



Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Telemática

# **Uma Aplicação de Controle Preditivo Multiparamétrico em Planejamento da Produção**

Autor: **Rafael Hisashi Zanetti Kido**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira**

*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.*

*Área de concentração: Automação*

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos (FEM/UNICAMP)

Prof. Dr. Akebo Yamakami (FEEC/UNICAMP)

Campinas/SP, Dezembro de 2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

K54a Kido, Rafael Hisashi Zanetti  
Uma aplicação de controle preditivo multiparamétrico  
em planejamento da produção / Rafael Hisashi Zanetti  
Kido. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Paulo Augusto Valente Ferreira.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Controle preditivo. 2. Análise de sensibilidade. 3.  
Otimização. 4. Controle de produção. I. Ferreira, Paulo  
Augusto Valente. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação. III. Título.

Título em Inglês: An application of multi-parametric predictive control in  
production planning

Palavras-chave em Inglês: Predictive control, Sensitivity analysis, Optimization,  
Control of production

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Juan Francisco Camino dos Santos, Akebo Yamakami

Data da defesa: 07-12-2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

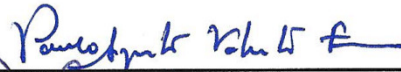
## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Rafael Hisashi Zanetti Kido

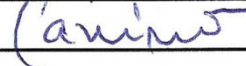
**Data da Defesa:** 7 de dezembro de 2011

**Título da Tese:** "Uma Aplicação de Controle Preditivo Multiparamétrico em Planejamento da Produção"

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira (Presidente):



Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos:



Prof. Dr. Akebo Yamakami:



*“Life is the art of drawing sufficient conclusions from insufficient premises.”*

*Samuel Butler (1612-1680)*

# Agradecimentos

Desejo expressar meus sinceros agradecimentos:

- Ao Professor Dr. Paulo Valente, pela excelente orientação, de cordialidade ímpar, pela minha iniciação à carreira acadêmica, pelo apoio com meus desejos pessoais na vida acadêmica e profissional e, sobretudo, pela confiança depositada no meu trabalho;
- Aos professores da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP que, direta ou indiretamente, muito me ensinam e contribuem à minha formação;
- Aos amigos do Departamento de Telemática, em especial: Alireza, Ricardo, Renato, Rafael, Cristiano Lyra. Ao Alireza, em particular ainda pela ótima companhia no laboratório, extremamente trabalhador e competente, sempre disposto a ajudar;
- Aos meus pais – Célia e Ernesto – e ao meu irmão – Ricardo – pelo carinho, amor, paciência, compreensão e apoio. Eles nunca negaram esforços e privações para garantir minha educação e formação, seja como homem, como cidadão ou como engenheiro;
- Aos amigos da turma “EE04” pela companhia de 5 anos de graduação e outros por mais dois anos durante minha pós-graduação, saudade;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro essencial à realização deste trabalho.

*Campinas/SP, dezembro de 2011*

# Resumo

Nesta dissertação, o problema de controle preditivo baseado em modelo, um problema de otimização não linear com critério de desempenho quadrático e restrições lineares, é reformulado via otimização quadrática multiparamétrica, em que as entradas de controle são as variáveis de otimização e os estados (no caso mais simples) representam um vetor de parâmetros. A resolução do problema multiparamétrico fornece as ações de controle ótimas para cada região onde possam estar situados os parâmetros de interesse. Um algoritmo para obtenção destas regiões – polítopos - é apresentado. Fórmulas explícitas para a transformação de problemas preditivos clássicos (envolvendo tanto regulação de estados quanto regulação de saída) em problemas de controle preditivo multiparamétricos são derivadas. O algoritmo para regulação da saída, versão multiparamétrica, é então aplicada a um problema de planejamento da produção envolvendo a coordenação de esforços de produção/estoque e propaganda. Resultados computacionais demonstram a versatilidade que a abordagem paramétrica propicia ao processo de tomada de decisões em ambientes de planejamento.

# Abstract

In the present dissertation, the model based predictive control problem, a nonlinear optimization problem with quadratic performance criterion and linear constraints, is reformulated as a multi-parametric quadratic programming problem, in which the control inputs are the optimization variables and the states (in the simplest case) represent the parameter vector. The optimal solution of the multi-parametric problem provides the optimal control input for every single region where the parameters of interest may be located. An algorithm for obtaining all regions (polytopes) is presented. Explicit formulas for the transformation of classical predictive problems (state regulation and output regulation, as well) in multi-parametric predictive control problems are provided. The output regulation algorithm in its parametric version is applied then to a production planning problem involving the production/inventory and the propaganda efforts. Computational results demonstrate the versatility of the parametric approach in production planning environments.

# Índice

<i>Capítulo 1</i>	<i>1</i>
<i>Introdução</i>	<i>1</i>
1.1 <i>Motivação, Justificativas e Objetivos</i>	<i>5</i>
<i>Capítulo 2</i>	<i>8</i>
<i>Controle Preditivo e Análise de Sensibilidade</i>	<i>8</i>
2.1 <i>Controle Preditivo</i>	<i>8</i>
2.1.1 <i>Estratégia de Controle</i>	<i>9</i>
2.2 <i>Análise de Sensibilidade</i>	<i>14</i>
2.2.1 <i>Análise de sensibilidade de primeira ordem</i>	<i>15</i>
2.3 <i>Sumário</i>	<i>18</i>
<i>Capítulo 3</i>	<i>19</i>
<i>Controle Preditivo via otimização Paramétrica</i>	<i>19</i>
3.1 <i>Introdução</i>	<i>19</i>
3.2 <i>Regulação de Estados</i>	<i>19</i>
3.3 <i>Implementação</i>	<i>30</i>
3.4 <i>Regulação da saída</i>	<i>35</i>
3.5 <i>Comparação método clássico x partição</i>	<i>42</i>
3.6 <i>Sumário</i>	<i>44</i>
<i>Capítulo 4</i>	<i>45</i>
<i>Aplicação em Planejamento da Produção</i>	<i>45</i>
4.1 <i>Introdução</i>	<i>45</i>
4.2 <i>Planejamento da produção</i>	<i>45</i>
4.3 <i>Sumário</i>	<i>63</i>
<i>Conclusões</i>	<i>64</i>
<i>Referências Bibliográficas</i>	<i>65</i>



*Apêndice A* 69

*Algoritmo de partição* 67

# Lista de Figuras

<i>Figura 2.1 – Estratégia MPC</i>	10
<i>Figura 2.2 – Estrutura básica de MPC</i>	11
<i>Figura 2.3- a – Formulação QP, menor penalização sobre <math>x_1</math></i>	13
<i>Figura 2.3- b – Formulação QP, menor penalização sobre <math>x_2</math></i>	13
<i>Figura 3.1 – Partição inicial do espaço de parâmetros</i>	27
<i>Figura 3.2 – Obtenção das regiões críticas</i>	29
<i>Figura 3.3 – Resultados da validação – regulação de estados</i>	35
<i>Figura 3.4 – Resultados da validação – regulação da saída</i>	42
<i>Figura 3.5 – Controle preditivo clássico</i>	43
<i>Figura 3.6 – Controle preditivo via parametrização</i>	43
<i>Figura 4.1 – Estrutura MPC com esquemático de decisão</i>	46
<i>Figura 4.2 – Resposta da taxa de vendas a um pulso retangular</i>	49
<i>Figura 4.3 – Variação do nível de estoque no tempo</i>	53
<i>Figura 4.4 – Variação do nível de vendas no tempo</i>	54
<i>Figura 4.5 – Variação do esforço de propaganda e produção no tempo</i>	54
<i>Figura 4.6 – Incrementos de propaganda e produção no tempo</i>	55
<i>Figura 4.7 – Variação do nível de estoque no tempo com maior antecipação da referência</i>	55
<i>Figura 4.8 – Variação do nível de estoque no tempo</i>	56
<i>Figura 4.9 – Variação do nível de vendas no tempo</i>	56
<i>Figura 4.10 – Variação dos esforços de propaganda e produção no tempo</i>	57
<i>Figura 4.11 – Incrementos de propaganda e produção no tempo</i>	57
<i>Figura 4.12 – Variação do nível de estoque no tempo</i>	58

<i>Figura 4.13 – Variação do nível de vendas no tempo</i>	58
<i>Figura 4.14 – Esforço de propaganda e produção no tempo</i>	59
<i>Figura 4.15 – Incrementos de produção e propaganda no tempo</i>	60
<i>Figura 4.16 – Variação do nível de estoque no tempo</i>	60
<i>Figura 4.17 – Variação do nível de vendas no tempo</i>	61
<i>Figura 4.18 – Esforço de propaganda e produção no tempo</i>	61
<i>Figura 4.19 – Incrementos de produção e propaganda no tempo</i>	62
<i>Figura 4.20 Politopos requisitados</i>	63
<i>Figura A.(1-10) Ilustração do algoritmo</i>	67

# Lista de Siglas

CR	Região Crítica (“Critical Region”);
KKT	Karush Kuhn Tucker;
LICQ	Qualificação da Independência Linear das Restrições (“Linear Independence Constraint Qualification”);
LP	Programação Linear (“Linear programming”);
MBPC	Controle preditivo Baseado em Modelo (“Model Based Predictive Control”);
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo (“Model Predictive Control”);
Mp-LP	Programação Linear Multiparamétrica (“Multi-parametric Linear Programming”);
Mp-QP	Programação Quadrática Multiparamétrica (“Multi-parametric Quadratic Programming”);
NLP	Programação Não Linear (“Non Linear Programming”);
PID	Controlador Proporcional Integral Derivativo;
PWA	Afim por Partes (“Piecewise Affine”);
RHC	Controle a Horizonte Deslizante (“Receding Horizon Control”);

# Capítulo 1

## Introdução

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (MBPC), ou somente Controle Preditivo (MPC), é a técnica de controle que apresenta impacto mais significativo e de uso mais difundido na indústria de processos, à exceção das técnicas que utilizam a estrutura PID.

A técnica MPC tem sido há mais de duas décadas implantada com sucesso em processos industriais, principalmente no setor petroquímico. A principal razão para isso é a sua habilidade inerente em lidar com restrições em sistemas multivariáveis complexos, superando tecnologias existentes.

Ao estendermos a classe de modelos além da classe de modelos lineares, modelos lineares restritos são provavelmente a classe mais importante em termos práticos. As abordagens mais populares para o projeto de controladores para sistemas dinâmicos com restrições recaem sobre duas categorias: Anti-Windup (PID) e Controle Preditivo.

Existem diversas técnicas Anti-Windup, como por exemplo, método da integração condicional e método back-calculation, entre outros. Essas técnicas são necessárias ao se aplicar controle PID a um sistema, pois todos os atuadores possuem limitações físicas, o que acarreta consequências severas para o controle. Na hipótese de saturação, a malha de realimentação não será funcional, pois a saída do elemento saturado não mais reponde a sua entrada. Nesse caso, o sistema opera como se estivesse em malha aberta, já que o atuador está em seu valor máximo (ou mínimo) independente do valor da saída do processo, o que é potencialmente crítico se o sistema for instável em malha aberta. Assim, o erro do controle decresce mais lentamente do que no caso ideal (sem saturação) e, portanto o termo integral se torna muito grande acarretando em grandes overshoots e tempo de acomodação. (Visioli, 2006).

Este problema fatalmente ocorrerá com controladores convencionais se erros de set-point fizerem com que a saída do integrador exceda os limites de saturação, As formas de se lidar com isso nos controladores convencionais ao custo de se aumentar consideravelmente a sua complexidade. Controladores MPC lidam com a questão da saturação de uma forma mais natural.

O fato de o controlador preditivo estar ciente das restrições sobre as entradas, e em particular da possível saturação dos atuadores, e de nunca gerar sinais de entrada que tendem a violá-las, remove o problema ligado à saturação.

Restrições existem na maioria das aplicações práticas e um desempenho ótimo só pode ser alcançado lidando-se com essas restrições. A importância de se lidar adequadamente com restrições se deve ao fato de que, em geral, a operação mais rentável de um sistema é obtida quando o processo opera próximo às restrições, geralmente associadas a custos diretos, custos de energia, e à qualidade de processos e produtos.

Claro que não queremos que a planta ou o processo opere exatamente sobre os limites reais de sua capacidade. Em situações reais é necessário termos alguma reserva para lidar com distúrbios, nem sempre previsíveis.

A área da Otimização conhecida como Programação Paramétrica revelou-se útil quando aplicada em MPC ao permitir formular o problema de otimização intrínseco ao controle preditivo como um problema de programação paramétrica. Soluções explícitas computacionalmente eficientes para problemas inviabilizados pela otimização em tempo real são hoje possíveis a partir do emprego de programação paramétrica.

Uma forma de se resolver um problema matemático, especialmente na área de Engenharia, é utilizar um software, usualmente customizado para uma classe específica de problemas. Quando vários problemas de otimização que somente diferem pelo valor de um vetor de parâmetros precisa ser resolvido, uma alternativa viável pode ser considerar o problema como um problema de programação paramétrica. Algumas classes de problemas paramétricos podem ser resolvidas explicitamente, fornecendo uma solução ótima como função explícita do vetor de parâmetros. Quando um problema matemático nasce de um problema de controle, tal solução explícita pode fornecer vantagens de implementação em tempo real quando comparado com uma solução puramente numérica.

Essa dissertação trata por meio de otimização paramétrica problemas de controle que podem ser abordados por controle preditivo clássico. A principal motivação para este trabalho sobre programação paramétrica é a possibilidade de se formular um problema de controle ótimo restrito com janela deslizante (RHC, Receding Horizon Control) como um problema de programação paramétrica.

A técnica RHC, uma das idéias centrais do MPC, tem tido relativo sucesso em processos industriais em que baixas taxas de amostragem permitem soluções numéricas em tempo real. Com os métodos expostos aqui, a gama de aplicações em que a técnica RHC pode ser aplicada é estendida consideravelmente.

É reconhecidamente difícil analisar a história e a autoria de uma idéia, mas provavelmente os pioneiros na abordagem MPC foram desenvolvedores da área industrial que implementaram o controle preditivo anos antes das primeiras publicações sobre o assunto surgirem. Portanto as datas a seguir fornecem apenas uma noção cronológica do desenvolvimento da abordagem.

*Richalet et al (1978)*, propôs o Controle Preditivo sob o nome de *Model Predictive Heuristic Control*. Ênfase neste caso foi dada a problemas muito difíceis a serem tratados pelo controlador PID convencional, mas que usassem conceitos intuitivos e que fossem de fácil implementação. A presença de restrições e questões como otimalidade ainda não eram consideradas.

*Cutler e Ramakter (1980)* propuseram a técnica *Dynamic Matrix Control (DMC)*. Foi considerada a operação ótima da planta sob restrições, e calculado o sinal de controle ótimo resolvendo-se repetidamente um problema de Programação Linear. A tecnologia gerada foi patenteada, e se tornou a técnica de controle de processos complexos mais difundida comercialmente.

Estas propostas iniciais exibiram as características essenciais de controle preditivo: um modelo explícito interno, implementação RHC, e cálculo do sinal de controle otimizado com base no comportamento previsto da planta. Ainda nesta fase inicial, publicações no meio acadêmico contendo os mesmos fundamentos incluem *Propoi (1963)*; *Kleinman (1970)*, *Rafael and Stevens (1968)*; *Nour-Edin (1971)*; *Rouhani and Mehra (1982)*.

A idéia de se utilizar predições não é novidade na área de controle. O Preditor de Smith (*1957*), por exemplo, é um método proposto na literatura de controle de processos para melhorar o desempenho em malha fechada na presença do atraso de transporte. Este método tenta prever a saída do processo sem atraso e realimentá-la ao controlador. O preditor é uma compensação de projeto baseada em modelo que divide a representação da planta em duas parcelas: a dinâmica do modelo e o atraso.

Metodologias que permitam análises do comportamento de uma solução em relação a mudanças nos dados do problema é uma exigência já bem estabelecida em disciplinas científicas. A natureza de uma solução não pode ser completamente compreendida sem tais análises. Vertentes importantes da matemática se inspiraram por esta questão e inúmeros trabalhos foram dedicados a respondê-la.

Em programação matemática, técnicas de sensibilidade e estabilidade foram utilizadas para se obter condições de otimalidade, resultados em dualidade, algoritmos de otimização, taxa de convergência de algoritmos, além das aplicações mais óbvias e imediatas referentes à obtenção de soluções ótimas parametrizadas. Tais técnicas são também essenciais em aplicações como validação de modelos e análises do tipo custo- benefício.

Em programação linear, os resultados teóricos e computacionais que levam em conta mudanças nos parâmetros estão razoavelmente estabelecidos sob hipóteses apropriadas de não degenerescência (Bertsimas e Tsitsiklis, 2008). O desenvolvimento da programação linear teve início na década de 1940, e as suas bases teóricas foram obtidas e refinadas em conjunto com os seus aspectos computacionais, o que não aconteceu com a Programação não Linear (NLP).

Os esforços em NLP foram concentrados inicialmente na busca de algoritmos que encontrassem uma solução ótima e subótima. Diferentemente da programação linear, em que o Método Simplex rapidamente dominou e unificou os esforços teóricos e computacionais, nenhuma abordagem computacional foi dominante em NLP. Inúmeras abordagens surgiram do desenvolvimento de condições de otimalidade, dando origem a eficientes algoritmos numéricos com suas características taxas de convergência. (Bazaraa et al., 2006). Uma aplicação de Programação não linear ao problema de gerenciamento de energia de um veículo híbrido pode ser vista em Lopes et al. (2010).

Essa dissertação contempla uma aplicação importante na área industrial e econômica: o planejamento da produção. O planejamento de produção de sistemas de manufatura multiproduto é relativamente simples de ser formulado, porém de difícil resolução. Considere uma firma que deseja determinar quanto gastar em campanhas publicitárias e quanto produzir de forma a que o custo total seja minimizado e limitações operacionais sejam mantidas. Este problema foi atacado em *Tzafestas et al.* (1997) utilizando técnicas de controle preditivo na sua formulação clássica. Nesta dissertação propõe-se uma aplicação de controle preditivo na sua



versão multiparamétrica a um problema de planejamento da produção. O objetivo central é obter politopos ótimos de produção em função de certos parâmetros de interesse, evitando-se reotimizações quando as condições de operação do sistema variam.

## 1.1 Motivação, Justificativas e Objetivos

O controle via horizonte deslizante (Receding Horizon Control - RHC) ou Controle preditivo baseado em modelo (Model Predictive Control - MPC ou Model Based Predictive Control - MBPC) tem sido um método de controle de grande sucesso quando aplicado em processos industriais. A maior razão para isso é sua habilidade nata em lidar com restrições em sistemas multivariáveis complexos. Restrições aparecem de alguma forma na maioria das aplicações e um desempenho ótimo é obtido levando-se em conta essas restrições.

Na indústria de processos, processos lentos permitem otimização em tempo real, se houver capacidade de processamento computacional suficiente que atenda a essa demanda. Durante os últimos anos, iniciou-se um movimento de pesquisa no que tange à programação paramétrica, dentro da comunidade científica de controle. Isso se deve ao fato da possibilidade de se formular problemas do tipo RHC como problemas paramétricos, viabilizando-se soluções explícitas, computacionalmente eficientes, para problemas que antes não podiam ser tratados em tempo real. Além disso, a abordagem paramétrica pode fornecer um mapeamento de soluções (ações de controle) ótimas em função dos parâmetros de interesse e permitir análises de sensibilidade em relação à variação destes parâmetros.

Nesta dissertação aborda-se alguns aspectos teóricos da programação paramétrica, principalmente quanto à sua origem. Busca-se fazer uma ponte entre a teoria e a prática, através de exemplos didáticos e de uma aplicação em sistemas de produção. A implementação da abordagem é validada por meio de simulações no domínio do tempo, com representação no espaço de estados.

A metodologia, os resultados e as possíveis extensões da programação paramétrica são de grande valia para o meio acadêmico e industrial uma vez que há ainda um grande campo de estudo sobre este assunto. Dentre os trabalhos mais importantes relativos à programação paramétrica e sua aplicação em controle preditivo, podemos destacar:

*Fiacco (1976)* e *Fiacco (1983)* forneceram as bases para o desenvolvimento de técnicas de parametrização para problemas de programação convexa, utilizadas no contexto MPC para o cálculo do esforço de controle ótimo, descrito nos capítulos seguintes.

*Bemporad et al. (2002)* desenvolveu um algoritmo de otimização via parametrização de soluções explícitas do problema de regulação de estados para sistemas lineares discretos e invariantes no tempo sujeito a restrições nos estados e nas variáveis de controle. *Pistikopoulos et al. (2002)* seguiu a mesma linha do trabalho anterior, generalizando a solução do problema do regulador linear quadrático para realimentação e rastreamento da saída a partir de uma expansão do vetor de estados.

*Tøndel et al. (2003)* estudaram mais profundamente as propriedades das partições poliédricas do espaço de estados para a elaboração de um algoritmo mais eficiente para obtenção de solução explícitas via programação paramétrica.

Em *De Vito e Scattolini (2007)* e *Bemporad e La Peña (2009)*, o esforço de controle foi obtido a partir de uma formulação multiobjetivo, baseada num critério de decisão variante no tempo e dependente do estado, o que permitiu considerar especificações de desempenho conflitantes.

A dissertação está organizada da seguinte forma:

O Capítulo 2 introduz a teoria de controle preditivo clássico para os fins desta dissertação, assim como a teoria de sensibilidade aplicável à programação não linear quadrática.

O Capítulo 3 descreve o núcleo deste trabalho ao mesclar as teorias de sensibilidade e de controle preditivo clássico, que fundamentam a técnica de otimização off-line para controle preditivo via técnicas de parametrização. Um algoritmo para resolver estes problemas é desenvolvido nos moldes dos artigos da referência.

No Capítulo 4 é apresentado um estudo de caso envolvendo um problema de controle de produção/estoque e vendas, com base num modelo de mercado que tem sido fundamental para inúmeras publicações no campo de modelagem do comportamento de mercado, e seus impactos sobre o investimento em publicidade. (Vidale e Wolfe, 1957).

O Capítulo 5 apresenta as conclusões e considerações finais desta dissertação.

As simulações computacionais apresentadas e discutidas ao longo dos capítulos seguintes desta dissertação foram realizadas em MATLAB®. Todas as discussões e as conclusões estabelecidas ao longo dos capítulos a seguir são fundamentadas em resultados obtidos exclusivamente através de simulações computacionais com modelos matemáticos – metodologia bem estabelecida em estudos relativos à área de controle. Não foram realizados testes de bancada ou de campo, com equipamentos reais.

## Capítulo 2

# Controle Preditivo e Análise de Sensibilidade

### 2.1 Controle Preditivo

Controle Preditivo é talvez a formulação mais geral para o problema de controle de processos no domínio do tempo, permitindo considerar problemas de controle ótimo, controle estocástico, controle de processos com tempo morto e controle multivariável.

O termo Controle Preditivo não se refere a uma estratégia de controle específica, mas sim a um amplo espectro de métodos de controle que fazem uso explícito de um modelo do processo para obter o sinal de controle a partir da minimização de uma função objetivo. Esses métodos levam a controladores lineares que têm praticamente as mesmas características básicas:

- Uso explícito de um modelo para prever a saída do processo em instantes futuros de tempo;
- Cálculo de uma sequência de controle que minimiza uma função objetivo;
- Janela deslizante: a cada instante de tempo o horizonte é estendido em direção ao futuro; apenas o primeiro sinal de controle ótimo da sequência calculada a cada instante é aplicado ao processo.

Os vários algoritmos MPC (*Model predictive Control*) diferem basicamente em relação ao modelo usado para representar o processo, na descrição de possíveis ruídos e na função de custo a ser minimizada. Este tipo de controle é de malha aberta em relação ao processo, e de malha fechada em relação ao modelo, como poderá ser observado mais a frente.

O MPC clássico apresenta uma série de qualidades, das quais podemos destacar:

- É particularmente atrativo de se trabalhar, pois os conceitos utilizados são intuitivos e a sintonização do controlador é relativamente fácil;
- Processos multivariáveis podem ser tratados;

- Introduce realimentação avanço de forma natural para compensar distúrbios mensuráveis;
- O controlador resultante é linear;
- O tratamento de restrições é conceitualmente simples; restrições podem ser sistematicamente incluídas durante a fase de projeto;
- É muito útil quando referências futuras são conhecidas;
- É uma metodologia aberta, baseada em princípios gerais que permitem extensões futuras;

Logicamente, algoritmos MPC também têm seus pontos negativos:

Embora a lei de controle resultante seja de fácil implementação, a sua derivação é mais complexa do que a relativa aos controladores PID, por exemplo. Se a dinâmica do processo não muda, a modelagem do processo pode ser feita com antecedência. Porém, no caso de controle adaptativo, a estrutura da lei de controle precisa ser determinada a cada instante de tempo. Além disso, quando restrições são consideradas, o esforço computacional é ainda maior.

Provavelmente o maior desafio para uma implementação MPC é o de se ter em mãos um modelo do processo. O algoritmo é baseado no conhecimento a priori do modelo; a efetividade do controle será afetada por discrepâncias existentes entre o processo real e o modelo utilizado.

Nesta dissertação não estamos interessados em algoritmos específicos de controle preditivo, como DMC e GPC. O que será exposto é o controle preditivo na sua concepção original.

### 2.1.1 Estratégia de Controle

Os algoritmos MPC são caracterizados pela estratégia descrita detalhadamente na Figura 2.1

- 1) As saídas futuras para um determinado horizonte  $N$  a partir do instante atual, chamado horizonte de predição, são previstas a cada instante  $t$  usando-se o modelo do processo. Estas saídas previstas  $y_{t+k|t}$  para  $k = 1, \dots, N$  dependem dos valores conhecidos até o instante  $t$  (entradas e saídas passadas) e dependem também dos sinais de controle futuros  $u_{t+k|t}$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ , a serem determinados.

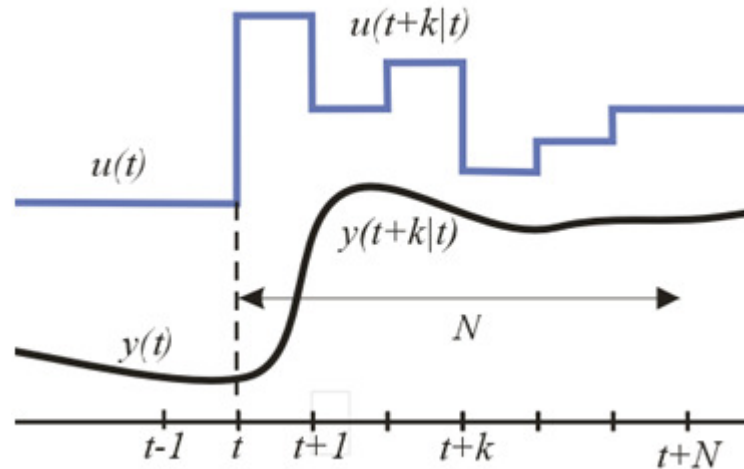


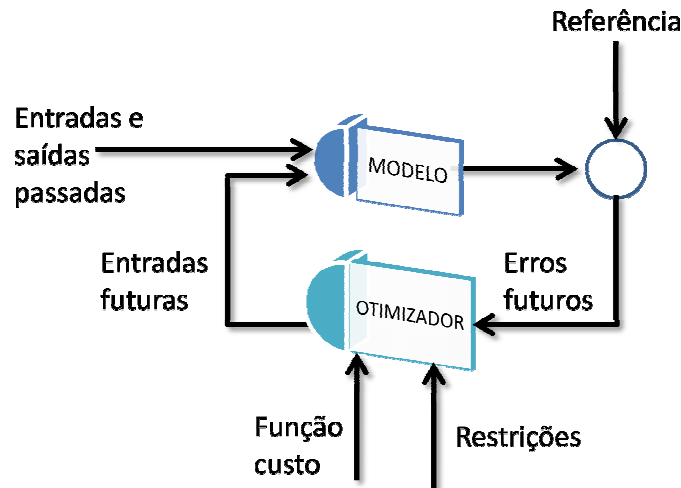
Figura 2.1 Estratégia MPC

- 2) O conjunto de sinais de controle futuros é calculado otimizando-se um determinado critério a fim de manter a saída do processo (e/ou seus estados) o mais próximo possível da trajetória de referência  $r_{t+k}$ , que pode ser o próprio setpoint para a saída ou uma aproximação dele. O critério usado geralmente tem a forma de uma função quadrática dos erros entre as saídas previstas e a trajetória de referência pré-especificada.
- 3) O sinal de controle  $u(t|t)$  é enviado ao processo, enquanto que os próximos sinais de controle futuros são desconsiderados. No próximo instante de tempo,  $y(t+1)$  está disponível, o passo 1 é repetido com este novo valor e todas as seqüências são atualizadas. Então  $u(t+1|t+1)$  é obtido (e muito provavelmente  $u(t+1|t+1)$  será diferente de  $u(t+1|t)$  devido às novas informações disponíveis) usando-se o princípio de horizonte deslizante (RHC).

A estrutura básica do controle preditivo pode ser observada na Figura 2.2. Um modelo do processo é usado para prever as saídas futuras, a partir de valores passados e correntes e das ações ótimas de controle futuras. Essas ações são calculadas pelo otimizador que leva em conta a função de custo, que por sua vez leva em conta o erro de rastreamento e a natureza das restrições. Como se pode observar, o modelo da planta tem um papel fundamental na obtenção do controlador, e está diretamente relacionado à capacidade do sistema de rastrear a referência.

Existem diversas técnicas para se obter um modelo da planta a ser controlada, desde linearização, até métodos mais sofisticados, como identificação via resposta ao impulso truncada,

ou métodos com tratamento estocástico que levem em conta ruídos de medição, como máxima verossimilhança, modelos auto-regressivos, etc. (Jung, 1999)



**Figura 2.2 Estrutura básica de MPC**

O otimizador é peça fundamental da estratégia de controle MPC, já que fornece os controles que norteiam o comportamento da planta em funcionamento. Se a função de custo é quadrática, o seu valor mínimo pode ser obtido como uma função explícita (linear) das entradas de controle e saídas passadas e da trajetória de referência futura. Ao inserirmos restrições, característica que torna as técnicas MPC mais atraentes que controladores PID em aplicações práticas, faz-se necessário o uso de algoritmos numéricos alternativos. A complexidade do problema de otimização resultante depende do número de variáveis e do horizonte de predição utilizado, fazendo com que somente problemas de pequeno porte possam ser resolvidos eficientemente. Será dentro desta problemática que focaremos nossos esforços.

Existem muitos parâmetros ajustáveis em um algoritmo MPC, mesmo na sua formulação mais clássica, dentre eles: as ponderações da função de custo, os horizontes de controle e de saída, a dinâmica do observador e do modelo de distúrbios, a trajetória de referência. Embora existam resultados (Maciejowski, 2001) que orientem a sintonização dos parâmetros, na prática, a sintonização de parâmetros é majoritariamente baseada em experiência.

Suponha que o otimizador do MPC utilize o seguinte critério quadrático em sua função de custo:

$$V(k) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \|y(k+i|k) - r(k+i|k)\|_{Q(i)}^2 + \sum_{i=0}^{N_u-1} \|\Delta u(k+i|k)\|_{R(i)}^2 \quad (2.1)$$

Aumentar as ponderações  $R(i)$  no esforço de controle relativas ao peso  $Q(i)$  dos erros de rastreamento tem o efeito de reduzir o esforço do controle, não sendo estranho, portanto, a ponderação  $R(i)$  ser denominada de *fator de supressão*. Aumentando-se esse fator indefinidamente, a atividade de controle cai para zero, o que ‘corta’ a ação de realimentação. Se a planta for estável, obteremos uma malha fechada estável aumentando-se  $R(i)$ , e nada mais. O custo de se fazer isto, entretanto, será tornar mais lenta a resposta a variações e a distúrbios, uma vez que somente pequenas magnitudes de controle surgirão.

Os inteiros  $N_1$  e  $N_2$  são os horizontes de custo mínimo e máximo respectivamente; e  $N_u$  é o horizonte de controle, que não necessariamente coincide com o horizonte máximo.  $N_1$  e  $N_2$  delimitam os instantes de tempo em que queremos que a saída siga a referência. Se escolhermos, por exemplo, um valor para  $N_1$  grande, significa que a importância de erros nos primeiros instantes é relativamente baixa, originando uma resposta mais suave do processo. Note que se o processo tiver tempo morto de  $d$  unidades de tempo, não há motivos para  $N_1$  ser menor que  $d$ , pois a saída não evoluirá até o instante  $t + d$ .

Uma das vantagens do controle preditivo é que se a evolução futura da referência for conhecida a priori, o controle reagirá a mudanças antes que estas tenham sido efetivadas, evitando-se, portanto, atrasos na resposta do processo. A saída do processo pode ser suavizada ponderando-se o erro de rastreamento convenientemente através de  $Q(i)$ .

É possível modificar a função de custo utilizada em controle preditivo de forma a que os valores absolutos dos erros das  $m$  saídas sejam penalizados de forma diferente do critério quadrático, como no caso linear a seguir, sem penalização sobre o controle:

$$V(k) = \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{j=1}^m |y_j(k+i|k) - r_j(k+i)| q_j \quad (2.2)$$

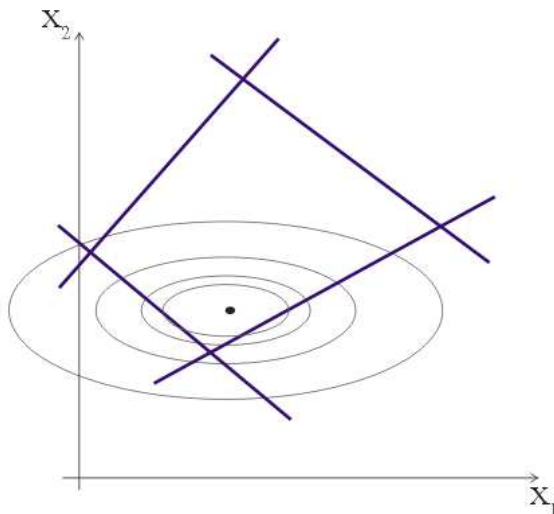
em que  $q_j$  são parâmetros de ponderação não negativos.



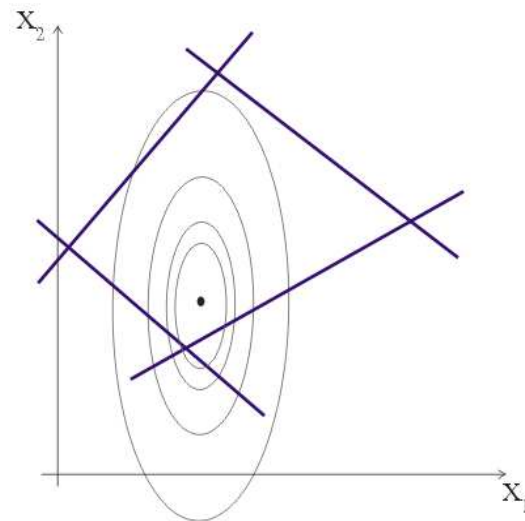
Funções de custo lineares foram usadas por muitos autores, como *Baric et al* (2006) e *Chang & Seborg* (1983). Uma das razões históricas para se adotar tais formulações é que problemas lineares podem ser resolvidos mais eficientemente do que problemas quadráticos, e existe um maior conhecimento desta classe de problemas em ambientes comerciais e industriais.

Uma razão mais significativa para se adotar a alternativa quadrática é que o comportamento resultante é diferente. As soluções de um problema linear são sempre a intersecção de várias restrições (ocasionalmente em uma única restrição) e, portanto são extremamente sensíveis a mudanças dos limites impostos. Em uma formulação com penalização quadrática do erro:

1. O ponto de operação desejado (centro dos elipsóides de iso-custos) pode ser deslocado dentro da região factível de forma natural. (Em programação linear isso pode ser feito redefinindo-se as restrições);
2. Os pesos relativos na função de custo podem ser alterados para mudar o comportamento irrestrito. Na figura 2.3 a seguir está ilustrado um caso bidimensional de otimização quadrática a restrições lineares. Para um mesmo ponto de operação, desvios em  $x_2$  são menos penalizados do que para desvios em  $x_1$ .



**Figura 2.3-a** Formulação QP, menor penalização sobre  $x_1$



**Figura 2.3-b** Formulação QP, menor penalização sobre  $x_2$

3. Se as restrições estiverem persistentemente ativas, as localizações dos pontos de operação nos contornos da região viável podem ser alteradas modificando-se as ponderações da função custo.

## 2.2 Análise de Sensibilidade

Um dos propósitos deste capítulo é descrever uma técnica para estimar a sensibilidade de soluções ótimas de problemas de programação matemática quando as funções envolvidas na formulação sofrem pequenas variações paramétricas. Assume-se que a solução em questão satisfaz condições suficientes de segunda ordem para mínimo local estrito (*Luenberger*, 1984).

Embora a abordagem descrita a seguir permita, em teoria, o uso de qualquer procedimento que gere uma estimativa apropriada de primeira ordem a partir das condições de Karush-Kuhn-Tucker (*Luenberger*, 1984), a exposição foi estruturada de forma a estabelecer uma relação direta com um problema de programação quadrática. Deve-se salientar que mesmo provada a existência de derivadas de maior ordem, a análise apresentada nesta dissertação restringe-se a informação de sensibilidade de primeira ordem – primeiras derivadas parciais. Além disto, apesar de existirem muitas formas de se realizar a análise de sensibilidade de uma solução, apenas a taxa de variação de uma solução devida à variação (perturbação) de algum parâmetro será realizada. Especificamente, a análise envolve:

- 1) A demonstração da relação entre as condições suficientes de segunda ordem para um mínimo local estrito e a existência e o comportamento de variações de primeira ordem da solução local e dos multiplicadores de Lagrange associados, quando as funções do problema estão sujeitas a variações dos seus parâmetros.
- 2) A representação explícita das derivadas parciais de primeira ordem da solução local e dos multiplicadores de Lagrange associados em relação aos parâmetros do problema.
- 3) Uma generalização dos resultados básicos de sensibilidade para uma grande classe de problemas de programação não linear sujeitos a variações paramétricas.

### 2.2.1 Análise de sensibilidade de primeira ordem

Considere o problema de determinar uma solução local  $x(\varepsilon)$  para o problema

$$P(\varepsilon) \quad \min_x f(x, \varepsilon) \quad (2.3)$$

$$s. a \quad g_i(x, \varepsilon) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4)$$

$$h_j(x, \varepsilon) = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (2.5)$$

em que  $x \in R^n$  e  $\varepsilon \in R^k$  é um vetor de parâmetros. O Lagrangiano de  $P(\varepsilon)$  é definido por

$$L(x, \mu, \lambda, \varepsilon) = f(x, \varepsilon) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x, \varepsilon) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x, \varepsilon) \quad (2.6)$$

Observe que se não houverem restrições de igualdade ou de desigualdade, a análise permanece válida suprimindo-se referências a tais restrições. Portanto, se não houverem restrições de desigualdade, suprimimos referências a  $g_i$  e aos multiplicadores associados,  $\mu_i$ , e, analogamente, para  $h_j$  e seus multiplicadores associados  $\lambda_j$ . O vetor gradiente e a matriz Hessiana de uma função escalar qualquer serão denotadas respectivamente por  $\nabla f$  e  $\nabla^2 f$ , e são calculadas em relação à  $x$ , a menos que seja declarado o contrário.

Estamos interessados em analisar o comportamento de uma solução local  $x(\hat{\varepsilon})$  de  $P(\hat{\varepsilon})$  quando o vetor de parâmetros  $\hat{\varepsilon}$  está sujeito a uma perturbação. Condições serão dadas para a existência de uma solução local  $x(\varepsilon - \hat{\varepsilon})$  de  $P(\varepsilon - \hat{\varepsilon})$  numa vizinhança de  $x(\hat{\varepsilon})$  para  $\varepsilon$  próximo de  $\hat{\varepsilon}$ , juntamente com os multiplicadores associados  $\mu(\varepsilon - \hat{\varepsilon})$  e  $\lambda(\varepsilon - \hat{\varepsilon})$ . Sob estas condições, as componentes de todas estas quantidades são funções unicamente determinadas de  $\varepsilon$  numa vizinhança de  $\hat{\varepsilon}$ . Faremos uso das condições suficientes de segunda ordem para mínimo local estrito de um problema de programação matemática. Para o problema  $P(\varepsilon)$ , se as funções definem o problema  $P(\hat{\varepsilon})$  forem duas vezes diferenciáveis em uma vizinhança de  $x^*$ , então  $x^*$  é um minimizador local estrito (isolado) de  $P(\hat{\varepsilon})$  se existirem vetores multiplicadores de Lagrange  $\mu^*$  e  $\lambda^*$  tais que as condições de segunda ordem de Karush-Kuhn-Tucker são válidas:

$$i) \quad g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7)$$

$$ii) \quad h_j(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (2.8)$$

$$\text{iii) } \mu_i^* g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.9)$$

$$\text{iv) } \mu_i^* \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.10)$$

$$\text{v) } \nabla L(x^*, \mu^*, \lambda^*, \hat{\varepsilon}) = \nabla f(x^*, \hat{\varepsilon}) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla h_j(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{vi) se } d^T \nabla^2 L(x^*, \mu^*, \lambda^*, \hat{\varepsilon}) d > 0 \text{ para todo } d \neq 0 \text{ tal que}$$

$$d^T \nabla g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) \geq 0 \quad \text{para todo } i, \text{ tal que } g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0 \quad (2.12)$$

$$d^T \nabla g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0 \quad \text{para todo } i, \text{ tal que } \mu_i^* > 0 \quad (2.13)$$

$$d^T \nabla h_j(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (2.14)$$

Estas condições i) – vi) são aplicáveis existindo ou não restrições, e existindo ou não um vetor  $d$  como indicado. Inexistindo restrições, as condições acima são trivialmente válidas suprimindo-se as referências às restrições. Isso nos leva às condições suficientes para que  $x^*$  em um problema irrestrito seja um ponto de mínimo local estrito de  $f(x, \hat{\varepsilon})$ :  $\nabla f(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0$  e  $d^T \nabla^2 f(x^*, \hat{\varepsilon}) d > 0$  para todo  $d \neq 0$ . Se não existir  $d \neq 0$  satisfazendo as relações indicadas com os gradientes das restrições e condições de primeira ordem KKT sendo satisfeitas, então a tripla  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$  novamente satisfaz as condições de segunda ordem. Pode-se mostrar que, neste caso, devem existir  $n$  restrições ativas em  $x^*$  cujos gradientes são linearmente independentes, isto é,  $x^*$  é um ponto regular das restrições.

**Teorema 1.** (Fiacco, 1983). Sensibilidade de primeira ordem para um ponto satisfazendo condições suficientes de segunda ordem. Se:

- i. As funções que definem  $P(\varepsilon)$  são duas vezes diferenciáveis em  $(x, \varepsilon)$  numa vizinhança de  $(x^*, \hat{\varepsilon})$ ;
- ii. As condições suficientes de segunda ordem para um mínimo local de  $P(\hat{\varepsilon})$  valem em  $x^*$ , com multiplicadores de Lagrange associado  $\mu^*$  e  $\lambda^*$ ;
- iii. Os gradientes  $\nabla g_i(x^*, \hat{\varepsilon})$  (para todo  $i$  tal que  $g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0$ ) e  $\nabla h_j(x^*, \hat{\varepsilon})$  (para todo  $j$ ) são linearmente independentes, e
- iv.  $\mu_i^* > 0$  quando  $g_i(x^*, \hat{\varepsilon}) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ou seja, existe folga complementar estrita, então

- (a)  $x^*$  é um mínimo local estrito de  $P(\hat{\varepsilon})$  e os multiplicadores de Lagrange associados  $\mu^*$  e  $\lambda^*$  são únicos.
- (b) Para  $\varepsilon$  na vizinhança de  $\hat{\varepsilon}$ , existe uma única função vetorial diferenciável  $[x(\varepsilon), \mu(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)]^T$  satisfazendo condições suficientes de segunda ordem para um mínimo local do problema  $P(\varepsilon)$  tal que  $[x(\hat{\varepsilon}), \mu(\hat{\varepsilon}), \lambda(\hat{\varepsilon})] = (x^*, \mu^*, \lambda^*)$ , e portanto,  $x(\varepsilon)$  é um mínimo local estrito de  $P(\varepsilon)$  com multiplicadores de Lagrange únicos  $\mu(\varepsilon)$  e  $\lambda(\varepsilon)$ ; e
- (c) Para  $\varepsilon$  próximo de  $\hat{\varepsilon}$ , o conjunto das restrições de desigualdades ativas é invariante, a condição de folga complementar é satisfeita, e os gradientes das restrições ativas são linearmente independentes em  $x(\varepsilon)$ .

Com  $(x, \mu, \varepsilon) = [x(\varepsilon), \mu(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)]$  as condições ii)-iv) do teorema acima são identicamente satisfeitas para  $\varepsilon$  próximo de  $\hat{\varepsilon}$ , e podem ser derivadas em relação a  $\varepsilon$  para fornecerem expressões as derivadas parciais de primeira ordem de  $(x, \mu, \varepsilon)$ , definimos então as matrizes

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_j} \right] \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k) \quad (2.15)$$

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon} = \left[ \frac{\partial \mu_i}{\partial \varepsilon_j} \right] \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, k) \quad (2.16)$$

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon} = \left[ \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_j} \right] \quad (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, k) \quad (2.17)$$

Por conveniência, definimos também  $y(\varepsilon) = [x(\varepsilon), \mu(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)]^T$ . A derivada total das condições de primeira ordem KKT com relação a  $\varepsilon$  próximo de  $\hat{\varepsilon}$  nos leva a  $M(\varepsilon) dy(\varepsilon)/d\varepsilon = N(\varepsilon)$ , em que

$$M(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \nabla^2 L & -\nabla g_1 & \cdots & -\nabla g_m & -\nabla h_1 & \cdots & -\nabla h_p \\ \mu_1 \nabla^T g_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_m \nabla^T g_m & 0 & \cdots & g_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$N(\varepsilon) = \left[ -\frac{d(\nabla_x L)^T}{d\varepsilon} \quad -\mu_1 \frac{\partial g_1^T}{\partial \varepsilon} \quad \dots \quad -\mu_m \frac{\partial g_m^T}{\partial \varepsilon} \quad -\frac{\partial h_1^T}{\partial \varepsilon} \quad \dots \quad -\frac{\partial h_p^T}{\partial \varepsilon} \right]^T \quad (2.19)$$

Sob as condições do Teorema 1, uma aproximação de primeira ordem para  $\varepsilon$  numa vizinhança de  $\hat{\varepsilon}$  será dada por

$$\begin{bmatrix} x(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \\ \lambda(\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} + (M^*)^{-1} N^* (\varepsilon - \hat{\varepsilon}) + o(\|\varepsilon - \hat{\varepsilon}\|) \quad (2.20)$$

em que  $M^*$  e  $N^*$  referem-se a  $M$  e  $N$  calculadas em  $(x^*, \mu^*, \lambda^*)$ .

## 2.3 Sumário

Neste capítulo fizemos uma exposição das características básicas dos algoritmos de controle do tipo MPC e de alguns resultados de sensibilidade para uma classe geral de problemas não lineares sujeitos a variação de parâmetros de interesse. Somente os resultados necessários à aplicação de análise de sensibilidade em controle preditivo foram apresentados: independência linear, complementaridade estrita e condições suficientes de segunda ordem. Estes resultados irão fornecer uma base sólida para o desenvolvimento de fórmulas simples e soluções computacionalmente viáveis a partir de aproximações de primeira ordem, com vistas a uma aplicação em controle preditivo. Problemas práticos encontram as condições expostas de forma natural, permitindo aplicações sobretudo em controle.

Em particular, a expressão (2.20) será usada exhaustivamente no capítulo seguinte, como uma das peças chaves da parametrização do controle ótimo em termos de regiões lineares.

## Capítulo 3

# Controle Preditivo via Otimização Paramétrica

### 3.1 Introdução

O embasamento teórico relativo à análise de sensibilidade em conjunto com a teoria clássica de controle preditivo permite desenvolver técnicas para o cálculo de soluções explícitas para problemas de controle ótimo com critérios de desempenho quadráticos e restrições lineares. No capítulo anterior, foi analisada a sensibilidade de soluções ótimas de problemas de programação paramétrica em função de parâmetros (vetor  $\varepsilon$ ), parâmetros agora aplicados à área de Engenharia de Controle, como estados, elementos integradores e referências. As soluções são obtidas na forma de um conjunto completo de entradas otimizadas para a planta como função das variáveis que compõem o vetor de parâmetros e das regiões onde cada um destes controles permanece ótimo. Os controles são lineares por partes e as regiões são descritas por desigualdades lineares. A maior vantagem da programação paramétrica em problemas desta natureza é obter um mapa completo de soluções ótimas. À medida que as condições de operação variam, não há necessidade de se re-otimizar para as novas condições de operação, já que as soluções ótimas são funções explícitas dos parâmetros (ou novo conjunto de condições) e estão antecipadamente disponíveis. Algoritmos para a obtenção destes perfis e as regiões nos quais os perfis são ótimos são apresentados neste capítulo.

### 3.2 Regulação de Estados

Considere a representação no espaço de estados (discreta) de um dado processo (planta)

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.2)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$y_{min} \leq y(t) \leq y_{max} \quad (3.3)$$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad (3.4)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  são os vetores de estado, da entrada de controle e o vetor de saída, respectivamente. Os subscritos *max* e *min* denotam os limites superiores e inferiores, respectivamente. Supõe-se que  $(A, B)$  seja estabilizável.

Estamos interessados no problema de regulação, ou seja, de levar e manter a saída ou os estados do sistema seguindo referências pré-especificadas. Nesta dissertação desenvolvemos o problema de regulação de estados para o nível zero. Uma extensão para problemas de regulação com referências não nulas não enfrentaria maiores dificuldades. Mais adiante será realizada a regulação da saída para referências não nulas.

O controle preditivo fornece uma solução para o problema de regulação de estados por meio do seguinte problema de otimização:

$$\min_U J(U, x(t)) = x_{t+N_y|t}^T P x_{t+N_y|t} + \sum_{k=0}^{N_y-1} [x_{t+k|t}^T Q x_{t+k|t} + u_{t+k|t}^T R u_{t+k|t}] \quad (3.5)$$

s.a.

$$y_{min} \leq y_{t+k|t} \leq y_{max}, \quad k = 1, 2, \dots, N_c \quad (3.6)$$

$$u_{min} \leq u_{t+k} \leq u_{max}, \quad k = 0, 1, \dots, N_c \quad (3.7)$$

$$x_{t|t} = x(t) \quad (3.8)$$

$$x_{t+k+1|t} = A x_{t+k|t} + B u_{t+k}, \quad k \geq 0 \quad (3.9)$$

$$y_{t+k|t} = C x_{t+k|t}, \quad k \geq 0 \quad (3.10)$$

$$u_{t+k} = K x_{t+k|t}, \quad N_u \leq k \leq N_y \quad (3.11)$$

em que  $U = \{u_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+N_u-1}\}$ ,  $Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0, P \geq 0, N_y \geq N_u$  e  $K$  é um ganho de realimentação.

Esse problema de programação convexa é resolvido pelo MPC a todo instante  $t$  para a medida corrente de  $x(t)$  e o vetor de variáveis de estado previstas,  $x_{t+1|t}, x_{t+2|t}, \dots, x_{t+k|t}$ , nos



instantes  $t + 1, \dots, t + k$ , respectivamente. Ações de controle ótimas correspondentes  $u_t, u_{t+1}, \dots, u_{t+k-1}$ , são obtidas.

O problema de otimização (3.5-11) pode, com algum algebrismo, ser reformulado como um problema de programação quadrática com função objetivo e restrições descritas explicitamente em função de um vetor de controle  $U$ :

$$\min_U \frac{1}{2}U^T H U + x(t)^T F U + \frac{1}{2}x(t)^T Y x(t) \quad (3.12)$$

$$\text{s.a. } GU \leq W + Ex(t) \quad (3.13)$$

em que  $U = [u_t^T \ u_{t+1}^T \ \dots \ u_{t+N_u-1}^T]^T \in \mathbb{R}^s$ ,  $s = mN_u$  é o vetor de variáveis do problema de otimização,  $H = H^T \geq 0$ , e as demais matrizes são obtidas como segue.

A partir da equação (3.9), uma análise recursiva simples nos fornece o seguinte resultado:

$$x_{t+k|t} = A^k x(t) + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \quad (3.14)$$

Substituindo a equação (3.14) em (3.5),

$$\begin{aligned} J(U, x(t)) &= x^T [A^{N_y T} P A^{N_y} + \sum_{k=0}^{N_y-1} A^{kT} Q A^k] x \\ &+ 2x^T \left[ A^{N_y T} P \sum_{j=0}^{N_y-1} A^j B u_{t+N_y-1-j} + \sum_{k=0}^{N_y-1} A^{kT} Q \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right] \\ &+ \left[ \sum_{j=0}^{N_y-1} A^j B u_{t+N_y-1-j} \right]^T P \left[ \sum_{j=0}^{N_y-1} A^j B u_{t+N_y-1-j} \right] \\ &+ \sum_{k=0}^{N_y-1} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right]^T Q \left[ \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right] + \sum_{k=0}^{N_y-1} u_{t+k|t}^T R u_{t+k|t} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Termos que não envolvam as variáveis de otimização (ações de controle) podem ser desconsiderados da função objetivo, como por exemplo  $Y$  em (3.12).

Desdobrando cada termo da função objetivo (3.15), no formato matricial da equação (3.12-13), com  $A^{N_y-1-(N_u-1)}B = A^0B$  para  $N_y = N_u$ , obtemos

$$F = \begin{bmatrix} A^{1^T} & \dots & A^{N_y^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^0B & 0 & \dots & 0 \\ A^1B & A^0B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{N_y-1}B & A^{N_y-2}B & \dots & A^{N_y-1-(N_u-1)}B \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$H = \begin{bmatrix} A^0B & 0 & \dots & 0 \\ A^1B & A^0B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{N_y-1}B & A^{N_y-2}B & \dots & A^{N_y-1-(N_u-1)}B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & P \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$+ \begin{bmatrix} A^0B & 0 & \dots & 0 \\ A^1B & A^0B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{N_y-1}B & A^{N_y-2}B & \dots & A^{N_y-1-(N_u-1)}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R \end{bmatrix}$$

Quanto às restrições, substituindo as equações (3.10) e (3.14) na equação (3.6), e (3.11) na equação (3.7) obtemos:

$$Y_{min} \leq E_1 x + G_1 U \leq Y_{max} \quad (3.18)$$

$$U_{min} \leq E_2 x + G_2 U \leq U_{max} \quad (3.19)$$

em que:

$$U_{min} = \begin{bmatrix} u_{min}^0 \\ u_{min}^1 \\ \dots \\ u_{min}^{N_y-1} \end{bmatrix}, U_{max} = \begin{bmatrix} u_{max}^0 \\ u_{max}^1 \\ \dots \\ u_{max}^{N_y-1} \end{bmatrix}, Y_{min} = \begin{bmatrix} y_{min}^1 \\ y_{min}^2 \\ \dots \\ y_{min}^{N_y} \end{bmatrix}, Y_{max} = \begin{bmatrix} y_{max}^1 \\ y_{max}^2 \\ \dots \\ y_{max}^{N_y} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^{N_y} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \bar{0} \\ & & K & \\ & \bar{0} & & \ddots \\ & & & & K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^0 \\ A^1 \\ \vdots \\ A^{N_y-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^0 B & 0 & \cdots & 0 \\ A^1 B & A^0 B & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{N_y-1} B & A^{N_y-2} B & \cdots & A^{N_y-1-(N_u-1)} B \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} I & & & \\ & \ddots & & \bar{0} \\ & & I & \\ & \bar{0} & & \ddots \\ & & & & K \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} I & & & & \bar{0} \\ & \ddots & & & \\ & & I & & \\ A^{N_u-1} B & A^{N_u-2} B & A^{N_u-3} B & \cdots & A^0 B \\ A^{N_u} B & A^{N_u-1} B & A^{N_u-2} B & \cdots & A^1 B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & K \\ A^{N_y-2} B & A^{N_y-3} B & \cdots & \cdots & A^{N_y-2-(N_u-1)} B \end{bmatrix}$$

Concatenando as matrizes  $G_1, G_2, E_1, E_2$ , chega-se ao resultado desejado (3.18-19). O problema de programação convexa matricial (3.12-13) pode ser formulado como um problema de programação quadrática multiparamétrica:

$$\min_z V_z(x) = \frac{1}{2} z^T H z \quad (3.25)$$

$$\text{s.a. } Gz \leq W + Sx(t) \quad (3.26)$$

em que  $z = U + H^{-1}F^T x(t)$ ,  $z \in \mathbb{R}^s$ , representa o vetor de variáveis de otimização,

$S = E + GH^{-1}F^T$ , e  $x(t)$  representa o vetor de parâmetros, que neste caso específico coincide com o vetor de variáveis de estados. Veremos mais adiante que para condições mais gerais, incluindo, por exemplo, referências não nulas, este vetor poderá ser definido de outras formas.

Verifica-se que  $x$  na equação (3.12-13) está presente na função de custo e no lado direito da desigualdade, enquanto em (3.25-26) está presente somente na desigualdade. A maior vantagem desta nova formulação é que  $z$ , e por consequência  $U$ , podem ser obtidos como uma função afim de  $x$  para todos os valores viáveis de  $x$ , conforme estabelece o Teorema 2 a seguir:

**Teorema 2.** (Bemporad et al, 2002). Seja  $H > 0$ , considere uma combinação de restrições ativas  $\tilde{G}, \tilde{S}, \tilde{W}$ , e assuma que as linhas de  $\tilde{G}$  são linearmente independentes. Seja  $CR_0$  o conjunto de todos os vetores  $x$  para os quais a solução de (3.25-26) permanece ótima para a combinação

$\tilde{G}, \tilde{S}, \tilde{W}$ . Então, o valor ótimo de  $z$  e o vetor de multiplicadores de Lagrange associados  $\lambda$  são funções afins unicamente definidas por  $x$  em  $CR_0$ . Prova:

As condições de primeira ordem KKT (Bazaraa et al., 2006) para o problema mp-QP são dadas por:

$$Hz + G^T \lambda = 0, \quad \lambda \in \Re^q \quad (3.27)$$

$$\lambda_i (G_i z - W_i - S_i x) = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (3.28)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (3.29)$$

em que o subscrito  $i$  denota a  $i$ -ésima linha das matrizes. Neste caso,

$$z = -H^{-1} G^T \lambda, \quad (3.30)$$

$$\tilde{G}z - \tilde{W} - \tilde{S}x(t) = 0, \quad (3.31)$$

$$\tilde{\lambda} = -(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T)^{-1}(\tilde{W} + \tilde{S}x), \text{ e} \quad (3.32)$$

$$z = -H^{-1}\tilde{G}^T(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T)^{-1}(\tilde{W} + \tilde{S}x) \quad (3.33)$$

Portanto  $\lambda$  e  $z$  são funções afins de  $x$ , e  $(\tilde{G}H^{-1}\tilde{G}^T)^{-1}$  existe devido independência linear das linhas de  $\tilde{G}$ .

**Teorema 3.** (Fiacco, 1983). No problema (3.25-26), seja  $x_0$  um vetor de parâmetros e  $(z_0, \lambda_0)$  um par KKT, em que  $\lambda_0 = \lambda(x_0)$  é um vetor de multiplicadores de Lagrange não negativos, e  $z_0 = z(x_0)$  é factível para (3.25-26). Também assuma que sejam satisfeitas as hipóteses de independência linear e de complementaridade estrita. Então

$$\begin{bmatrix} z(x) \\ \lambda(x) \end{bmatrix} = -(M_0)^{-1} N_0 (x - x_0) + \begin{bmatrix} z_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

em que

$$M_0 = \begin{bmatrix} H & G_1^T & \cdots & G_p^T \\ -\lambda_1 G_1 & -V_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\lambda_p G_p & & & -V_p \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$N_0 = [Y^T \quad \lambda_1 S_1^T \quad \cdots \quad \lambda_p S_p^T] \quad (3.36)$$

$G_i$  e  $S_i$  denotam a  $i$ -ésima linha de  $G$  e  $S$ , respectivamente,  $V_i = G_i z_0 - W_i - S_i x_0$ , e  $W_i$  denota a  $i$ -ésima linha de  $W$ , e finalmente  $Y$  é uma matriz nula de dimensão  $s \times n$ .

O conjunto dos valores de  $x$  no qual a solução (3.34) permanece ótima, é chamado de *região crítica* e pode ser definido como segue:

$$CR_R = \{\check{G}z(x) \leq \check{W} + \check{S}x(t), \quad \tilde{\lambda}(x) \geq 0\} \quad (3.37)$$

Observe que (3.37) denota ao mesmo tempo o conjunto de pontos  $x$  em uma região  $X \subset \mathfrak{R}^n$  viável que pertencem a  $CR_R$  e o conjunto das desigualdades que definem  $CR_R$ .

Os sinais  $\check{\cdot}$  e  $\tilde{\cdot}$  correspondem a restrições inativas e ativas respectivamente. A região  $CR_0$  é então obtida removendo-se as restrições redundantes de  $CR_R$ . Se  $\Delta$  representar o operador que remove restrições redundantes, então

$CR_0 = \Delta\{CR_R\}$	(3.38)
-------------------------	--------

Se na equação (3.34), selecionarmos somente os termos de  $M_0$  e  $N_0$  relacionados a  $z(x)$ , ou seja, primeiras  $s$ -ésimas linhas de  $(M_0)^{-1}N_0$ , podemos escrever:

$$z(x) = -(MN)_1(x - x_0) + z_0 \quad (3.39)$$

Substituindo (3.39) na desigualdade  $\check{G}z(x) \leq \check{W} + \check{S}x(t)$  relacionada a restrições inativas, obtemos explicitamente uma região poliedral limitada (convexa) em função unicamente do vetor de variáveis de estado.

$$\begin{aligned} A_1 x &\leq b_1, \\ \text{em que } A_1 &= -\check{G}(MN)_1 - \check{S} \quad \text{e} \\ b_1 &= \check{W} - \check{G}(MN)_1 x_0 - \check{G}z_0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Analogamente, selecionando somente os termos de  $M_0$  e  $N_0$  que são relacionados com  $\lambda(x)$ , ou seja, últimas  $p$  - ésimas linhas de  $(M_0)^{-1}N_0$ , podemos escrever:

$$\lambda(x) = -(MN)_2(x - x_0) + \lambda_0 \quad (3.41)$$

Levando em conta a desigualdade  $\tilde{\lambda}(x) \geq 0$  relacionada a restrições ativas, obtemos novamente um conjunto poliedral em função unicamente do vetor de parâmetros  $x$ :

$$\begin{aligned}
 A_2 x &\leq b_2, \\
 \text{em que } A_2 &= (MN)_2 \\
 b_2 &= (MN)_2 x_0 + \lambda_0
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

O vetor (sinal) de controle  $U$  também é obtido em função do vetor de parâmetros a partir de (3.39) e  $z = U + H^{-1}F^T x(t)$ . Manipulando-se as igualdades, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U(x) &= A_u x + b_u, \text{ com} \\
 A_u &= -(MN)_1 - H^{-1}F^T \\
 b_u &= (MN)_1 x_0 + z_0
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

É importante ressaltar que embora a dimensão do sinal de controle  $U$  dependa do horizonte de controle selecionado, somente a primeira ação de controle é utilizada, isto é, fazemos  $u(t) = [I_m | 0_m | \dots | 0_m]U$ .

Até este momento, foi caracterizado para um espaço de variáveis de estados  $X$ , um subconjunto de  $X$ ,  $CR_0 \subseteq X$ , no qual a solução (3.34) permanece ótima. As demais regiões são encontradas como descrito a seguir.

A região restante é definida por  $CR^{rest} = X/CR_0$ ,  $X$  exceto  $CR_0$ . Os passos são repetidos e um novo par de  $z(x)$  e  $\lambda(x)$  com  $CR_0$  correspondente é obtido. O procedimento é finalizado quando não houverem mais regiões a serem obtidas, i.e. quando  $CR^{rest} = \emptyset$ . De posse disto podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.** Partição das Regiões. Seja  $P \subseteq \mathfrak{R}^n$  um poliedro e  $CR_0 \triangleq \{x \in P: Ax \leq b\} = \{x \in P: A^i x \leq b^i, i = 1, 2, \dots, m\}$  um subconjunto poliedral de  $P$ ,  $CR_0 \neq \emptyset$ ; o índice  $i$  refere-se a  $i$  – ésima linha de  $A$  e  $b$ . Seja também

$$R_i = \left\{ x \in P: \begin{matrix} A^i x > b^i \\ A^j x \leq b^j, \forall j < i \end{matrix} \right\}, i = 1, \dots, m$$

em que  $m = \dim(b)$ , e seja  $CR^{rest} \triangleq \bigcup_{i=1}^m R_i$ . Então: (i)  $CR^{rest} \cup CR_0 = P$ , (ii)  $CR_0 \cap CR_i = \emptyset$ ,  $R_i \cap R_j = \emptyset, \forall i \neq j$ , i.e.  $\{CR_0, R_1, \dots, R_m\}$  é uma partição de  $X$ .

**Exemplo 3.1.** Para exemplificar a partição do conjunto de parâmetros  $X$  por meio do Teorema 3, utilizaremos o caso em que somente dois parâmetros,  $x_1$  e  $x_2$ , estão presentes. Como pode ser

visto na Figura 3.1-a,  $X$  é definido pelas desigualdades  $\{x_1^- \leq x_1 \leq x_1^+, x_2^- \leq x_2 \leq x_2^+\}$ , e  $CR_0$  definido pelas desigualdades  $\{C_1 \leq 0, C_2 \leq 0, \dots, C_6 \leq 0\}$ , em que  $C_1, C_2, \dots, C_6$  são funções afins de  $x$ . O procedimento consiste em considerar uma-a-uma as desigualdades que definem  $CR_0$ . Considerando por exemplo, a desigualdade  $C_1 \leq 0$ , o primeiro subconjunto da região  $CR^{rest} = X \setminus CR_0$  é dado por  $R_1 = \{C_1 \geq 0, x_1^- \leq x_1 \leq x_1^+, x_2^- \leq x_2 \leq x_2^+\}$ , o qual é obtido invertendo-se o sinal da desigualdade  $C_1 \leq 0$  e removendo-se restrições redundantes (vide Figura 3.1-a). A região  $R_2$  é obtida em seguida, pela intersecção das regiões limitadas por  $C_2 \geq 0$  e  $C_1 \leq 0$ , com  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$  (vide Figura 3.1-b). Então, ao considerar as demais desigualdades, obtem-se  $CR^{rest} = \bigcup_{i=1}^6 R_i$ , em que as regiões  $R_1, R_2, \dots, R_6$  são detalhadas nas Figuras 3.1-(c, d).

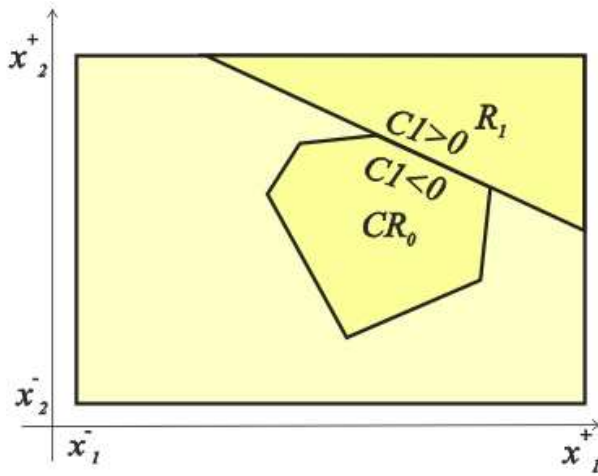


Figura 3.1-a

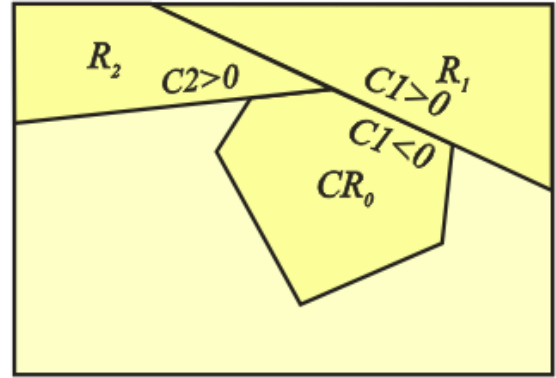


Figura 3.1-b

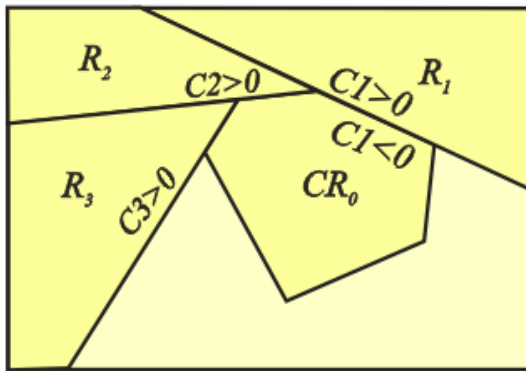


Figura 3.1-c

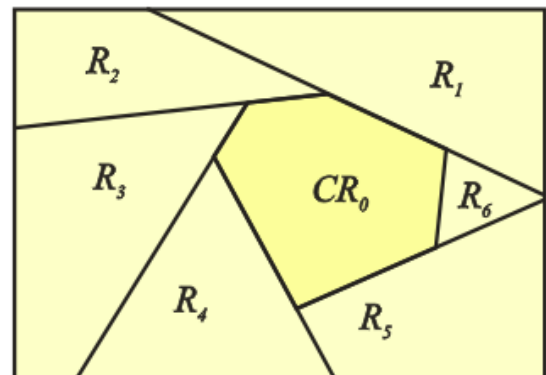


Figura 3.1-d

Figura 3.1 – Partição inicial do espaço de parâmetros

O Teorema 3 sugere uma maneira de se particionar o conjunto  $X \setminus CR_0$  de forma sistemática, em subconjuntos poliedrais  $R_i$ . Para cada  $R_i$ , um novo vetor  $x_0^i$  é determinado resolvendo-se o problema quadrático descrito por (3.25-26). Com isso, uma nova solução ótima  $z_0^i$ , um novo conjunto de restrições ativas  $\tilde{G}^i, \tilde{S}^i, \tilde{W}^i$  e uma nova região crítica  $CR_i$  são obtidas. O Teorema 3 é então aplicado à partição  $R_i \setminus CR_i$ , gerando-se novos subconjuntos poliedrais, e o algoritmo prossegue na forma resumida a seguir.

- |                |  |
|----------------|--|
| <i>Passo 1</i> | Para um dado espaço $X$ de $x$ , resolva (3.25-26) tratando $x$ como uma variável livre. Obtenha $x_0$ .   |
| <i>Passo 2</i> | Faça $x = x_0$ e resolva a Eq. (3.25-26) para obter o par $[z_0, \lambda_0]$ .   |
| <i>Passo 3</i> | Obtenha $M_0, N_0$ .   |
| <i>Passo 4</i> | Calcule $A_1, b_1, A_2, b_2$   |
| <i>Passo 5</i> | Calcule o controle $U$ para esta região $A_u, A_u$ .   |
| <i>Passo 6</i> | Defina $CR^{rest}$ e seus subconjuntos $R_i$ .   |
| <i>Passo 7</i> | Se não existirem mais regiões a serem exploradas, vá para o próximo passo. Caso contrário, volte ao Passo 1, adotando o particionamento proposto no Teorema 3. |
| <i>Passo 8</i> | Agrupe todas as soluções e unifique uma combinação convexa de todas as regiões que possuem a mesma solução a fim de obter uma representação compacta.          |

O passo 8 se faz necessário porque o Teorema 3 introduz cortes no espaço  $X$  que podem separar regiões críticas em subconjuntos distintos que, entretanto, possuem a mesma solução. Portanto, após o espaço completo  $X$  ter sido coberto, são determinadas as regiões poliedrais  $CR_i$  nas quais a solução ótima  $z(x)$  é a mesma. Se sua união for um conjunto convexo, a união é feita para permitir uma descrição mais compacta da solução. Esse procedimento não é estritamente necessário, porém, se não adotado, algumas regiões críticas poderão aparecer mais de uma vez. Regiões duplicadas podem facilmente ser reconhecidas: correspondem a regiões nas quais as



restrições ativas são as mesmas, e logo possuem a mesma solução. O algoritmo é ilustrado no Exemplo 3.2.

**Exemplo 3.2.** Após serem definidos todos os subconjuntos de  $CR^{rest}$ , o Passo 1 é iniciado em  $R_1$  (Figura 3.2-a), com a obtenção da primeira região de  $R_1$ ,  $CR_1$  (Figura 3.2-b). A partir de  $CR_1$  são redefinidos os subconjuntos de  $CR^{rest}$  em  $R_1$ ,  $R_{11}$  e  $R_{12}$ , onde foram encontradas as regiões ótimas  $CR_2$ ,  $CR_3$ , e  $CR_4$  e  $CR_5$ , respectivamente. Observe que  $CR_2$  excede os limites de  $R_1$  (representado pelo pontilhado na Figura 3.2-c) e, portanto será detectado novamente quando o algoritmo estiver explorando  $R_2$ . Assim,  $CR_7$  em  $R_2$  faz parte de  $CR_2$  em  $R_1$  (Figura 3.2-d).

Após todo o espaço  $X$  ter sido coberto, fica clara agora a necessidade do Passo 8, no sentido de tornar a representação da região mais compacta, tratando casos como as regiões  $CR_7$  e  $CR_2$ , que devem ser unidas em uma única região.

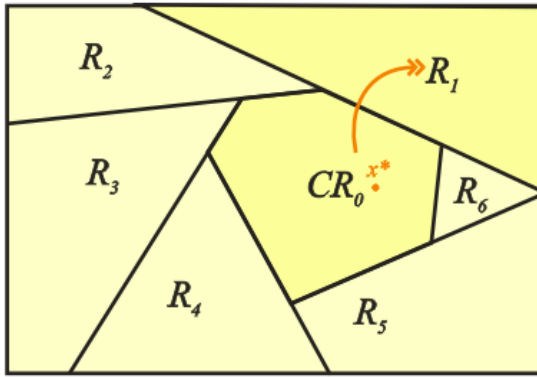


Figura 3.2-a

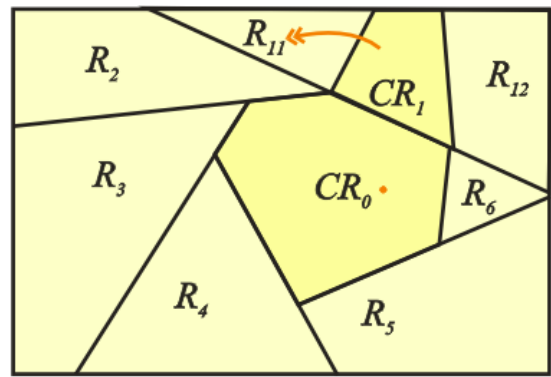


Figura 3.2-b

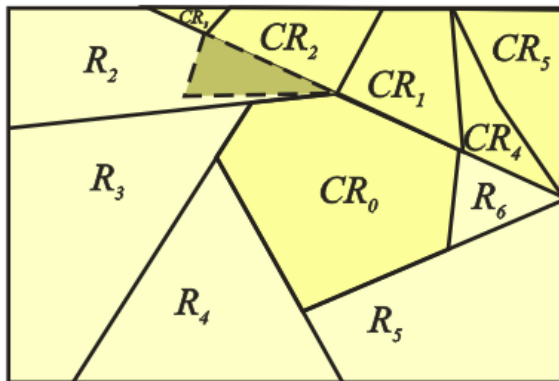


Figura 3.2-c

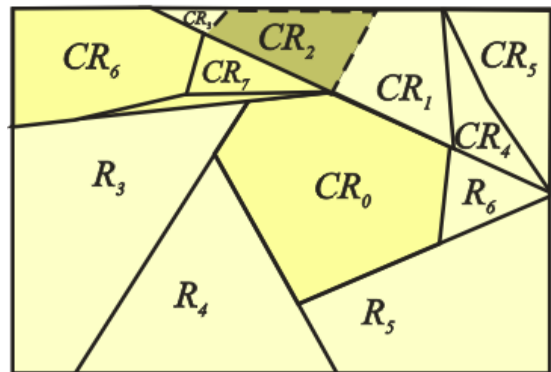


Figura 3.2-d

Figura 3.2 – Obtenção das regiões críticas

### 3.3 Implementação

O algoritmo descrito na seção 3.1 foi implementado em ambiente MATLAB®, utilizando-se sobretudo ferramentas de otimização, via Optimization Toolbox®. Embora toda a dissertação trate de temas relacionados a controle, a natureza do método não exigiu o uso das ferramentas específicas do Control System Toolbox® ou Simulink®.

Majoritariamente, a implementação foi realizada em linhas de código de programação simples, com uso de comandos ‘if’ para tratamento de exceções e término de execução, dado um contexto com critérios determinados, e ‘while’ para continuar a executar o algoritmo enquanto existirem regiões a serem avaliadas.

Inicialmente são declaradas todas as matrizes que não serão alteradas durante a execução do script, como aquelas indicadas em (3.1-2), (3.5), (3.12), (3.13), (3.25), (3.26) e os limites sobre as variáveis. Também são declaradas as dimensões das variáveis de controle, de estado e de saída, e os horizontes de controle e de predição,  $N_u$  e  $N_y$  respectivamente.

Um dos maiores desafios dentro do contexto de otimização é garantir que as partições ilustradas nos Exemplos 3.1 e 3.2 sejam calculadas perfeitamente, pois o particionamento está associado diretamente à convergência do método. Deve-se, portanto, sempre tomar o cuidado para não se registrar regiões vazias ou politopos com restrições redundantes, porque isso acarretaria problemas de singularidade matricial ou de degenerescência, que fatalmente produziriam erros de execução.

Para encontrar os valores de  $x_0$  e  $z_0$  foi utilizada a função ‘quadprog’ do optimization toolbox, para problemas quadráticos restritos, que também fornece os valores dos multiplicadores de Lagrange, e ‘exitflags’ com informações sobre a convergência da ‘quadprog’.

Os valores de  $x_0$  e  $z_0$  são calculados utilizando-se o mesmo problema quadrático descrito por (3.25) e (3.26). Entretanto, para o cálculo de  $x_0$  a variável  $x$  é considerada livre, sendo necessário reformular o problema para que a otimização seja feita de forma correta. Assim,  $Gz \leq W + Sx$  é declarada como  $[G, -S]y \leq W$ , com  $y = [z \ x]^T$ . Para a obtenção de  $z_0$ , o valor de  $x$  é fixado em  $x_0$ .

Para se determinar quais restrições estão ativas e inativas dada uma solução  $z$ , os valores de  $x_0$  e  $z_0$  são substituídos na restrição (3.26). Se o valor da restrição é nulo (dentro de uma margem em que se considera nulo, e.g.,  $10^{-6}$ ), então a restrição é considerada ativa.

No tratamento de exceções, foi determinado se a região encontrada é vazia, e portanto não é uma nova região a ser considerada. Assim, se o problema for infactível, o que é informado pelos *exitflags*, não será dado sequência ao particionamento da região.

É sempre necessário interpretar numericamente cálculos em Matlab, principalmente cálculos matriciais. É possível que o programa encontre ações de controle na forma  $U(x) = A_u x + b_u$  com linhas descritas por elementos da ordem de  $10^{-5}$ . Isso exige do implementador capacidade de discernimento para tratar esses casos. O mesmo princípio foi utilizado ao se verificar a condição de folga complementar estrita e a exclusão de restrições redundantes nas regiões encontradas.

Para verificar a condição LICQ, utilizou-se o comando ‘rref’, que produz a forma escalonada reduzida de uma matriz utilizando o método de Gauss Jordan com pivotamento parcial. O comando fornece uma base para o range de uma matriz, portanto satisfaz a qualificação da independência linear das restrições.

Sempre que uma nova região crítica  $CR$  é encontrada, a região é armazenada num *cell array*, em que cada linha do *array* é composta de 4 colunas na seguinte sequência:  $[A, b, A_u, b_u]$ , ou seja, as duas primeiras colunas envolvem a  $i$ -ésima região e as duas últimas envolvem o controle associado.

A primeira região crítica a ser encontrada, quando as únicas restrições são as de canalização, comanda todo o processo de particionamento, uma vez que os cortes subseqüentes feitos no espaço de parâmetros  $X$  são derivados das faces deste poliedro primário.

A cada iteração, um conjunto de restrições  $R_i$  que não tenha originado novos  $CRs$  (para os quais não houve  $x_0$ ) é excluído, e não havendo mais  $R_i$ ’s a serem analisados, encerra-se o algoritmo com a varredura completa do espaço de parâmetros. No apêndice A está exposto como é o fluxo do algoritmo, indicando claramente como um  $R_i$  gera novas regiões e como a lista de regiões é suprimida até o fim.

Em seguida são comparadas todas as regiões em busca de uma possível união convexa de regiões que possuem as mesmas soluções (passo 8 do algoritmo), identificando as regiões que possuem o mesmo controle, e então determinando restrições em comum.

Dado que os sistemas são todos obtidos por linearizações no espaço de estados, a simulação é razoavelmente simples: dado o vetor de controle e estados iniciais, são obtidos a evolução dos valores dos parâmetros no tempo por recursão.

No apêndice A pode ser visto o corpo do programa principal que chama as demais funções assim como uma ilustração didática de como é realizado a busca pelas partições.

**Exemplo:** Para validar os resultados obtidos com a implementação do controlador preditivo multiparamétrico implementado nesta dissertação, foi simulado um modelo de uma planta genérica, encontrada em (Pistikopoulos, 2002) e confrontados os resultados.

Considere a seguinte representação no espaço de estados de uma planta estável (pólos em  $z = 0,1180$  e  $z = -0,1516$ ), observável e controlável.

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0,7326 & -0,0861 \\ 0,1722 & 0,9909 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,0609 \\ 0,0064 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.44)$$

$$y(t) = [0 \quad 1,4142]x(t) \quad (3.45)$$

Com a seguinte restrição sobre o controle:  $-2 \leq u(t) \leq 2$ , e sobre o desenvolvimento dos estados ao longo do tempo,  $x_{t+1|t} \geq x_{min}$ ,  $x_{min} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}$ . O problema de otimização na forma (3.5) será dada por

$$\min_U J(U, x(t)) = x_{t+2|t}^T P x_{t+2|t} + \sum_{k=0}^1 [x_{t+k|t}^T x_{t+k|t} + u_{t+k}^2] \quad (3.46)$$

$$\text{s.a.} \quad -2 \leq u_{t+k} \leq 2, k = 0, 1 \quad (3.47)$$

$$x_{t+k|t} \geq \begin{bmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix}, k = 1 \quad (3.48)$$

$$x_{t|t} = x(t) \quad (3.49)$$

em que  $P$  resolve a equação de Lyapunov  $P = A^T P A + Q$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R = [0.01]$ ,  $N_y = N_u = N_c = 2$ . As matrizes e vetores de constantes correspondentes ao problema mp-QP (3.25-26) são dadas por:

$$H = \begin{bmatrix} 1,0007 & 0 \\ 0 & 1,0016 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0,0142 & -0,0084 \\ 0,0583 & -0,0920 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -0,0609 & 0 \\ -0,0064 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,7326 & -0,0861 \\ 0,1722 & 0,9909 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0,0142 & 0,0583 \\ -0,0142 & -0,0583 \\ -0,0084 & -0,0918 \\ 0,0084 & 0,0918 \\ 0,7317 & -0,0896 \\ 0,1721 & 0,9905 \end{bmatrix}$$

As regiões com sua respectiva ação de controle em função do vetor de parâmetros  $x$  da Figura 3.3-a são descritas conforme Tabela 1 a seguir.

Tabela 1. Solução paramétrica do problema de regulação de estados.

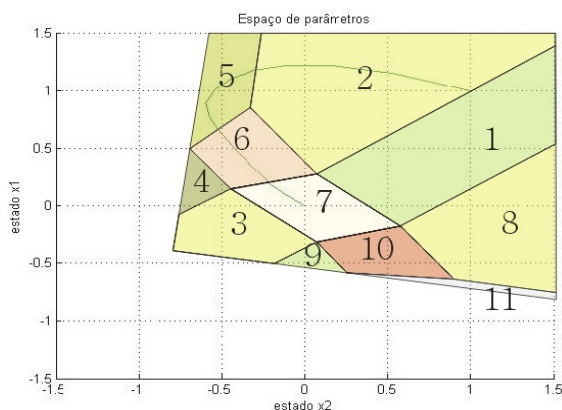
Região #	Região descrita na forma $Ax \leq b$	Controle $u$
1,2	$\begin{bmatrix} 3,4155 & -4,6452 \\ -0,1044 & -0,1215 \\ -0,7326 & 0,0861 \\ -0,1259 & -0,0922 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2,6341 \\ -0,0353 \\ 0,3782 \\ -0,0267 \end{bmatrix}$	-2,000
3,9	$\begin{bmatrix} -3,4155 & 4,6452 \\ -0,7326 & 0,0861 \\ 0,1044 & 0,1215 \\ 0,1259 & 0,0922 \\ -0,1722 & -0,9909 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2,6341 \\ 0,6218 \\ -0,0353 \\ -0,0267 \\ 0,5128 \end{bmatrix}$	2,000
4	$\begin{bmatrix} -0,7326 & 0,0861 \\ 0,1259 & 0,0922 \\ 0,0679 & -0,0924 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0,6218 \\ -0,0519 \\ -0,0524 \end{bmatrix}$	2,000
5	$\begin{bmatrix} -12,0326 & 1,4142 \\ 12,0326 & -1,4142 \\ 1,8109 & -1,9698 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 10,2120 \\ -6,2120 \\ -2,4406 \end{bmatrix}$	$[-12,0326 \quad 1,4142]x - 8,2120$

$$\begin{array}{ll}
6 & \begin{bmatrix} -6,4159 & -4,6953 \\ -0,3420 & 0,3720 \\ 6,4159 & 4,6953 \\ 0,0275 & -0,1220 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2,6423 \\ 0,4609 \\ 1,3577 \\ -0,0357 \end{bmatrix} \quad [-6,4159 \quad -4,6953]x - 0,6423 \\
7 & \begin{bmatrix} -1,5379 & 6,8291 \\ -5,9220 & -6,8883 \\ 1,5379 & -6,8291 \\ 5,9220 & 6,8883 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [-5,9220 \quad -6,8883]x \\
8 & \begin{bmatrix} -0,1722 & -0,9909 \\ -0,1259 & -0,0922 \\ 0,0679 & 0,0924 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0,4872 \\ -0,0519 \\ -0,0524 \end{bmatrix} \quad -2,000 \\
10 & \begin{bmatrix} -0,1311 & -0,9609 \\ 6,4159 & 4,6953 \\ -0,0275 & 0,1220 \\ -6,4159 & -4,6953 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 0,5041 \\ 2,6423 \\ -0,0357 \\ 1,3577 \end{bmatrix} \quad [-6,4159 \quad -4,6953]x + 0,6423 \\
11 & \begin{bmatrix} -26,8936 & -154,7504 \\ 26,8936 & 154,7504 \\ -62,7762 & 460,0064 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 80,0823 \\ -76,0823 \\ -241,3367 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} [-26,8936 \quad -154,7504]x \\ -78,0823 \end{array}
\end{array}$$

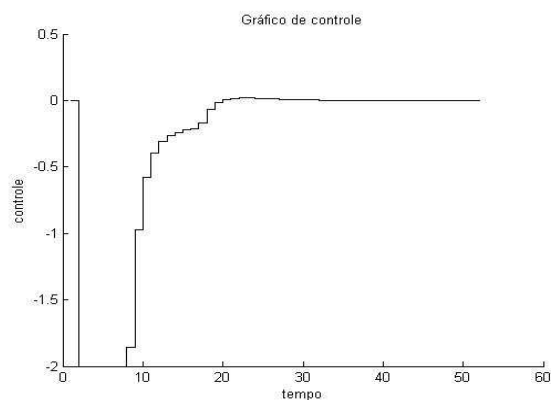
Como o problema possui dois parâmetros, uma ilustração da partição do espaço de parâmetros é possível, conforme pode ser visto na Figura 3.3-a, onde também pode ser observado o desenvolvimento dos estados pelo espaço.

A resposta em malha fechada para a condição inicial  $x(0) = [1 \quad 1]^T$  pode ser observada nas Figuras 3.3-(b-d), a seguir

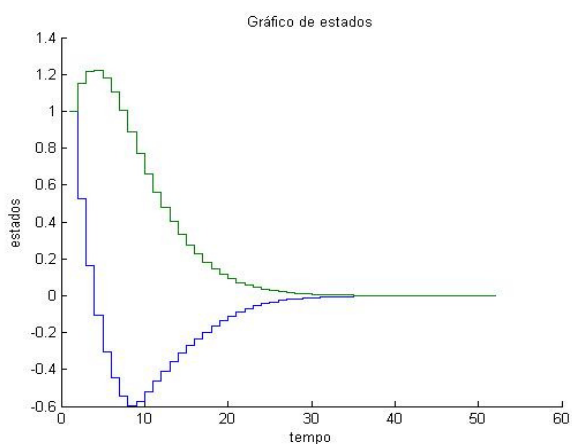
Como pode ser visto na Figura 3.3-b, o controle é nulo no instante imediatamente anterior ao início da regulação do sistema. Dado que  $x(0) = [1 \quad 1]^T$ , a trajetória se inicia na região #1 na qual o controle vale  $u = -2$  e em seguida ingressa na região #2, cujo controle permanece o mesmo. Após a região #2, a trajetória passa sucessivamente pelas regiões #5, #6, e #7 até que o estado atinge a origem do espaço de estados.



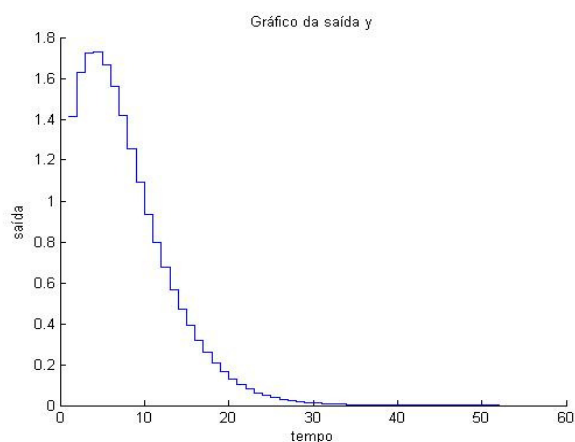
**Figura 3.3 a – Evolução dos estados  
no espaço de parâmetros**



**Figura 3.3 b - Controle**



**Figura 3.3 c - Estados**



**Figura 3.3 d - Saída do sistema**

**Figura 3.3 – Resultados da validação – regulação de estados**

### 3.4 Regulação da saída

A formulação básica (3.5-11) pode ser estendida para situações em que exige-se mais da ação de controle. Entretanto, enquanto o problema de controle puder ser expresso como um mp-QP, um controlador afim por partes poderá ser projetado e implementado.

Embora o problema do rastreamento da saída da planta seja análogo ao da regulação de estado no que diz respeito aos seus fundamentos, faremos algumas modificações que tornam possíveis algumas extensões. Valores futuros da trajetória de referência podem ser levados em conta explicitamente pelo controlador, de tal forma que a ação de controle é ótima para a trajetória futura na presença de restrições.

Supõe-se que o sistema esteja na forma de espaço de estados, ou seja, o sistema é descrito por (3.1-2). Seja o objetivo de fazer a saída  $y(t)$  rastrear uma referência  $r(t)$ , em que  $r(t) \in \mathbb{R}^p$ . Para este objetivo, o MPC resolve o seguinte problema de otimização:

$$\min_U J(U, x(t)) = \sum_{k=0}^{N_y-1} \left\{ [y_{t+k|t} - r(t)]^T Q [y_{t+k|t} - r(t)] + \delta u_{t+k|t}^T R \delta u_{t+k|t} \right\} \quad (3.50)$$

$$\text{s.a.} \quad y_{\min} \leq y_{t+k|t} \leq y_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, N_c \quad (3.51)$$

$$u_{\min} \leq u_{t+k} \leq u_{\max}, \quad k = 0, 1, \dots, N_c \quad (3.52)$$

$$\delta u_{\min} \leq \delta u_{t+k} \leq \delta u_{\max}, \quad k = 0, 1, \dots, N_c \quad (3.53)$$

$$x_{t|t} = x(t) \quad (3.54)$$

$$x_{t+k+1|t} = Ax_{t+k|t} + Bu_{t+k}, \quad k \geq 0 \quad (3.55)$$

$$y_{t+k|t} = Cx_{t+k|t}, \quad k \geq 0 \quad (3.56)$$

$$u_{t+k} = u_{t+k-1} + \delta u_{t+k}, \quad k \geq 0 \quad (3.57)$$

$$\delta u_{t+k} = 0, \quad k \geq N_u \quad (3.58)$$

em que  $U = \{\delta u_t, \delta u_{t+1}, \dots, \delta u_{t+N_u-1}\}$ ,  $Q = Q^T \geq 0$ ,  $R = R^T > 0$  e  $N_y \geq N_u$ .

Esse problema de programação convexa é resolvido pelo MPC a cada instante  $t$  para a medida corrente de  $y(t)$  e do vetor de saída previstas,  $y_{t+1|t}, y_{t+2|t}, \dots, y_{t+k|t}$ , nos instantes  $t+1, t+2, \dots, t+k$  respectivamente. As ações de controle ótimas correspondentes  $\delta u_t, \delta u_{t+1}, \dots, \delta u_{t+k-1}$  são obtidas.

Observe que da regulação de estados para a regulação da saída foram introduzidas algumas modificações, que refletem possíveis formas de se trabalhar com o problema de otimização.

Na presente formulação, não se considera (pondera) o estado final, o controle não é da forma realimentação de estados e a variável de otimização não é mais a ação de controle  $u_{t+k}$ , mas sim incrementos de controle  $\delta u_{t+k}$ , sendo que a ação de controle permanecerá constante após  $N_u$  instantes a frente, pois os incrementos serão nulos.



O problema de otimização pode, novamente, ser reformulado para um problema de programação quadrática com função objetivo e restrições descritas explicitamente em função de um vetor de controle  $U$ , na forma

$$\min_U \frac{1}{2}U^T H U + [x(t)^T u(t-1)^T r(t)^T] F U \quad (3.59)$$

$$\text{s.a. } GU \leq W + E \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t-1) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

em que  $U = [\delta u_t^T \quad \delta u_{t+1}^T \quad \cdots \quad \delta u_{t+N_u-1}^T] \in \mathbb{R}^s$ ,  $s = mN_u$  é o vetor de variáveis do problema de otimização,  $H = H^T \geq 0$ , e as demais matrizes são obtidas como segue.

Observe que a formulação em termos de variáveis incrementais introduz  $m$  novos estados em (3.59-60) através da última saída  $u(t-1)$ , o que corresponde a adicionar um integrador na malha de controle.

A partir da equação (3.57), uma análise recursiva simples nos fornece

$$u_{t+k} = u_{t-1} + \sum_{i=0}^k \delta u_{t+i} \quad (3.61)$$

De posse dos resultados em (3.14) e (3.55), a exemplo do que foi feito para se chegar a (3.15), obtemos, por processo análogo,

$$\begin{aligned} J(U, x(t)) &= 2x^T \left[ \sum_{k=0}^{N_y-1} A^{kT} \varphi \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right] \\ &+ \sum_{k=0}^{N_y-1} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right]^T \varphi \left[ \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right] \\ &- 2r^T Q C \sum_{k=0}^{N_y-1} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{t+k-1-j} \right] \\ &+ \sum_{k=0}^{N_y-1} \delta u_{t+k|t}^T R \delta u_{t+k|t} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Termos que não envolvem as variáveis de otimização (ações incrementais de controle) podem ser desconsiderados da função objetivo, exatamente da mesma forma que na regulação de estados. Portanto termos do tipo  $x^T[\dots]x$  e  $r^T[\dots]x$  podem ser desconsiderados.

Manipulando cada termo da função objetivo (3.60), colocando no formato matricial do problema (3.59-60), obtemos o seguinte:

$$F_2 = [QC | \dots | QC]$$

$$\begin{bmatrix} N_y - 1 & N_y - 2 & N_y - 3 & \dots & \dots & I \\ 0 & N_y - 2 & N_y - 3 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & N_y - 1 - (N_u - 1) & \dots & I \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\begin{bmatrix} A^0 B & 0 & \dots & 0 \\ A^1 B & A^0 B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{N_y-2} B & A^{N_y-3} B & \dots & A^{N_y-1-(N_u-1)} B \end{bmatrix}$$

$$F_3 = [(A^0 B)^T | (A^0 B + A^1 B)^T | \dots | (A^0 B + \dots + A^{N_y-2} B)^T]$$

$$\begin{bmatrix} \varphi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$F_1 = [A^{1T} \varphi | \dots | A^{N_y-1T} \varphi] \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$H = \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varphi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

em que

$$\psi = \begin{bmatrix} A^0 B & 0 & \cdots & 0 \\ A^0 B + A^1 B & A^0 B & \cdots & \vdots \\ \vdots & A^0 B + A^1 B & \cdots & A^0 B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^0 B + \cdots + A^{N_y-2} B & A^0 B + \cdots + A^{N_y-3} B & \cdots & A^0 B + \cdots + A^{N_y-2-(N_u-1)} B \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\text{e } \varphi = C^T Q C$$

Em relação às restrições, substituindo (3.10) e (3.14) em (3.6) e (3.11) em (3.7) obtemos

$$Y_{min} \leq E_y x + G_y U \leq Y_{max} \quad (3.68)$$

$$U_{min} \leq E_u x + G_u U \leq U_{max} \quad (3.69)$$

$$\delta U_{min} \leq E_{\delta u} x + G_{\delta u} U \leq \delta U_{max} \quad (3.70)$$

em que:

$$E_y = \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\text{com } E_1 = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} A^0 B \\ A^0 B + A^1 B \\ \vdots \\ A^0 B + \cdots + A^{N-1} B \end{bmatrix}$$

$$G_y = \begin{bmatrix} C & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} \psi \\ A^0 B + \cdots + A^{N-1} B \quad \cdots \quad A^0 B + \cdots + A^{N-1-(M-1)} B \end{bmatrix}$$

$$E_u = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$G_u = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ I & I & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & I \\ I & I & \cdots & I \end{bmatrix}, \text{ bloco triangular até o } m\text{-ésimo bloco} \quad (3.74)$$

$$E_{\delta u} = \begin{bmatrix} & 0 & \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$G_{\delta u} = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Concatenando-se as matrizes  $G_u, G_y, G_{\delta u}$  e  $E_u, E_y, E_{\delta u}$ , chega-se ao resultado desejado.

O problema de programação convexa representado por (3.59-60) pode ser formulado como um problema de programação quadrática multi-paramétrica:

$$V_z(x) = \frac{1}{2} z^T H z \quad (3.77)$$

$$\text{s.a. } Gz \leq W + S \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t-1) \\ r(t) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

em que  $z = U + H^{-1}F^T \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t-1) \\ r(t) \end{bmatrix}$ ,  $z \in \mathbb{R}^s$ , representa o vetor de variáveis de otimização,

$S = E + GH^{-1}F^T$ , e  $Xp = [x \quad u(t-1) \quad r(t)]^T$  representa o vetor de parâmetros.

Verifica-se que  $Xp$  está presente na função de custo e no lado direito da restrição de (3.59-60), enquanto em (3.77-78)  $Xp$  está presente somente na restrição, e não mais na função de custo.

De posse desta informação, conclui-se que tanto o problema de regulação de estados como de saída podem ser tratados pelo mesmo formalismo matemático. A única alteração está relacionada à dimensão do vetor de parâmetros, que antes continha apenas o vetor de estados, e agora também contém o valor do controle no instante anterior mais a referência da saída. Assim, as expressões (3.34 – 43) permanecem válidas, porém com um vetor de parâmetros expandido para  $Xp$ .

O algoritmo mp-QP encontrará uma solução explícita afim por partes  $\delta u(t) = f(x(t), u(t-1), r(t))$ . Considera-se que  $r(t)$  esteja dentro de algum conjunto poliedral. No caso da referência  $r(t)$  ser conhecida a-priori, pode-se elaborar um controlador antecipativo ao substituir  $r(t)$  por  $r(t+k)$   $k = 0, 1, \dots, N-1$ , e assim obter-se um controlador antecipativo

afim por partes  $\delta u(t) = f(x(t), u(t-1), r(t), \dots, r(t+N-1))$ . A dimensão desse problema aumenta com o poder de antecipação da referência que se deseja ter.

### Exemplo:

Para validar os resultados obtidos com a implementação do algoritmo para a regulação da saída, foi utilizada uma planta genérica, (Bemporad, 2002), a exemplo do que foi feito no caso de regulação de estado.

Suponha que a partir do problema anterior do Exemplo 3.1, queremos agora regular a saída do sistema para uma referência degrau unitário.

$$\min_U J(U, x(t)) = \sum_{k=0}^2 \left\{ [y_{t+k|t} - r(t)]^T Q [y_{t+k|t} - r(t)] + \delta u_{t+k|t}^T R \delta u_{t+k|t} \right\} \quad (3.79)$$

$$\text{s.a} \quad -2 \leq u_{t+k} \leq 2, k = 0, 1 \quad (3.80)$$

$$-0.5 \leq \delta u_{t+k} \leq 0.5, k = 0, 1 \quad (3.81)$$

$$x_{t|t} = x(t) \quad (3.82)$$

$$\delta u_{t+k} = 0, k \geq 2 \quad (3.83)$$

As ponderações utilizadas na função objetivo (3.79) foram:  $Q = 12I_{2 \times 2}$ ;  $r = 2I_{2 \times 2}$ ,  $N_y = N_u = N_c = 2$ .

Os resultados podem ser observados na Figura 3.4. A saída do sistema rastreia a referência com erro nulo, respeitando os limites sobre os incrementos de controle.

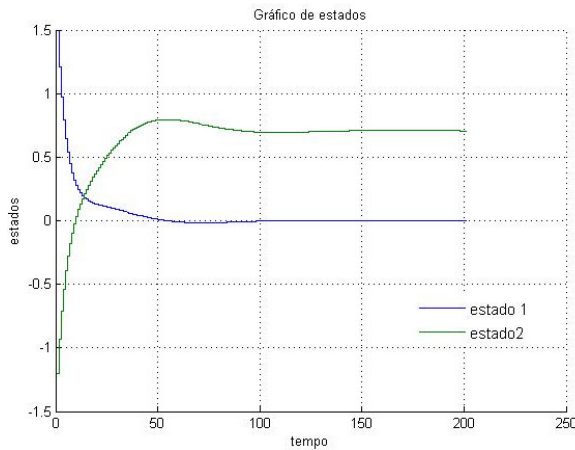


Figura 3.4-a Estados

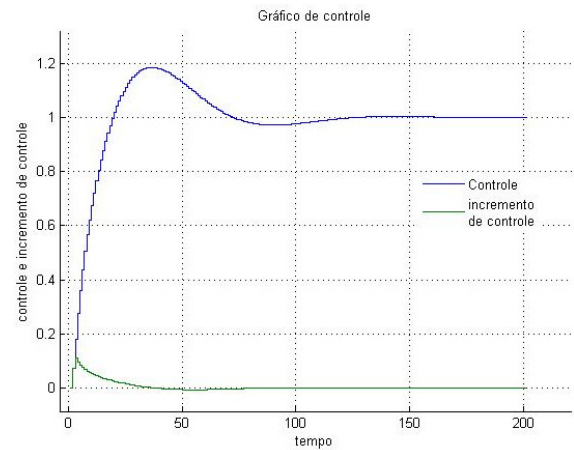


Figura 3.4-b Controle e incremento de controle

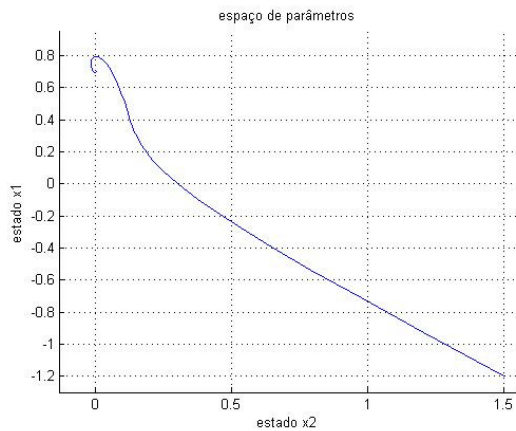


Figura 3.4-c Evolução dos estados no espaço de parâmetros



Figura 3.4-d Saída do sistema

Figura 3.4 – Resultados da validação – regulação da saída

### 3.5 Comparação método clássico x partição

Após o desenvolvimento teórico do controle preditivo via partição de estados, podemos apontar para as seguintes diferenças e semelhanças com o controle preditivo clássico.

Nas Figuras 3.5 e 3.6 enfatiza-se que ambas as estratégias possuem um modelo que receberá as entradas e saídas passadas e entradas futuras. Na estratégia clássica, as entradas

futuras são provenientes de um processo de otimização (representado pelo bloco otimizador) que leva em conta uma função de custo e as restrições específicas do problema. Na estratégia paramétrica, já estão mapeados todos os possíveis conjuntos de valores dos parâmetros. Os parâmetros a cada instante estarão contidos numa determinada região bem definida (na forma de restrições), à qual uma ação ótima de controle está associada. Pela estratégia clássica a todo instante deve-se realizar um processo de otimização em busca do controle ótimo, enquanto que na estratégia paramétrica, a operação mais complexa é o cálculo algébrico do controle, que é uma função linear explícita dos parâmetros no instante de tempo considerado. É claro que isso só é possível porque as ações ótimas de controle foram previamente mapeadas em função dos parâmetros de interesse, o que exige o emprego de significativo esforço computacional prévio.

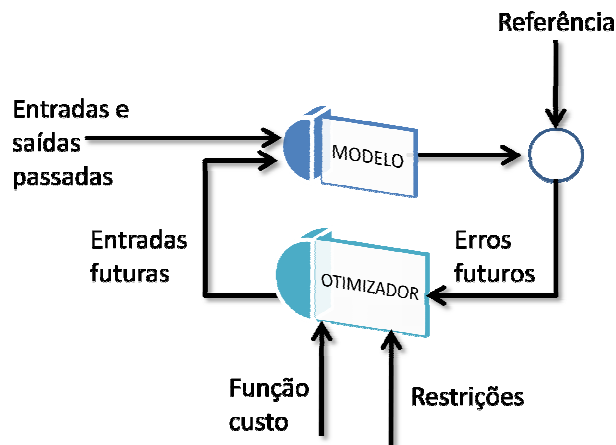


Figura 3.5 Controle preditivo clássico

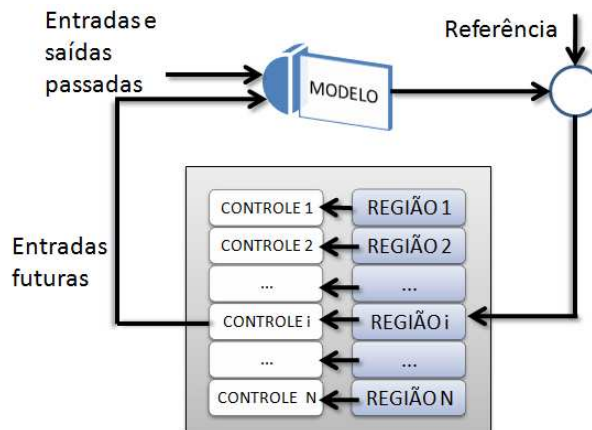


Figura 3.6 Controle preditivo via parametrização

### 3.6 Sumário

Mostramos neste capítulo como é possível projetar um controlador preditivo com base na teoria de sensibilidade para problemas de programação não linear. A parametrização empregada tornam desnecessárias otimizações em tempo real, substituindo-as pelo mapeamento prévio das ações de controle. Essa característica fundamental forneceu uma estrutura suficientemente simples e eficaz para os problemas de regulação de estado e de regulação da saída. Também foi realizada uma comparação conceitual entre o algoritmo MPC mais usual e o adotado nesta dissertação. A implementação do MPC paramétrico em Matlab® foi validada a partir de exemplos e resultados obtidos na literatura.



## Capítulo 4

# Aplicação em Planejamento da Produção

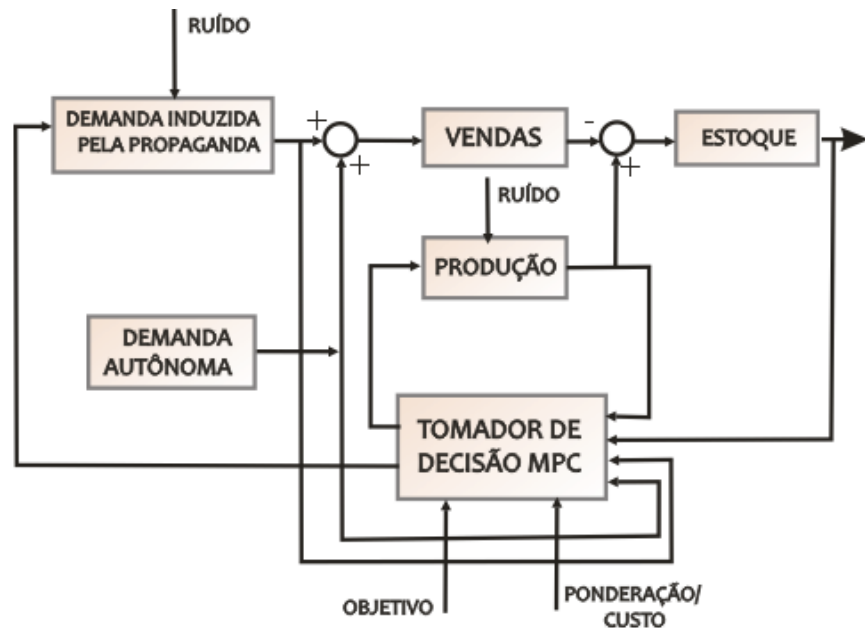
### 4.1 Introdução

Nos Capítulos 2 e 3 foram estudados aspectos ligados à análise de sensibilidade de um problema convexo quadrático sujeito a variações em seus parâmetros. Os resultados desta análise foram aplicados ao problema quadrático restrito que o controlador MPC precisa resolver recursivamente. Ações ótimas de controle não mais são encontradas em tempo real e sim obtidas previamente em função de parâmetros de interesse. Os resultados dos capítulos 2 e 3 serão agora aplicados a um processo de tomada de decisões ligado ao problema do planejamento integrado de um sistema de produção.

### 4.2 Planejamento da produção

Considere uma empresa que deseja determinar ao mesmo tempo o quanto produzir e quanto investir em publicidade, de tal forma que o custo total da sua operação seja minimizado e suas restrições operacionais sejam satisfeitas. Este problema pode ser abordado por meio de técnicas de controle ótimo, e por meio de MPC, em particular.

O propósito de um sistema de controle de produção e estoque é transformar informação incompleta sobre o mercado e os recursos de produção disponíveis em planos coordenados de produção e recomposição de matéria prima. Um sistema deste tipo é, em geral, composto de quatro subsistemas básicos: processo de produção, unidade de decisão, sistema de medição e sistema de distúrbios que corrompe o desempenho do sistema, como ilustra a Figura 4.1. Distúrbios podem representar elementos do mercado ou outras variáveis externas que afetam o estado do sistema (e.g., ordens de venda e demandas imprevistas). (Tzafestas et al, 1997)



**Figura 4.1 Estrutura MPC com esquemático de decisão**

Casos típicos encontrados no planejamento da produção e em problemas de controle envolvem combinações de produtos, padrão de demanda, tamanho do horizonte de planejamento, função de custo, elementos de custo, política de estoque, política de suavização da produção e restrições do processo. Na literatura, a técnica de otimização (planejamento) mais frequentemente utilizada é controle ótimo estocástico com dinâmica linear e custo quadrático. Uma característica chave dessa abordagem é justamente uma lei de controle linear. Para o tomador de decisões, planejamento e previsão são fundamentais para o gerenciamento de uma empresa. O papel da realimentação é menos óbvio, mas também fundamental para fazer frente a erros de previsão e realizar ajustes necessários. O decisor toma decisões baseadas na descrição do seu modelo do processo. É altamente improvável que o modelo reflita o comportamento exato do processo, e técnicas de controle ótimo são extremamente sensíveis a descasamentos entre processos e modelos.

Por outro lado, mesmo que o modelo não inclua parâmetros suficientes, ou possua parâmetros em excesso, o que é comum devido à complexidade dos sistemas reais, o MPC pode fornecer resultados satisfatórios. Isto é importante, pois tanto os processos de produção quanto os

processos de propaganda convivem com atrasos de transporte (Choi et al, 1987). Para lidar com dinâmica tão complexa, o MPC pode ser uma ferramenta muito efetiva.

Do ponto de vista gerencial, o MPC é ainda mais interessante, pois pode considerar referências não determinadas. A empresa dificilmente conhece com antecedência a referência ideal da empresa devido a inúmeros eventos exógenos possíveis em um ambiente de mercado. O tomador de decisões pode conviver com alguma incerteza no sinal de referência e tomar decisões com antecedência de forma a amortecer seus efeitos.

Nesta dissertação, o processo de produção generalizado inclui o processo de produção/estoque e de propaganda, que correspondentemente visam uma estratégia empresarial de otimização de lucros por meio da adequação da produção e da oferta de seus produtos ou serviços às necessidades e preferências dos consumidores.

As políticas de produção e de propaganda são interdependentes. As políticas de propaganda são normalmente destinadas a gerar demanda para os produtos da empresa, ao passo que as políticas de produção geralmente visam suprir essa demanda. Entretanto, embora as políticas de produção e propaganda sejam interdependentes, a maioria dos modelos assume que a tomada de decisão nas duas áreas é separada. Na literatura, a maioria dos trabalhos assume que o nível de estoque em qualquer instante de tempo responde imediatamente à diferença entre as taxas de produção e de vendas. No entanto, alguns produtos podem estar em falta não somente pelas vendas, mas também por outros fatores, como por deterioração do estoque. Além disso, um investimento em propaganda tem efeito nas vendas futuras, de forma que existem atrasos entre propaganda e aumento de vendas.

Os modelos de propaganda formulados ao longo dos últimos anos recaem sobre duas categorias: i) modelos a priori que possuem características mais conceituais, baseadas na intuição, não descrevendo uma aplicação específica. Nesta categoria encontramos Vidale e Wolfe (1957), Nerlove e Arrow (1962), Little (1966, 1975) e ii) modelos econométricos (estatísticos) em que são relacionados os dados disponíveis, como por exemplo, séries temporais de vendas e propaganda. Nesta categoria estão, por exemplo, Bass (1969), Bass and Clarke (1972), Montgomery e Silk (1972), e Lambin (1976).

### Vidale-Wolfe

Vidale e Wolfe (1957) propuseram um dos primeiros e mais interessantes modelos de propaganda, no qual identificaram três elementos básicos: A taxa de vendas aumenta com a taxa de propaganda; o efeito da taxa de propaganda é decrescente à medida que a taxa de vendas alcança um valor de saturação; as vendas podem variar espontaneamente.

Seja  $s$  a taxa de vendas (unids/período),  $\dot{s} = ds/dt$ ,  $a$  a taxa de propaganda (dólares por período),  $\rho$  a constante de resposta (em unids/dólar/período),  $\lambda$  a constante de decaimento (*período*<sup>-1</sup>), e  $m$  a taxa de venda de saturação (unids/período). As vendas podem ser medidas em kg, litros, etc., período em semanas, meses, etc.

De acordo com o modelo Vidale-Wolfe,

$$\dot{s} = \rho a [1 - (s/m)] - \lambda s \quad (4.1)$$

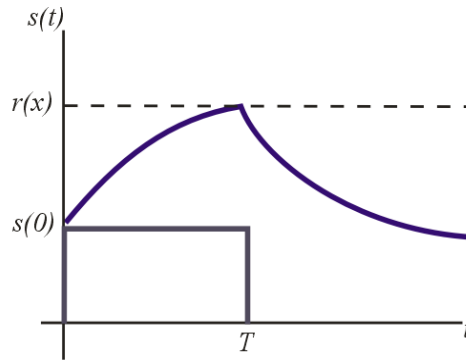
Embora o modelo contenha somente três parâmetros, muitas das características exibidas pela resposta das vendas ao esforço de propaganda estão contempladas no modelo. Observe que (4.1) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (EDO) e, portanto tem solução analítica exata para  $a(t)$  arbitrário.

Suponha que em  $t = 0$ ,  $s = s(0)$ , e uma taxa constante de propaganda  $a(t) = a$  é aplicada durante  $T$  instantes, e então é suprimida. Resolvendo a EDO para tal pulso retangular, obtemos

$$s(t) = \begin{cases} r(a) + [s(0) - r(a)]e^{-[1 + \frac{\rho a}{\lambda m}]\lambda t} & 0 \leq t \leq T \\ s(T)e^{-\lambda(t-T)} & t > T \end{cases} \quad (4.2)$$

em que  $r(a) = m(\rho a / \lambda m) / [1 + (\rho a / \lambda m)]$

A resposta das vendas a uma entrada pulso retangular de propaganda de duração  $T$  terá forma ilustrada na figura 4.2.



**Figura 4.2 Resposta da taxa de vendas a um pulso retangular de propaganda**

Nessa dissertação, assumimos que uma empresa produz um único produto, e que por meio de estratégias de propaganda, tentará promover e distribuí-lo aos consumidores finais. O preço é fixo e a empresa influencia o mercado potencial usando níveis apropriados de propaganda. Assume-se que as vendas devido à propaganda obedecem a equação a diferenças com atrasos

$$s(k+1) = (1-\lambda)s(k) + \sum_{i=0}^d \alpha_i A(k-i) \quad (4.3)$$

em que  $\lambda$  é o coeficiente de decaimento das vendas ou coeficiente de esquecimento,  $\alpha_i$  é a eficiência da propaganda no instante de tempo  $k-i$ ,  $d$  é o atraso máximo introduzido no processo,  $s(k)$  é o nível das vendas, e  $A(k)$  é o esforço da propaganda.

É possível reescrever (4.3) em espaço de estados, na forma  $x(k+1) = Ax(k) + BU(k)$ :

$$\begin{bmatrix} s(k+1) \\ A(k-(d-1)) \\ A(k-(d-2)) \\ \dots \\ A(k-1) \\ A(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \alpha_d & \alpha_{d-1} & \alpha_{d-2} & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ A(k-(d-2)) \\ A(k-(d-3)) \\ \dots \\ A(k-2) \\ A(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} A(k) \quad (4.4)$$

A parte relativa à produção é modelada pela equação de equilíbrio do estoque:

$$I(k+1) = (1-r)I(k) + \sum_{i=0}^q \tau_i p(k-i) - s(k) \quad (4.5)$$

em que  $I(k)$  é o nível do estoque no instante  $k$ ,  $r$  é o coeficiente de decaimento do estoque,  $p(k)$  capacidade de produção,  $\tau_i$  é o parâmetro que denota qual parte da produção vai para o depósito devido possíveis atrasos na produção. Sem problema algum podemos assumir  $\tau_0 = 1$ ,  $\tau_i = 0$  para  $i \neq 0$  como na maioria dos modelos da literatura.

A exemplo de (4.4), também reescrevemos (4.5) na forma de espaço estados:

$$\begin{bmatrix} I(k+1) \\ p(k-(q-1)) \\ p(k-(q-2)) \\ \dots \\ p(k-1) \\ p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & \tau_{q-1} & \tau_{q-2} & \dots & \tau_2 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(k) \\ p(k-n) \\ p(k-(n-1)) \\ \dots \\ p(k-2) \\ p(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} p(k) \quad (4.6)$$

O objetivo da empresa é alcançar um nível de vendas e manter um nível de estoque pré-determinado enquanto usa-se um mínimo de propaganda e esforço de produção (que implicam em gastos). Os custos são assumidos quadráticos e considera-se que os valores iniciais das variáveis do problema são conhecidos.

Em *Tzafestas et al. (1997)*, a função objetivo assume a seguinte forma:

$$J = \sum_{k=0}^{kf} h(I(k) - I_d)^2 + r_1 p^2(k) + w(s(k) - s_d)^2 + r_2 A^2(k) \quad (4.7)$$

em que  $I_d$  e  $s_d$  são o estoque e o nível das vendas desejados, respectivamente. Os parâmetros  $r_1$  e  $r_2$  são custos unitários apropriados;  $h$  e  $w$  são ponderações escolhidas dependendo de quão severamente deseja-se evitar desvios em relação aos valores de referência  $I_d$  e  $s_d$ .

Como normalmente acontece, a gerência da empresa recebe informação sobre o valor dos estados do sistema somente em instantes de tempo discretos (e.g., semanalmente) e as decisões são aplicadas da mesma forma. Frequentemente, no instante em que uma decisão deve ser tomada, a medida de alguns estados não está disponível ou é imprecisa. Em relação à abordagem MPC proposta em *Tzafestas et al. (1997)*, introduzimos dois novos elementos de

modelagem: 1) as políticas de produção/estoque e propaganda são suavizadas substituindo-se  $p(k)$  e  $A(k)$  por variáveis de desvio, restritas a intervalos apropriados, 2) as referências para estoque e vendas não são consideradas conhecidas a - priori e sim parâmetros do modelo. A introdução deste segundo elemento de modelagem vem ao encontro de uma limitação importante com a qual as empresas convivem: saber-se de antemão as referências ideais a serem seguidas devido a fatores externos não previstos.

O MPC adotado neste capítulo assume a formulação geral do problema de regulação discutido no capítulo 3. Os parâmetros para este modelo são os vetores de estados e referências no instante  $k$ , bem como o vetor de controle no instante  $k - 1$ .

Para o tratamento MPC pelo método off-line via partição de estados discutidos nos Capítulos 2 e 3, empregaremos o seguinte modelo para descrever o processo real

Modelo do processo de venda/propaganda:

$$s(k + 1) = 0.97s(k) + 0.3A(k) + 0.15A(k - 1) \quad (4.8)$$

Modelo do processo de produção/ estoque:

$$I(k + 1) = 0.99I(k) + p(k) - s(k) \quad (4.9)$$

Concatenando (4.4) e (4.6), chegaremos a seguinte forma no espaço de estados para os processos descritos por (4.8-9).

$$\begin{bmatrix} s(k + 1) \\ A(k) \\ I(k + 1) \\ p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ A(k - 1) \\ I(k) \\ p(k - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(k) \\ p(k) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Fazendo:  $y(k) = \begin{bmatrix} I(k) \\ s(k) \end{bmatrix}$  temos que  $y(k) = Cx(k)$ , logo:

$$\begin{bmatrix} I(k) \\ s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ A(k - 1) \\ I(k) \\ p(k - 1) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Os limites impostos sobre o controle foram  $0 \leq p(k) \leq 200$  e  $0 \leq A(k) \leq 100$ , e sobre os incrementos (decrementos) de controle foram  $-30 \leq \delta u_{t+k} \leq 30$ . Desta forma o problema de programação quadrática convexa resolvido pelo MPC será

$$\min_U J(U, x(t)) = \sum_{k=0}^2 \left\{ [y_{t+k|t} - r(t)]^T Q [y_{t+k|t} - r(t)] + \delta u_{t+k|t}^T R \delta u_{t+k|t} \right\} \quad (4.12)$$

$$\text{s.a} \quad 0 \leq u_{t+k} \leq 500, k = 0, 1 \quad (4.13)$$

$$-50 \leq \delta u_{t+k} \leq 50, k = 0, 1 \quad (4.14)$$

$$x_{t|t} = x(t) \quad (4.15)$$

$$\delta u_{t+k} = 0, k \geq 2 \quad (4.16)$$

Comparando com a forma padrão da função de custo (3.50) visto no capítulo 3, e com a função objetivo (4.7), pode-se observar que  $Q = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$ ,  $R = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$ .

A ponderação mais adequada encontrada pelo método de tentativa e erro foi  $h = 35$ ,  $w = 140$ ,  $d = 600$ ,  $r = 600$ .

Os processos utilizados durante as simulações foram:

Processo de venda/propaganda:

$$s(k+1) = 0.98s(k) + 0.1A(k) + 0.01A(k-1) + 0.001A(k-2) \quad (4.17)$$

Processo de produção/ estoque:

$$I(k+1) = 0.97I(k) + p(k) - s(k) \quad (4.18)$$

Concatenando (4.4) e (4.6), chegaremos a seguinte forma no espaço de estados para os processos descritos por (4.17-18).

$$\begin{bmatrix} s(k+1) \\ A(k-1) \\ A(k) \\ I(k+1) \\ p(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.001 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.97 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ A(k-2) \\ A(k-1) \\ I(k) \\ p(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(k) \\ p(k) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

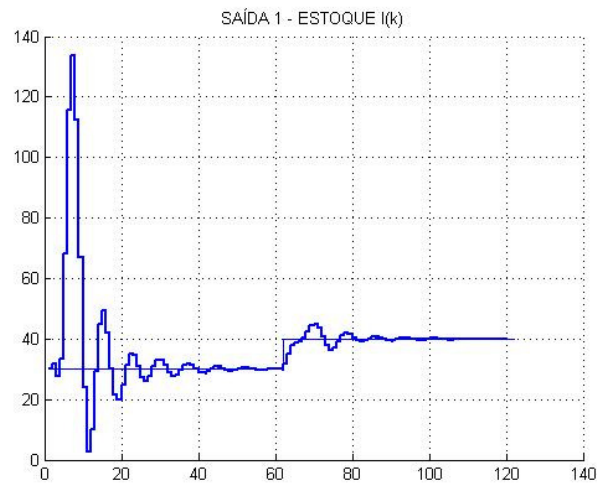


Fazendo:  $y(k) = \begin{bmatrix} I(k) \\ s(k) \end{bmatrix}$  temos que  $y(k) = Cx(k)$ , logo:

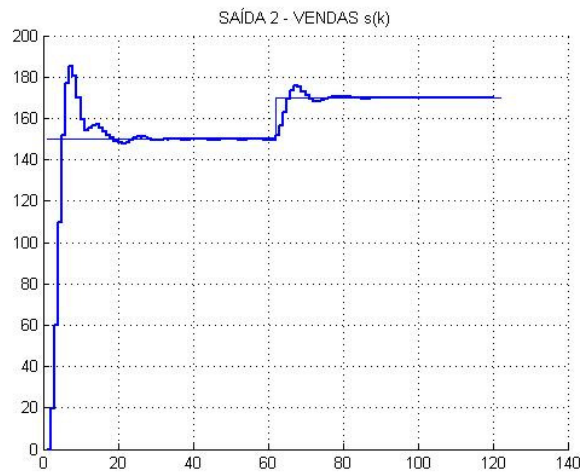
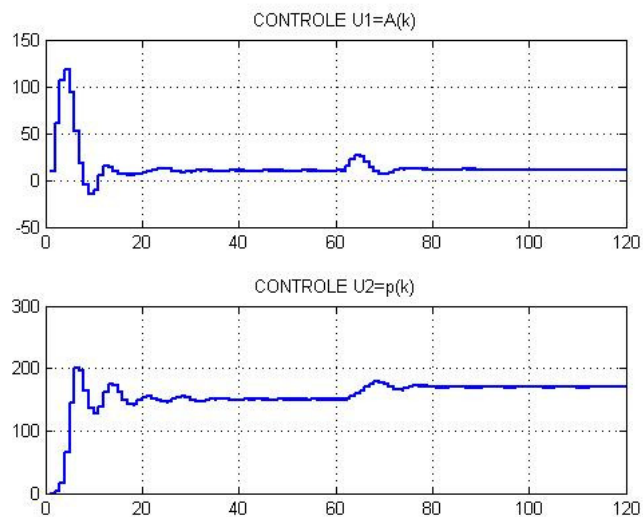
$$\begin{bmatrix} I(k) \\ s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ A(k-2) \\ A(k-1) \\ I(k) \\ p(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

## Resultados

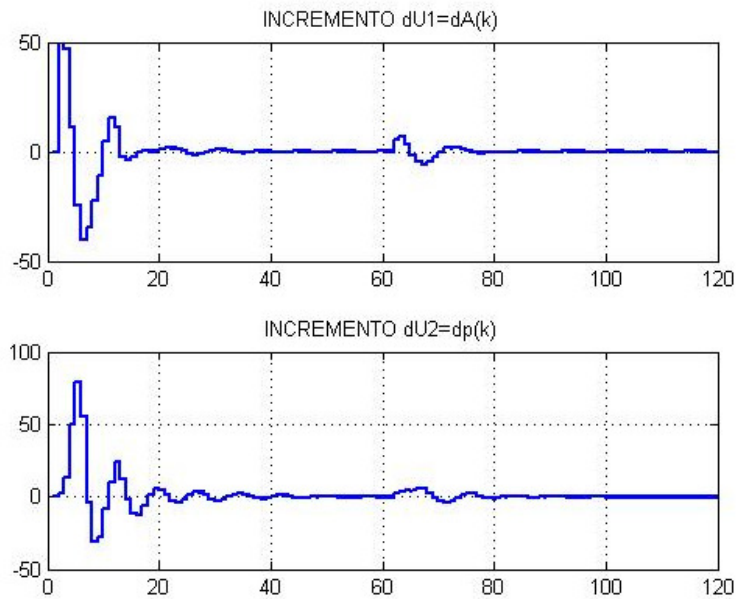
Numa primeira etapa da coleta de dados foi realizada uma simulação supondo-se que o modelo e o processo tem um casamento perfeito, sendo o processo, portanto dado por (4.8) e (4.9).



**Figura 4.3** Variação do nível de estoque no tempo

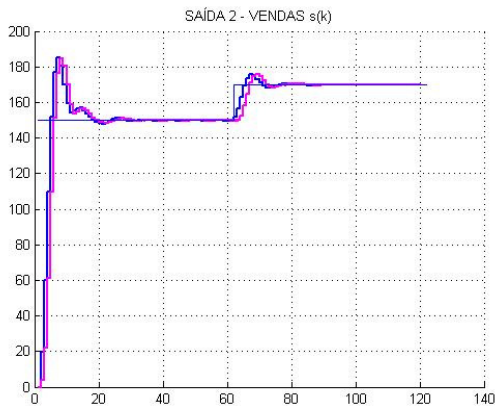
**Figura 4.4 Variação do nível de vendas no tempo****Figura 4.5 Variação do esforço de propaganda e produção no tempo**

Observa-se das figuras 4.3-4.6 que, embora oscilatório a resposta sai do transitório com erro de regime nulo, sendo que as vendas possuem uma resposta que se acomoda rapidamente quando comparada ao estoque.

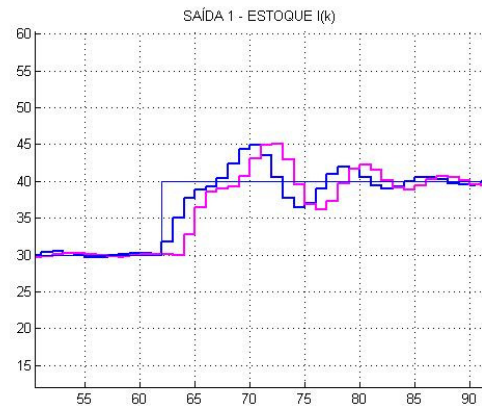


**Figura 4.6 Incrementos de propaganda e produção no tempo**

Nas figuras 4.3-6 não foram usadas capacidade de predição, ou seja, o sistema somente enxerga a referência no próprio instante  $t$  corrente. Se quisermos, é possível aumentar o vetor de parâmetros para ter maior capacidade de rastreamento, acrescentando-se condições futuras  $r(t + 1)$  e  $r(t + 2)$ , representado em azul escuro na figura 4.7.

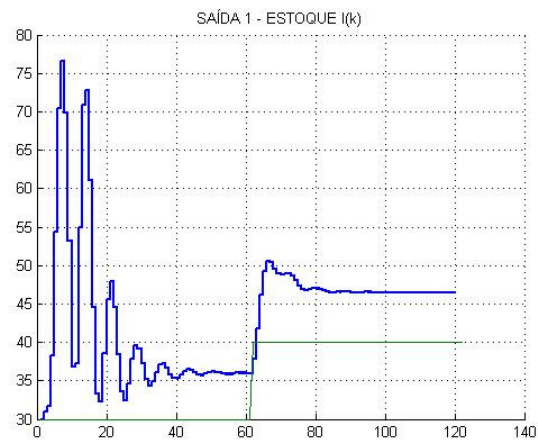
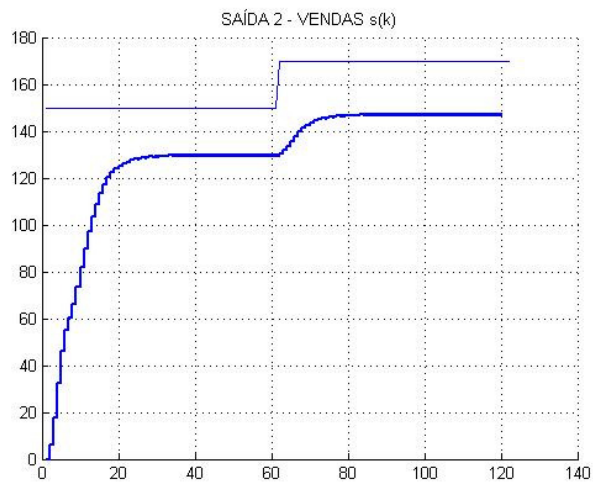


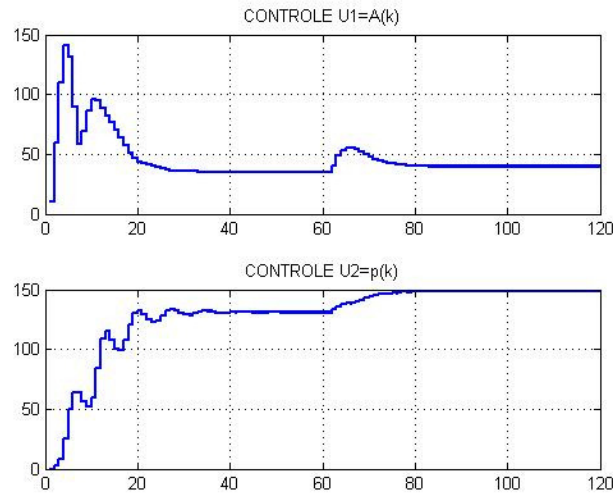
**Figura 4.7-a Variação do nível de vendas no tempo com maior antecipação da referência**



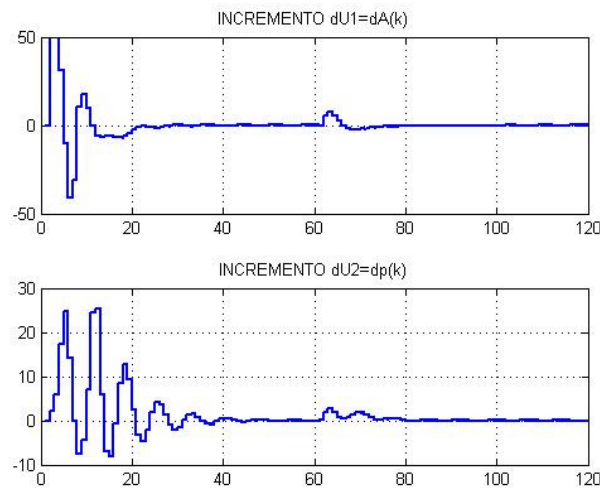
**Figura 4.7-b Zoom em  $t=70$   
azul: antecipação, lilás: sem antecipação**

Numa segunda situação foi analisado como seria se o processo fosse aquele apresentado nas equações (4.17) e (4.18) e o modelo fosse dado por (4.8) e (4.9).

**Figura 4.8** Variação do nível de estoque no tempo**Figura 4.9** Variação do nível de vendas no tempo



**Figura 4.10** Variação dos esforços de propaganda e produção no tempo



**Figura 4.11** Incrementos de propaganda e produção no tempo

Observa-se claramente dos gráficos que o sistema de controle não rastreia a referência apresentando um grande erro de regime. Sabe-se que o processo possui uma ordem a mais de atraso referente ao esforço de propaganda. Para descobrir quais os parâmetros mais sensíveis que pudessem ocasionar tal situação foi simulado o sistema usando-se as equações (4.10-11) como processo da mesma forma como realizado nas figuras 4.3-6 e alterando-se um elemento da matriz de estados e de controle do processo (indicados em cores) por vez, mantendo-se as alterações anteriores, até que as matrizes de (4.10-11) se tornassem idênticas às matrizes de (4.19-20), na sequência  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{44}$ ,  $b_{11}$ , como indicado a seguir.

$$\begin{bmatrix} 0.97 & 0 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz  $[A|B]$  do modelo



$$\begin{bmatrix} 0.98 & 0.001 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.97 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz  $[A|B]$  do processo

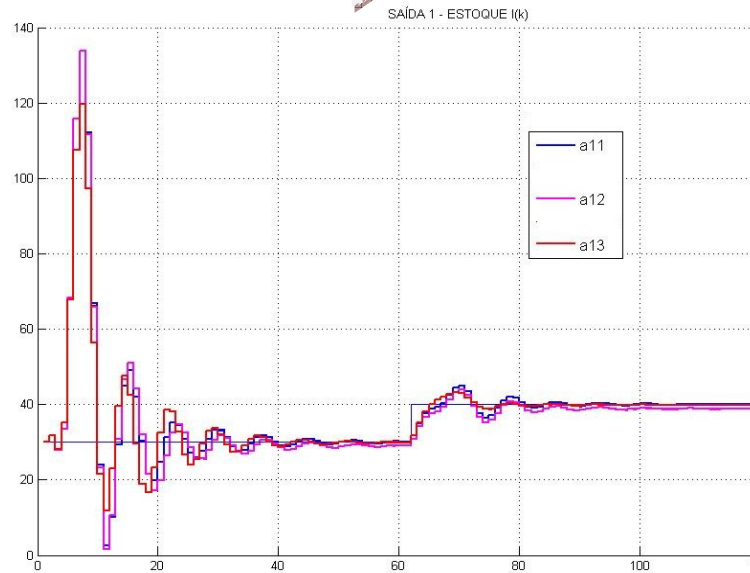


Figura 4.12 Variação do nível de estoque no tempo

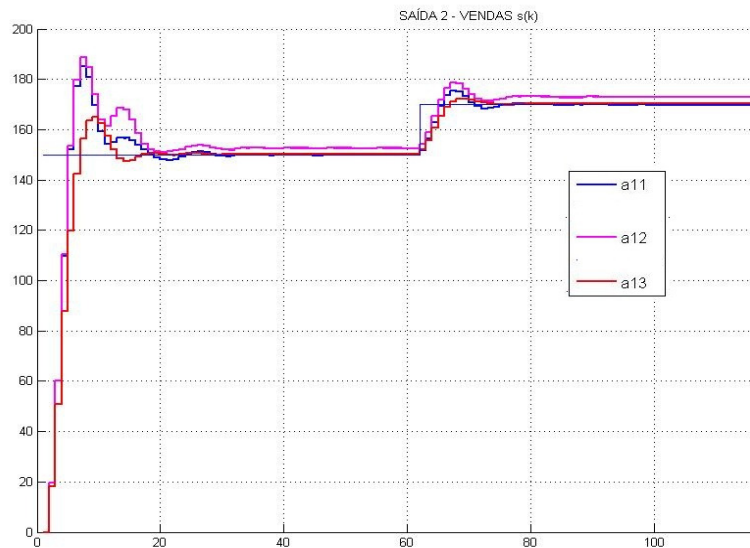


Figura 4.13 Variação do nível de vendas no tempo

Nas figuras 4.12-15 se encontram alterações na matriz do modelo nas posições  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  e  $a_{13}$ . Observa-se que  $a_{12}$  destoa razoavelmente no gráfico de vendas, introduzindo um pequeno erro de regime.

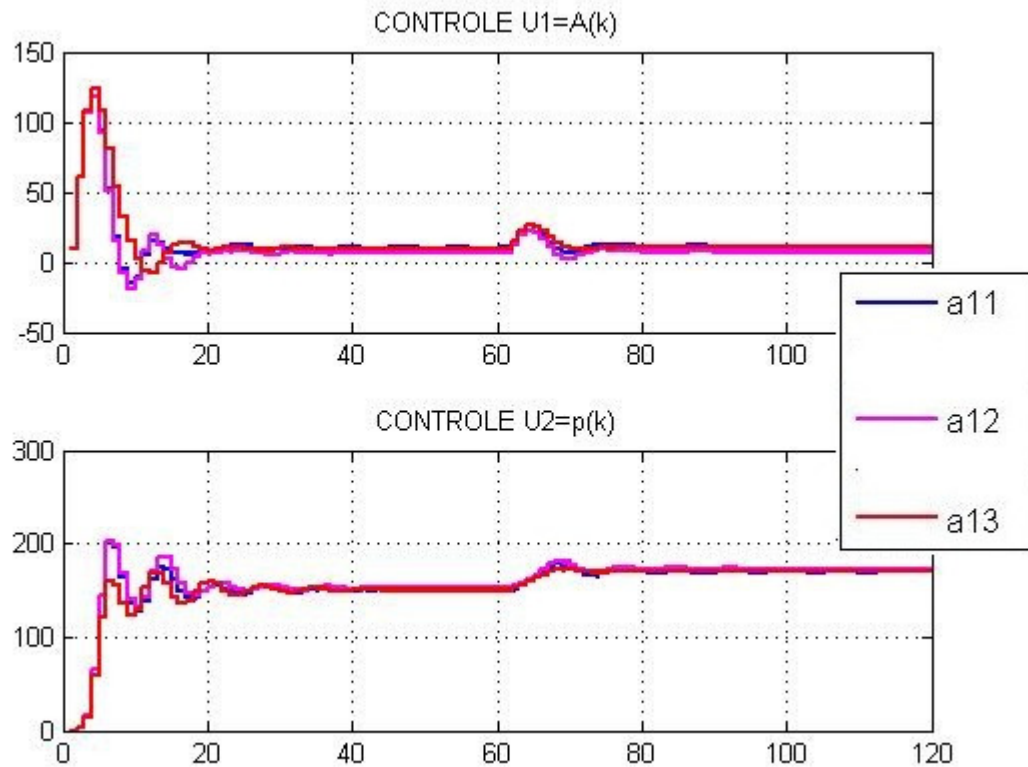


Figura 4.14 Esforço de propaganda e produção no tempo

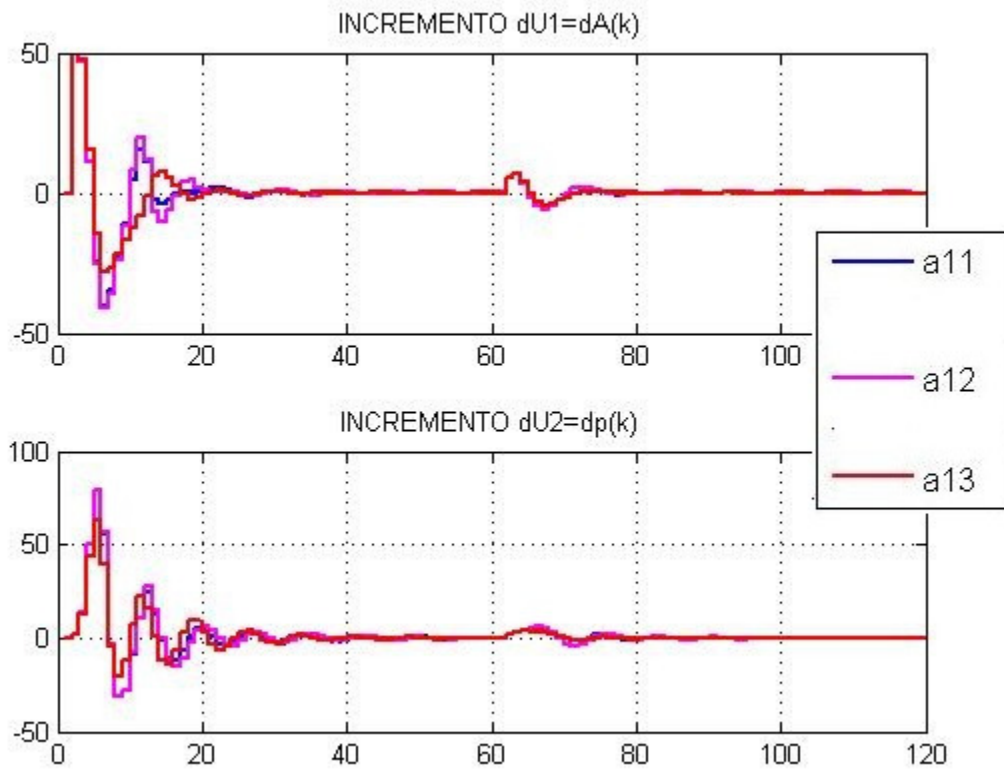


Figura 4.15 Incrementos de produção e propaganda no tempo

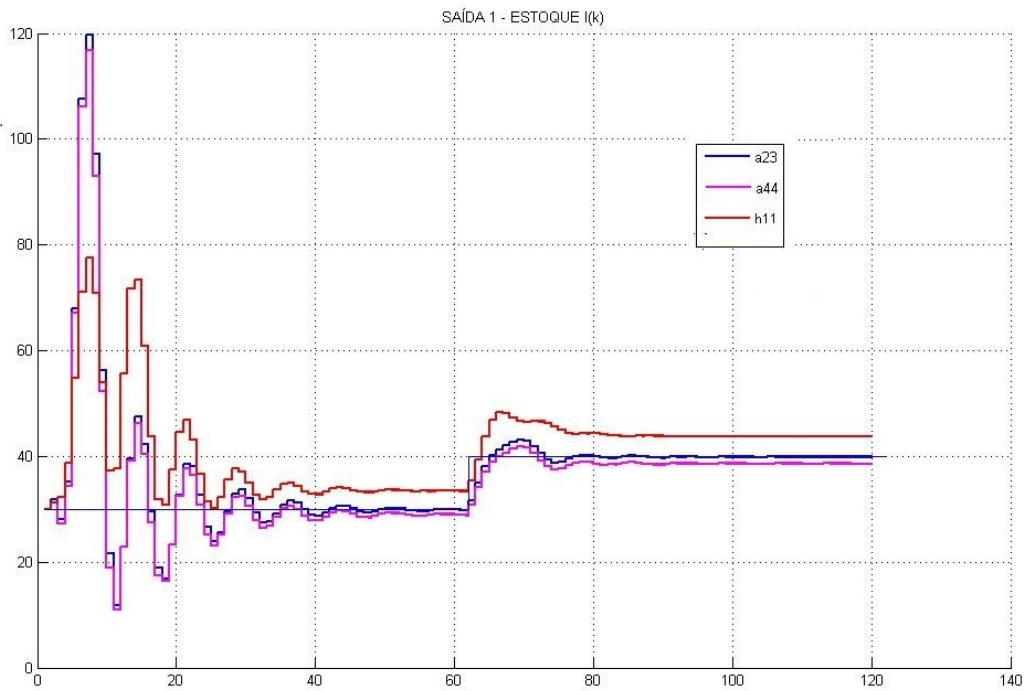
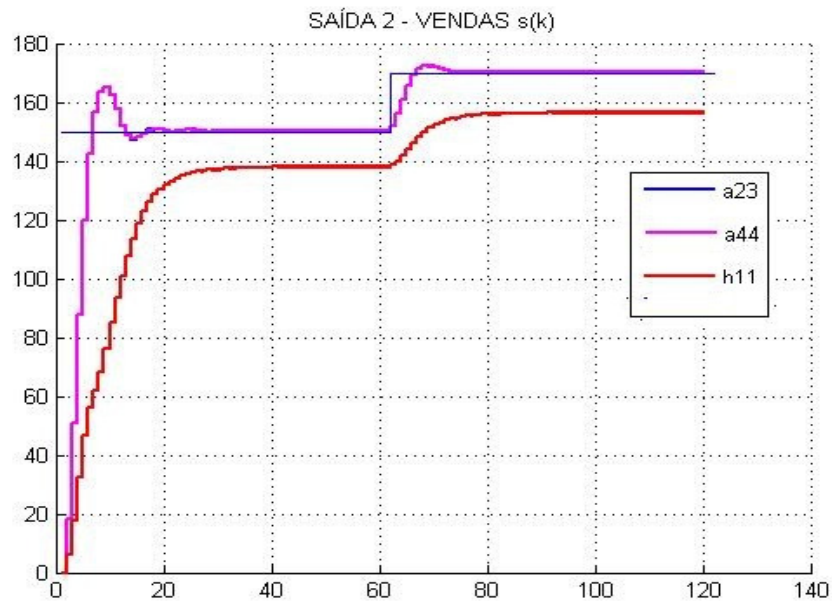


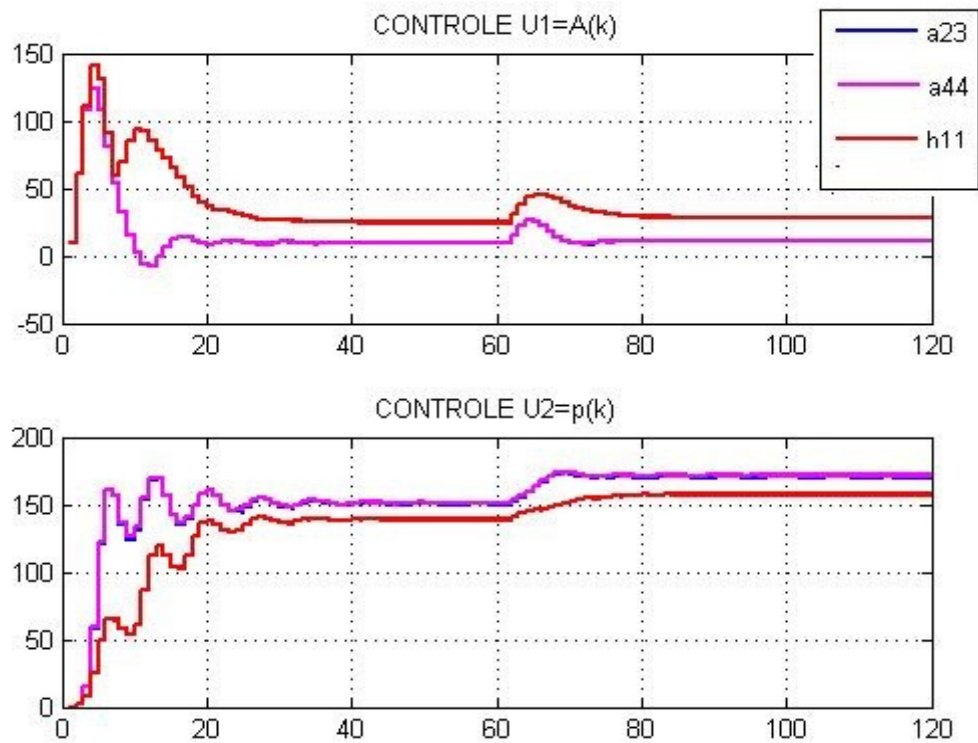
Figura 4.16 Variação do nível de estoque no tempo



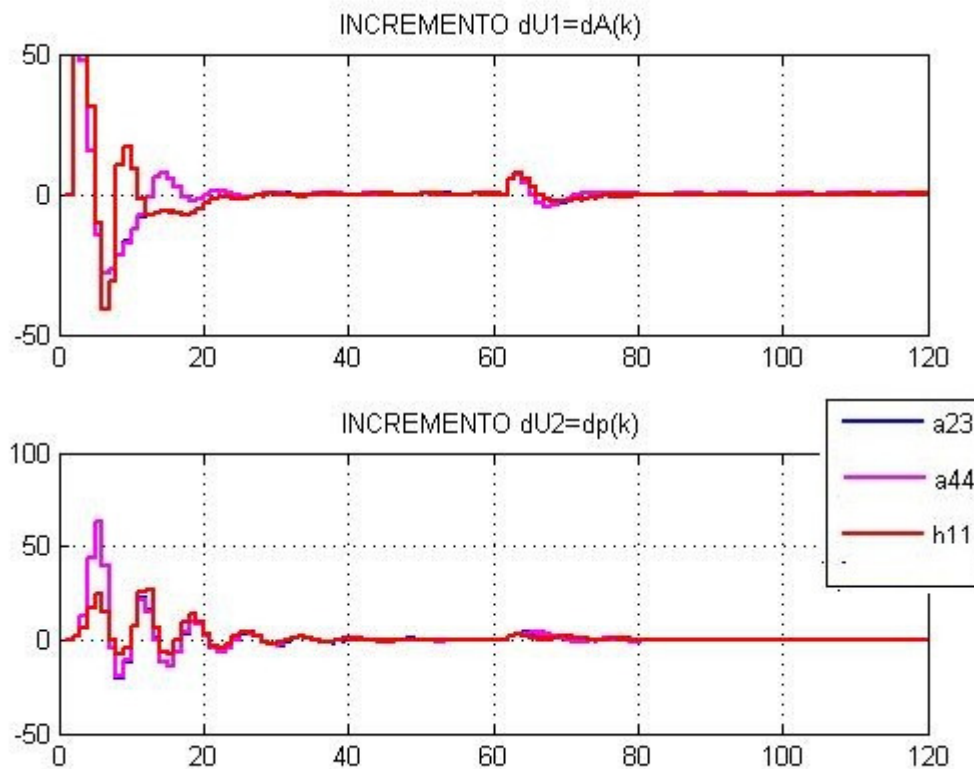


**Figura 4.17** Variação do nível de vendas no tempo

Nas figuras 4.16 à 4.19, estão indicadas alterações nas posições a23 a44 e b11.



**Figura 4.18** Esforço de propaganda e produção no tempo



**Figura 4.19 Incrementos de produção e propaganda no tempo**

Observa-se que algumas alterações são responsáveis por pequenos erros de regime na resposta do sistema, porém nenhum item da matriz de estados chega a ser tão crítico quanto o elemento  $b_{11}$  da matriz de controle ligado ao esforço de propaganda, como pode ser observado claramente nas figuras 4.16-17, ficando claro que um modelo obtido a partir do processo não pode descartar muito neste termo.

Na figura 4.20 pode ser observado o uso de politopos durante a simulação ao longo tempo. No caso, o problema percorreu por 17 politopos em 120 instantes de tempo.

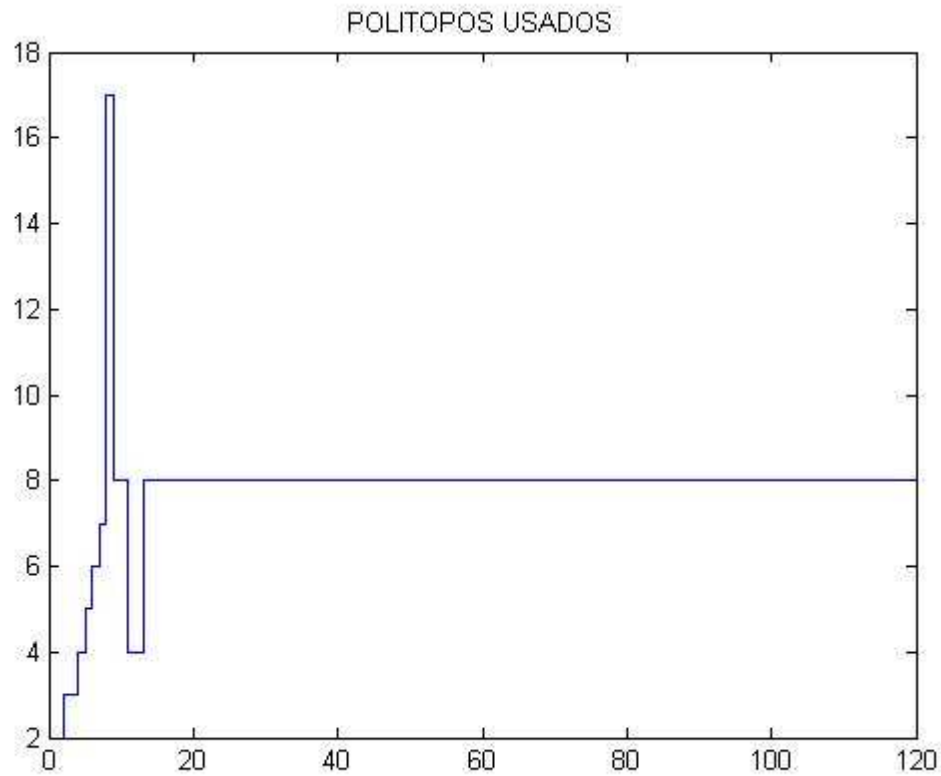


Figura 4.20 Polítopos requisitados

### 4.3 Sumário

Neste capítulo foi proposta uma abordagem MPC multiparamétrica para um problema de planejamento de produção combinado a estratégias de propaganda. Trata-se de um desafio de controle de estoque, através do modelo de mercado de Vidale-Wolfe. Assim como em *Tzafestas et al.* (1997), uma estratégia MPC foi utilizada para controlar um sistema de produção/estoque. A abordagem multiparamétrica revelou-se menos robusta, porém adequada ao desenvolvimento de análises de sensibilidade em relação aos parâmetros do modelo.

## Conclusões

A implementação de algoritmos de controle preditivos multiparamétricos exige um esforço coordenado de técnicas de programação linear e não linear, cálculo matricial e numérico, e uma estruturação de dados apropriadas.

Embora o trabalho tenha desenvolvido uma partição particular do espaço de parâmetros, varrendo o espaço de parâmetros em busca de regiões críticas (polítopos otimizados), não existe uma forma única de realizá-la. Se o algoritmo for capaz de varrer todo o espaço de parâmetros, os resultados finais serão idênticos, pois não dependem da forma como são realizadas as partições. Particular atenção deve ser dedicada à simplificação do Passo 8 do algoritmo, realizado de forma elegante em Tøndel et al (2003).

A implementação prática de controladores preditivos multiparamétricos é simples e de fácil compreensão. Um usuário seria capaz de operar um controlador deste tipo fornecendo dados simples, como horizontes de predição e de controle, matrizes de ponderação diagonais para regulações de controle e de saídas, e possíveis restrições sobre estados e saídas.

Segundo Maciejowski (2001) é possível melhorar a estabilidade do sistema ao se impor restrições finais de igualdade sobre as saídas. Durante as simulações verificou-se que ao se exigir respostas muito rápidas, o sistema controlado tendia a se tornar instável, devido aos aspectos conflitantes de se gerar sinais de controle elevados e a presença de restrições sobre estados e/ou sobre seus incrementos

Como temas para trabalhos futuros, propomos a implementação de técnicas de particionamento do espaço de parâmetros mais eficientes (do ponto de vista computacional) e um estudo mais detalhado sobre a aplicação de técnicas de controle preditivo a problemas de planejamento da produção. Um dos objetivos iniciais do trabalho era justamente uma análise computacional intensa sobre a sensibilidade das soluções ótimas de problemas de planejamento da produção (que envolviam, inclusive, modelos não lineares para os processos), análise agora viabilizada pela utilização de algoritmos de controle preditivo multiparamétricos.

# Referências Bibliográficas

- A. Bemporad, D. M. de la Peña. (2009). *Multiobjective Model predictive Control*, Automatica, 45, 2823-2830.
- A. Bemporad, F. Borelli, M. Morari. (2003). *Min–Max Control of Constrained Uncertain Discrete-Time Linear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 48 (9), 1600-1606.
- A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, E. Pistikopoulos (2002). *The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems*, Automatica, 38, 3-20.
- A. V. Fiacco. (1983). *Introduction to Sensitivity and Stability analysis in Nonlinear Programming*, Academic Press.
- D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis. (2008). *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific.
- D. De Vito, R. Scattolini. (2007). *A Receding Horizon Approach to the Multiobjective Control Problem*, Proceedings of the 46<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control.
- D. G. Luenberger. (1984). *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley
- D.G. Clarke. (1976). *Econometric Measurement of the Duration of Advertising*, Journal of Marketing Research. 345-57.
- D.M. Hanssens, L.J.cParsons, R.L. Schultz, Market Response Models: Econometrics and Time Series Analysis, Kluwer, Coston, 1990.
- Dimitri P. Bertsekas. (1999). *Nonlinear Programming*, Athena Scientific.
- E.F. Camacho, C. Bordons. (1995). *Model predictive Control in the Process Industries*, Springer.
- E.N. Pistikopoulos, V. Dua, N.A. Bozinis, A. Bemporad, M. Morari. (2002). *Online Optimization Via Off-line Parametric Optimization Tools*, Computers & Chemical Engineering, 26,175-185.
- Fiacco, A. V. (1976). *Sensitivity analysis for nonlinear programming using penalty methods*. Mathematical Programming, 10, 287–311.

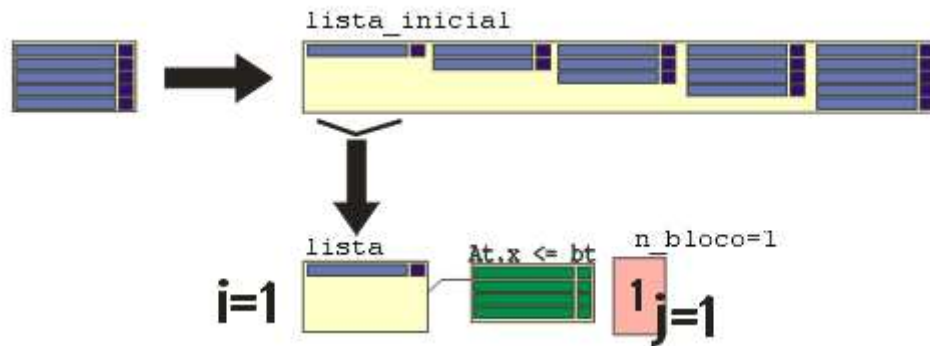
- G. Kapsiots, S. Tzafestas, E. Kyriannakis. (1997). *Model- Based Predictive Control for Generalized Production Planning problems*, Computers in Industry, 34, 201-210.
- J. M. Maciejowski. (2001). *Predictive Control with Constraints*. Pearson Education.
- J. Saunders. (1987). *The Specification of Aggregare Market Models*, European Journal of Marketing, 21, 1-47.
- John D.C. Little. (1979). *Aggegate Advertising Models: The State of the Art*, Operations Research, 27, 629-667.
- L. Imsland, N. Bar, B.A. Foss. (2005). *More Efficient Predictive Control*, Automatica, 41, 1395-1403.
- Lopes et al. (2010). *Gerenciamento Ótimo de Potência de um Veículo Elétrico Híbrido Série Para Transporte Urbano*, XVIII Congresso Brasileiro de Automática.
- M. Baric, C. Jones, M. Morari. (2006). *Parametric Analysis Controllers for Constrained Linear Systems*, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control, 4514 – 4519.
- M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C.M. Shetty. (2006). *Nonlinear programming: Theory and Algorithms*. Wiley- Interscience.
- M.L. Vidale & H.B. Wolfe. (1957). *An Operations Research Study of Sales Response to Advertising*, Operations Research, 5, 370-81.
- O.J.M. Smith. (1957). *Closer Control of Loops with Dead Time*, Chemical Engineering Science, 53 217-219.
- P. Tøndel, T.A.Johansen, A. Bemporad. (2003). *An Algorithm for Multi-Parametric Quadratic Programming and Explicit MPC Solutions*, Automatica, 39, 489-497.
- S. Boyd, L. Vandenberghe. (2004). *Convez Optimization*. Cambridge University press.
- S.B. Choi, H. Hwang. (1987). *Optimal Control of Production and Marketing Systems with Distributed Time lags*, Optimal Control Application and Methods, 8, 351-364.
- T.S. Chang e D.E. Seborg. (1983). *A Linear programming Approach to Multivariable Feedback Control with inequalities Constraints*. International Journal of Control, 37, 583-597.
- Visioli, Antonio. (2006). *Pratical PID Control (Advances in industrial Control Series)*. Springer.

## Apêndice A

# Algoritmo de partição

### A.1 Ilustração do algoritmo passo a passo

Numa primeira etapa, é obtido  $CRo$ . No exemplo ilustrativo da Figura A.1  $CRo$  possui 5 restrições na forma  $Ax < b$ , montado matricialmente como  $[A|b]$ . Em seguida, a função “montalista\_inicial” reorganiza as restrições e as dispõe no formato indicado abaixo em “lista\_inicial”, descrito no teorema 3.



**Figura A.1**

Em seguida é extraído da lista inicial um particionamento da região de parâmetros, representada por cada coluna do cell array “lista\_inicial”. Esta coluna passa a se chamar “lista” onde um vetor “n\_bloco” recebe o número de restrições em suas posições de forma que as regiões corretas da lista são extraídas durante a simulação, como pode ser visto adiante. Na figura A.1 ainda pode ser visto que da primeira partição foi obtida uma região crítica representada em verde, com 5 restrições. Estas restrições serão atualizadas na lista, como pode ser observado na figura A.3.

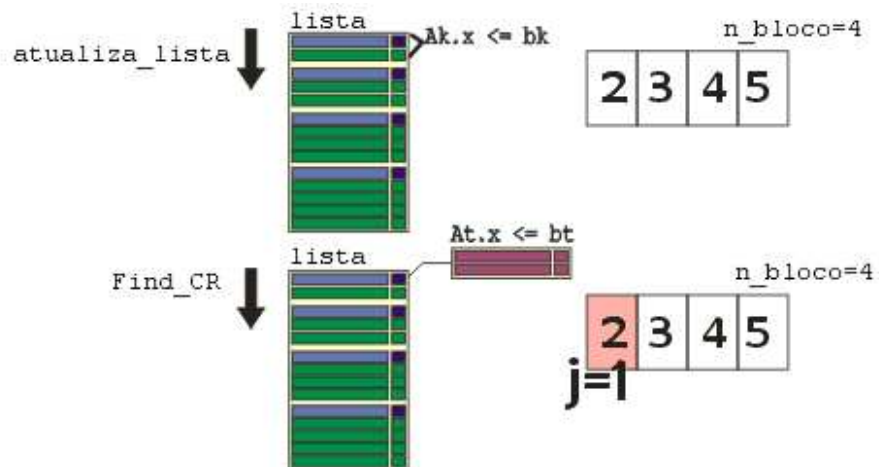


Figura A.2

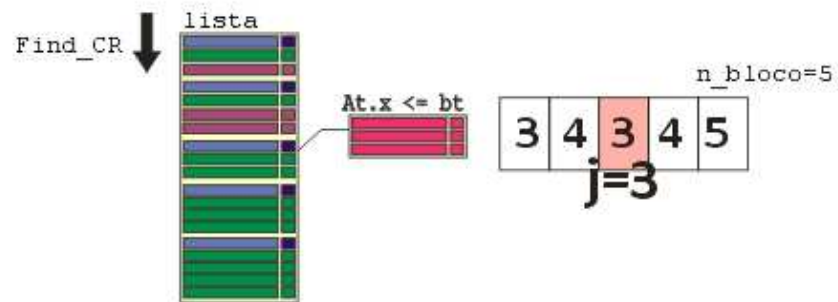


Figura A.3

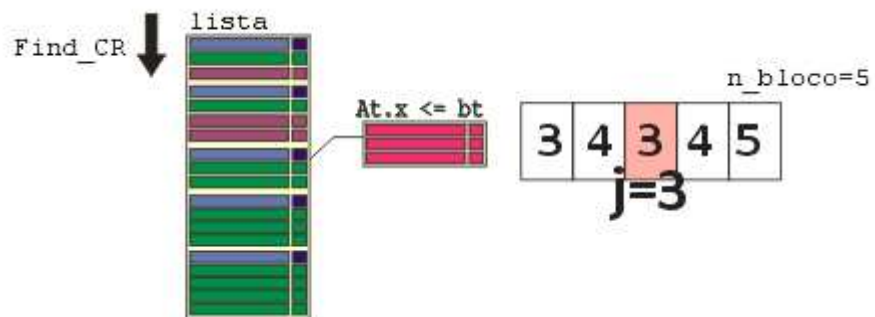


Figura A.4



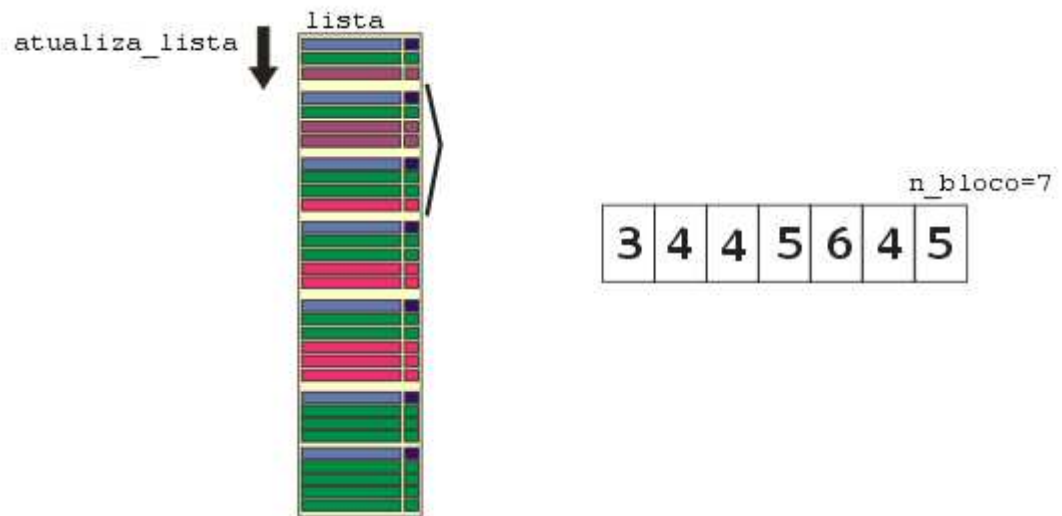


Figura A.5

Na figura A.6 observa-se que não foi encontrada uma região crítica, representada em branco, e, portanto a “lista” será apagada nesta posição assim como a posição equivalente de “n\_bloco”.

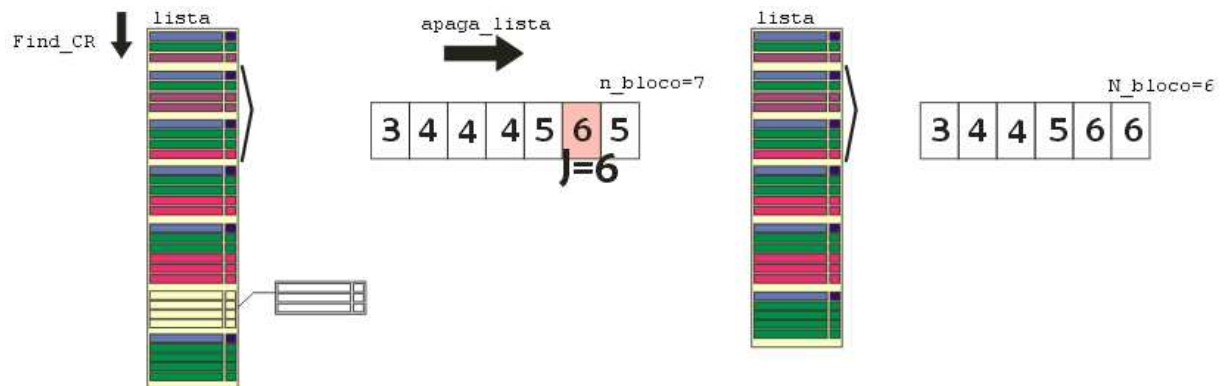


Figura A.6

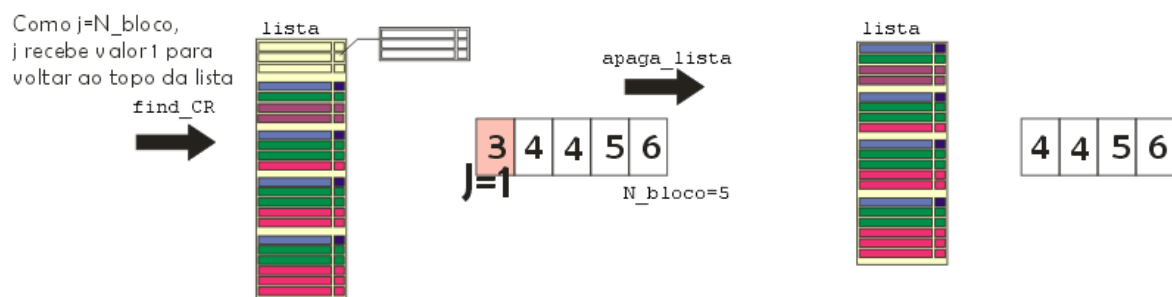


Figura A.7

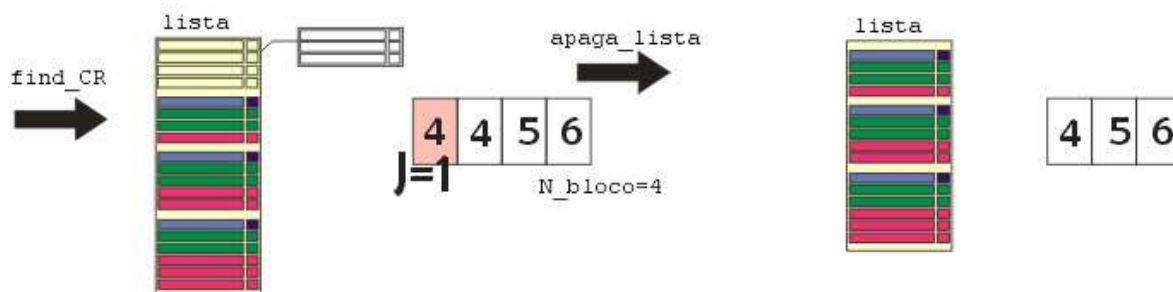


Figura A.8

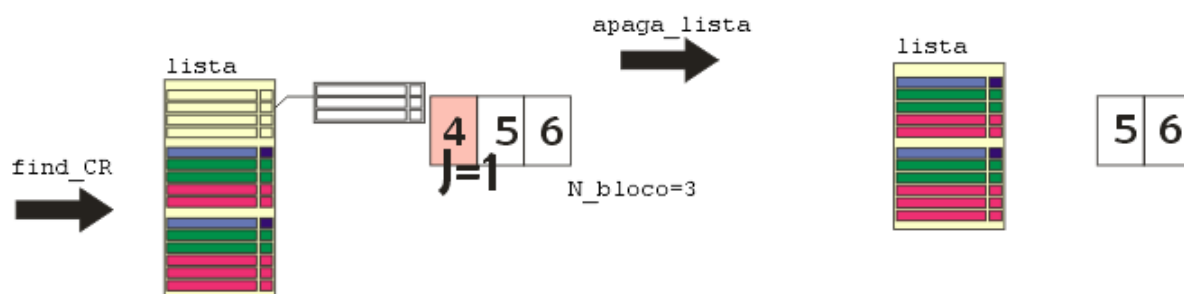
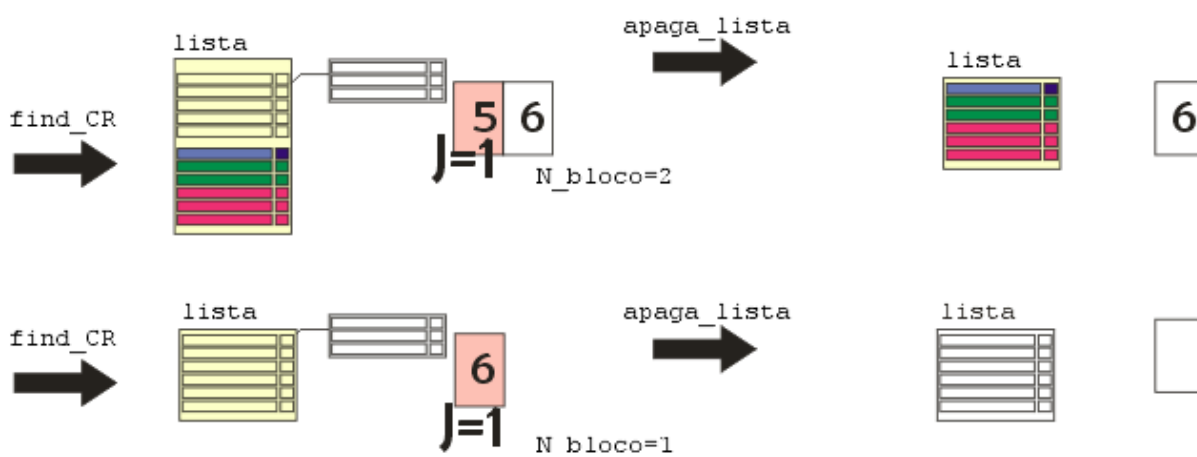


Figura A.9



**FIM** → **i=2**

Figura A.10

Na figura A.10, observa-se que a lista foi extinguida e agora pode-se passar para a próxima partição do espaço de parâmetros, que no caso é a próxima coluna do cell array

“lista\_inicial” e todo o processo se repete até que seja suprimida a zero todo o cell array.

## A.2 Código principal

Abaixo se encontra o código matlab simplificado encarregado da execução do processo de obtenção das regiões de controle off-line.

A função *matrices* calcula e devolve todas as matrizes e variáveis necessárias ao script, tais como dimensões do vetor de estados, horizontes de controle e matrizes de sistema.

A função *licq* determina as restrições que respeitam a qualificação de independência linear e condição de folga complementar estrita.

A função *calculo\_MoNo* calcula a matriz  $M$  e  $N$  introduzidos no Teorema 1.

A função *atualiza\_lista* e *apaga\_lista* realizam exatamente as funções indicadas pelos seus nomes e ilustradas ao longo do apêndice A.1.

Após breve esclarecimento, segue abaixo o código gerado:

```
[H,F,W,E,G,S, A,B,C, dim_X, dim_x,dim_y,dim_u,dim_r,dim_z, M,N, lb,ub] =
matrices();

%% CALCULO CRO
[xo,exitflag01] = find_xo_CRo(G, W, S, H, dim_z, dim_X, lb, ub);
[zo,lambdao,GzoWSxo,exitflag02] = find_zo_lambdao(G, W, S, H, xo, dim_z, lb,
ub);

[G1, W1, S1, G2, W2, S2, G3, W3, S3, lambdao1, lambdao2, lambdao3] =
licq(lambdao, GzoWSxo, G, W, S);
[MoNo] = calculo_MoNo(G3, W3, S3, lambdao3, H, zo, xo, dim_z, dim_X, dim_x);
[Ao,bo] = find_CR(G1, W1, S1, zo, xo, MoNo, lambdao3, dim_z);
[Au,bu] = controle(MoNo, H, F, zo, xo, dim_z, dim_u);

POLITOPO={ [Ao,bo], [Au,bu] };
cro = length(bo); [lista_inicial]=montalista_inicial(Ao, bo, cro);

%% INICIO DOS LOOPS
i=1; Ak=[]; bk=[];
while(i<=cro)

    lista=lista_inicial{1,i}; bloco=i; j=1; n_bloco=1; n_lista=size(lista,1);
    while(n_bloco>=1)
        aux1=sum(bloco(1:j-1))+1; aux2=aux1+bloco(j)-1;
        Ak=lista(aux1:aux2,1:dim_X); bk=lista(aux1:aux2,dim_X+1);
        [xo, exitflag01] = find_xo_CR(Ak,bk, H, dim_X,dim_z,dim_u, lb,ub,
G,S,W);
```

```

        if(exitflag01(1)<0)&&(exitflag01(2)<0)
            [lista, bloco, n_bloco, n_lista, j]=apaga_lista(bloco, j, lista,
aux1,aux2);
            continue
        end
        [zo,lambdao,GzoWSxo,exitflag02] = find_zo_lambdao(G, W, S, H, xo,
dim_z, lb, ub);
        if(any(GzoWSxo>0))
            [lista, bloco, n_bloco, n_lista, j]=apaga_lista(bloco, j, lista,
aux1,aux2);
            continue
        end
        [G1, W1, S1, G2, W2, S2, G3, W3, S3, lambdao1, lambdao2, lambdao3] =
licq(lambdao, GzoWSxo, G, W, S);
        [MoNo] = calculo_MoNo(G3, W3, S3, lambdao3, H, zo, xo, dim_z, dim_X,
dim_x);
        [At,bt] = find_CR(G1, W1, S1, zo, xo, MoNo, lambdao3, dim_z);
        if (all(sum(isnan(At)))>0 || sum(all(isnan(bt))))>0
            [lista, bloco, n_bloco, n_lista, j]=apaga_lista(bloco, j, lista,
aux1,aux2);
            continue
        end
        [Au,bu] = controle(MoNo, H, F, zo, xo, dim_z, dim_u);
        %% Região é nova?
        col=size(Xtotal,2); newAb = At*Xtotal-bt*ones(1,col);
        if(any(all(newAb<0,1)))
            [lista, bloco, n_bloco, n_lista, j]=apaga_lista(bloco, j, lista,
aux1,aux2);
            continue
        end
        %% Sim, região é nova: salvar
        POLITOPO=[POLITOPO;{[At, bt], [Au, bu]}];
        [j, lista, bloco]=atualiza_lista(At,bt, Ak,bk,j, lista, bloco, aux1,
aux2);
    end
    i=i+1;
end

```