23, n. 3, p. 708–718, 1998. Citado na página 45.
- TURGEON, A. Optimal scheduling of thermal generating units. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 6, p. 1000–1005, Dec 1978. ISSN 0018-9286. Citado na página 29.
- VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. Semidefinite programming. *SIAM Review*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 38, n. 1, p. pp. 49–95, 1996. ISSN 00361445. Citado na página 39.

- VIANA, A.; PEDROSO, J. P. A new milp-based approach for unit commitment in power production planning. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 44, n. 1, p. 997–1005, 2013. ISSN 0142-0615. Citado na página 28.
- WATKINS JR., D. W.; MCKINNEY, D. C. Decomposition methods for water resources optimization models with fixed costs. *Advances in Water Resources*, v. 21, n. 4, p. 283 – 295, 1998. ISSN 0309-1708. Citado na página 35.
- WONG, K. P.; WONG, Y. W. Short-term hydrothermal scheduling part. i. simulated annealing approach. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, v. 141, n. 5, p. 497–501, 1994. ISSN 1350-2360. Citado na página 36.
- WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. *Power generation, operation, and control*. [S.l.]: Wiley, 1984. ISBN 9780471091820. Citado na página 25.
- WU, L.; SHAHIDEHPOUR, M. Accelerating the benders decomposition for network-constrained unit commitment problems. *Energy Systems*, Springer-Verlag, v. 1, n. 3, p. 339–376, 2010. ISSN 1868-3967. Citado na página 102.
- YAMASHITA, M.; FUJISAWA, K.; FUKUDA, M.; KOBAYASHI, K.; NAKTA, K.; NAKATA, M. Latest developments in the SDPA family for solving large-scale SDPs. In: ANJOS, M. F.; LASSERRE, J. B. (Ed.). *Handbook on Semidefinite, Conic, and Polynomial Optimization*. [S.l.]: Springer, 2012, (International Series in Operations Research & Management Science, v. 166). p. 687–714. ISBN 978-1-4614-0768-3. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 91.
- YANG, L.; JIAN, J.; ZHU, Y.; DONG, Z. Tight relaxation method for unit commitment problem using reformulation and lift-and-project. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 30, n. 1, p. 13–23, Jan 2015. ISSN 0885-8950. Citado na página 28.
- ZAKERI, G.; PHILPOTT, A. B.; RYAN, D. M. Inexact cuts in benders decomposition. *SIAM Journal on Optimization*, v. 10, n. 3, p. 643–657, 2000. Citado na página 102.
- ZHAO, C.; GUAN, Y. Unified stochastic and robust unit commitment. *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 28, n. 3, p. 3353–3361, Aug 2013. ISSN 0885-8950. Citado na página 29.

Apêndices

APÊNDICE A – Dados Detalhados dos Casos-Teste

A.1 Dados dos Casos-Teste do POCP Hidroelétrico

A.1.1 Dados para caso-teste 3-GENH

T [h]	$Sbase$ [MVA]	i_0	V_0 [p.u.]	\bar{V} [p.u.]	\underline{V} [p.u.]
24	1.000	2	1,01	1,05	0,95

Tabela 11 – Dados gerais do caso-teste 3-GENH.

Parâmetro	UH1M1	UH1M2	UH1M3	UH1M4
\bar{P} [MW]	298	596	894	1.192
\underline{P} [MW]	108,12	215,8	323,08	429,92
\bar{Q} [MVAR]	187,52	375,04	562,56	750,08
\underline{Q} [MVAR]	−298	−596	−894	−1.192
α [R\$/MW ²]	$9 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	0,37	0,36	0,35	0,35
γ [R\$]	51,4	103,9	157,15	211,07

Tabela 12 – Dados das máquinas da usina 1 para o caso-teste 3-GENH.

Parâmetro	UH2M1	UH2M2	UH2M3	UH2M4	UH2M5	UH2M6
\bar{P} [MW]	375,67	748,75	1.115,62	1.468,2	1.817,53	2.153,73
\underline{P} [MW]	179,79	358,01	534,73	709,74	883,18	1.055,17
\bar{Q} [MVAR]	290,61	579,22	863,02	1.135,77	1.406,01	1.666,08
\underline{Q} [MVAR]	−375,67	−748,75	−1.115,62	−1.468,2	−1.817,53	−2.153,73
α [R\$/MW ²]	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	−0,48	−0,65	−0,83	−1,02	−1,21	−1,39
γ [R\$]	227,79	485,16	773,84	1.093,46	1.445,02	1.822,75

Tabela 13 – Dados das máquinas da usina 2 para o caso-teste 3-GENH.

Parâmetro	UH3M1	UH3M2	UH3M3	UH3M4	UH3M5	UH3M6
\overline{P} [MW]	86,4	172,8	259,2	345,6	432	498,24
\underline{P} [MW]	19,2	38,4	57,6	76,8	96	115,2
\overline{Q} [MVAR]	70,25	140,5	210,76	281,01	351,26	405,12
\underline{Q} [MVAR]	-65,17	-130,34	-195,51	-260,68	-325,85	-375,82
α [R\$/MW ²]	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	2,11	2,09	2,06	2	1,91	1,79
γ [R\$]	41,84	84,34	128,17	175,36	227,2	285,46

Tabela 14 – Dados das máquinas 1 a 6 da usina 3 para o caso-teste 3-GENH.

Parâmetro	UH3M7	UH3M8	UH3M9	UH3M10
\overline{P} [MW]	548,35	599,81	620,35	635,52
\underline{P} [MW]	134,4	153,6	172,8	192
\overline{Q} [MVAR]	445,87	487,71	504,41	516,75
\underline{Q} [MVAR]	-413,61	-452,43	-467,92	-479,36
α [R\$/MW ²]	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	1,65	1,36	0,79	$1 \cdot 10^{-2}$
γ [R\$]	351,06	443,74	594,27	804,52

Tabela 15 – Dados das máquinas 7 a 10 da usina 3 para o caso-teste 3-GENH.

Parâmetro	UH1	UH2	UH3
m_t [MW]	0,77	0,91	0,43
$\underline{\nu}$ [hm ³]	4.669	4.573	301,81
$\overline{\nu}$ [hm ³]	17.724,72	17.027	518,98
ν_0 [hm ³]	10.485,32	6.331,5	312,67
u_0	2	3	10
a [m ³ /s]	0,76	1,09	$1 \cdot 10^{-2}$
s [m ³ /s]	0	0	0
δ [R\$]	894	1.140	197,4
λ [R\$/m ³ /s]	36,45	17,9	8,37
Topologia	2	3	0
τ [h]	6	4	0
Barra	2	1	6

Tabela 16 – Dados das usinas para o caso-teste 3-GENH.

T	Pd1	Qd1	Pd2	Qd2	Pd3	Qd3	Pd4	Qd4	Pd5	Qd5	Pd6	Qd6
1	0	0	0	0	293,67	0	587,34	0	587,34	0	0	0
2	0	0	0	0	249,54	0	499,08	0	499,08	0	0	0
3	0	0	0	0	227,9	0	455,79	0	455,79	0	0	0
4	0	0	0	0	221,55	0	443,1	0	443,1	0	0	0
5	0	0	0	0	229,64	0	459,29	0	459,29	0	0	0
6	0	0	0	0	260,68	0	521,36	0	521,36	0	0	0
7	0	0	0	0	322,86	0	645,73	0	645,73	0	0	0
8	0	0	0	0	374,22	0	748,43	0	748,43	0	0	0
9	0	0	0	0	442,7	0	885,4	0	885,4	0	0	0
10	0	0	0	0	478,45	0	956,89	0	956,89	0	0	0
11	0	0	0	0	502,44	0	1.004,88	0	1.004,88	0	0	0
12	0	0	0	0	485,92	0	971,84	0	971,84	0	0	0
13	0	0	0	0	431,39	0	862,78	0	862,78	0	0	0
14	0	0	0	0	446,22	0	892,44	0	892,44	0	0	0
15	0	0	0	0	493,95	0	987,91	0	987,91	0	0	0
16	0	0	0	0	496,29	0	992,58	0	992,58	0	0	0
17	0	0	0	0	503,83	0	1.007,66	0	1.007,66	0	0	0
18	0	0	0	0	544,27	0	1.088,54	0	1.088,54	0	0	0
19	0	0	0	0	635,69	0	1.271,38	0	1.271,38	0	0	0
20	0	0	0	0	587,77	0	1.175,54	0	1.175,54	0	0	0
21	0	0	0	0	536,74	0	1.073,47	0	1.073,47	0	0	0
22	0	0	0	0	523,12	0	1.046,25	0	1.046,25	0	0	0
23	0	0	0	0	466,93	0	933,87	0	933,87	0	0	0
24	0	0	0	0	386,62	0	773,24	0	773,24	0	0	0

Tabela 18 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 1 a 6 para o caso-teste 3-GENH.

Parâmetro	1-2	2-3	1-4	2-4	4-5	5-6	3-6
\overline{F} [MW]	2.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
r [p.u.]	$2 \cdot 10^{-2}$	0	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	0	$2 \cdot 10^{-2}$	0
x [p.u.]	0,17	$4 \cdot 10^{-2}$	0,26	0,2	$4 \cdot 10^{-2}$	0,14	$2 \cdot 10^{-2}$

Tabela 17 – Dados das linhas de transmissão 1-2, 2-3, 1-4, 2-4, 4-5, 5-6, e 3-6 para o caso-teste 3-GENH.

A.1.2 Dados para caso-teste IEEE-14H

T [h]	S_{base} [MVA]	i_0	V_0 [p.u.]	\bar{V} [p.u.]	\underline{V} [p.u.]
24	1.000	2	1,06	1,1	0,9

Tabela 19 – Dados gerais do caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	UH1M1	UH1M2	UH1M3	UH1M4
\bar{P} [MW]	298	596	894	1.192
\underline{P} [MW]	108,12	215,8	323,08	429,92
\bar{Q} [MVAR]	187,52	375,04	562,56	750,08
\underline{Q} [MVAR]	−298	−596	−894	−1.192
α [R\$/MW ²]	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	$7 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$-4 \cdot 10^{-2}$	$-9 \cdot 10^{-2}$
γ [R\$]	75,19	158,68	249,05	344,79

Tabela 20 – Dados das máquinas da usina 1 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	UH2M1	UH2M2	UH2M3	UH2M4	UH2M5	UH2M6
\bar{P} [MW]	375,67	748,75	1.115,62	1.468,2	1.817,53	2.153,73
\underline{P} [MW]	179,79	358,01	534,73	709,74	883,18	1.055,17
\bar{Q} [MVAR]	290,61	579,22	863,02	1.135,77	1.406,01	1.666,08
\underline{Q} [MVAR]	−375,67	−748,75	−1.115,62	−1.468,2	−1.817,53	−2.153,73
α [R\$/MW ²]	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	−0,48	−0,65	−0,83	−1,02	−1,21	−1,39
γ [R\$]	227,79	485,16	773,84	1.093,46	1.445,02	1.822,75

Tabela 21 – Dados das máquinas da usina 2 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	UH3M1	UH3M2	UH3M3	UH3M4	UH3M5	UH3M6
\overline{P} [MW]	86,4	172,8	259,2	345,6	432	498,24
\underline{P} [MW]	19,2	38,4	57,6	76,8	96	115,2
\overline{Q} [MVAR]	70,25	140,5	210,76	281,01	351,26	405,12
\underline{Q} [MVAR]	-65,17	-130,34	-195,51	-260,68	-325,85	-375,82
α [R\$/MW ²]	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	2,11	2,09	2,06	2	1,91	1,79
γ [R\$]	41,84	84,33	128,17	175,37	227,2	285,47

Tabela 22 – Dados das máquinas 1 a 6 da usina 3 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	UH3M7	UH3M8	UH3M9	UH3M10
\overline{P} [MW]	548,35	599,81	620,35	635,52
\underline{P} [MW]	134,4	153,6	172,8	192
\overline{Q} [MVAR]	445,87	487,71	504,41	516,75
\underline{Q} [MVAR]	-413,61	-452,43	-467,92	-479,36
α [R\$/MW ²]	$3,3 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	1,65	1,36	0,79	$1 \cdot 10^{-2}$
γ [R\$]	351,06	443,76	594,25	804,46

Tabela 23 – Dados das máquinas 7 a 10 da usina 3 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	UH4M1	UH4M2	UH4M3	UH4M4	UH4M5	UH4M6
\overline{P} [MW]	273,6	547,2	820,8	1.094,4	1.368	1.641,6
\underline{P} [MW]	100,8	201,6	302,4	403,2	504	604,8
\overline{Q} [MVAR]	200,78	401,55	602,33	803,11	1.003,88	1.204,66
\underline{Q} [MVAR]	-273,6	-547,2	-820,8	-1.094,4	-1.368	-1.641,6
α [R\$/MW ²]	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	0,78	0,72	0,65	0,57	0,5	0,43
γ [R\$]	81,94	171,61	272,97	387,98	510,6	641,41

Tabela 24 – Dados das máquinas da usina 4 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	UH1	UH2	UH3	UH4
m_t [MW]	0,77	0,91	0,43	1,38
$\underline{\nu}$ [hm ³]	4.669	4.573	301,81	7.044,3
$\bar{\nu}$ [hm ³]	17.724,72	17.027	518,98	12.584,3
ν_0 [hm ³]	10.485,32	6.331,5	448,57	8.146,21
u_0	4	3	10	6
a [m ³ /s]	0,76	1,09	$6,5 \cdot 10^{-2}$	0,5
s [m ³ /s]	0	0	0	0
δ [R\$]	894	1.140	197,4	855
λ [R\$/m ³ /s]	31,9	17,9	8,37	20,93
Topologia	2	3	4	0
τ [h]	6	4	8	0
Barra	6	1	2	3

Tabela 25 – Dados das usinas para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	1-2	1-5	2-3	2-4	2-5	3-4	4-5	4-7
\bar{F} [MW]	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
r [p.u.]	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0
x [p.u.]	$6 \cdot 10^{-2}$	0,22	0,2	0,18	0,17	0,17	$4 \cdot 10^{-2}$	0,21

Tabela 26 – Dados das linhas de transmissão 1-2, 1-5, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 4-5, e 4-7 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	4-9	5-6	6-11	6-12	6-13	7-8	7-9	9-10
\bar{F} [MW]	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
r [p.u.]	0	0	$9 \cdot 10^{-2}$	0,12	$7 \cdot 10^{-2}$	0	0	$3 \cdot 10^{-2}$
x [p.u.]	0,56	0,25	0,2	0,26	0,13	0,18	0,11	$8 \cdot 10^{-2}$

Tabela 27 – Dados das linhas de transmissão 4-9, 5-6, 6-11, 6-12, 6-13, 7-8, 7-9, e 9-10 para o caso-teste IEEE-14H.

Parâmetro	9-14	10-11	12-13	13-14
\overline{F} [MW]	2.000	2.000	2.000	2.000
r [p.u.]	0,13	$8 \cdot 10^{-2}$	0,22	0,17
x [p.u.]	0,27	0,19	0,2	0,35

Tabela 28 – Dados das linhas de transmissão 9-14, 10-11, 12-13, e 13-14 para o caso-teste IEEE-14H.

T	Pd1	Qd1	Pd2	Qd2	Pd3	Qd3	Pd4	Qd4	Pd5	Qd5	Pd6	Qd6	Pd7	Qd7
1	0	0	243,81	142,69	1.058,4	213,48	537,07	-43,82	85,39	17,98	125,84	84,27	0	0
2	0	0	225,66	132,07	979,57	197,58	497,07	-40,56	79,03	16,64	116,47	77,99	0	0
3	0	0	215,6	126,18	935,9	188,77	474,91	-38,75	75,51	15,9	111,28	74,51	0	0
4	0	0	209,59	122,67	909,85	183,52	461,69	-37,67	73,41	15,45	108,18	72,44	0	0
5	0	0	211,19	123,6	916,77	184,91	465,2	-37,96	73,96	15,57	109	72,99	0	0
6	0	0	224,21	131,22	973,31	196,31	493,89	-40,3	78,53	16,53	115,72	77,49	0	0
7	0	0	252,49	147,77	1.096,05	221,07	556,17	-45,38	88,43	18,62	130,32	87,27	0	0
8	0	0	275,96	161,51	1.197,96	241,63	607,88	-49,6	96,65	20,35	142,43	95,38	0	0
9	0	0	303,25	177,48	1.316,4	265,52	667,98	-54,5	106,21	22,36	156,51	104,81	0	0
10	0	0	317,23	185,66	1.377,12	277,76	698,79	-57,01	111,11	23,39	163,73	109,64	0	0
11	0	0	315,11	184,42	1.367,88	275,9	694,1	-56,63	110,36	23,23	162,63	108,91	0	0
12	0	0	303,22	177,46	1.316,28	265,49	667,92	-54,5	106,2	22,36	156,5	104,8	0	0
13	0	0	295,93	173,19	1.284,62	259,11	651,86	-53,18	103,64	21,82	152,74	102,28	0	0
14	0	0	303,22	177,46	1.316,28	265,49	667,92	-54,5	106,2	22,36	156,5	104,8	0	0
15	0	0	314,16	183,86	1.363,76	275,07	692,01	-56,46	110,03	23,16	162,15	108,58	0	0
16	0	0	321,45	188,13	1.395,42	281,45	708,08	-57,77	112,58	23,7	165,91	111,1	0	0
17	0	0	328,74	192,4	1.427,07	287,84	724,14	-59,08	115,14	24,24	169,67	113,62	0	0
18	0	0	343,04	200,76	1.489,14	300,36	755,63	-61,65	120,14	25,29	177,05	118,56	0	0
19	0	0	376,88	220,57	1.636,05	329,99	830,18	-67,73	132	27,79	194,52	130,26	0	0
20	0	0	361,04	211,3	1.567,27	316,12	795,28	-64,89	126,45	26,62	186,34	124,78	0	0
21	0	0	345,6	202,26	1.500,26	302,6	761,28	-62,11	121,04	25,48	178,38	119,45	0	0
22	0	0	342,14	200,24	1.485,23	299,57	753,65	-61,49	119,83	25,23	176,59	118,25	0	0
23	0	0	312,49	182,88	1.356,51	273,61	688,34	-56,16	109,44	23,04	161,28	108	0	0
24	0	0	275,74	161,38	1.196,98	241,43	607,38	-49,56	96,57	20,33	142,32	95,3	0	0

Tabela 29 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 1 a 7 para o caso-teste IEEE-14H.

T	Pd8	Qd8	Pd9	Qd9	Pd10	Qd10	Pd11	Qd11	Pd12	Qd12	Pd13	Qd13	Pd14	Qd14
1	0	0	331,45	186,51	101,12	65,17	39,32	20,22	68,54	17,98	151,68	65,17	167,41	56,18
2	0	0	306,77	172,62	93,59	60,31	36,4	18,72	63,43	16,64	140,38	60,31	154,94	51,99
3	0	0	293,09	164,93	89,42	57,62	34,77	17,88	60,61	15,9	134,13	57,62	148,04	49,68
4	0	0	284,93	160,33	86,93	56,02	33,81	17,39	58,92	15,45	130,39	56,02	143,91	48,29
5	0	0	287,1	161,55	87,59	56,45	34,06	17,52	59,37	15,57	131,38	56,45	145,01	48,66
6	0	0	304,8	171,52	92,99	59,93	36,16	18,6	63,03	16,53	139,49	59,93	153,95	51,66
7	0	0	343,24	193,15	104,72	67,49	40,72	20,94	70,98	18,62	157,08	67,49	173,37	58,18
8	0	0	375,16	211,11	114,45	73,76	44,51	22,89	77,57	20,35	171,68	73,76	189,49	63,59
9	0	0	412,25	231,98	125,77	81,05	48,91	25,15	85,24	22,36	188,66	81,05	208,22	69,87
10	0	0	431,26	242,68	131,57	84,79	51,17	26,31	89,18	23,39	197,36	84,79	217,82	73,1
11	0	0	428,37	241,05	130,69	84,22	50,82	26,14	88,58	23,23	196,03	84,22	216,36	72,6
12	0	0	412,21	231,96	125,76	81,04	48,91	25,15	85,24	22,36	188,64	81,04	208,2	69,87
13	0	0	402,3	226,38	122,73	79,1	47,73	24,55	83,19	21,82	184,1	79,1	203,19	68,19
14	0	0	412,21	231,96	125,76	81,04	48,91	25,15	85,24	22,36	188,64	81,04	208,2	69,87
15	0	0	427,08	240,32	130,3	83,97	50,67	26,06	88,31	23,16	195,44	83,97	215,71	72,39
16	0	0	436,99	245,9	133,32	85,92	51,85	26,66	90,36	23,7	199,98	85,92	220,72	74,07
17	0	0	446,91	251,48	136,34	87,87	53,02	27,27	92,41	24,24	204,52	87,87	225,73	75,75
18	0	0	466,34	262,42	142,27	91,69	55,33	28,45	96,43	25,29	213,41	91,69	235,54	79,04
19	0	0	512,35	288,31	156,31	100,73	60,79	31,26	105,94	27,79	234,47	100,73	258,78	86,84
20	0	0	490,81	276,18	149,74	96,5	58,23	29,95	101,49	26,62	224,61	96,5	247,9	83,19
21	0	0	469,83	264,38	143,34	92,37	55,74	28,67	97,15	25,48	215,01	92,37	237,3	79,63
22	0	0	465,12	261,73	141,9	91,45	55,18	28,38	96,18	25,23	212,85	91,45	234,92	78,83
23	0	0	424,81	239,05	129,6	83,52	50,4	25,92	87,84	23,04	194,4	83,52	214,56	72
24	0	0	374,85	210,93	114,36	73,7	44,47	22,87	77,51	20,33	171,54	73,7	189,33	63,53

Tabela 30 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 8 a 14 para o caso-teste IEEE-14H.

A.1.3 Dados para caso-teste IEEE-30H

T [h]	S_{base} [MVA]	i_0	V_0 [p.u.]	\bar{V} [p.u.]	\underline{V} [p.u.]
24	3.600	4	1,06	1,1	0,9

Tabela 31 – Dados gerais do caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH1M1	UH1M2	UH1M3	UH1M4
\bar{P} [MW]	298	596	894	1.192
\underline{P} [MW]	108,12	215,8	323,08	429,92
\bar{Q} [MVAR]	225,03	450,05	675,08	900,1
\underline{Q} [MVAR]	-357,6	-715,2	-1.072,8	-1.430,4
α [R\$/MW ²]	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	$7 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$-4 \cdot 10^{-2}$	$-9 \cdot 10^{-2}$
γ [R\$]	75,19	158,68	249,05	344,79

Tabela 32 – Dados das maquinas da usina 1 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH2M1	UH2M2	UH2M3	UH2M4	UH2M5	UH2M6
\bar{P} [MW]	375,67	748,75	1.115,62	1.468,2	1.817,53	2.153,73
\underline{P} [MW]	179,79	358,01	534,73	709,74	883,18	1.055,17
\bar{Q} [MVAR]	348,73	695,06	1.035,63	1.362,92	1.687,21	1.999,3
\underline{Q} [MVAR]	-450,8	-898,5	-1.338,74	-1.761,84	-2.181,04	-2.584,48
α [R\$/MW ²]	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	-0,48	-0,65	-0,83	-1,02	-1,21	-1,39
γ [R\$]	227,79	485,16	773,84	1.093,46	1.445,02	1.822,75

Tabela 33 – Dados das máquinas da usina 2 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH3M1	UH3M2	UH3M3	UH3M4	UH3M5	UH3M6
\overline{P} [MW]	273,6	547,2	820,8	1.094,4	1.368	1.641,6
\underline{P} [MW]	100,8	201,6	302,4	403,2	504	604,8
\overline{Q} [MVAR]	266,96	533,92	800,88	1.067,84	1.334,8	1.601,76
\underline{Q} [MVAR]	-247,65	-495,29	-742,94	-990,59	-1.238,24	-1.485,88
α [R\$/MW ²]	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	0,78	0,72	0,65	0,57	0,5	0,43
γ [R\$]	81,94	171,61	272,97	387,98	510,6	641,41

Tabela 34 – Dados das máquinas da usina 3 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH4M1	UH4M2	UH4M3	UH4M4	UH4M5	UH4M6
\overline{P} [MW]	172,8	345,6	516,82	689,09	858,72	1.030,46
\underline{P} [MW]	120	240	360	480	600	720
\overline{Q} [MVAR]	152,17	304,33	455,11	606,81	756,19	907,42
\underline{Q} [MVAR]	-207,36	-414,72	-620,18	-826,91	-1.030,46	-1.236,55
α [R\$/MW ²]	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	1,93	1,93	1,92	1,91	1,9	1,89
γ [R\$]	61,4	123,14	185,23	247,67	310,46	373,6

Tabela 35 – Dados das máquinas 1 a 6 da usina 4 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH4M7	UH4M8	UH4M9	UH4M10	UH4M11	UH4M12
\overline{P} [MW]	1.198,51	1.369,73	1.536,19	1.701,6	1.871,76	2.035,58
\underline{P} [MW]	840	960	1.080	1.200	1.320	1.440
\overline{Q} [MVAR]	1.055,41	1.206,18	1.352,77	1.498,43	1.648,27	1.792,53
\underline{Q} [MVAR]	-1.438,21	-1.643,68	-1.843,43	-2.041,92	-2.246,11	-2.442,7
α [R\$/MW ²]	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,85
γ [R\$]	437,07	500,87	565,07	629,7	694,71	760,07

Tabela 36 – Dados das máquinas 7 a 12 da usina 4 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH4M13	UH4M14	UH4M15	UH4M16	UH4M17	UH4M18
\overline{P} [MW]	2.198,35	2.367,46	2.528,64	2.697,22	2.856,82	3.024,86
\underline{P} [MW]	1.560	1.680	1.800	1.920	2.040	2.160
\overline{Q} [MVAR]	1.935,86	2.084,78	2.226,72	2.375,17	2.515,71	2.663,69
\underline{Q} [MVAR]	-2.638,02	-2.840,95	-3.034,37	-3.236,66	-3.428,18	-3.629,83
α [R\$/MW ²]	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	1,84	1,83	1,82	1,81	1,8	1,8
γ [R\$]	825,8	891,91	958,37	1.025,18	1.092,43	1.160,49

Tabela 37 – Dados das máquinas 13 a 18 da usina 4 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH4M19	UH4M20
\overline{P} [MW]	3.192,91	3.350,4
\underline{P} [MW]	2.280	2.400
\overline{Q} [MVAR]	2.811,67	2.950,36
\underline{Q} [MVAR]	-3.831,49	-4.020,48
α [R\$/MW ²]	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
β [R\$/MW]	1,79	1,77
γ [R\$]	1.229,11	1.298,31

Tabela 38 – Dados das máquinas 19 a 20 da usina 4 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH5M1	UH5M2	UH5M3	UH5M4	UH5M5	UH5M6
\overline{P} [MW]	109,55	219,09	328,64	438,18	547,73	652,15
\underline{P} [MW]	25	50	75	100	125	150
\overline{Q} [MVAR]	101,69	203,38	305,08	406,76	508,46	605,39
\underline{Q} [MVAR]	-131,46	-262,91	-394,37	-525,82	-657,28	-782,58
α [R\$/MW ²]	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$4,9 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	4,22	4,21	4,2	4,18	4,15	4,11
γ [R\$]	26,03	52,53	79,59	107,51	136,76	168,02

Tabela 39 – Dados das máquinas 1 a 6 da usina 5 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH5M7	UH5M8	UH5M9	UH5M10	UH5M11	UH5M12
\overline{P} [MW]	760,84	869,54	978,23	1.078,38	1.186,22	1.283,81
\underline{P} [MW]	175	200	225	250	275	300
\overline{Q} [MVAR]	706,28	807,19	908,09	1.001,06	1.101,16	1.191,76
\underline{Q} [MVAR]	-913,01	-1.043,45	-1.173,88	-1.294,06	-1.423,46	-1.540,57
α [R\$/MW ²]	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	4,06	3,99	3,9	3,78	3,61	3,41
γ [R\$]	202,11	240,1	284,04	337,01	401,39	480,7

Tabela 40 – Dados das máquinas 7 a 12 da usina 5 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH5M13	UH5M14
\overline{P} [MW]	1.390,79	1.485,82
\underline{P} [MW]	325	350
\overline{Q} [MVAR]	1.291,07	1.379,28
\underline{Q} [MVAR]	-1.668,95	-1.782,98
α [R\$/MW ²]	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	3,11	2,7
γ [R\$]	588,29	733,99

Tabela 41 – Dados das máquinas 13 a 14 da usina 5 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH6M1	UH6M2	UH6M3	UH6M4	UH6M5	UH6M6
\overline{P} [MW]	105,6	211,2	316,8	422,4	528	633,6
\underline{P} [MW]	30	60	90	120	150	180
\overline{Q} [MVAR]	92,99	185,98	278,97	371,96	464,96	557,95
\underline{Q} [MVAR]	-126,72	-253,44	-380,16	-506,88	-633,6	-760,32
α [R\$/MW ²]	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	4,62	4,59	4,55	4,52	4,47	4,42
γ [R\$]	18,26	37,84	59,07	82,27	107,87	136,68

Tabela 42 – Dados das máquinas 1 a 6 da usina 6 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH6M7	UH6M8	UH6M9	UH6M10	UH6M11	UH6M12
\overline{P} [MW]	739,2	844,8	950,4	1.056	1.161,6	1.259,35
\underline{P} [MW]	210	240	270	300	330	360
\overline{Q} [MVAR]	650,94	743,93	836,92	929,91	1.022,9	1.108,98
\underline{Q} [MVAR]	-887,04	-1.013,76	-1.140,48	-1.267,2	-1.393,92	-1.511,22
α [R\$/MW ²]	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	4,35	4,29	4,21	4,12	4,02	3,91
γ [R\$]	169,06	205,48	246,48	293,29	347,1	408,78

Tabela 43 – Dados das máquinas 7 a 12 da usina 6 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH6M13	UH6M14
\overline{P} [MW]	1.346,3	1.432,13
\underline{P} [MW]	390	420
\overline{Q} [MVAR]	1.185,55	1.261,13
\underline{Q} [MVAR]	-1.615,56	-1.718,56
α [R\$/MW ²]	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	3,78	3,64
γ [R\$]	479,48	560,66

Tabela 44 – Dados das máquinas 13 a 14 da usina 6 para o caso-teste IEEE-30H.

Parâmetro	UH1	UH2	UH3	UH4	UH5	UH6
m_t [MW]	0,21	0,25	0,38	0,53	0,28	0,32
$\underline{\nu}$ [hm ³]	4.669	4.573	7.044,3	15.543,8	2.450	15.707
$\overline{\nu}$ [hm ³]	17.724,72	17.027	12.584,3	21.059,3	3.353,75	20.001
ν_0 [hm ³]	10.485,32	6.331,5	8.146,21	18.237,57	3.262,11	15.707
u_0	4	5	6	11	14	14
a [m ³ /s]	0,21	0,3	0,14	0,84	0,21	0,4
s [m ³ /s]	0	0	0	0	0	0
δ [R\$]	894	1.140	855	516,6	332,4	330
λ [R\$/m ³ /s]	31,9	17,9	20,93	12,18	5,69	5,85
Topologia	2	3	4	5	6	0
τ [h]	6	12	14	3	17	0
Barra	11	5	2	1	8	13

Tabela 45 – Dados das usinas para o caso-teste IEEE-30H.

T	Pd1	Qd1	Pd2	Qd2	Pd3	Qd3	Pd4	Qd4	Pd5	Qd5	Pd6	Qd6	Pd7	Qd7	Pd8	Qd8
1	0	0	543,55	318,12	60,12	30,06	190,37	40,08	2.359,58	475,92	0	0	571,11	273,03	751,46	751,46
2	0	0	504,1	295,03	55,75	27,88	176,55	37,17	2.188,32	441,38	0	0	529,66	253,21	696,92	696,92
3	0	0	480,07	280,96	53,1	26,55	168,14	35,4	2.084	420,34	0	0	504,41	241,14	663,7	663,7
4	0	0	465,36	272,35	51,47	25,73	162,98	34,31	2.020,12	407,46	0	0	488,95	233,75	643,35	643,35
5	0	0	459,08	268,68	50,77	25,39	160,78	33,85	1.992,85	401,96	0	0	482,35	230,6	634,67	634,67
6	0	0	455,32	266,48	50,36	25,18	159,47	33,57	1.976,54	398,66	0	0	478,4	228,71	629,47	629,47
7	0	0	438,56	256,67	48,5	24,25	153,6	32,34	1.903,81	384	0	0	460,8	220,29	606,31	606,31
8	0	0	435,51	254,88	48,17	24,08	152,53	32,11	1.890,56	381,32	0	0	457,59	218,76	602,09	602,09
9	0	0	465,08	272,19	51,44	25,72	162,89	34,29	2.018,92	407,21	0	0	488,66	233,61	642,97	642,97
10	0	0	494,17	289,21	54,65	27,33	173,07	36,44	2.145,2	432,68	0	0	519,22	248,22	683,18	683,18
11	0	0	515,13	301,48	56,97	28,49	180,41	37,98	2.236,18	451,04	0	0	541,24	258,75	712,16	712,16
12	0	0	523,28	306,25	57,87	28,94	183,27	38,58	2.271,57	458,17	0	0	549,81	262,85	723,43	723,43
13	0	0	516,31	302,17	57,1	28,55	180,83	38,07	2.241,32	452,07	0	0	542,48	259,35	713,8	713,8
14	0	0	506,4	296,37	56,01	28	177,36	37,34	2.198,29	443,39	0	0	532,07	254,37	700,09	700,09
15	0	0	504,92	295,51	55,84	27,92	176,84	37,23	2.191,86	442,09	0	0	530,51	253,62	698,04	698,04
16	0	0	513,93	300,78	56,84	28,42	179,99	37,89	2.230,96	449,98	0	0	539,98	258,15	710,5	710,5
17	0	0	532,84	311,84	58,93	29,47	186,62	39,29	2.313,05	466,54	0	0	559,85	267,65	736,64	736,64
18	0	0	643,48	376,6	71,17	35,58	225,37	47,45	2.793,37	563,42	0	0	676,1	323,22	889,61	889,61
19	0	0	775,66	453,96	85,79	42,89	271,66	57,19	3.367,17	679,15	0	0	814,98	389,62	1.072,35	1.072,35
20	0	0	743,64	435,22	82,25	41,12	260,45	54,83	3.228,16	651,11	0	0	781,34	373,53	1.028,08	1.028,08
21	0	0	713,78	417,74	78,94	39,47	249,99	52,63	3.098,55	624,97	0	0	749,97	358,54	986,8	986,8
22	0	0	680,74	398,4	75,29	37,64	238,41	50,19	2.955,08	596,04	0	0	715,24	341,94	941,11	941,11
23	0	0	627,66	367,34	69,42	34,71	219,83	46,28	2.724,7	549,57	0	0	659,48	315,28	867,74	867,74
24	0	0	562,28	329,07	62,19	31,09	196,93	41,46	2.440,85	492,31	0	0	590,78	282,43	777,34	777,34

Tabela 46 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 1 a 8 para o caso-teste IEEE-30H.

T	Pd9	Qd9	Pd10	Qd10	Pd11	Qd11	Pd12	Qd12	Pd13	Qd13	Pd14	Qd14	Pd15	Qd15	Pd16	Qd16
1	0	0	145,28	50,1	0	0	280,54	187,86	0	0	155,3	40,08	205,4	62,62	87,67	45,09
2	0	0	134,74	46,46	0	0	260,18	174,23	0	0	144,03	37,17	190,49	58,08	81,31	41,82
3	0	0	128,31	44,25	0	0	247,78	165,92	0	0	137,16	35,4	181,41	55,31	77,43	39,82
4	0	0	124,38	42,89	0	0	240,18	160,84	0	0	132,96	34,31	175,85	53,61	75,06	38,6
5	0	0	122,7	42,31	0	0	236,94	158,67	0	0	131,16	33,85	173,48	52,89	74,04	38,08
6	0	0	121,7	41,96	0	0	235	157,37	0	0	130,09	33,57	172,06	52,46	73,44	37,77
7	0	0	117,22	40,42	0	0	226,36	151,58	0	0	125,3	32,34	165,72	50,53	70,74	36,38
8	0	0	116,4	40,14	0	0	224,78	150,52	0	0	124,43	32,11	164,57	50,17	70,24	36,13
9	0	0	124,31	42,86	0	0	240,04	160,74	0	0	132,88	34,29	175,74	53,58	75,01	38,58
10	0	0	132,08	45,55	0	0	255,06	170,8	0	0	141,19	36,44	186,74	56,93	79,7	40,99
11	0	0	137,68	47,48	0	0	265,87	178,04	0	0	147,18	37,98	194,66	59,35	83,09	42,73
12	0	0	139,86	48,23	0	0	270,08	180,86	0	0	149,51	38,58	197,74	60,29	84,4	43,41
13	0	0	138	47,59	0	0	266,48	178,45	0	0	147,52	38,07	195,1	59,48	83,28	42,83
14	0	0	135,35	46,67	0	0	261,37	175,02	0	0	144,69	37,34	191,36	58,34	81,68	42,01
15	0	0	134,96	46,54	0	0	260,6	174,51	0	0	144,26	37,23	190,8	58,17	81,44	41,88
16	0	0	137,36	47,37	0	0	265,25	177,62	0	0	146,84	37,89	194,2	59,21	82,89	42,63
17	0	0	142,42	49,11	0	0	275,01	184,16	0	0	152,24	39,29	201,35	61,39	85,94	44,2
18	0	0	171,99	59,31	0	0	332,12	222,4	0	0	183,85	47,45	243,16	74,13	103,79	53,38
19	0	0	207,32	71,49	0	0	400,34	268,09	0	0	221,62	57,19	293,11	89,36	125,11	64,34
20	0	0	198,76	68,54	0	0	383,81	257,02	0	0	212,47	54,83	281,01	85,67	119,94	61,68
21	0	0	190,78	65,79	0	0	368,41	246,7	0	0	203,94	52,63	269,73	82,23	115,13	59,21
22	0	0	181,95	62,74	0	0	351,35	235,28	0	0	194,5	50,19	257,24	78,43	109,8	56,47
23	0	0	167,76	57,85	0	0	323,96	216,93	0	0	179,33	46,28	237,18	72,31	101,24	52,06
24	0	0	150,29	51,82	0	0	290,21	194,33	0	0	160,65	41,46	212,47	64,78	90,69	46,64

Tabela 47 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 9 a 16 para o caso-teste IEEE-30H.

T	Pd17	Qd17	Pd18	Qd18	Pd19	Qd19	Pd20	Qd20	Pd21	Qd21	Pd22	Qd22	Pd23	Qd23
1	225,44	145,28	80,16	22,54	237,96	85,17	55,11	17,53	438,35	280,54	0	0	80,16	40,08
2	209,08	134,74	74,34	20,91	220,69	78,98	51,11	16,26	406,54	260,18	0	0	74,34	37,17
3	199,11	128,31	70,79	19,91	210,17	75,22	48,67	15,49	387,16	247,78	0	0	70,79	35,4
4	193,01	124,38	68,62	19,3	203,73	72,91	47,18	15,01	375,29	240,18	0	0	68,62	34,31
5	190,4	122,7	67,7	19,04	200,98	71,93	46,54	14,81	370,22	236,94	0	0	67,7	33,85
6	188,84	121,7	67,14	18,88	199,33	71,34	46,16	14,69	367,19	235	0	0	67,14	33,57
7	181,89	117,22	64,67	18,19	192	68,72	44,46	14,15	353,68	226,36	0	0	64,67	32,34
8	180,63	116,4	64,22	18,06	190,66	68,24	44,15	14,05	351,22	224,78	0	0	64,22	32,11
9	192,89	124,31	68,58	19,29	203,61	72,87	47,15	15	375,06	240,04	0	0	68,58	34,29
10	204,96	132,08	72,87	20,5	216,34	77,43	50,1	15,94	398,52	255,06	0	0	72,87	36,44
11	213,65	137,68	75,96	21,36	225,52	80,71	52,23	16,62	415,43	265,87	0	0	75,96	37,98
12	217,03	139,86	77,17	21,7	229,09	81,99	53,05	16,88	422	270,08	0	0	77,17	38,58
13	214,14	138	76,14	21,41	226,04	80,9	52,35	16,66	416,38	266,48	0	0	76,14	38,07
14	210,03	135,35	74,68	21	221,7	79,34	51,34	16,34	408,39	261,37	0	0	74,68	37,34
15	209,41	134,96	74,46	20,94	221,05	79,11	51,19	16,29	407,19	260,6	0	0	74,46	37,23
16	213,15	137,36	75,79	21,31	224,99	80,52	52,1	16,58	414,46	265,25	0	0	75,79	37,89
17	220,99	142,42	78,57	22,1	233,27	83,49	54,02	17,19	429,71	275,01	0	0	78,57	39,29
18	266,88	171,99	94,89	26,69	281,71	100,82	65,24	20,76	518,94	332,12	0	0	94,89	47,45
19	321,7	207,32	114,38	32,17	339,58	121,53	78,64	25,02	625,54	400,34	0	0	114,38	57,19
20	308,42	198,76	109,66	30,84	325,56	116,52	75,39	23,99	599,71	383,81	0	0	109,66	54,83
21	296,04	190,78	105,26	29,6	312,49	111,84	72,37	23,03	575,63	368,41	0	0	105,26	52,63
22	282,33	181,95	100,39	28,23	298,02	106,66	69,01	21,96	548,98	351,35	0	0	100,39	50,19
23	260,32	167,76	92,56	26,03	274,78	98,34	63,63	20,25	506,18	323,96	0	0	92,56	46,28
24	233,2	150,29	82,92	23,32	246,16	88,1	57	18,14	453,45	290,21	0	0	82,92	41,46

Tabela 48 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 17 a 23 para o caso-teste IEEE-30H.

T	Pd24	Qd24	Pd25	Qd25	Pd26	Qd26	Pd27	Qd27	Pd28	Qd28	Pd29	Qd29	Pd30	Qd30
1	217,92	167,83	0	0	87,67	57,61	0	0	0	0	60,12	22,54	265,51	47,59
2	202,11	155,64	0	0	81,31	53,43	0	0	0	0	55,75	20,91	246,24	44,14
3	192,47	148,23	0	0	77,43	50,88	0	0	0	0	53,1	19,91	234,51	42,03
4	186,57	143,68	0	0	75,06	49,32	0	0	0	0	51,47	19,3	227,32	40,75
5	184,05	141,74	0	0	74,04	48,66	0	0	0	0	50,77	19,04	224,25	40,2
6	182,55	140,58	0	0	73,44	48,26	0	0	0	0	50,36	18,88	222,41	39,87
7	175,83	135,41	0	0	70,74	46,48	0	0	0	0	48,5	18,19	214,23	38,4
8	174,61	134,47	0	0	70,24	46,16	0	0	0	0	48,17	18,06	212,74	38,13
9	186,46	143,6	0	0	75,01	49,29	0	0	0	0	51,44	19,29	227,18	40,72
10	198,12	152,58	0	0	79,7	52,38	0	0	0	0	54,65	20,5	241,39	43,27
11	206,53	159,05	0	0	83,09	54,6	0	0	0	0	56,97	21,36	251,63	45,1
12	209,79	161,57	0	0	84,4	55,46	0	0	0	0	57,87	21,7	255,61	45,82
13	207	159,41	0	0	83,28	54,72	0	0	0	0	57,1	21,41	252,21	45,21
14	203,03	156,35	0	0	81,68	53,67	0	0	0	0	56,01	21	247,37	44,34
15	202,43	155,9	0	0	81,44	53,52	0	0	0	0	55,84	20,94	246,64	44,21
16	206,04	158,68	0	0	82,89	54,47	0	0	0	0	56,84	21,31	251,04	45
17	213,63	164,52	0	0	85,94	56,48	0	0	0	0	58,93	22,1	260,28	46,65
18	257,99	198,68	0	0	103,79	68,2	0	0	0	0	71,17	26,69	314,33	56,34
19	310,98	239,49	0	0	125,11	82,21	0	0	0	0	85,79	32,17	378,9	67,92
20	298,14	229,6	0	0	119,94	78,82	0	0	0	0	82,25	30,84	363,25	65,11
21	286,17	220,39	0	0	115,13	75,65	0	0	0	0	78,94	29,6	348,67	62,5
22	272,92	210,18	0	0	109,8	72,15	0	0	0	0	75,29	28,23	332,53	59,6
23	251,64	193,8	0	0	101,24	66,53	0	0	0	0	69,42	26,03	306,6	54,96
24	225,43	173,61	0	0	90,69	59,6	0	0	0	0	62,19	23,32	274,66	49,23

Tabela 49 – Demanda ativa [MW] e reativa [MVAR] das barras 24 a 30 para o caso-teste IEEE-30H.

parametro	1-2	1-3	2-4	3-4	2-5	2-6	4-6	5-7
\bar{F} [MW]	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
r [p.u.]	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$
x [p.u.]	$6 \cdot 10^{-2}$	0,17	0,17	$4 \cdot 10^{-2}$	0,2	0,18	$4 \cdot 10^{-2}$	0,12

Tabela 50 – Dados das linhas de transmissão 1-2, 1-3, 2-4, 3-4, 2-5, 2-6, 4-6, e 5-7 para o caso-teste IEEE-30H.

parametro	6-7	6-8	6-9	6-10	9-11	9-10	4-12	12-13
\bar{F} [MW]	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
r [p.u.]	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0	0	0	0	0	0
x [p.u.]	$8 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	0,21	0,56	0,21	0,11	0,26	0,14

Tabela 51 – Dados das linhas de transmissão 6-7, 6-8, 6-9, 6-10, 9-11, 9-10, 4-12, e 12-13 para o caso-teste IEEE-30H.

parametro	12-14	12-15	12-16	14-15	16-17	15-18	18-19	19-20
\bar{F} [MW]	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
r [p.u.]	0,12	$7 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	0,22	$5 \cdot 10^{-2}$	0,11	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
x [p.u.]	0,26	0,13	0,2	0,2	0,19	0,22	0,13	$7 \cdot 10^{-2}$

Tabela 52 – Dados das linhas de transmissão 12-14, 12-15, 12-16, 14-15, 16-17, 15-18, 18-19, e 19-20 para o caso-teste IEEE-30H.

parametro	10-20	10-17	10-21	10-22	21-22	15-23	22-24	23-24
\bar{F} [MW]	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
r [p.u.]	$9 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0,1	0,12	0,13
x [p.u.]	0,21	$8 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	0,15	$2 \cdot 10^{-2}$	0,2	0,18	0,27

Tabela 53 – Dados das linhas de transmissão 10-20, 10-17, 10-21, 10-22, 21-22, 15-23, 22-24, e 23-24 para o caso-teste IEEE-30H.

parametro	24-25	25-26	25-27	28-27	27-29	27-30	29-30	8-28
\overline{F} [MW]	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600	3.600
r [p.u.]	0,19	0,25	0,11	0	0,22	0,32	0,24	$6 \cdot 10^{-2}$
x [p.u.]	0,33	0,38	0,21	0,4	0,42	0,6	0,45	0,2

Tabela 54 – Dados das linhas de transmissão 24-25, 25-26, 25-27, 28-27, 27-29, 27-30, 29-30, e 8-28 para o caso-teste IEEE-30H.

parametro	6-28
\overline{F} [MW]	3.600
r [p.u.]	$2 \cdot 10^{-2}$
x [p.u.]	$6 \cdot 10^{-2}$

Tabela 55 – Dados das linhas de transmissão e 6-28 para o caso-teste IEEE-30H.

A.2 Dados dos Casos-Teste do POCP Termoelétrico

A.2.1 Dados para caso-teste 3-GENT

T [h]	$Sbase$ [MVA]	i_0	V_0 [p.u.]	\bar{V} [p.u.]	\underline{V} [p.u.]
24	100	1	1	1,05	0,95

Tabela 56 – Dados gerais do caso-teste 3-GENT.

Parâmetro	GT1	GT2	GT3
α [R\$/MW ²]	$4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
β [R\$/MW]	13,7	40	17,7
γ [R\$]	177	130	137
\bar{P} [MW]	210	100	70
\underline{P} [MW]	100	10	10
SU [\$]	100	200	50
SD [\$]	50	100	50
P_0 [MW]	150	0	15
UR [MW]	55	50	15
DR [MW]	55	50	15
T_0 [h]	2	-1	1
T_{on} [h]	4	3	2
T_{off} [h]	4	2	2

Tabela 57 – Dados das usinas térmicas 1 a 3 para o caso-teste 3-GENT.

T	Pd1	Pd2	Pd3	Pd4	Pd5	Pd6
1	0	0	34,05	68,1	68,1	0
2	0	0	31,92	63,84	63,84	0
3	0	0	30,86	61,71	61,71	0
4	0	0	29,8	59,58	59,58	0
5	0	0	29,8	59,58	59,58	0
6	0	0	30,86	61,71	61,71	0
7	0	0	34,05	68,1	68,1	0
8	0	0	40,44	80,86	80,86	0
9	0	0	46,29	92,57	92,57	0
10	0	0	50,54	101,08	101,08	0
11	0	0	52,69	105,34	105,34	0
12	0	0	53,2	106,4	106,4	0
13	0	0	52,69	105,34	105,34	0
14	0	0	53,2	106,4	106,4	0
15	0	0	53,2	106,4	106,4	0
16	0	0	51,61	103,21	103,21	0
17	0	0	51,08	102,14	102,14	0
18	0	0	51,08	102,14	102,14	0
19	0	0	49,48	98,95	98,95	0
20	0	0	48,95	97,89	97,89	0
21	0	0	48,95	97,89	97,89	0
22	0	0	49,48	98,95	98,95	0
23	0	0	46,25	92,57	92,57	0
24	0	0	38,31	76,61	76,61	0

Tabela 58 – Demanda ativa [MW] das barras 1 a 6 para o caso-teste 3-GENT.

APÊNDICE B – Resultados para os Casos-Teste

B.1 Resultados para o POCP Hidroelétrico

B.1.1 Resultados para caso-teste 3-GENH

Tempo	Nm1	Pg1	Qg1	Nm2	Pg2	Qg2	Nm3	Pg3	Qg3	PgTot
1	2	446,82	70,04	3	608,55	-33,37	10	425,21	65,52	1.480,58
2	1	227,12	51,87	3	606,6	-19,85	10	423,44	46,89	1.257,17
3	1	258,3	50,66	3	634,83	-13,96	4	255,18	37,92	1.148,31
4	1	247,13	48,36	3	624,6	-12,91	4	244,45	35,78	1.116,18
5	1	261,38	51,3	3	637,65	-14,26	4	258,14	38,52	1.157,17
6	1	247,42	56,31	3	625,22	-22,12	10	441,02	51,28	1.313,65
7	2	430,15	92,41	4	782,4	-35,01	10	417,89	78,02	1.630,43
8	3	666,42	121,84	4	796,42	-55,78	10	428,77	106,68	1.891,6
9	4	964,52	171,14	4	825,42	-89,68	10	451,36	152,73	2.241,29
10	4	966,55	208,72	5	1.007,73	-97,65	10	452,1	177,41	2.426,37
11	4	1.043,66	229,89	5	1.035,09	-110,5	10	470,87	196,68	2.549,62
12	4	990,55	215,19	5	1.016,24	-101,57	10	457,94	183,3	2.464,74
13	4	815,63	170,57	5	954,15	-74,77	10	415,38	142,64	2.185,15
14	4	863,16	182,11	5	971,02	-81,65	10	426,94	153,17	2.261,12
15	4	1.016,37	222,27	5	1.025,4	-105,86	10	464,23	189,75	2.506
16	4	918,22	235,44	6	1.161,46	-97,06	10	440,56	189,94	2.520,24
17	4	949,15	241,42	6	1.161,61	-101,72	10	448,07	196,18	2.558,83
18	4	1.077,14	280,07	6	1.210,64	-124,46	10	479,26	230,93	2.767,03
19	4	1.192	381,27	6	1.429,64	-170,71	10	619,39	317,96	3.241,03
20	4	1.192	325,03	6	1.275,19	-149,92	10	524,44	271,34	2.991,63
21	4	1.039,5	270,47	6	1.196,28	-119,82	10	492,21	224,09	2.728
22	4	996,71	257,4	6	1.179,89	-112,07	10	481,3	212,25	2.657,9
23	4	924,43	196,63	5	979,93	-92,32	10	462,64	168,61	2.367
24	3	697,68	128,19	4	797,79	-61,08	10	459,21	114,4	1.954,69
		768	177,44			939,32	-79,09	435	149,25	2.142,32

Tabela 59 – Resultado do despacho do caso-teste 3-GENH

Tempo	q1	Vo1	q2	Vo2	q3	Vo3
1	361,72	10.486,77	1.045,85	6.334,48	1.623,77	312,7
2	183,02	10.488,86	1.042,51	6.337,47	1.616,98	312,76
3	208,65	10.490,85	1.092,66	6.340,27	951,1	315,21
4	199,26	10.492,88	1.074,1	6.343,14	907,78	317,83
5	211,28	10.494,87	1.097,85	6.345,93	963,2	318,16
6	199,5	10.496,9	1.075,2	6.348,8	1.685,72	315,88
7	348,59	10.498,39	1.355,08	6.349,14	1.595,83	314,1
8	541,65	10.499,18	1.379,05	6.348,74	1.637,51	312,11
9	787,83	10.499,1	1.430,79	6.348,26	1.727,45	309,88
10	789,55	10.499	1.758,75	6.346,56	1.730,46	307,56
11	856,7	10.498,66	1.809,93	6.344,71	1.808,84	305,96
12	810,12	10.498,49	1.774,44	6.342,96	1.754,51	304,64
13	667,1	10.498,84	1.665,05	6.342,13	1.586,39	304,12
14	704,38	10.499,05	1.693,63	6.341,9	1.630,43	304,62
15	832,59	10.498,8	1.791,56	6.342,2	1.780,74	304,76
16	749,04	10.498,85	2.039,98	6.341,61	1.683,87	305,12
17	774,82	10.498,81	2.040,23	6.341,26	1.714,08	304,98
18	886,82	10.498,36	2.130,02	6.340,42	1.844,89	304,47
19	994,61	10.497,53	2.610,79	6.337,34	2.541,13	301,81
20	994,61	10.496,69	2.258,2	6.335,66	2.049,98	301,81
21	853	10.496,37	2.103,05	6.335	1.901,81	302,34
22	815,45	10.496,18	2.072,95	6.334,14	1.853,76	303,37
23	754,18	10.496,21	1.709,06	6.334,69	1.774,07	306,42
24	567,05	10.496,92	1.381,44	6.336,83	1.759,81	308,25

Tabela 60 – Volumes nos reservatórios do caso-teste 3-GENH

Tempo	1-2	2-1	Per1	2-3	3-2	Per2	1-4	4-1	Per3	2-4	4-2	Per4
1	-209,34	208,45	0,89	-310,48	310,1	0,38	-399,2	394,52	4,69	-344,79	342,44	2,35
2	-241,73	240,57	1,16	-196,97	196,82	0,15	-364,87	360,95	3,92	-270,72	269,27	1,45
3	-269,66	268,22	1,44	-279,81	279,51	0,31	-365,17	361,24	3,92	-246,71	245,5	1,21
4	-267,05	265,64	1,41	-273,91	273,62	0,29	-357,55	353,78	3,76	-238,86	237,73	1,13
5	-270,38	268,93	1,44	-281,44	281,13	0,31	-367,27	363,3	3,97	-248,87	247,64	1,23
6	-246,7	245,49	1,21	-208,37	208,19	0,17	-378,51	374,3	4,22	-284,54	282,94	1,6
7	-305,23	303,36	1,88	-368,11	367,58	0,53	-477,16	470,46	6,7	-365,39	362,75	2,65
8	-276,27	274,67	1,59	-492	491,06	0,94	-520,15	512,19	7,96	-449,1	445,12	3,98
9	-245,46	244,07	1,39	-650,01	648,39	1,62	-579,95	570,06	9,9	-558,58	552,46	6,12
10	-343,22	340,63	2,59	-718,36	716,39	1,97	-664,51	651,51	13	-588,81	581,99	6,82
11	-344,93	342,25	2,68	-762,53	760,31	2,21	-690,16	676,13	14,02	-623,38	615,75	7,63
12	-343,74	341,12	2,62	-732,1	730,06	2,04	-672,51	659,19	13,32	-599,57	592,5	7,07
13	-340,15	337,7	2,45	-632,13	630,6	1,54	-614	602,9	11,1	-521,19	515,83	5,36
14	-341,07	338,58	2,49	-659,26	657,59	1,67	-629,95	618,27	11,68	-542,48	536,68	5,8
15	-344,31	341,66	2,65	-746,89	744,76	2,12	-681,09	667,44	13,66	-611,15	603,81	7,34
16	-434,5	430,48	4,02	-753,95	751,78	2,17	-726,97	711,4	15,57	-594,74	587,76	6,98
17	-429,35	425,39	3,96	-767,67	765,43	2,24	-732,26	716,46	15,8	-606,87	599,6	7,27
18	-434,47	430,29	4,18	-842,53	839,85	2,68	-776,17	758,42	17,75	-664,9	656,2	8,7
19	-524,31	518,03	6,28	-938,34	935,06	3,28	-905,33	881,17	24,16	-771,7	760,02	11,68
20	-448,9	444,29	4,61	-911,92	908,81	3,12	-826,29	806,18	20,11	-724,36	714,07	10,29
21	-430,76	426,68	4,08	-813,17	810,67	2,5	-765,52	748,26	17,26	-653,01	644,62	8,39
22	-429,09	425,08	4,01	-788,3	785,94	2,36	-750,8	734,2	16,61	-633,49	625,58	7,91
23	-333,3	330,87	2,43	-682,59	680,81	1,78	-646,63	634,32	12,31	-572,71	566,25	6,46
24	-269,23	267,69	1,53	-498,54	497,58	0,96	-528,57	520,34	8,22	-466,83	462,53	4,3

Tabela 61 – Potência enviada, recebida e perdas na linhas 1 a 4 para o caso-teste 3-GENH

Tempo	4-5	5-4	Per5	5-6	6-5	Per6	3-6	6-3	Per7
1	-149,62	149,53	$9 \cdot 10^{-2}$	437,81	-441,64	3,83	-16,43	16,43	0
2	-131,14	131,07	$7 \cdot 10^{-2}$	368,01	-370,72	2,71	52,72	-52,73	$1 \cdot 10^{-2}$
3	-150,95	150,86	$9 \cdot 10^{-2}$	304,93	-306,79	1,86	-51,61	51,6	$1 \cdot 10^{-2}$
4	-148,42	148,33	$9 \cdot 10^{-2}$	294,77	-296,51	1,74	-52,07	52,06	$1 \cdot 10^{-2}$
5	-151,65	151,56	$9 \cdot 10^{-2}$	307,73	-309,62	1,89	-51,48	51,48	$1 \cdot 10^{-2}$
6	-135,88	135,8	$7 \cdot 10^{-2}$	385,56	-388,53	2,97	52,49	-52,49	$1 \cdot 10^{-2}$
7	-187,48	187,34	0,14	458,38	-462,6	4,22	-44,72	44,71	$1 \cdot 10^{-2}$
8	-208,87	208,69	0,18	539,74	-545,58	5,85	-116,84	116,81	$3 \cdot 10^{-2}$
9	-237,11	236,88	0,23	648,52	-656,96	8,43	-205,69	205,6	$9 \cdot 10^{-2}$
10	-276,61	276,29	0,32	680,6	-689,93	9,32	-237,95	237,83	0,11
11	-287	286,66	0,34	718,23	-728,61	10,38	-257,87	257,74	0,13
12	-279,85	279,53	0,32	692,31	-701,96	9,64	-244,14	244,02	0,12
13	-255,95	255,68	0,27	607,09	-614,51	7,42	-199,21	199,13	$8 \cdot 10^{-2}$
14	-262,5	262,22	0,28	630,23	-638,22	7,99	-211,37	211,28	$9 \cdot 10^{-2}$
15	-283,33	283	0,33	704,91	-714,91	10	-250,81	250,68	0,13
16	-306,57	306,18	0,39	686,4	-695,92	9,52	-255,49	255,36	0,13
17	-308,41	308,01	0,39	699,65	-709,53	9,88	-261,6	261,46	0,14
18	-326,08	325,63	0,44	762,91	-774,66	11,75	-295,58	295,4	0,18
19	-369,81	369,23	0,58	902,15	-918,58	16,43	-299,37	299,18	0,19
20	-344,71	344,21	0,5	831,33	-845,27	13,94	-321,03	320,83	0,21
21	-319,4	318,97	0,43	754,5	-765,99	11,49	-273,93	273,78	0,15
22	-313,53	313,12	0,41	733,13	-743,97	10,85	-262,81	262,67	0,14
23	-266,71	266,42	0,29	667,45	-676,42	8,96	-213,87	213,78	$9 \cdot 10^{-2}$
24	-209,64	209,46	0,18	563,77	-570,15	6,38	-110,96	110,94	$3 \cdot 10^{-2}$

Tabela 62 – Potência enviada, recebida e perdas na linhas 5 a 7 para o caso-teste 3-GENH

B.1.1.1 Voltagens nas Barras

Tempo	Vbar1	Vbar2	Vbar3	Vbar4	Vbar5	Vbar6
1	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
2	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
3	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
4	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
5	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
6	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
7	1,01	1,01	1,01	1	1	1,01
8	1,01	1,02	1,02	1	1	1,02
9	1,01	1,02	1,02	1	1	1,02
10	1,01	1,03	1,02	1	1	1,02
11	1,01	1,03	1,03	1	1	1,03
12	1,01	1,03	1,02	1	1	1,03
13	1,01	1,02	1,02	1	1	1,02
14	1,01	1,02	1,02	1	1	1,02
15	1,01	1,03	1,03	1	1	1,03
16	1,01	1,03	1,02	1	1	1,03
17	1,01	1,03	1,03	1	1	1,03
18	1,01	1,03	1,03	1	1	1,03
19	1,01	1,04	1,04	1	1	1,04
20	1,01	1,04	1,03	1	1	1,04
21	1,01	1,03	1,03	1	1	1,03
22	1,01	1,03	1,03	1	1	1,03
23	1,01	1,02	1,02	1	1	1,02
24	1,01	1,02	1,02	1	1	1,02

Tabela 63 – Modulo da tensão nas barras 1 a 6 para o caso-teste 3-GENH

B.1.2 Despacho de geração do caso-teste IEEE-14H

Tempo	Nm1	Pg1	Qg1	Nm2	Pg2	Qg2	Nm3	Pg3	Qg3	Nm4	Pg4	Qg4	PgTot
1	4	696,36	433,1	3	599,16	-103,34	10	430,52	179,81	6	1.216,22	244,26	2.942,27
2	4	724,03	401,12	2	424,26	-97,28	5	296,6	140,36	6	1.275,03	221,61	2.719,92
3	4	706,15	390,19	2	416,11	-90,21	4	242,35	132,17	6	1.233,1	211,19	2.597,71
4	4	689,91	384,71	2	408,54	-85,28	4	230,84	128,99	6	1.195,44	205,21	2.524,73
5	4	694,22	386,16	2	410,55	-86,57	4	233,9	129,84	6	1.205,44	206,8	2.544,1
6	4	729,49	399,46	2	427	-97,29	4	258,9	137,64	6	1.287,18	220,29	2.702,57
7	4	719,47	452,47	3	613,6	-109,46	10	445,16	192,48	6	1.269,9	256,63	3.048,14
8	4	741,58	506,74	4	813,44	-125,81	10	458,15	240,59	6	1.324,84	290,28	3.338,01
9	4	739,2	578,71	6	1.161,31	-149,95	10	454,69	316,69	6	1.326,05	332,71	3.681,26
10	4	774,41	617,2	6	1.194,28	-164,29	10	476,72	340,26	6	1.408,21	353,26	3.853,62
11	4	769,04	611,23	6	1.189,26	-162,03	10	473,37	336,66	6	1.395,69	350,12	3.827,37
12	4	739,13	578,63	6	1.161,24	-149,93	10	454,64	316,64	6	1.325,88	332,66	3.680,9
13	4	720,82	559,25	6	1.144,06	-142,93	10	443,17	304,44	6	1.283,1	322,06	3.591,15
14	4	739,13	578,63	6	1.161,24	-149,93	10	454,64	316,64	6	1.325,89	332,66	3.680,9
15	4	766,66	608,58	6	1.187,02	-161,03	10	471,87	335,06	6	1.390,12	348,72	3.815,67
16	4	785,04	629,13	6	1.204,22	-168,85	10	483,38	347,41	6	1.432,99	359,52	3.905,62
17	4	803,46	650,17	6	1.221,42	-177	10	494,89	359,83	6	1.475,89	370,4	3.995,66
18	4	839,66	692,8	6	1.255,16	-193,97	10	517,5	384,34	6	1.560,08	391,96	4.172,41
19	4	972,19	750,08	6	1.379,92	-232,78	10	601,7	484,93	6	1.641,6	454,92	4.595,41
20	4	895,07	750,01	6	1.306,97	-218,17	10	552,34	417,22	6	1.641,6	419,16	4.395,97
21	4	846,16	700,64	6	1.261,21	-197,15	10	521,56	388,76	6	1.575,19	395,86	4.204,13
22	4	837,37	690,06	6	1.253,04	-192,86	10	516,08	382,79	6	1.554,78	390,6	4.161,26
23	4	762,45	603,94	6	1.183,09	-159,29	10	469,24	332,24	6	1.380,31	346,25	3.795,08
24	4	740,99	506,18	4	813	-125,62	10	457,78	240,25	6	1.323,48	289,95	3.335,24
		768	560,8		966,21	-147,54		435	286,92		1.377	318,63	3.546,21

Tabela 64 – Resultado do despacho do caso-teste IEEE-14H

B.1.3 Despacho de geração do caso-teste IEEE-30H

Tempo	Nm1	Pg1	Qg1	Nm2	Pg2	Qg2	Nm3	Pg3	Qg3	Nm4	Pg4
1	4	761,19	896,76	5	1.008,89	662,83	6	1.371,66	387,02	11	1.871,74
2	4	741,24	896,51	4	809,94	620,1	6	1.328,23	357,31	10	1.701,55
3	4	741,85	896,66	4	810	584,46	6	1.332,27	326,33	8	1.369,72
4	4	741,33	896,66	3	622,31	577,11	6	1.331,95	322,35	8	1.369,72
5	4	731,52	896,5	3	615,83	568,54	6	1.309,39	317,66	8	1.369,7
6	4	725,64	896,4	3	611,95	563,43	6	1.295,9	314,86	8	1.369,68
7	4	705,23	896,07	3	598,43	540,32	6	1.249,33	300,58	8	1.319,92
8	4	702,74	896,02	3	596,78	536,04	6	1.243,77	297,62	8	1.300,17
9	4	740,9	896,65	3	622,03	576,73	6	1.330,95	322,14	8	1.369,71
10	4	744,67	896,64	4	812,47	604,96	6	1.337,41	343,01	9	1.536,17
11	4	758,22	896,78	4	823,56	634,98	6	1.367,12	365,4	10	1.701,59
12	4	770,78	896,97	4	833,64	646,03	6	1.395,89	371,38	10	1.701,59
13	4	760,04	896,81	4	825,02	636,58	6	1.371,29	366,27	10	1.701,59
14	4	744,77	896,57	4	812,78	623,2	6	1.336,33	359	10	1.701,57
15	4	742,49	896,53	4	810,95	621,2	6	1.331,1	357,91	10	1.701,56
16	4	756,36	896,75	4	822,07	633,36	6	1.362,87	364,52	10	1.701,59
17	4	744,9	896,5	5	993,95	648,6	6	1.334,42	379,32	11	1.871,67
18	4	783,37	896,8	6	1.209,51	799,59	6	1.413,21	511,5	17	2.856,43
19	4	984,97	897,74	6	1.415,75	994,06	6	1.641,6	676,18	20	3.350,4
20	4	882,84	897,86	6	1.312,01	954,24	6	1.634,08	651,45	20	3.350,4
21	4	835,99	897,44	6	1.264,11	909,19	6	1.528,19	615,72	20	3.350,39
22	4	803,02	897,05	6	1.230,16	857,16	6	1.454,95	565,72	19	3.192,72
23	4	776,93	896,72	6	1.202,67	775,42	6	1.399,89	488,82	16	2.696,92
24	4	751	896,53	6	1.175,17	678,57	6	1.346,2	402,18	12	2.035,47
		768	896,75		910	676,95		1.377	406,84		1.978,83

Tabela 65 – Resultado do despacho do caso-teste IEEE-30H, usinas 1 a 4

Tempo	Nm5	Pg5	Qg5	Nm6	Pg6	Qg6	PgTot	
1	14	1.001,07	924,17	14	1.150,31	1.189,26	7.164,87	
2	14	960,07	868,99	14	1.101,45	1.171,53	6.642,49	
3	14	961,06	835,78	14	1.103,83	1.162,03	6.318,72	
4	14	959,88	815,75	14	1.102,6	1.157,32	6.127,78	
5	14	939,83	806,15	14	1.078,26	1.153,73	6.044,53	
6	14	927,84	800,38	14	1.063,7	1.151,6	5.994,72	
7	14	886,09	775,04	14	1.013,15	1.142,98	5.772,15	
8	14	881	770,51	14	1.007,02	1.141,6	5.731,48	
9	14	958,99	815,33	14	1.101,52	1.157,15	6.124,1	
10	14	966,95	855,49	14	1.110,36	1.167,87	6.508,03	
11	14	994,74	885,4	14	1.143,46	1.177,96	6.788,68	
12	14	1.020,39	897,46	14	1.174,52	1.182,79	6.896,81	
13	14	998,46	887,15	14	1.147,96	1.178,65	6.804,37	
14	14	967,3	872,42	14	1.110,18	1.172,85	6.672,93	
15	14	962,64	870,21	14	1.104,54	1.171,99	6.653,29	
16	14	990,96	883,62	14	1.138,86	1.177,25	6.772,72	
17	14	967,82	908,5	14	1.110	1.182,95	7.022,76	
18	14	1.047,34	1.061,01	14	1.202,39	1.238,39	8.512,25	
19	14	1.459,34	1.300,81	14	1.432,13	1.261,01	10.284,18	
20	14	1.250,73	1.241,96	14	1.432,1	1.260,96	9.862,16	
21	14	1.155,17	1.179,58	14	1.330,27	1.260,79	9.464,11	
22	14	1.087,77	1.113,9	14	1.249,88	1.258,1	9.018,5	
23	14	1.034,04	1.039,33	14	1.186,92	1.229,61	8.297,37	
24	14	980,53	948,92	14	1.124,59	1.195,51	7.412,96	
		1.015	931,58			1.155	1.189,33	7.203,83

Tabela 66 – Resultado do despacho do caso-teste IEEE-30H, usinas 5 e 6

B.1.4 Despacho de geração do caso-teste IEEE-57H

Tempo	Nm1	Pg1	Qg1	Nm2	Pg2	Qg2	Nm3	Pg3	Qg3	Nm4	Pg4	Qg4	
1	2	420,42	411,48	10	447,73	740,88	6	1.318,21	544,36	8	1.369,67	−20,44	
2	2	409,55	376,3	5	273,04	658,36	6	1.270,71	474	6	1.030,37	5,07	
3	2	399,55	355,46	5	256,32	618,95	6	1.224,54	442,87	6	1.027,6	26,24	
4	2	397	349,99	5	252,05	606,56	6	1.212,91	433,29	6	1.006,93	32,1	
5	2	400,34	356,97	5	257,63	622,37	6	1.228,16	445,39	6	1.028,97	24,58	
6	2	414,74	395,42	5	281,72	665,75	6	1.294,65	490,87	6	1.030,41	−6,13	
7	3	614,09	430,62	10	446,81	789,65	6	1.314,97	586,05	9	1.536,08	−32,43	
8	4	811,41	470,41	10	456,18	888,62	6	1.342,76	670,76	11	1.871,63	−77,16	
9	5	1.008,69	564,16	10	467,64	982,3	6	1.377,03	792,67	13	2.198,23	−172,2	
10	5	1.021,39	675,45	10	476,92	982,89	6	1.404,51	884,94	14	2.367,37	−313,68	
11	5	1.039,85	777,69	10	490,88	983,01	6	1.448,74	967,72	14	2.367,43	−509,86	
12	5	1.027,13	707,17	10	481,26	982,93	6	1.418,27	910,65	14	2.367,4	−374,68	
13	5	988,58	542,89	10	452,16	981,84	6	1.327,1	777,08	14	2.254,37	−166,1	
14	5	997,32	578,6	10	458,74	982,48	6	1.347,07	808,43	14	2.343,6	−191,7	
15	6	1.200,15	734,95	10	477,08	982,95	6	1.404,77	946,9	15	2.528,48	−451,67	
16	6	1.202,13	744,91	10	478,44	982,96	6	1.409,06	955	15	2.528,51	−470,8	
17	6	1.208,52	777,02	10	482,8	983	6	1.422,88	981,1	15	2.528,56	−532,43	
18	6	1.226,77	980,5	10	495,09	983,1	6	1.456,47	1.177,81	18	3.024,71	−967,4	
19	6	1.333,77	1.397,08	10	568,5	983,18	6	1.641,58	1.553,65	20	3.350,39	−1.791,27	
20	6	1.264,63	1.186,45	10	521,07	983,15	6	1.534,96	1.371,95	20	3.350,36	−1.389,5	
21	6	1.225,81	937,98	10	494,49	983,09	6	1.456,38	1.132,19	17	2.856,74	−870,75	
22	6	1.214,23	879,35	10	486,59	983,06	6	1.431,38	1.084,4	17	2.856,6	−759,17	
23	6	1.193,55	609,01	10	472,89	982,66	6	1.393,32	838,22	14	2.367,33	−197,01	
24	4	820,38	481,57	10	463,97	915,99	6	1.367,58	690,42	11	1.871,7	−94,72	
		910	655,06			435	885,41	1.377	831,7			2.127,64	−387,55

Tabela 67 – Resultado do despacho do caso-teste IEEE-57H, usinas 1 a 4

Tempo	Nm5	Pg5	Qg5	Nm6	Pg6	Qg6	Nm7	Pg7	Qg7	Nm8	Pg8	Qg8	PgTot	
1	14	965,19	986,76	14	1.079,3	157,18	5	2.133,67	272,32	10	5.860,31	685,27	13.594,51	
2	14	921,31	908,22	14	1.021,08	134,83	5	2.004,6	256,28	10	5.633,75	623,53	12.564,41	
3	14	875,87	870,45	14	967,6	125,37	5	1.883,99	244,82	10	5.422,06	579,5	12.057,53	
4	14	864,58	859,27	14	953,94	122,36	5	1.853,32	241,75	10	5.368,22	567,69	11.908,94	
5	14	879,43	873,51	14	971,8	126,14	5	1.893,48	245,71	10	5.438,7	582,91	12.098,49	
6	14	944,85	927,69	14	1.048,81	139,59	5	2.066,99	263,15	10	5.743,26	649,94	12.825,43	
7	14	960,2	1.037,68	14	1.076,72	166,69	6	2.488,95	340,59	10	5.836,6	678,05	14.274,42	
8	14	984,04	1.130,45	14	1.112,32	189,15	7	2.940,42	432,18	10	5.958,61	704,82	15.477,36	
9	14	1.013,27	1.256,42	14	1.157,19	217,97	9	3.775,36	625,67	10	6.092,62	723,47	17.090,04	
10	14	1.037,41	1.328,71	14	1.193,08	236,22	10	4.233,52	762,75	10	6.204,86	762,75	17.939,05	
11	14	1.079,87	1.381,12	14	1.245,25	249,8	10	4.431,59	840,35	10	6.403,05	840,35	18.506,66	
12	14	1.050,63	1.345,02	14	1.209,3	240,46	10	4.295,19	786,77	10	6.266,55	786,77	18.115,74	
13	14	963,55	1.237,9	14	1.100,57	212,71	10	3.884,68	660,12	10	5.856,01	660,12	16.827,03	
14	14	982,13	1.266,17	14	1.125,12	220,55	10	3.976,25	687	10	5.947,58	687	17.177,82	
15	14	1.036,26	1.365,05	14	1.193,16	245,01	10	4.242,82	799,23	10	6.214,16	799,23	18.296,87	
16	14	1.040,37	1.370,16	14	1.198,21	246,33	10	4.262,06	806,74	10	6.233,41	806,74	18.352,19	
17	14	1.053,64	1.386,64	14	1.214,51	250,59	10	4.324,07	831	10	6.295,44	831	18.530,42	
18	14	1.080,56	1.492,06	14	1.260,19	284,9	10	4.490,11	971,63	10	6.461,84	971,63	19.495,75	
19	14	1.297,1	1.708,6	14	1.432,12	350,54	10	5.563,93	1.271,14	10	6.483,58	1.271,14	21.670,98	
20	14	1.152,94	1.599,74	14	1.355,62	319,78	10	4.868,22	1.114,94	10	6.483,57	1.114,94	20.531,36	
21	14	1.082,26	1.469,61	14	1.258,03	276,71	10	4.484,44	943,69	10	6.456,12	943,69	19.314,27	
22	14	1.058,34	1.439,66	14	1.228,5	268,9	10	4.372,33	899,3	10	6.343,72	899,3	18.991,69	
23	14	1.027,91	1.300,97	14	1.176,26	227,94	9	3.849,26	652,19	10	6.172,93	755,8	17.653,47	
24	14	1.008,28	1.152,51	14	1.141,32	194,82	7	3.024,74	444,06	10	6.071,05	728,45	15.769,02	
		1.015	1.237,27			1.155	216,86	3.556	641,39			6.052	777,25	16.627,64

Tabela 68 – Resultado do despacho do caso-teste IEEE-57H, usinas 5 a 8

B.2 Resultados para o POCP Termoelétrico

B.2.1 Resultados para o caso-teste 3-GENT

T	Pg1	Pg2	Pg3
1	153,43	10	10
2	163	0	0
3	157,46	0	0
4	151,92	0	0
5	151,92	0	0
6	157,46	0	0
7	174,12	0	0
8	192	0	15
9	196,97	10	30
10	204,49	10	45
11	203,03	10	57,38
12	202,3	10	60,77
13	203,02	10	57,38
14	202,3	10	60,77
15	202,3	10	60,77
16	204,42	10	50,58
17	204,37	10	47,77
18	204,37	10	47,77
19	202,12	10	41,17
20	201,54	10	38,95
21	201,54	10	38,95
22	202,12	10	41,17
23	198,68	10	28,66
24	182,21	0	13,66

Tabela 69 – Resultado do despacho de geração do caso-teste 3-GENT

Time	V1	V2	V3	V4	V5	V6
1	1	1	1	1,01	1	1
2	1	1	1	1,01	1	1
3	1	1	1	1,01	1	1
4	1	1	1	1,01	1	1
5	1	1	1	1,01	1	1
6	1	1	1	1,01	1	1
7	1	1	1	1,01	1	1
8	1	1	1	1,01	1	1
9	1	1,01	1,01	1,01	1	1,01
10	1	1	1	1	1	1
11	1	0,99	1,01	1	1	1,01
12	1	0,99	1,01	1	1	1,01
13	1	0,99	1,01	1	1	1,01
14	1	0,99	1,01	1	1	1,01
15	1	0,99	1,01	1	1	1,01
16	1	0,99	1	1	1	1,01
17	1	1	1	1	1	1,01
18	1	0,99	1	1	1	1,01
19	1	1	1	1	1	1,01
20	1	1	1	1	1	1,01
21	1	1	1	1	1	1,01
22	1	1	1	1	1	1,01
23	1	1	1	1	1	1
24	1	1	1	1	1	1

Tabela 70 – Modulo da tensão nas barras 1 a 6 para o caso-teste 3-GENT

B.2.2 Resultados para o caso-teste IEEE-118T

T	Pg1	Pg2	Pg3	Pg4	Pg5	Pg6	Pg7	Pg8	Pg9	Pg10	Pg11	Pg12	Pg13	Pg14	Pg15	Pg16
1	0	0	0	212,05	221,86	10	25,01	5	5	160,56	350	8	8	25,01	8	25
2	0	0	0	241,64	249,89	0	0	0	0	193,76	350	0	0	0	0	0
3	0	0	0	190,94	196,1	0	0	0	0	142,9	350	0	0	0	0	0
4	0	0	0	150	100,01	0	0	0	0	100	349,99	0	0	0	0	0
5	0	0	0	150,01	137,64	0	0	0	0	100,02	350	0	0	0	0	0
6	0	0	0	203,72	209,62	0	0	0	0	155,68	350	0	0	0	0	0
7	0	0	0	255,27	265,27	0	31,15	0	0	206,08	350	0	0	36,29	0	0
8	0	0	0	278,1	291,68	0	51,29	0	0	228,16	350	0	0	57,11	0	29,47
9	0	0	0	290,24	299,96	0	61,92	0	0	239,52	350	0	0	68,05	0	39,65
10	0	0	0	299,98	299,99	0	81,47	0	0	260,48	350	0	0	87,42	0	58,32
11	0	0	0	299,99	299,99	0	85,19	0	0	264,48	350	0	0	91,04	0	61,91
12	0	0	0	296,3	299,98	0	67,09	0	0	244,98	350	0	0	73,31	0	44,37
13	0	0	0	281,5	295,9	0	54,28	0	0	231,15	350	0	0	60,45	0	31,65
14	0	0	0	266,04	278,61	0	40,53	0	0	216,06	350	0	0	46,64	0	25,02
15	0	0	0	299,98	299,99	0	79,11	0	0	257,19	350	0	0	84,58	0	55,95
16	0	0	0	299,99	299,99	0	86,27	0	0	264,8	350	0	0	91,49	0	62,85
17	0	0	0	297,73	299,98	0	68,27	0	0	245,49	350	0	0	73,96	0	45,44
18	0	0	0	299,98	299,99	0	81,78	0	0	259,94	350	0	0	87,2	0	58,3
19	0	0	0	299,99	300	0	99,81	0	0	280,27	350	0	0	99,97	0	76,24
20	0	5	0	300	300	0	99,99	0	0	299,71	350	0	0	99,99	0	92,98
21	5	5	5	300	300	0	99,99	5	0	299,98	350	0	0	100	0	99,95
22	0	0	0	299,99	299,99	0	85,38	0	0	263,78	350	0	0	90,69	0	61,77
23	0	0	0	299,96	299,99	0	74,6	0	0	252,25	350	0	0	80,22	0	51,41
24	0	0	0	285,72	299,86	0	57,95	0	0	234,39	350	0	0	63,76	0	35,09

Tabela 71 – Resultado do despacho de geração para as usinas 1 a 16 do caso-teste IEEE-118T

T	Pg17	Pg18	Pg19	Pg20	Pg21	Pg22	Pg23	Pg24	Pg25	Pg26	Pg27	Pg28	Pg29	Pg30	Pg31	Pg32
1	8	8	25	250	250	25	25	200	200	25	414,42	354,54	147,08	30	10	5
2	0	0	0	250	250	0	0	200	200	0	419,99	388,68	183,07	0	0	0
3	0	0	0	250	250	0	0	199,99	199,99	0	395,61	336,29	131,4	0	0	0
4	0	0	0	147,59	189,34	0	0	99,99	100	0	258,31	212,88	80	0	0	0
5	0	0	0	249,99	250	0	0	180,34	196,92	0	335,64	281,31	80,06	0	0	0
6	0	0	0	250	250	0	0	200	200	0	409,97	349,48	144,32	0	0	0
7	0	0	0	250	250	0	0	200	200	0	419,99	407,64	200,37	0	0	0
8	0	0	32,4	250	250	34,6	33,47	200	200	0	420	419,98	225,27	0	0	0
9	0	0	41,89	250	250	45,02	44,14	200	200	36,31	420	419,99	236,04	0	0	0
10	0	0	58,51	250	250	63,33	62,89	200	200	53,66	420	419,99	255,2	0	0	0
11	0	0	61,65	250	250	66,76	66,41	200	200	57,05	420	419,99	258,99	0	0	0
12	0	0	46,16	250	250	49,76	48,99	200	200	40,33	420	419,99	240,28	0	0	0
13	0	0	34,23	250	250	36,55	35,47	200	200	27,43	420	419,98	225,92	0	0	0
14	0	0	25,03	250	250	25,03	25,03	200	200	25,01	420	415,12	208,37	0	0	0
15	0	0	56,6	250	250	61,41	60,93	200	200	51,21	420	419,99	250,61	39,98	0	0
16	0	0	62,66	250	250	68,08	67,77	200	200	57,7	420	419,99	257,62	44,94	0	0
17	0	0	47,31	250	250	51,21	50,48	200	200	41,19	420	419,99	239,41	40,1	0	0
18	0	0	58,61	250	250	63,63	63,21	200	200	52,98	420	419,99	252,43	43,61	0	0
19	0	0	74,09	250	250	80,58	80,59	200	200	69,54	420	420	270,73	48,54	0	0
20	0	0	87,75	250	250	95,34	95,73	200	200	84,32	420	420	287,33	53,14	0	0
21	0	0	95,95	250	250	99,97	99,97	200	200	93,25	420	420	297,26	55,75	0	5
22	0	0	61,64	250	250	66,95	66,61	200	200	56,2	420	419,99	255,97	44,56	0	0
23	0	0	52,58	250	250	57,01	56,42	200	200	46,55	420	419,99	245,33	41,71	0	0
24	0	0	37,68	250	250	40,55	39,57	200	200	30,53	420	419,99	227,72	37,05	0	0

Tabela 72 – Resultado do despacho de geração para as usinas 17 a 32 do caso-teste IEEE-118T

T	Pg33	Pg34	Pg35	Pg36	Pg37	Pg38	Pg39	Pg40	Pg41	Pg42	Pg43	Pg44	Pg45	Pg46	Pg47	Pg48
1	5	25	25	153,72	25	10	215,23	121,85	8	20	129,33	124,3	143,22	8	25	25
2	0	0	0	188,14	0	0	235,36	147,93	0	0	156,99	154,53	181,17	0	0	0
3	0	0	0	150,02	0	0	209,64	118,2	0	0	126,11	122,7	146,57	0	0	0
4	0	0	0	150	0	0	111,51	50,01	0	0	100	100	100	0	0	0
5	0	0	0	150	0	0	176,82	80,79	0	0	100,02	100,01	100,65	0	0	0
6	0	0	0	151,9	0	0	216,76	126,42	0	0	134,74	131,8	156,82	0	0	0
7	0	31,43	0	206,76	0	0	246,89	162,54	0	0	172,61	170,71	201,69	0	0	0
8	0	53,61	0	232,08	0	0	261,83	180,4	0	0	190,64	186,47	218,98	0	0	0
9	0	63,32	0	241,86	0	0	266,95	185,86	0	0	195,57	189,26	219,99	0	0	34,89
10	0	78,21	46,31	259,14	0	0	276,33	197,22	0	0	206,87	198,47	229,3	0	32,91	38,81
11	0	81,27	49,53	262,77	0	0	278,23	199,43	0	0	209,3	200,61	231,62	0	34,57	40,5
12	0	66,07	34,01	244,8	0	0	268,78	187,83	0	0	197,32	189,97	220,08	0	26,39	32,08
13	0	54,08	25,04	230,57	0	0	260,85	177,97	0	0	187,24	180,8	209,73	0	25,02	25,07
14	0	39,65	25,01	212,72	0	0	250,99	165,61	0	0	174,38	168,18	194,93	0	25,01	25,01
15	0	74,17	43,73	256,7	0	0	275,6	196,32	0	0	205,93	197,35	228,27	0	32,35	38,26
16	0	79,83	49,72	263,72	0	0	279,43	199,89	0	0	210,84	201,55	232,87	0	35,64	41,62
17	0	65,08	34,43	245,91	0	0	269,93	189,26	0	0	198,75	190,95	221,34	0	27,44	33,22
18	0	75,33	44,2	257,73	29,93	0	274,92	195,99	0	0	205,8	197,77	228,61	0	32,92	38,9
19	0	89,92	59,08	275,27	42,63	0	284,23	199,98	0	0	218,19	208,16	239,95	0	41,04	47,2
20	0	99,95	72,43	290,9	53,88	0	292,49	199,99	0	0	229,37	217,26	249,87	0	48	54,29
21	0	99,99	80,54	299,68	60,43	0	296,79	199,99	0	0	235,59	222,48	255,46	0	51,83	58,18
22	0	78,17	47,08	261,11	32,34	0	276,6	198,1	0	0	207,99	199,75	230,74	0	34,47	40,49
23	0	69,64	38,43	250,95	25,37	0	271,55	191,71	0	0	201,41	193,79	224,31	0	29,8	35,7
24	0	55,16	25,08	233,53	25,01	0	262,03	179,9	0	0	189,4	183,01	212,39	0	25,03	26,4

Tabela 73 – Resultado do despacho de geração para as usinas 33 a 48 do caso-teste IEEE-118T

T	Pg49	Pg50	Pg51	Pg52	Pg53	Pg54
1	8	25	25	25	25	25
2	0	0	0	25,01	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	41,88	36,85	0
9	0	0	26,67	34,17	46,3	0
10	0	0	30,37	38,41	63,81	0
11	0	0	31,44	39,55	67,15	0
12	0	0	26,14	33,82	50,87	0
13	0	0	25,02	27,49	39,4	0
14	0	0	25,01	25,01	27,03	0
15	0	0	30,05	38,09	61,54	0
16	0	0	32,18	40,38	67,97	0
17	0	0	26,86	34,66	51,78	0
18	0	0	30,5	38,64	63,9	0
19	0	0	35,78	44,29	80,97	0
20	0	0	40,28	49,06	98,22	0
21	0	0	42,73	51,65	99,98	0
22	0	0	31,52	39,73	67,14	0
23	0	0	28,46	36,45	57,45	0
24	0	0	25,04	29,84	42,53	0

Tabela 74 – Resultado do despacho de geração para as usinas 49 a 54 do caso-teste IEEE-118T

T	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16	V17	V18	V19	V20
1	1	1,01	1,01	1,03	1,03	1,02	1,02	1,05	1,05	1,05	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
2	1	1,01	1,01	1,03	1,03	1,02	1,02	1,05	1,05	1,05	1,02	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
3	1	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,05	1,05	1,05	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,03	1,03	1,03
4	1	1,01	1,01	1,02	1,02	1,01	1,01	1,05	1,05	1,05	1,01	1,02	1,01	1,02	1,03	1,02	1,04	1,03	1,03	1,03
5	1	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,05	1,05	1,05	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,02	1,04	1,03	1,03	1,03
6	1	1,01	1,01	1,02	1,03	1,02	1,02	1,05	1,05	1,05	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,03	1,03	1,03
7	1	1,01	1,01	1,03	1,03	1,02	1,02	1,05	1,05	1,05	1,02	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
8	1	1,02	1,01	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
9	1	1,02	1,01	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
10	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
11	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
12	1	1,02	1,01	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
13	1	1,02	1,01	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
14	1	1,02	1,01	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
15	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
16	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
17	1	1,02	1,01	1,03	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
18	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
19	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
20	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
21	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
22	1	1,02	1,01	1,04	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
23	1	1,02	1,01	1,03	1,04	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03
24	1	1,02	1,01	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,04	1,03	1,03

Tabela 75 – Modulo da tensão nas barras 1 a 20 para o caso-teste 3-GENT

T	V21	V22	V23	V24	V25	V26	V27	V28	V29	V30	V31	V32	V33	V34	V35	V36	V37	V38	V39	V40
1	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04
2	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03
3	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04
4	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04
5	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04
6	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04
7	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03
8	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,03
9	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
10	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
11	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
12	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
13	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
14	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,03
15	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
16	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
17	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
18	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
19	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
20	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,02	1,02	1,05	1,02	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
21	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,02	1,02	1,05	1,02	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
22	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
23	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03
24	1,03	1,04	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,03	1,03

Tabela 76 – Modulo da tensão nas barras 21 a 40 para o caso-teste 3-GENT

T	V41	V42	V43	V44	V45	V46	V47	V48	V49	V50	V51	V52	V53	V54	V55	V56	V57	V58	V59	V60
1	1,03	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
2	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
3	1,03	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03
4	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03
5	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03
6	1,03	1,04	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
7	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03
8	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
9	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
10	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
11	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
12	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
13	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
14	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,04	1,04	1,03	1,04	1,03
15	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
16	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
17	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
18	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
19	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
20	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
21	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
22	1,02	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
23	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,04	1,04
24	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04

Tabela 77 – Modulo da tensão nas barras 41 a 60 para o caso-teste 3-GENT

T	V61	V62	V63	V64	V65	V66	V67	V68	V69	V70	V71	V72	V73	V74	V75	V76	V77	V78	V79	V80
1	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
2	1,04	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,01	1,03	1,03	1,04	1,05
3	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05
4	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04	1,05
5	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,02	1,03	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05
6	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,04	1,04	1,04	1,05
7	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05
8	1,04	1,03	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
9	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
10	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
11	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
12	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
13	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
14	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
15	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
16	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
17	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
18	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
19	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
20	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
21	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
22	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
23	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04
24	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,03	1,03	1,04	1,03	1,01	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04

Tabela 78 – Modulo da tensão nas barras 61 a 80 para o caso-teste 3-GENT

T	V81	V82	V83	V84	V85	V86	V87	V88	V89	V90	V91	V92	V93	V94	V95	V96	V97	V98	V99	V100
1	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
2	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
3	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
4	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04
5	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,04
6	1,05	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,05	1,05
7	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
8	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
9	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
10	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
11	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
12	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
13	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
14	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
15	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
16	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
17	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
18	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
19	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
20	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
21	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
22	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,04	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
23	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05
24	1,05	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05

Tabela 79 – Modulo da tensão nas barras 81 a 100 para o caso-teste 3-GENT

T	V101	V102	V103	V104	V105	V106	V107	V108	V109	V110	V111	V112	V113	V114	V115	V116	V117	V118
1	1,04	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,02
2	1,05	1,05	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,04	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
3	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,04	1,03	1,03	1,05	1,02	1,02
4	1,04	1,05	1,03	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,04	1,03	1,03	1,05	1,01	1,03
5	1,04	1,05	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,04	1,03	1,03	1,05	1,01	1,02
6	1,05	1,05	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,04	1,03	1,03	1,05	1,02	1,02
7	1,05	1,05	1,04	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,04	1,03	1,03	1,05	1,02	1,02
8	1,05	1,05	1,04	1,03	1,02	1,02	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
9	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
10	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
11	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
12	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
13	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
14	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
15	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
16	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
17	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
18	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
19	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
20	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
21	1,04	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
22	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
23	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01
24	1,05	1,05	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,03	1,02	1,03	1,03	1,03	1,05	1,03	1,03	1,05	1,02	1,01

Tabela 80 – Modulo da tensão nas barras 101 a 118 para o caso-teste 3-GENT

APÊNDICE C – Trabalhos publicados pelo autor

1. M. Paredes, L.S.A. Martins, S. Soares, M. Shahidehpour, and H. Ye, “Solving Unit Commitment by Benders’ Decomposition with Semidefinite Programming,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, Submetido: 11/2015.
2. M. Paredes, L.S.A. Martins, and S. Soares, “Using Semidefinite Relaxation to Solve the Day-Ahead Hydro Unit Commitment Problem,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 30, no. 5, pp. 2695–2705, 10/2015.
3. T. Abreu, M. Paredes, K.A.M. Araujo, M. L. M. Lopes and A. D. P. Lotufo, “Electrical Load Forecasting using a Hybrid Model with Artificial Neural Networks,” *International Journal of Computer and Information Technology*, vol. 04, pp. 187–193, 02/2015.
4. M. Paredes, F. M. J. Rider and L. A. R. Romero, “Metodologia para o Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos de Longo Prazo,” in *SBSE, IV Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, 2012*, Goiânia, Goiás, Brasil, 05/2012.
5. T. Abreu, M. Paredes, K. A. M. Araujo, M. L. M. Lopes and A. D. P. Lotufo, “Previsão de Cargas Elétricas através de um Modelo Híbrido de Regressão com Redes Neurais Artificiais,” in *SBSE, IV Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, 2012*, Goiânia, Goiás, Brasil, 05/2012.
6. Mohsen Rahmani, Ruben A. Romero, Marcos J. Rider and M. Paredes, “Domain Reduction Using GRASP Construction Phase for Transmission Expansion Planning Problem. Lecture Notes in Computer Science,” *Lecture Notes in Computer Science, 1ed. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg*, vol. 7245, pp. 87–98, 01/2012.