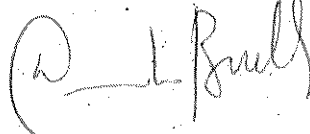


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Campinas, 21 de março 1987
Este exemplar corresponde
à redação final da tese defendi-
da por Ivonete Markman e
aprovada pela Comissão Julga-
dora em 05/06/87.


WALTER DA CUNHA BORELLI

Departamento de Telemática
FEE - UNICAMP

(orientador)

TESE DE MESTRADO

ESQUEMAS DE MODULAÇÃO CODIFICADA EM
TRÊS E QUATRO DIMENSÕES

AUTORA: ENG^a. IVONETE MARKMAN

ORIENTADOR: PROF. DR. WALTER DA CUNHA BORELLI

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica, da Universidade
Estadual de Campinas - UNICAMP, como
parte dos requisitos exigidos para a
obtenção do título de MESTRE EM
CIÊNCIAS.

JUNHO 1987

À memória da minha avó América Markman,
por tudo que sempre representará.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Walter C. Borelli, meu orientador, pela oportunidade de realizar este trabalho, bem como, pelas contribuições necessárias, para que pudesse completá-lo;

Ao Eng^o Jaime Portugheis, pelas constantes trocas de idéias e contribuições, ao longo de todo o Curso de Mestrado;

Aos Profs. Reginaldo Palazzo Jr. e Dalton S. Arantes, por seus ensinamentos e referências bibliográficas fornecidas, que muito contribuíram;

Aos Eng^{os} Lauro E.C. Gomes e Jurandir M. Pitsch, do grupo de Comunicações por Satélite do CPqD/TELEBRÁS, pelo apoio, liberando-me pelo tempo necessário ao término deste trabalho;

Ao Prof. Valdemar C. da Rocha Jr. por sua orientação, apoio e amizade, durante o meu Curso de Graduação, na UFPE, e por me introduzir no fascinante estudo da codificação corretora de erros;

As pessoas que me concederam suporte computacional, no CPqD/TELEBRÁS: Paulo Lorena, Delfim, Christiane, Anderson e Dan, pela gentileza e boa vontade com que sempre me ajudaram; A Almagro e Heumar, pelos excelentes desenhos; A Cristina Juliani, pelas tabelas e legendas; A Huda, pela ajuda e atenção;

Ao CNPq, FAPESP, UNICAMP e CPqD/TELEBRÁS, pelo apoio financeiro, durante a realização deste trabalho;

À minha família, especialmente, aos meus irmãos Mônica e Brivaldo, e aos amigos Helga, Rubens, Ting, Graça e Raniéri, pela constante companhia e apoio; Finalmente, a todos os outros amigos e profissionais da UNICAMP e do CPqD/TELEBRÁS que, de alguma forma, contribuíram para este trabalho.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. OS CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS	8
2.1. INTRODUÇÃO	8
2.2. O PROCESSO DE CODIFICAÇÃO	9
2.3. ALGUMAS PROPRIEDADES RELACIONADAS ÀS MATRIZES POLINOMIAIS $G(D)_{KN}$	12
2.4. A REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMA DE TRELIÇA	14
2.5. A DISTÂNCIA MÍNIMA DE UM CÓDIGO CONVOLUCIONAL E O ALGORITMO DE VITERBI	16
2.5.1. A DISTÂNCIA MÍNIMA	16
2.5.2. O ALGORITMO DE VITERBI	17
2.6. A REPRESENTAÇÃO POR VETORES COEFICIENTES	19
3. OS CÓDIGOS DE ALFABETO REDUNDANTE (AR)	22
3.1. INTRODUÇÃO	22
3.2. O PROCESSO DE CODIFICAÇÃO	23
3.3. A ESTRUTURA DOS CÓDIGOS AR	26
3.4. UMA EXTENSÃO AO TRABALHO DE UNGERBOECK	28
3.5. O PROCESSO DE CODIFICAÇÃO $K_0 N_0$	30
3.6. UMA GENERALIZAÇÃO DOS CÓDIGOS AR	32
3.6.1. INTRODUÇÃO	32
3.6.2. O ESQUEMA AR 2-FSK/M-PSK	32
3.6.3. PROPRIEDADES ESPECTRAIS	33
4. AS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES AR	36
4.1. INTRODUÇÃO	36
4.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A ESTRUTURA DOS CODIFICADORES	36

4.3. A EQUIVALÊNCIA AR ENTRE CODIFICADORES	37
4.3.1. INTRODUÇÃO	37
4.3.2. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES REVERSOS	38
4.3.3. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DA COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE CODIFICADORES DE UMA MESMA CLASSE SIMPLES	40
4.3.4. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES SIMÉTRICOS PERMUTADOS	41
4.3.5. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DA COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE CODIFICADORES DE DIFERENTES CLASSES SIMPLES	42
4.3.6. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES PARCIALMENTE SIMÉTRICOS PERMUTADOS	43
4.4. A SEQUÊNCIA EXPURGADA DE CODIFICADORES	46
5. A PROCURA DOS CÓDIGOS AR	50
5.1. INTRODUÇÃO	50
5.2. TIPOS DE PROCURA, DE ACORDO COM O CONJUNTO INICIAL DE PROCURA (CIP)	53
5.2.1. A PROCURA EXAUSTIVA	53
5.2.2. A PROCURA NÃO-EXAUSTIVA	54
5.3. A FASE DE SELEÇÃO	56
5.3.1. A ELIMINAÇÃO DE CODIFICADORES CATASTRÓFICOS	56
5.3.2. O CRITÉRIO MDF DE ELIMINAÇÃO DE CODIFICADORES	57

6. PROPOSIÇÃO DE NOVOS ESQUEMAS DE MODULAÇÃO/	
/CODIFICAÇÃO AR	60
6.1. INTRODUÇÃO	60
6.2. ESQUEMA EM 3 DIMENSÕES: $2F/2 \times M$ -PSK	62
6.2.1. DESCRIÇÃO	62
6.2.2. PROPRIEDADES ESPECTRAIS	63
6.3. ANÁLISE DE CONSTELAÇÕES EM 3 DIMENSÕES: CURVAS DE	
R_0 E PROCURA DE CÓDIGOS	64
6.4. ESQUEMA EM 4 DIMENSÕES: $2F/P \times M$ -PSK	77
6.4.1. DESCRIÇÃO	77
6.4.2. PROPRIEDADES ESPECTRAIS	77
6.5. ANÁLISE DE CONSTELAÇÕES EM 4 DIMENSÕES: CURVAS DE	
R_0 E PROCURA DE CÓDIGOS	79
7. CONCLUSÃO	89
APÊNDICE I	95
APÊNDICE II	99
APÊNDICE III	104
APÊNDICE IV	108
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120
FIGURAS	

1. INTRODUÇÃO

Em comunicação digital via cabo telefônico, rádio ou satélite, tanto a potência de transmissão, quanto a largura de faixa espectral dos canais são geralmente limitadas. Assim, para atender à crescente demanda de serviços de comunicação e satisfazer às exigências de confiabilidade da informação (imunidade quanto à ação de ruídos e outras interferências), são necessárias técnicas de transmissão com eficiência cada vez maior. De fato, a procura por sistemas de comunicação eficientes, quanto a tais requisitos, tem-se tornado área de pesquisa de grande interesse [1-36].

No passado, observou-se que a utilização de formas de modulação eficientes, quanto à economia de largura de faixa, apresentava, em contrapartida, exigências de maior potência, para manter a confiabilidade desejada. Uma solução, para esta limitação em potência, consistiu na utilização de códigos corretores e/ou detetores de erro. No entanto, o uso destes códigos, normalmente associados à transmissão binária, implicava um aumento da largura de faixa requerida, para uma mesma taxa de informação [4,18,30].

Posteriormente, passou-se à utilização de esquemas de modulação multiníveis, associados à codificação, como uma forma de manter a largura de faixa, para a mesma taxa de informação [9]. No entanto, a otimização de um sistema de comunicação digital, até então, ocorria em dois planos separados: em um plano, considerava-se a utilização de esquemas de modulação convencionais, com máxima separação entre os sinais; em outro,

considerava-se a utilização de codificação convencional, com o critério de otimização independente do esquema de modulação utilizado (o termo "convencional" é aqui utilizado, no sentido das operações serem ótimas, em um canal de ruído Gaussiano, branco e aditivo - canal AWGN) [10]. A união destes dois planos se dava, normalmente, através de codificação Gray, aplicada aos sinais da constelação.

Verificava-se, então, que o resultado, desta visão separada do problema, nem sempre era encorajador. Massey [21] foi um dos primeiros a mostrar que se poderia conseguir uma melhoria considerável de desempenho, ao se tratar modulação e codificação como uma entidade única.

Seguindo este raciocínio, Ungerboeck [29,30] apresentou uma análise do problema, através da proposição de uma classe de códigos no espaço de sinais ("Signal-Element Codes" [6]; "Alphabet Redundant Codes" [4]), aqui referidos como códigos de alfabeto redundante, ou simplesmente, códigos AR. Uma análise do desempenho dos códigos AR (em termos de probabilidade de erro versus relação sinal-ruído), comparativamente a sistemas não-codificados, apresenta a possibilidade de obtenção de ganhos de codificação de vários decibéis, para o canal AWGN, e com pouca complexidade adicional. Esta classe de códigos caracteriza-se por adicionar a redundância através do aumento do número de símbolos de canal, o que representa um aumento na capacidade do canal, sem comprometimento da taxa de informação e da largura de faixa requerida [5,36].

A codificação no espaço de sinais, ou codificação

AR, pode ser entendida como uma codificação convolucional binária, seguida de um mapeamento de símbolos codificados em símbolos de canal multinível (multi-amplitude e/ou multifase), chamado de mapeamento por partição de conjunto (do inglês: mapping by set partitioning [30]).

Ungerboeck [30], restringindo-se a códigos convolucionais binários de taxa $R=m/(m+1)$ e codificadores específicos com realimentação, propôs um algoritmo de procura não-exaustiva de códigos AR com máxima distância mínima Euclidiana entre as sequências de símbolos de canal.

Por outro lado, Borelli [6], estudando a estrutura geral dos codificadores convolucionais com ou sem realimentação e para taxas $R=K/N$, com 'K' e 'N' inteiros pequenos e $K < N$, propôs um novo algoritmo de procura de códigos AR que se mostrou de maior eficiência. Neste sentido, realizou uma procura exaustiva, para codificadores de pequeno comprimento total de memória (CTM). Para codificadores de médio e grande CTM, realizou uma procura não-exaustiva, baseada em propriedades de determinados subconjuntos, através da definição de limitantes inferiores e superiores para a distância mínima Euclidiana dos códigos.

Outros estudos [4,16,17,18,24,27,28,32,33] têm sido realizados, aplicando-se os códigos AR aos esquemas de modulação mais conhecidos de uma e duas dimensões, quais sejam: M-AM, M-PAM, M-PSK e M-QAM. Neste ponto, a análise tem-se estendido para constelações com um maior número de sinais e para canais com diferentes tipos de interferência, no sentido de serem mais realísticos. Os resultados comprovam que, mesmo nestes casos, o uso dos códigos AR provê uma melhoria de desempenho substancial,

em relação a sistemas não-codificados.

Embora os códigos AR tenham sido otimizados, para os esquemas analisados, não houve, simultaneamente, uma otimização da distribuição dos sinais, com o objetivo de melhorar o desempenho. Neste sentido, uma tentativa de estudar a codificação AR aplicada a constelações ótimas, em duas dimensões [13], não se mostrou eficaz [19]. Isto se deveu à característica não-simétrica das constelações, que não se mostrou adequada à codificação AR.

Recentemente, Divsalar et alii [10] propuseram a aplicação da codificação AR aos esquemas de modulação M-PSK, M-QAM e M-AM, nos quais, foi introduzida uma não-uniformidade, nas distâncias Euclidianas entre os sinais. No entanto, foram mantidas as características de envoltória constante e de simetria dos sinais, em torno dos eixos, na representação dos mesmos, no espaço de sinais. Foram obtidas, assim, margens de ganho (sobre as constelações uniformes codificadas), quase sempre da ordem de décimos de dB, e que tendem a se anular, com o aumento da complexidade de codificação. Isto talvez não represente ganhos interessantes, principalmente, se for levado em conta que a introdução destas não-uniformidades representará um aumento de complexidade, na recepção, devido à proximidade de alguns sinais.

Tais fatos parecem sugerir a impossibilidade de obter margens de ganhos consideráveis, para outros esquemas codificados, em duas dimensões, em relação aos já conhecidos e estudados.

Nos últimos anos, a procura por maiores ganhos de

codificação tem-se estendido para esquemas de modulação em mais de duas dimensões [3,33].

Em trabalhos de 1985 e 1986, Wolf e Padovani [34,35] propõem uma generalização dos códigos AR. Nesta generalização, a codificação de canal se realiza no espaço de sinais de sistemas de modulação em fase e frequência (P-FSK/M-PSK), ou em fase, amplitude e frequência (P-FSK/M-QAM). É, portanto, uma técnica que alia o método da partição de conjuntos [30], codificação convolucional e modulações FSK e PSK, ou FSK e QAM, gerando códigos no espaço de sinais de quatro ou mais dimensões. Neste sentido, tais códigos diferenciam-se dos códigos AR propostos por Ungerboeck [30] no fato de requererem, para os sinais, maiores larguras de faixa espectral. Em contrapartida, apresentam desempenhos bem melhores, em termos de ganho de codificação.

Seguindo o raciocínio de Wolf e Padovani, e como as principais constelações de uma e duas dimensões têm sido amplamente estudadas, este trabalho atém-se a esquemas de mais de duas dimensões, na busca por novos esquemas associados a maiores ganhos de codificação.

Neste sentido, são propostos novos esquemas de modulação/codificação AR, em três e em quatro dimensões, os quais são descritos, e é realizada uma análise espectral dos mesmos. Posteriormente, são obtidas curvas da taxa de corte do canal (R_0) [21,36], versus a relação sinal-ruído (SNR), para diversas constelações destes esquemas, bem como, para constelações de esquemas em duas (M-PSK) e em quatro dimensões [34,35]. Uma análise comparativa, em termos do máximo ganho de codificação,

admitindo-se complexidade de codificação irrestrita, pode, então, ser realizada. Finalmente, baseando-se no algoritmo proposto por Borelli [6], é realizada uma procura dos melhores códigos, em termos de máxima distância mínima Euclidiana, para alguns comprimentos totais de memória dos codificadores (que representam a complexidade de codificação). Também é realizada uma comparação com os ganhos de codificação obtidos, na procura de códigos para os esquemas em duas [6,30,32] e em quatro dimensões [34,35]. Os ganhos, assim obtidos, tendem a comprovar a análise das curvas de $R_0 \times \text{SNR}$.

Em linhas gerais, o desenvolvimento deste trabalho é apresentado da seguinte forma:

CAP.2 - Revisão de conceitos da teoria de codificação convolucional, que servirão de base para os capítulos subsequentes;

CAP.3 - Análise da aplicação de códigos convolucionais, no espaço de sinais de esquemas de modulação multinível. As secções de 3.1. a 3.5. descrevem os códigos AR, apresentando as similaridades e divergências entre o trabalho de Ungerboeck [30] e o de Borelli [6]. A secção 3.6. descreve o trabalho de Wolf e Padovani [34,35], como uma generalização dos códigos AR;

CAP.4 - Descrição das classes gerais de equivalência entre os codificadores AR e da sequência de codificadores que elimina realizações equivalentes dos mesmos, sobre a qual, realizar-se-á a procura dos códigos;

CAP.5 - Os procedimentos para a procura exaustiva e a não-exaustiva dos códigos são apresentados, com a descrição dos

pontos básicos do algoritmo de procura;

CAP.6 - Nas secções 6.2. e 6.4., são propostos novos esquemas de modulação/codificação AR, em três e em quatro dimensões, analisando-se as propriedades espectrais dos sinais não-codificados; nas secções 6.3. e 6.5., são feitas as descrições de algumas constelações de sinais, para os esquemas propostos. Para cada constelação, são obtidas as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$ e é realizada a procura dos melhores códigos AR. Uma comparação com as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$ e com os melhores códigos para os esquemas em duas [6,30,32] e em quatro dimensões [34,35] é, então, realizada, para se determinar a eficiência destes esquemas;

CAP.7 - Considerações finais acerca dos resultados do trabalho;

APÊNDICE I - Obtenção da Função de Densidade Espectral (FDE) dos sinais não-codificados do esquema 2-FSK/M-PSK, proposto por Wolf e Padovani [34,35] e descrito na secção 3.6.2.;

APÊNDICE II - Subconjuntos especiais de codificadores, para algumas classes simples, sobre os quais se realizará a procura não-exaustiva, com a definição de limitantes inferiores e superiores aos Δ_{MIN} dos códigos respectivos;

APÊNDICE III - Obtenção da Função de Densidade Espectral (FDE) dos sinais não-codificados dos esquemas propostos no CAP.6;

APÊNDICE IV - Representação dos sinais das constelações das secções 6.3. e 6.5. e realização da partição de conjunto para as mesmas.

2. OS CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS

2.1. INTRODUÇÃO

Antes de se definir códigos convolucionais, é conveniente dar a definição do que vem a ser um codificador convolucional, frisando-se que este trabalho se restringe a codificadores e códigos convolucionais binários, ou seja, todos os coeficientes são binários e as operações acontecem em $GF(2)$ [23].

Def.2.1: Um codificador convolucional G_{KN} com 'K' entradas e 'N' saídas, sobre um corpo finito $GF(q)$, é uma máquina sequencial de estados finitos, linear, inversível e realizável, a qual estava no estado zero num passado longínquo [8].

Os codificadores convolucionais podem ser caracterizados por uma das seguintes formas de representação [31]:

- a) A representação matricial (ex: fig. 2.1a);
- b) A representação esquemática (por meio de registradores de deslocamento)(ex: fig. 2.1b);
- c) A representação em diagrama de árvore (ex: fig. 2.1c):

No diagrama de árvore, os bits de entrada do codificador são indicados pelo caminho seguido na árvore, enquanto que, os bits de saída são indicados sobre os ramos. Um '0' de entrada é representado pelo ramo superior de uma bifurcação, enquanto que um '1' é representado pelo ramo inferior.

- d) A representação em diagrama de treliça (ex: fig.2.1d):

Trata-se de uma versão compacta do diagrama de

árvore, em que a representação é feita como função das transições entre os estados do codificador, impostas pelos bytes de entrada X . Por estados do codificador, podem-se entender os diferentes conteúdos dos registradores de deslocamento, em sua representação esquemática (ex: fig.2.1b). Cada transição entre estados corresponde a um ramo e cada estado, a um nó, no diagrama de treliça.

e) A representação em diagrama de estados (ex: fig.2.1e):

Como a estrutura em treliça de um codificador convolucional é, também, repetitiva, uma versão compacta da mesma gera o diagrama de estados. Este, no entanto, pode ser obtido diretamente do codificador, observando-se suas propriedades de máquina de estados finitos.

Este trabalho atém-se às representações 'a', 'b' e 'd'. Além do mais, uma outra representação, derivada da representação matricial e específica para codificadores de estrutura sem realimentação, é, também, utilizada, qual seja:

f) A representação por vetores geradores, ou vetores coeficientes, VC (ver adiante a secção 2.6.), a qual será posteriormente utilizada na procura dos melhores códigos, para cada classe de codificadores, segundo o comprimento total de memória (ex: fig.2.1f).

2.2. O PROCESSO DE CODIFICAÇÃO

Seja uma sequência de entrada, ou sequência de informação racional (da forma $P(D)/Q(D)$ com $Q(D) \neq 0$) e causal, ou seja, uma sequência realizável, pois, pode ser produzida por uma

máquina autônoma de estados finitos e linear:

$$\begin{aligned} x &= \{ \underline{x}^0, \underline{x}^1, \underline{x}^2, \dots \} = \\ &= (x_1^0 \ x_2^0 \ \dots x_K^0, x_1^1 \ x_2^1 \ \dots x_K^1, x_1^2 \ x_2^2 \ \dots x_K^2, \dots) \end{aligned} \quad (2.1)$$

A transformada-D da sequência de informação é expressa por:

$$\underline{X}(D) = [X_1(D) \ X_2(D) \ \dots \ X_K(D)] \quad (2.2)$$

onde, para cada $i = 1, 2, \dots, K$,

$$X_i(D) = x_i^0 + x_i^1 D + x_i^2 D^2 + \dots \quad (2.3)$$

Como os codificadores são realizáveis por definição e a sequência de informação é racional e causal (realizável), a sequência de saída, ou sequência transmitida, ou ainda palavra-código, será também racional e causal e da forma:

$$\begin{aligned} y &= \{ \underline{y}^0, \underline{y}^1, \underline{y}^2, \dots \} = \\ &= (y_1^0 \ y_2^0 \ \dots y_N^0, y_1^1 \ y_2^1 \ \dots y_N^1, y_1^2 \ y_2^2 \ \dots y_N^2, \dots) \end{aligned} \quad (2.4)$$

A transformada-D da sequência transmitida é expressa por:

$$\underline{Y}(D) = [Y_1(D) \ Y_2(D) \ \dots \ Y_N(D)] \quad (2.5)$$

onde, para cada $j = 1, 2, \dots, N$,

$$Y_j(D) = y_j^0 + y_j^1 D + y_j^2 D^2 + \dots \quad (2.6)$$

Assim, o processo de codificação pode ser expresso por [8]:

$$\underline{Y}(D) = \underline{X}(D) G(D)_{KN} \quad (2.7)$$

onde $G(D)_{KN}$ é a matriz geradora, representando o codificador convolucional e que pode assumir uma de duas formas, quais sejam:

a) Contém somente polinômios na variável 'D', correspondendo a um codificador de estrutura sem realimentação. Neste caso, a matriz $G(D)_{KN}$ é do tipo polinomial:

$$G(D)_{KN} = \begin{bmatrix} G_{11}(D) & G_{12}(D) & \dots & G_{1N}(D) \\ G_{21}(D) & G_{22}(D) & \dots & G_{2N}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{K1}(D) & G_{K2}(D) & \dots & G_{KN}(D) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\text{e } G_{ij}(D) = g_{ij}^0 + g_{ij}^1 D + \dots + g_{ij}^{m_{ij}} D^{m_{ij}}$$

é o polinômio gerador da saída 'j' relativa à entrada 'i', sendo de grau m_{ij} , para $i = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, N$.

b) Contém funções racionais, correspondendo a um codificador racional, o qual possui alguma realimentação em sua estrutura [11].

Def.2.2: O código convolucional C, gerado por um codificador convolucional G_{KN} , é o conjunto de todas as sequências de saída y, produzidas pelo conjunto de todas as sequências de entrada racionais x [8].

Def.2.3: Dois codificadores são racionalmente equivalentes se têm o mesmo conjunto de sequências de saída, sobre o conjunto de todas as sequências de entrada racionais [8].

Vale ressaltar que todos os codificadores polinomiais (item 'a' acima) possuem codificadores racionais (item 'b' acima), aos quais, são racionalmente equivalentes, e vice-versa.

Def.2.4: Um codificador G_{KN} é dito estar na forma sistemática se quaisquer 'K' das 'N' saídas são idênticas às 'K' entradas. Um codificador sistemático é dito canônico, quando pode ser associado a uma matriz $G(D)_{KN}$ da forma:

$$\begin{bmatrix} G_{11}(D) & G_{12}(D) & \dots & G_{1,N-K}(D) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ G_{21}(D) & G_{22}(D) & \dots & G_{2,N-K}(D) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{K1}(D) & G_{K2}(D) & \dots & G_{K,N-K}(D) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = [G'(D) : I_K] \quad (2.9)$$

onde I_K é a matriz identidade de ordem 'K' e, para $j \leq N-K$, $G_{ij}(D)$ pode ser qualquer polinômio de grau m_{ij} , tal que, cada saída $Y_j(D) \neq X_i(D)$ [6,8].

Forney [11] demonstrou que todo codificador é equivalente a um codificador sistemático, o qual forma uma classe canônica, no sentido de ser realizado com o menor número de elementos de memória possível, entre todos os codificadores equivalentes. No entanto, sua matriz $G(D)_{KN}$ pode ser ou não polinomial.

2.3. ALGUMAS PROPRIEDADES RELACIONADAS ÀS MATRIZES

POLINOMIAIS $G(D)_{KN}$

Este trabalho se atém às sequências de entrada racionais e causais, como anteriormente mencionado, bem como, a codificadores de estrutura sem realimentação, cuja operação é totalmente descrita pelas eqs. 2.1 a 2.8 e, cujas propriedades podem ser completamente determinadas a partir da matriz geradora $G(D)_{KN}$.

Def.2.5: O retardo de um polinômio corresponde à potência do termo de menor grau do polinômio, e o retardo de um conjunto de polinômios é o menor entre os retardos dos membros do conjunto. O retardo de uma matriz geradora é igual à soma dos retardos de suas linhas [6,26].

Def.2.6: O grau de um polinômio corresponde à potência do termo de maior grau do polinômio, e o grau de um conjunto de polinômios é o maior entre os graus dos membros do conjunto. O grau de uma matriz geradora é igual à soma dos graus de suas linhas [6,26].

Def.2.7: O comprimento de memória de um polinômio, ou de um conjunto de polinômios, é a diferença entre o grau e o retardo do mesmo. O comprimento total de memória de uma matriz geradora é igual à soma dos comprimentos de memória de suas linhas [6,26].

Def.2.8: Um codificador é não-catastrófico se e somente se o máximo divisor comum (MDC) dos $\binom{N}{K}$ determinantes de todas as submatrizes $K \times K$ da matriz geradora (conjunto de determinantes) é igual a D^L , onde $L \geq 0$ [20].

Se um codificador é catastrófico, um número finito de erros de transmissão pode resultar em um número infinito de erros na decodificação, daí por que se deve evitar a sua escolha.

Def.2.9: Um codificador é básico se e somente se é não-catastrófico e sem retardo ($L = 0$; MDC = 1) [26].

Def.2.10: Um codificador é de máximo retardo (MR) se e somente se o retardo de sua matriz geradora é igual ao de seu conjunto de determinantes [26].

Def.2.11: Um codificador é de mínimo grau (mg) se e somente se o grau de sua matriz geradora é igual ao de seu conjunto de determinantes [26].

Def.2.12: Um codificador é de mínimo comprimento total de memória (mCTM) se e somente se é MR e mg. Em outras palavras, um codificador é mCTM se e somente se o comprimento de memória de seu conjunto de determinantes é igual ao comprimento total de

memória de sua matriz geradora [26].

Def.2.13: Um codificador básico é mínimo se e somente se for mCTM [26].

Esta última definição é baseada na definição original de codificadores mínimos dada por Forney [11], o qual demonstrou que todo codificador é equivalente a um codificador mínimo. Forney [11] também demonstrou que os codificadores mínimos apresentam as seguintes características:

- a) Têm a sua representação esquemática "óbvia" (fig.2.2) sem realimentação e com o menor número de elementos de memória possível, entre todos os seus codificadores equivalentes;
- b) Levam às sequências de erro decodificadas mais curtas, por evento de erro.

Assim, os codificadores mínimos formam uma classe canônica, em relação aos códigos convolucionais.

Embora os codificadores sistemáticos também sejam uma classe canônica, em relação aos códigos convolucionais, nem sempre têm uma representação esquemática óbvia sem realimentação (fig.2.2), como os codificadores mínimos. Neste trabalho, os codificadores mínimos serão a base, na procura dos melhores códigos para cada classe de codificadores, segundo o comprimento total de memória.

2.4. A REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMA DE TRELIÇA

No diagrama de treliça, cada ramo é geralmente identificado com o par entrada/saída de bytes \underline{X} e \underline{Y} , associados entre si pelo processo de codificação. Na fig.2.1d, esta

identificação é feita ao lado de cada nó da treliça, por grupos de pares $\underline{X}/\underline{Y}$ que, da esquerda para a direita, estão associados aos ramos convergentes no nó, no sentido de cima para baixo.

Como anteriormente mencionado, a cada sequência de informação x (semi-infinita), o processo de codificação faz corresponder uma sequência transmitida, ou palavra-código y (semi-infinita) em C . No diagrama de treliça, isto corresponde ao caminho de entrada:

$$x = \{ \underline{X}^0, \underline{X}^1, \underline{X}^2, \dots \} \quad (2.10a)$$

com bytes de entrada $\underline{X}^t = [X_1 X_2 \dots X_K]$ e ao caminho de saída:

$$y = \{ \underline{Y}^0, \underline{Y}^1, \underline{Y}^2, \dots \} \quad (2.10b)$$

com bytes de saída $\underline{Y}^t = [Y_1 Y_2 \dots Y_N]$, e $t = 0, 1, 2, \dots$, respectivamente.

Geralmente, podem-se representar as sequências, nas eqs. 2.10, por segmentos de comprimento $L_x=L_y$, como:

$$x = \{ \underline{X}^0, \underline{X}^1, \dots, \underline{X}^t, \dots, \underline{X}^{L_x-1} \} \quad (2.11a)$$

e

$$y = \{ \underline{Y}^0, \underline{Y}^1, \dots, \underline{Y}^t, \dots, \underline{Y}^{L_y-1} \} \quad (2.11b)$$

respectivamente. Estes caminhos entrada/saída correspondem, no diagrama de treliça, à sequência de nós (estados) \underline{s} :

$$s = \{ \underline{s}^0, \underline{s}^1, \dots, \underline{s}^t, \dots, \underline{s}^{L_y} \} \quad (2.12)$$

onde $\underline{s}^t = [s_1 s_2 \dots s_M]$ representa, para cada $t = 0, 1, \dots, L_y$, o conteúdo dos registradores de deslocamento que compõem a estrutura de memória do codificador, de comprimento total igual a ' M '.

Def.2.14: Um caminho genérico y de comprimento ' L_y ' é dito conter um laço, ou laços, se possui uma ou mais repetições de um ou mais nós \underline{s} . Se não contiver laços, y é dito ser um caminho

fundamental (y_{CF}) [6].

De acordo com a representação em treliça, os codificadores podem ser separados em classes simples ($G_{KN} ; m_1, m_2, \dots, m_K$), com a propriedade de apresentarem uma mesma estrutura de memória e, portanto, uma mesma estrutura de treliça. A partir daí, o conjunto total de classes ($G_{KN} ; M$) é definido como o conjunto de todas as classes simples com comprimento total de memória igual a $M = \sum_{i=1}^K m_i$. A fig.2.3 apresenta todas as representações esquemáticas de memória das possíveis classes simples, para cada conjunto total de classes, onde $K = 1, \dots, 5$ e $M = 1, \dots, 5$. Nesta figura, as classes simples marcadas com um asterisco (*) apresentam transições paralelas em suas estruturas de treliça correspondentes (transições que começam e terminam em nós conjuntos).

2.5. A DISTÂNCIA MÍNIMA DE UM CÓDIGO CONVOLUCIONAL E O ALGORITMO DE VITERBI

2.5.1. A DISTÂNCIA MÍNIMA

Várias medidas de distância têm sido definidas para códigos convolucionais, cada uma mais propícia a um dado procedimento de decodificação. A distância mínima, d_{MIN} , ou distância livre de um código (do inglês: free-distance, d_{FREE}) é o método de medição de distância mais apropriado para esquemas de decodificação por máxima verossimilhança [8].

Para códigos convolucionais binários, a distância mínima é definida como [6]:

$$d_{MIN} = \min_{y \neq y'} d_H(y, y') \quad (2.13a)$$

onde

$$d_H(y, y') = \sum_{t=1}^{Ly} d_H(\underline{y}^t, \underline{y}'^t) \quad (2.13b)$$

é a distância de Hamming (o número de bits não-coincidentes) entre duas palavras-código em C, ou caminhos, no diagrama de treliça, eq.2.11b. Pela estrutura dos códigos convolucionais, tem-se:

$$d_{MIN} = \min_{y \neq (\emptyset)} w_H(y, Ly) \quad (2.14a)$$

onde

$$w_H(y, Ly) = \sum_{t=1}^{Ly} w_H(\underline{y}^t) \quad (2.14b)$$

é o peso de Hamming (número de bits iguais a '1') de caminhos não-nulos y, de comprimento 'Ly', associado a cada byte \underline{y} em y.

A distância mínima também pode ser definida como a distância mínima Euclidiana (no sentido vetorial), entre sequências de sinais modulados a(y), ou seja [6]:

$$d_{MIN} = \min_{y \neq y'} d_E[a(y), a(y')] \quad (2.15a)$$

onde

$$d_E[a(y), a(y')] = \left(\sum_{t=1}^{Ly} d_E^2[a(\underline{y}^t), a(\underline{y}'^t)] \right)^{1/2} \quad (2.15b)$$

é a distância Euclidiana entre as sequências a(y) e a(y') de sinais modulados (símbolos de canal); $d_E[a(\underline{y}^t), a(\underline{y}'^t)]$ representa a distância Euclidiana entre os símbolos de canal correspondentes aos bytes \underline{y}^t e \underline{y}'^t , respectivamente, para quaisquer duas sequências codificadas não-coincidentes, e de mesmo comprimento $Ly = Ly'$ (ver adiante a secção 3.2.).

2.5.2. O ALGORITMO DE VITERBI

Seja P, no diagrama de treliça da fig.2.4, o caminho de menor distância, em relação à sequência recebida, no

segmento entre os nós \underline{s}^0 e \underline{s}^5 , e que passa pelo nó intermediário \underline{s}^3 . Seja P_1 o segmento de P entre os nós \underline{s}^0 e \underline{s}^3 , e P_2 , o segmento de P entre os nós \underline{s}^3 e \underline{s}^5 . Claramente, P_1 é o menor caminho entre \underline{s}^0 e \underline{s}^3 , pois, se houvesse outro caminho Q menor, o caminho QP_2 seria menor do que $P=P_1P_2$, contradizendo a minimalidade de P . Esta observação é a chave para o algoritmo de decodificação de Viterbi [31], o qual é um algoritmo de máxima verossimilhança que, aproveitando-se da estrutura da treliça, diminui consideravelmente o esforço para a decodificação.

No algoritmo de Viterbi, para uma dada sequência recebida, sempre que caminhos se encontram em um dado nó, é possível descartar aqueles caminhos que não têm a menor distância em relação à dada sequência. A partir deste nó, os incrementos de distância são iguais para todos os caminhos que nele convergem afetando apenas os ramos subsequentes. Assim, a cada passo na treliça, são armazenados, o caminho de menor distância (caminho sobrevivente) e o valor desta distância (a métrica), em relação à sequência recebida. Isto permite dar continuidade ao processo de comparação entre sobreviventes, quando estes vêm a se encontrar em um nó mais adiante. Sempre que mais de um caminho tiver a menor distância, ao chegar a um mesmo nó, qualquer um deles pode ser escolhido como sobrevivente, já que a decodificação subsequente não ajudará a resolver o impasse.

Obviamente, a decodificação de Viterbi, na prática, é limitada a códigos cujos codificadores têm comprimento total de memória (CTM) relativamente pequenos, devido à dependência exponencial das operações do decodificador por bit decodificado com o CTM do codificador [2,12,14,31].

Neste trabalho, o algoritmo de Viterbi será utilizado no cálculo da distância mínima Euclidiana dos códigos AR.

2.6. A REPRESENTAÇÃO POR VETORES COEFICIENTES

Os codificadores G_{KN} que podem ser representados por uma matriz geradora polinomial (eq.2.8), também podem ter uma representação única, através de um conjunto de 'N' vetores, $\{VC(j); j = 1, 2, \dots, N\}$ [6], os quais são caracteristicamente associados a cada classe simples $\{G_{KN}; m_1, m_2, \dots, m_K\}$ de codificadores (ver a secção 2.4.), através de sua estrutura de memória (figs.2.2 e 2.3).

Neste trabalho, a procura de códigos restringe-se à estrutura de memória da forma: $m_1 \gg m_2 \gg \dots \gg m_K \gg 0$. Deste modo, são eliminadas representações redundantes de um mesmo código, no sentido de suas matrizes geradoras serem iguais, a menos de permutações de linhas (ver adiante a secção 4.2.).

Seja $G(D)_{KN}$ a matriz geradora de um dado codificador de comprimento total de memória igual a 'M'. Então, de acordo com as eqs. 2.7 e 2.8, em um instante genérico 't', um byte \underline{Y}^t pode ser obtido a partir dos coeficientes dos termos 'D' em ambos os lados da eq.2.7, sendo então expresso pelas componentes Y_j^t , $j = 1, \dots, N$, como:

$$\begin{aligned} Y_j^t &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_K)^t \begin{bmatrix} g_{1j}^0 & g_{2j}^0 & \dots & g_{Kj}^0 \end{bmatrix}^T + \\ &+ (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_K)^{t-1} \begin{bmatrix} g_{1j}^1 & g_{2j}^1 & \dots & g_{Kj}^1 \end{bmatrix}^T + \dots + \\ &+ (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_K)^{t-m_K} \begin{bmatrix} g_{1j}^{m_K} & g_{2j}^{m_K} & \dots & g_{Kj}^{m_K} \end{bmatrix}^T + \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
& + (x_1 \ x_2 \ \dots x_{K-1})^{t-m_K-1} \begin{bmatrix} m_K+1 & m_K+1 & \dots & m_K+1 \\ g_{1j} & g_{2j} & \dots & g_{K-1,j} \end{bmatrix}^T + \\
& + \dots + (x_1 \ x_2)^{t-m_2+1} \begin{bmatrix} m_2-1 & m_2-1 \\ g_{1j} & g_{2j} \end{bmatrix}^T + \\
& + (x_1 \ x_2)^{t-m_2} \begin{bmatrix} m_2 & m_2 \\ g_{1j} & g_{2j} \end{bmatrix}^T + \\
& + (x_1)^{t-m_2-1} \begin{bmatrix} m_2+1 \\ g_{1j} \end{bmatrix}^T + \dots + (x_1)^{t-m_1} \begin{bmatrix} m_1 \\ g_{1j} \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

onde $(.)^t$ representa o conteúdo de $(.)$ no instante 't', $[.]^T$ representa a operação de transposição, e cada g_{ij}^θ é o coeficiente do termo de grau θ do polinômio $G_{ij}(D)$, na matriz $G(D)_{KN}$.

Seja \underline{b}^t um vetor representativo do conjunto "entrada mais conteúdo da memória do codificador $G(D)_{KN}$ no instante 't'", de forma que:

$$\begin{aligned}
\underline{b}^t = & \begin{bmatrix} (x_1)^{t-m_1} (x_1)^{t-m_1+1} \dots (x_1)^{t-m_2-1} (x_1 \ x_2)^{t-m_2} \\ (x_1 \ x_2)^{t-m_2+1} \dots (x_1 \ x_2 \ \dots x_{K-1})^{t-m_K-1} \\ (x_1 \ x_2 \ \dots x_K)^{t-m_K} (x_1 \ x_2 \ \dots x_K)^{t-m_K+1} \dots \\ \dots (x_1 \ x_2 \ \dots x_K)^{t-1} (x_1 \ x_2 \ \dots x_K)^t \end{bmatrix} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Assim, a componente Y_j^t pode ser expressa por:

$$Y_j^t = \underline{b}^t \begin{bmatrix} \underline{VC}(j) \end{bmatrix}^T$$

onde

$$\begin{aligned}
\underline{VC}(j) = & \begin{bmatrix} (g_{1j}^{m_1}) & (g_{1j}^{m_1-1}) & \dots & (g_{1j}^{m_2+1}) & (g_{1j}^{m_2} g_{2j}^{m_2}) \\ (g_{1j}^{m_2-1} g_{2j}^{m_2-1}) & \dots & (g_{1j}^{m_K+1} g_{2j}^{m_K+1} \dots g_{K-1,j}^{m_K+1}) \\ (g_{1j}^{m_K} g_{2j}^{m_K} \dots g_{Kj}^{m_K}) & (g_{1j}^{m_K-1} g_{2j}^{m_K-1} \dots g_{Kj}^{m_K-1}) & \dots \end{bmatrix} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\dots (g_{1j}^1 \ g_{2j}^1 \ \dots \ g_{Kj}^1) \ (g_{1j}^0 \ g_{2j}^0 \ \dots \ g_{Kj}^0) \]$$

Portanto, cada vetor $\underline{VC(j)}$, com $j = 1, \dots, N$, corresponde a um arranjo especial do vetor de todos os 'K+M' coeficientes da matriz geradora, relativos à saída 'j', ou seja, os coeficientes dos polinômios da coluna 'j' em $G(D)_{KN}$ (ex: fig.2.1f).

3. OS CÓDIGOS DE ALFABETO REDUNDANTE (AR)

3.1. INTRODUÇÃO

Considerando a codificação convolucional e a modulação no espaço de sinais como uma única entidade, Ungerboeck introduziu, em 1977, e consolidou, em 1982, [29,30] o que é aqui referido como códigos de alfabeto redundante (AR).

Os códigos AR oferecem a atrativa possibilidade de obtenção de melhorias no desempenho, comparativamente à modulação não-codificada, sem a expansão da largura de faixa espectral, que normalmente acontece no processo de codificação [5]. Isto se baseia no argumento de que, para relações sinal-ruído suficientemente altas, se o número de símbolos de canal (sinais) é aumentado, mantendo-se a taxa de transmissão de informação constante, é possível obter um decréscimo significativo na probabilidade de erro, para um determinado valor de relação sinal-ruído [27,36].

Ungerboeck [29,30] estudou esquemas de modulação de uma (AM) e duas dimensões (PSK,PAM,QAM) com energia média unitária dos sinais da constelação (para sinais equiprováveis). Considerou, também, a sua transmissão em canais de ruído Gaussiano, branco e aditivo (AWGN), limitados em faixa, desprezando o efeito da interferência intersimbólica, e com um perfeito sincronismo de tempo e de fase da portadora. Além disso, considerou, em simulação, a decodificação por máxima-verossimilhança com decisão suave (do inglês: soft decision), através do decodificador de Viterbi [2,14,31], evitando, assim, perda de informação na decodificação. Neste caso, para altos

valores de relação sinal-ruído, a probabilidade de erro de evento aproxima-se assintoticamente do limitante inferior [12]:

$$P_E \approx N(d_{\text{MIN}}) \cdot Q(d_{\text{MIN}} / 2\sigma) \quad (3.1)$$

onde $N(d_{\text{MIN}})$ é o número médio de eventos de erro com distância mínima Euclidiana (eq.2.15), σ^2 é a variância do ruído e $Q(.)$ é a função de probabilidade de erro Gaussiana:

$$Q(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \int_z^{\infty} \text{EXP}(-t^2/2) dt \quad (3.2)$$

Das eqs. 3.1 e 3.2, conclui-se que os códigos AR devem ser projetados para obterem a máxima distância mínima Euclidiana entre as sequências de sinais modulados, no sentido de minorar a probabilidade de erro.

Como, para altos valores de relação sinal-ruído, o desempenho é especificado pela distância mínima Euclidiana (eq.3.1), um ganho de codificação assintótico (GCA) pode ser definido como:

$$\text{GCA} = 20 \cdot \log_{10}(d_{\text{MIN}} / d_{\text{REF}}) \quad \text{dB} \quad (3.3)$$

onde d_{MIN} é como na eq.2.15, e d_{REF} é a distância mínima entre os sinais de um sistema não-codificado, usado como referência. No entanto, para valores menores (práticos) de relação sinal-ruído, o ganho de codificação é geralmente menor do que o GCA, e a probabilidade de erro deve ser obtida, por meio de limitantes, ou de simulação, para uma melhor estimativa do desempenho do código [4].

3.2. O PROCESSO DE CODIFICAÇÃO AR

A mais conveniente caracterização dos códigos AR

consiste em visualizá-los como um codificador convolucional binário, seguido de um mapeamento das saídas do codificador, num conjunto de símbolos de canal de multiamplitude e/ou multifase (fig.3.1).

Através de um codificador de taxa $R=K/N$, 'K' bits de informação, por intervalo de modulação T , são codificados em 'N' bits. Posteriormente, os 'N' bits codificados são transmitidos por uma constelação de 2^N sinais (ou símbolos de canal), através do mapeamento entre os bits codificados e o conjunto de sinais, chamado de mapeamento por partição de conjunto.

Este mapeamento é obtido como resultado de sucessivas partições da constelação de sinais em subconjuntos com crescentes distâncias mínimas ($\Delta_0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_{N-1}$), entre os sinais que os compõem (ex: fig.3.2) [30].

Para o mapeamento por partição de conjunto e, de acordo com a fig.3.2, não existe apenas uma forma de subdivisão dos conjuntos e, também não é única a forma de numeração dos sinais. Permutando-se determinados subconjuntos, outros mapeamentos podem ser obtidos, com o mesmo padrão de aumento das distâncias mínimas dos subconjuntos. Somente esta última propriedade é significativa.

Ungerboeck [30], através da construção heurística dos códigos em questão, chegou a algumas considerações que, embora não tenham prova formal de que resultarão nos códigos de desempenho ótimo, são comuns a todos os melhores códigos encontrados. Após selecionar uma dada estrutura de treliça, o passo seguinte consiste em relacionar os 2^N sinais da

constelação, às transições da treliça, de modo a obter a máxima distância mínima Euclidiana (eq.2.15) para o código. Neste ponto, as seguintes regras devem ser aplicadas:

- a) Todos os sinais da constelação devem ocorrer com a mesma frequência, provendo ao código uma estrutura simétrica;
- b) Os subconjuntos associados a transições paralelas na treliça (transições, entre nós consecutivos, que começam e terminam juntas) devem ter a maior distância mínima possível, entre os sinais que os compõem;
- c) Os subconjuntos associados a um mesmo estado de origem na treliça, ou a um mesmo estado terminal (transições adjacentes), devem ter a maior distância mínima possível, entre os sinais que os compõem, guardando-se a restrição de que esta seja inferior à do item 'b' acima.

Pode-se definir o peso Euclidiano, ou peso AR, de um caminho y , de comprimento L_y , como [6]:

$$w_{AR}(y, L_y) = \left(\sum_{t=1}^{L_y} w_{AR}^2(\underline{y}^t) \right)^{1/2} = \left(\sum_{t=1}^{L_y} \Delta_{q(\underline{y}^t)}^2 \right)^{1/2} \quad (3.4)$$

onde $q(\underline{y}^t)$ é o número de zeros seguidos, a partir do bit de mais baixa ordem, no byte codificado não-nulo \underline{y}^t do caminho y ; $w_{AR}(\underline{y}^t) = \Delta_{q(\underline{y}^t)}$ representa o peso AR do byte codificado não-nulo \underline{y}^t de y , o qual é dado pela distância mínima de subconjunto, cujo índice é igual a $q(\underline{y}^t)$ (por definição, $w_{AR}(\underline{0}) = 0$).

O peso AR do byte codificado \underline{y}^t nada mais é do que um limitante inferior da menor distância relacionada a um padrão de erro igual a \underline{y}^t .

Ungerboeck [30] derivou um limitante inferior para a distância mínima Euclidiana, em termos dos pesos AR (eq.3.4), de forma que:

$$d_{\text{MIN}} \geq \Delta_{\text{MIN}} = \min_{y \neq (0)} W_{\text{AR}}(y, L_y) \quad (3.5)$$

3.3. A ESTRUTURA DOS CÓDIGOS AR

A partir de conceitos sobre códigos corretores de erro, em geral, Marsan et alii [17] estabeleceram alguns conceitos básicos, sobre a estrutura dos códigos AR, que serão aqui revistos.

Def.3.1: Um código C é dito linear se:

- a) Existe uma operação chamada de 'soma' e descrita pelo símbolo '+', em relação à qual, o alfabeto de saída, ou de canal, (a), forma um grupo abeliano;
- b) O código implica um homomorfismo do alfabeto de entrada, (\underline{X}), no alfabeto de canal, (a). Isto implica que o código tem a propriedade: $a(\underline{X}_i + \underline{X}_j) = a(\underline{X}_i) + a(\underline{X}_j)$.

Teorema 3.1: Para a tríade (K,N,M), o conjunto de todos os códigos lineares pode ser obtido, cascadeando-se um codificador convolucional (K,N,M), com um mapeamento biunívoco do alfabeto de saída do código convolucional, (\underline{Y}), ao alfabeto de saída do código linear em questão, ou alfabeto de canal, (a).

A partir deste teorema, e da descrição dos códigos AR, verifica-se que estes são lineares, segundo a Def.3.1.

Def.3.2: Um código C é dito superlinear se é linear, segundo a Def.3.1 e:

- c) É possível associar, a cada símbolo de canal 'a', um número

real positivo $W(a)$, chamado de peso de 'a', tal que : $d(a_i, a_j) = W(a_i + a_j)$. Estes pesos são uma extensão do peso de Hamming (eq.2.14b).

Define-se, como matriz adição do alfabeto de canal (a), aquela cuja posição (i,j) corresponde ao símbolo que representa a soma ' $a_i + a_j$ ' e, como matriz distância, aquela cuja posição (i,j) corresponde ao valor da distância entre os símbolos a_i e a_j .

Teorema 3.2: Um código C é dito superlinear se e somente se símbolos iguais, na matriz adição do alfabeto de canal (a), correspondem a distâncias iguais, nas posições respectivas da matriz distância, ou seja: $a_i + a_j = a_u + a_v \Rightarrow d(a_i, a_j) = d(a_u, a_v)$.

A partir da Def.3.2 e do Teorema 3.2, verifica-se que se pode calcular a distância mínima, ou analisar o desempenho dos códigos superlineares, tomando-se uma sequência como referência (a sequência toda nula, por exemplo).

Os códigos AR, devido à métrica utilizada (métrica Euclidiana), nem sempre obedecem ao Teorema 3.2. Portanto, para o cálculo da distância mínima Euclidiana, dever-se-ia analisar todos os possíveis pares de sequências, o que demandaria um grande esforço computacional. No entanto, verifica-se que, a partir da definição de peso AR (eq.3.4) e de sua utilização, em lugar das distâncias Euclidianas reais entre os sinais, os códigos AR passam a satisfazer ao Teorema 3.2, ou seja, podem ser analisados como se fossem superlineares. Desta forma, pode-se utilizar a sequência toda nula como referência. A diferença, nesta análise, é que não se estará calculando a distância mínima

do código, mas um limitante inferior (Δ_{MIN}) a esta (eq.3.5).

3.4. UMA EXTENSÃO AO TRABALHO DE UNGERBOECK

Borelli [6], estudando a codificação AR, apresentou uma extensão ao trabalho de Ungerboeck [30], a qual será aqui comentada, em forma de comparação entre os dois trabalhos. Em ambos, para dado comprimento total de memória (CTM) e dadas distâncias mínimas de subconjunto ($\Delta_0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_{N-1}$), o processo de procura objetiva encontrar os codificadores G_{KN} , cujos códigos possuam máximos Δ_{MIN} (eq.3.5).

As linhas gerais do trabalho de Ungerboeck são [6,30]:

- a) Refere-se apenas a codificadores racionais sistemáticos (ver a secção 2.2.), restritos a uma estrutura particular com realimentação. Portanto, consiste numa procura de códigos não-exaustiva, para uma dada classe simples de codificadores (ver a secção 2.4.);
- b) Refere-se a matrizes de paridade $H(D)_{N-K,N}$ tendo uma estrutura particular (item 'a') e considera somente codificadores G_{KN} com $N = K + 1$;
- c) Para cada dado conjunto de parâmetros (como acima citado), o conjunto inicial de procura (CIP) é o conjunto de codificadores do item 'a', com exceção de realizações equivalentes. O critério de seleção empregado é tal a calcular o Δ_{MIN} para todo código em CIP e compará-lo com o do código que, até aquele ponto, tenha o seu maior valor. O procedimento, a cada passo, consiste em escolher o código com o maior Δ_{MIN} ou, mesmo que os valores

sejam iguais para ambos os códigos, escolher apenas um, descartando o outro do processo de procura;

d) Para a estrutura particular de códigos analisada (itens 'a' e 'b'), Ungerboeck demonstrou que $d_{\text{MIN}} \approx \Delta_{\text{MIN}}$.

As linhas do trabalho de Borelli são [6]:

a) Refere-se à classe geral dos codificadores de estrutura sem realimentação, os quais podem gerar qualquer possível código, para um dado conjunto de parâmetros (ver a secção 2.2.). Portanto, a procura de códigos pode ser exaustiva ou não-exaustiva, a depender das disponibilidades computacionais, apenas;

b) Refere-se à estrutura geral das matrizes polinomiais $G(D)^{KN}$ (eq.2.8), para valores pequenos de 'K' e 'N';

c) Para cada conjunto de parâmetros, o conjunto inicial de procura (CIP) é a sequência expurgada (conjunto consistindo de todos os codificadores, com exceção de realizações equivalentes). Para a obtenção da sequência expurgada, é adicionalmente considerada uma classe de equivalência não anteriormente estudada por Ungerboeck. O critério MDF (do inglês: minimum d_{FREE}) [6] de seleção de códigos, posteriormente aplicado, é muito mais eficiente e consome menor tempo de computação do que o cálculo de Δ_{MIN} para cada código do CIP. Assim, codificadores de códigos com Δ_{MIN} menor do que um certo valor especificado antecipadamente são prontamente descartados e, somente para os codificadores selecionados (em número bem menor do que no CIP original), os Δ_{MIN} dos códigos são calculados, a fim de que sejam escolhidos os melhores códigos;

d) Considera a regra do MDC (máximo divisor comum) e do mCTM

(mínimo comprimento total de memória, Def.2.12), selecionando entre os codificadores dos melhores códigos, aqueles com $MDC = 1$ e que são mCTM, ou seja, os codificadores mínimos (Def.2.13).

Este trabalho segue as linhas do trabalho de Borelli, quanto à representação dos codificadores AR e ao tipo de procura, estendendo a possibilidade de procura para codificadores de até cinco entradas ($K = 5$). Além disso, introduz algumas melhorias, como a eliminação de um maior número de codificadores equivalentes, e a eliminação imediata de grande parte dos codificadores catastróficos, o que diminui o tempo de computação empregado.

3.5. O PROCESSO DE CODIFICAÇÃO $K_0 N_0$

Def.3.3: Para uma dada matriz geradora $G(D)_{KN}$, de componentes $G_{ij}(D)$ (eq.2.8), define-se uma matriz estendida $G(D)_{K_0 N_0}$, com $K_0 > K$ e $N_0 > N$, da seguinte forma [6]:

- Para $i \leq K$ e $j \leq N$, os termos $G_{ij}(D)$ correspondem aos da matriz $G(D)_{KN}$;
- Para $i > K$ e $j > N$, os termos $G_{ij}(D)$ são todos iguais a zero, exceto quando $(i, j) \in \{(K+1, N+1), (K+2, N+2), \dots, (K_0, N_0)\}$, para os quais, os termos $G_{ij}(D)$ correspondentes são todos iguais a um.

Semelhantemente à eq.2.7, o processo $K_0 N_0$ pode ser descrito pela equação:

$$\underline{Y}^{N_0}(D) = \underline{X}^{K_0}(D) G(D)_{K_0 N_0} \quad (3.6)$$

onde

$$\underline{X}^{K_0}(D) = [X_1(D) \dots X_K(D) X_{K+1}(D) \dots X_{K_0}(D)] \quad (3.7a)$$

$$\underline{Y}^{N_0}(D) = [Y_1(D) \dots Y_N(D) Y_{N+1}(D) \dots Y_{N_0}(D)] \quad (3.7b)$$

e

$$G(D)_{K_0 N_0} = \begin{bmatrix} G_{11}(D) & \dots & G_{1N}(D) & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ G_{K1}(D) & \dots & G_{KN}(D) & 0 & & & & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7c)$$

e onde $X_1(D) \dots X_K(D)$ e $Y_1(D) \dots Y_N(D)$ estão relacionados pelo processo KN (eq.2.7), e os outros dígitos obedecem à seguinte relação:

$$\begin{aligned} X_{K+1}(D) &= Y_{N+1}(D) \\ X_{K+2}(D) &= Y_{N+2}(D) \\ &\vdots \\ X_{K_0}(D) &= Y_{N_0}(D) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, o que, na estrutura de treliça associada ao codificador G_{KN} , for referido como um ramo, ou transição entre dois nós, corresponde, na estrutura de treliça associada a $G_{K_0 N_0}$, a um conjunto com 2^{N_0-N} transições paralelas entre estes dois nós (ex: fig.3.3).

Propriedade 3.1:

$$\Delta_{MIN}^{K_0 N_0} = \min \{ \Delta_{MIN}^{KN}(\Delta_i^{K_0 N_0}); \Delta_N^{K_0 N_0} \} \quad (3.9)$$

ou seja, o Δ_{MIN} do código associado à matriz $G(D)_{K_0 N_0}$ é o mínimo

entre o Δ_N associado à constelação de 2^{N_0} sinais, e o Δ_{MIN} do código associado à matriz $G(D)_{KN}$, onde, ao invés das distâncias mínimas de subconjunto referentes à constelação de 2^N sinais, utilizam-se aquelas referentes à constelação de 2^{N_0} sinais (para a prova, ver [6]).

3.6. UMA GENERALIZAÇÃO DOS CÓDIGOS AR

3.6.1. INTRODUÇÃO

Em trabalhos de 1985 e 1986, Wolf e Padovani [34,35] investigaram uma generalização dos códigos AR [30], na qual, a codificação de canal se realiza no espaço de sinais de sistemas de modulação em frequência e fase (P-FSK/M-PSK), ou em frequência, amplitude e fase (P-FSK/M-QAM). Esta técnica alia o método da partição de conjunto [30] (em que a condição de Ungerboeck foi ampliada para: $\Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_{N-1}$), codificação convolucional e modulações FSK e PSK, ou FSK e QAM, gerando códigos no espaço de sinais de quatro ou mais dimensões. Neste sentido, tais códigos diferenciam-se dos códigos AR propostos por Ungerboeck, no fato dos sinais requererem maiores larguras de faixa espectral. Em contrapartida, apresentam melhores desempenhos, em termos de ganho de codificação, principalmente os esquemas P-FSK/M-PSK.

3.6.2. O ESQUEMA AR 2-FSK/M-PSK

A constelação proposta [34,35] é composta de sinais do tipo:

$$s(t) = (\sqrt{2/T}) \cdot \cos[(\omega_c \pm h\pi/T) \cdot t - \varphi_i] \quad (3.10)$$

onde $0 \leq t < T$ e T é o intervalo de modulação; $\varphi_i = 2\pi i/M$, $i = 0, 1, \dots, M-1$; h é uma constante real, denominada de índice de

modulação. Diferentes larguras de faixa e desempenhos, em termos de probabilidade de erro, podem ser obtidos, em se variando o valor de h .

O espaço de sinais, gerado por esta constelação, tem quatro dimensões mas, para efeito de ilustração (ex: fig.3.4), pode ser representado por pontos, em dois diferentes planos bidimensionais, cada um especificado por uma frequência.

O esquema, portanto, compõe-se de uma constelação expandida de $2M$ sinais, ou seja, $\log_2 2M = N$ bits/sinal, para se transmitirem $K = \log_2 M$ bits de informação por intervalo de tempo T . Isto é realizado, utilizando-se codificação convolucional de taxa $R = K/N$ e uma posterior associação do byte codificado, em cada intervalo T , a um sinal da constelação, pelo método da partição de conjunto [30]. Para tanto, um dos bits seleciona uma das duas portadoras de frequência, e os $K = \log_2 M$ bits restantes selecionam uma das ' M ' fases da portadora correspondente.

3.6.3. PROPRIEDADES ESPECTRAIS

Neste trabalho, será feita uma análise das propriedades espectrais do esquema de modulação não-codificado (eqs.3.10), a partir das seguintes considerações:

- a) Os bits de informação, $i = 1, 2, \dots, K$, $t = 0, T, 2T, \dots$, são modelados como uma sequência de variáveis aleatórias binárias independentes, identicamente distribuídas, que assumem os valores '0' ou '1', com iguais probabilidades;
- b) O pulso $g_T(t)$ é retangular, de amplitude unitária e de duração ' T ' seg.

Com tais considerações, o sinal transmitido pode

ser expresso por:

$$r(t) = \text{Re} \{ u(t) \cdot \text{EXP}[j \cdot \omega_c \cdot t] \} \quad (3.11)$$

onde $\text{Re}(\cdot)$ representa a parte real de um número complexo; $\text{EXP}(z) = e^z$ e $u(t)$ é o processo aleatório em banda básica, da forma:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot g_T(t - nT) \cdot \text{EXP}[j(b_n \cdot \omega_d \cdot t - a_n)] \quad (3.12)$$

onde $A = \sqrt{2/T}$; $\omega_d = h \pi / T$; a_n e b_n são variáveis aleatórias independentes; a_n pode assumir os valores $2 \pi i / M$, $i = 0, \dots, M-1$, com iguais probabilidades; b_n pode assumir os valores '+1' ou '-1', com iguais probabilidades.

Verifica-se (ver o apêndice I, para a demonstração completa) que o processo aleatório $u(t)$ é um processo ciclo-estacionário, ou seja, sua função de auto-correlação é periódica no tempo, enquanto que a média temporal da função de auto-correlação é função apenas do intervalo de tempo entre as ocorrências das amostras. Assim, a função de densidade espectral (média) do processo existe e não é função do tempo, sendo expressa por (fig.3.5):

$$\text{FDE}(\omega) = (S_a^2[(\omega - \omega_d) \cdot T/2] + S_a^2[(\omega + \omega_d) \cdot T/2]) \quad (3.13)$$

onde $\omega_d = h \pi / T$, $S_a(z) = \text{SEN}(z)/z$, e a função de densidade espectral e a média temporal da função de auto-correlação formam um par, com relação à transformada de Fourier.

Pela eq.3.13 e fig.3.5, pode-se observar que, o aumento do índice de modulação h representa uma expansão lateral da FDE, no espectro de frequência e que, para $h = 0$, esta função é a correspondente a um esquema M-PSK.

De fato, uma medida desta expansão pode ser dada

pela taxa entre a largura de faixa requerida pelo esquema 2-FSK/M-PSK e aquela requerida pelo esquema M-PSK. A tabela da fig.3.6 apresenta os resultados desta comparação, para alguns valores de h , e para dois critérios de definição de largura de faixa: o de 90% (contém 90% da potência do sinal) e o de 99% (contém 99% da potência do sinal). Esta largura de faixa é obtida através da integração da FDE [35].

Como era esperado, para o critério de 90%, o esquema 2-FSK/M-PSK requereu maiores larguras de faixa do que o esquema M-PSK. Surpreendentemente, para o critério de 99%, o esquema 2-FSK/M-PSK requereu larguras de faixa um pouco menores.

Vale ressaltar que o resultado obtido na eq.3.13, realizadas as devidas substituições, é o mesmo obtido por Wolf e Padovani [35].

4. AS CLASSES DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES AR

4.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados os conceitos necessários à realização de uma procura dos melhores códigos AR, para uma dada constelação de sinais e dada complexidade dos códigos.

São feitas algumas considerações, acerca da estrutura física dos codificadores, e definidas as classes gerais de equivalência AR [6,30]. Adicionalmente, uma nova classe de equivalência é apresentada (secção 4.3.6.), o que representa a eliminação de um maior número de codificadores equivalentes, para uma dada classe simples (ver a secção 2.4.) de codificadores.

Posteriormente, define-se a sequência expurgada de codificadores, como sendo a sequência, da qual, foram descartados os codificadores equivalentes, sequência esta sobre a qual se realizará a procura de códigos, para os esquemas propostos neste trabalho.

4.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE A ESTRUTURA DOS CODIFICADORES

Neste trabalho, são considerados os codificadores convolucionais binários, com estrutura de memória sem realimentação, os quais podem ser representados por uma matriz polinomial $G(D)_{KN}$ (eq.2.8), ou pelo conjunto $\{VC(j); j=1, \dots, N\}$ de vetores coeficientes (eq.2.18).

Além disso, para a procura de códigos, são considerados, apenas, os codificadores cuja estrutura de memória $\{m_1, m_2, \dots, m_K\}$ apresenta a seguinte relação: $m_1 \gg m_2 \gg$

$\rangle \dots \rangle m_K > 0$ (fig.2.2). Para o caso em que $m_1 > m_2 > \dots > m_K$, isto permite eliminar representações equivalentes (Def.4.2) de um codificador, por permutação de suas linhas de entrada. Para outros casos de equivalência por permutação de linhas, ver as secções 4.3.4. e 4.3.6.

Também, como $m_i > 0$, para todo $i = 1, \dots, K$, são eliminados os codificadores do tipo $G_{K_0 N_0}$ (Def.3.3), ou seja, aqueles cujas estruturas de treliça apresentam transições paralelas entre pares de nós. Isto se deve ao fato de se poder, facilmente, calcular a distância mínima associada a um codificador estendido $G_{K_0 N_0}$, a partir da estrutura do codificador G_{KN} respectivo e das distâncias mínimas de subconjunto $\Delta_j^{N_0}$, para $j=0, \dots, N$, resultantes da partição da constelação de 2^{N_0} sinais (Propriedade 3.1).

Na fig.2.3, estão todas as representações esquemáticas de memória das possíveis classes simples, para cada conjunto total de classes, onde $K = 1, 2, \dots, 5$ e $M = 1, 2, \dots, 5$. Nesta figura, as classes simples com um asterisco (*) correspondem a codificadores $G_{K_0 N_0}$. Assim, para efeito da procura de códigos AR, esta será realizada, considerando-se apenas os codificadores G_{KN} .

4.3. A EQUIVALÊNCIA AR ENTRE CODIFICADORES

4.3.1. INTRODUÇÃO

Def.4.1: Duas palavras-código y (ou caminhos y) apresentam equivalência AR se estão associadas ao mesmo peso AR (eq.3.4).

Def.4.2: Dois códigos C_1 e C_2 apresentam equivalência AR se estão

associados a conjuntos de palavras-código equivalentes, sobre todo o conjunto de seqüências de entrada causais x .

Propriedade 4.1: Dois códigos C_1 e C_2 , gerados por dois codificadores racionalmente equivalentes (Def.2.3), apresentam equivalência AR [6].

Na procura pelos melhores códigos, pertencentes a um conjunto total de classes $\{G_{KN} : M\}$, deve-se sempre procurar distinguir, entre os diferentes codificadores G_{KN} , aqueles que geram códigos com mesmas propriedades de distância (equivalentes) e, somente realizar a procura, sobre os códigos que representam estas classes de equivalência.

A seguir, são definidas algumas classes de equivalência AR, para codificadores de uma mesma classe simples (secções 4.3.2., 4.3.3., 4.3.4. e 4.3.6.), ou de classes simples diferentes (secção 4.3.5.), porém, sempre com uma mesma estrutura de memória $\{m_1, \dots, m_K\}$.

4.3.2. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES REVERSOS

Def.4.3: O reverso de um polinômio de grau n :

$$P(D) = p_0 + p_1 D + p_2 D^2 + \dots + p_n D^n$$

é unicamente representado pelo polinômio $P^R(D)$, expresso por:

$$P^R(D) = p_n + p_{n-1}D + p_{n-2}D^2 + \dots + p_1 D^{n-1} + p_0 D^n \quad (4.1)$$

desde que p_0 e p_n sejam não-nulos.

Tal conceito pode ser estendido para uma família de polinômios, com quaisquer coeficientes p_i , $i = 0, \dots, n$, desde que, pelo menos um polinômio tenha $p_0 \neq 0$ e, pelo menos um polinômio tenha $p_n \neq 0$.

A partir daí, a matriz reversa de uma matriz geradora polinomial $G(D)_{KN}$, expressa por $G^R(D)_{KN}$, pode ser

definida como sendo uma matriz constituída por linhas, com os polinômios reversos daqueles em $G(D)_{KN}$. Portanto, a matriz $G^R(D)_{KN}$ também pertence à classe simples de $G(D)_{KN}$, e está associada a um codificador que é dito reverso daquele associado a $G(D)_{KN}$.

A partir da matriz reversa $G^R(D)_{KN}$ de $G(D)_{KN}$, pode-se, então, definir o conjunto de vetores coeficientes reversos, $\{\underline{VC}^R(j); j = 1, 2, \dots, N\}$ de $\{\underline{VC}(j); j = 1, 2, \dots, N\}$, onde cada vetor $\underline{VC}(j)$ é dado pela eq.2.18. Assim, para todo $j = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \underline{VC}^R(j) = [& (g_{1j}^0) \quad (g_{1j}^1) \quad \dots \quad (g_{1j}^{m_1-m_2}) \quad (g_{2j}^0) \\ & (g_{1j}^{m_1-m_2+1}) \quad (g_{2j}^1) \quad \dots \quad (g_{1j}^{m_1-m_3-1}) \quad (g_{2j}^{m_2-m_3-1}) \\ & (g_{1j}^{m_1-m_3}) \quad (g_{2j}^{m_2-m_3}) \quad (g_{3j}^0) \quad \dots \\ & \dots \quad (g_{1j}^{m_1-m_K}) \quad (g_{2j}^{m_2-m_K}) \quad \dots \quad (g_{Kj}^0) \quad \dots \\ & \dots \quad (g_{1j}^{m_1}) \quad (g_{2j}^{m_2}) \quad \dots \quad (g_{Kj}^{m_K}) \quad] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Teorema 4.1: Dentro da classe simples $\{G_{KN} ; m_1, m_2, \dots, m_K\}$, seja C_1 o código gerado por um codificador G_1 e C_2 , o código gerado por um codificador G_2 , tal que $G_2 = G_1^R$. Então, o código C_2 é equivalente AR ao código C_1 [6].

A equivalência, entre os códigos gerados por codificadores reversos, consiste em que ambos possuem os mesmos bytes codificados \underline{y} , por palavra-código y , embora que não na mesma ordem de geração. Assim, esta equivalência é válida, tanto para códigos convolucionais binários (métrica de Hamming), como para códigos AR (métrica Euclidiana) (ver a secção 2.5.).

4.3.3. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DA COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE CODIFICADORES DE UMA MESMA CLASSE SIMPLES

Teorema 4.2: Seja C_1 o código gerado pelo codificador G_1 , pertencente à classe simples $(G_{KN}; m_1, m_2, \dots, m_K)$, descrito pelo conjunto $\{\underline{VC}_1(j); j = 1, 2, \dots, N\}$ de vetores coeficientes, tais que não há vetores idênticos entre eles e nenhum é combinação linear dos outros (ver adiante a seção 4.3.5.). Seja o conjunto $\{\underline{VC}_2(j); j = 1, 2, \dots, N\}$ de vetores coeficientes, o qual foi obtido do conjunto $\{\underline{VC}_1(j)\}$, através das seguintes combinações lineares entre as suas componentes:

$$\begin{aligned} \underline{VC}_2(j) &= \underline{VC}_1(j); \quad j = 1 \\ \underline{VC}_2(j) &= \underline{VC}_1(j) + \sum_{u=1}^{j-1} a_{uj} \cdot \underline{VC}_1(u); \quad j > 1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde cada coeficiente a_{uj} , $u = 1, 2, \dots, j-1$; $j = 2, 3, \dots, N$, pode assumir os valores '0' ou '1', independentemente. Assim, o conjunto $\{\underline{VC}_2(j)\}$ descreve um codificador G_2 , pertencente à mesma classe simples de G_1 , e os códigos C_2 e C_1 respectivos apresentam equivalência AR [6].

Tal equivalência consiste em que, para ambos os códigos C_1 e C_2 , as palavras-código terão bytes codificados \underline{Y}_1 e \underline{Y}_2 , respectivos, com o mesmo número de zeros, contados a partir do bit de mais baixa ordem (isto é: $q(\underline{Y}_1) = q(\underline{Y}_2)$). Estes bytes codificados, portanto, estarão associados a métricas Euclidianas iguais (isto é: $\Delta_{q(\underline{Y}_1)} = \Delta_{q(\underline{Y}_2)}$), embora possam ser diferentes, do ponto de vista binário (métrica de Hamming).

Corolário 4.2: O número de codificadores que são derivados de um mesmo codificador G_1 , de acordo com a eq.4.3, é igual a $\sqrt{2^{N(N-1)}} - 1$, independentemente da estrutura de memória de G_1 [4].

Isto se deve ao fato de que, cada conjunto de coeficientes $\{a_{uj} ; u = 1, 2, \dots, j-1 ; j = 2, \dots, N\}$ descreve um codificador equivalente, havendo um total de ' $N(N-1)/2$ ' coeficientes diferentes por conjunto, com cada um podendo assumir os valores de '0' ou '1'.

4.3.4. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES SIMÉTRICOS PERMUTADOS

Def.4.4: A estrutura de memória $\{m_1, m_2, \dots, m_K\}$ de um codificador é dita simétrica se $m_1 = m_2 = \dots = m_K = m$.

Para uma estrutura simétrica, a representação dos codificadores por meio do conjunto $\{\underline{VC}(j) ; j = 1, 2, \dots, N\}$ de vetores coeficientes (eq.2.18) se restringe, para $j=1, 2, \dots, N$, a:

$$\underline{VC}(j) = [(g_{1j} \ g_{2j} \ \dots \ g_{Kj})^m \ (g_{1j} \ g_{2j} \ \dots \ g_{Kj})^{m-1} \ \dots \\ \dots \ (g_{1j} \ g_{2j} \ \dots \ g_{Kj})^0] \quad (4.4)$$

Seja, então, um conjunto de índices $\{p\} = \{p_1, p_2, \dots, p_K\}$, representativo de alguma permutação entre os índices $\{i\} = \{1, \dots, K\}$, das entradas. Para um codificador G_{KN} , onde houve permutação no seu conjunto de entradas, de acordo com $\{p\}$, define-se um codificador permutado G_{KN}^P , cuja representação $\{\underline{VC}^P(j)\}$ é dada por:

$$\underline{VC}^P(j) = [(g_{p_1j} \ g_{p_2j} \ \dots \ g_{p_Kj})^m \ (g_{p_1j} \ g_{p_2j} \ \dots \ g_{p_Kj})^{m-1} \ \dots \\ \dots \ (g_{p_1j} \ g_{p_2j} \ \dots \ g_{p_Kj})^0] \quad (4.5)$$

Teorema 4.3: Dentro da classe simples $\{G_{KN} ; m_1, m_2, \dots, m_K\}$ para a qual $m_1 = m_2 = \dots = m_K = m$, seja C_1 o código gerado por um codificador G_1 e C_2 , o código gerado por um codificador G_2 , tal que $G_2 = G_1^P$. Então, o código C_2 é equivalente AR ao código C_1 .

[6].

A equivalência, entre os códigos gerados por codificadores permutados, consiste em que ambos possuem os mesmos bytes codificados \underline{Y} , por palavra-código y . Assim, esta equivalência é válida, tanto para códigos convolucionais binários (métrica de Hamming), como para códigos AR (métrica Euclidiana).

Para cada codificador simétrico, há $K! - 1$ ($K! = K$ fatorial) codificadores permutados equivalentes.

4.3.5. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DA COMBINAÇÃO LINEAR ENTRE CODIFICADORES DE DIFERENTES CLASSES SIMPLES

Teorema 4.4: Seja C_1 o código gerado por um codificador G_1 , pertencente à classe simples $\{G_{KN}; m_1, m_2, \dots, m_K\}$, descrito pelo conjunto $\{\underline{VC}_1(j); j = 1, 2, \dots, N\}$ de vetores coeficientes, de modo que um grupo de 'p' destes vetores apresentem uma dependência linear entre eles. Então, sempre haverá um codificador G_2 , com 'K' entradas e 'N*' saídas, onde $N^* \leq N-1$, com a mesma estrutura de memória de G_1 , para o qual, o código C_2 respectivo apresenta equivalência AR, em relação a C_1 [6].

A partir do Teorema 4.4, é facilmente verificável que, para o grupo de 'p' vetores linearmente dependentes em $\{\underline{VC}_1(j)\}$, se apenas 'p*' dentre eles, com $p^* < p$, são linearmente independentes, então, existe um codificador G_2 , com 'K' entradas e 'N*' saídas, para o qual $N^* = N - p + p^*$, cujo código C_2 apresenta equivalência AR, em relação a C_1 .

Um caso especial deste tipo de equivalência acontece, quando a combinação linear se traduz em igualdade, entre todas as 'p' saídas. Neste caso, todas, menos uma, devem ser eliminadas, ou seja, $p^* = 1$ e $N^* = N - p + 1$.

Embora apresentem equivalência AR, os códigos C_1 e C_2 não apresentam equivalência binária, pois, C_1 tem um maior número de saídas binárias ($N > N^*$). Daí por que, devido à representação binária mais compacta de C_2 , e a apresentarem, os dois códigos, as mesmas propriedades AR, os códigos do tipo C_1 podem ser sempre descartados, numa procura pelos melhores códigos AR.

4.3.6. A CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DOS CODIFICADORES PARCIALMENTE SIMÉTRICOS PERMUTADOS

Def.4.5: A estrutura de memória (m_1, m_2, \dots, m_K) de um codificador é dita parcialmente simétrica se, pelo menos duas das 'K' entradas, mas não todas (ver a secção 4.3.4.), apresentam valores iguais de m_i .

Ex.4.1: A estrutura de memória $(m_1, m_2, m_3) = (2, 1, 1)$ é parcialmente simétrica, pois, $m_2 = m_3 = 1$.

Seja, então, um conjunto de Índices $(p) = (p_1, p_2, \dots, p_K)$, representativo de uma permutação, no conjunto de Índices (i) , das 'K' entradas, apenas para as entradas que apresentam valores iguais de m_i . Assim, para um codificador G_{KN} , onde houve permutação no seu conjunto de entradas, de acordo com (p) , define-se um codificador permutado G_{KN}^P , pertencente à mesma classe simples $(G_{KN}; m_1, \dots, m_K)$, cuja representação $\{\underline{VC}^P(j); j=1, \dots, N\}$ é obtida da representação de G_{KN} .

Ex.4.2: Seja um codificador G_{34} , com estrutura de memória segundo o Ex.4.1. Seja a permutação $(p) = (1, 3, 2)$, sobre o conjunto de Índices das entradas $(i) = (1, 2, 3)$. Isto representa

uma permutação entre as entradas de índices '2' e '3'. Para este código, a representação, para todo j , é dada por:

$$\underline{VC}(j) = [g_{1j}^2 \ g_{1j}^1 \ g_{2j}^1 \ g_{3j}^1 \ g_{1j}^0 \ g_{2j}^0 \ g_{3j}^0]$$

E a representação $\{\underline{VC}^P(j)\}$, para todo j , é dada por:

$$\underline{VC}^P(j) = [g_{1j}^2 \ g_{1j}^1 \ g_{3j}^1 \ g_{2j}^1 \ g_{1j}^0 \ g_{3j}^0 \ g_{2j}^0]$$

Teorema 4.5: Dentro da classe simples $(G_{KN} ; m_1, \dots, m_K)$, para a qual, a estrutura de memória é parcialmente simétrica, seja C_1 , o código gerado por um codificador G_1 e, C_2 o código gerado por um codificador G_2 , tal que $G_2 = G_1^P$. Então, o código C_2 é equivalente AR ao código C_1 .

Prova: Por definição, o codificador G_2 é o codificador permutado de G_1 , de estrutura de memória parcialmente simétrica, portanto, ambos pertencem à mesma classe simples. Assim, o conteúdo do vetor \underline{b} (eq.2.17) é o mesmo, para ambos os codificadores. Desta forma, para $j = 1, \dots, N$, podem-se expressar os bits codificados em C_1 , por:

$$\underline{Y}_j^t = \underline{b}_1^t [\underline{VC}_1(j)]^T \quad (4.6)$$

E os bits codificados em C_2 , para $j = 1, \dots, N$, por:

$$\underline{Z}_j^t = \underline{b}_2^t [\underline{VC}_2(j)]^T \quad (4.7)$$

onde 't' é um instante de tempo genérico, e cada vetor $\underline{VC}_1(j)$ e $\underline{VC}_2(j)$ obedece à eq.2.18.

Por hipótese, para todo j :

$$\underline{VC}_2(j) = \underline{VC}_1^P(j) \quad (4.8)$$

Então, substituindo-se a eq.4.8, em 4.7:

$$\underline{Z}_j^t = \underline{b}_2^t [\underline{VC}_1^P(j)]^T \quad (4.9)$$

Seja, na estrutura de memória parcialmente simétrica de G_1 , o conjunto de índices $(i^*, i^* + 1, \dots, i^* + u)$, representativo das 'u+1' entradas que apresentam m_i iguais, ou

seja, $m_{i^*} = m_{i^*+1} = \dots = m_{i^*+u}$. Seja $(p) = (p_1, \dots, p_K)$ o conjunto permutado de $(i) = (1, \dots, K)$, o qual define o codificador permutado $G_2 = G_1^P$. Então, (p) é tal que:

$$p_i = i, \text{ para } i < i^* \text{ ou } i > i^* + u \quad (4.10)$$

$$p_i \in (i^*, i^* + 1, \dots, i^* + u), \text{ para } i^* \leq i \leq i^* + u$$

Aplicando-se a permutação definida por (p) , ao conjunto de entradas da estrutura de memória de G_1 , pode-se definir o vetor $(\underline{b}^t)^P$ permutado, a partir do vetor \underline{b}^t (eq.2.18), de modo semelhante à definição de $\{\underline{VC}^P(j)\}$, a partir de $\{\underline{VC}(j)\}$.

Por exemplo, para o codificador do Ex.4.2, o vetor \underline{b}^t é dado por:

$$\underline{b}^t = [(x_1)^{t-2} (x_1 x_2 x_3)^{t-1} (x_1 x_2 x_3)^t]$$

E o vetor $(\underline{b}^t)^P$, por:

$$(\underline{b}^t)^P = [(x_1)^{t-2} (x_1 x_3 x_2)^{t-1} (x_1 x_3 x_2)^t]$$

Portanto, a partir da eq.4.6, se:

$$\underline{b}_2^t = (\underline{b}_1^t)^P \quad (4.11)$$

Então:

$$Z_j^t = (\underline{b}_1^t)^P [\underline{VC}_1^P(j)]^T \quad (4.12)$$

Porém, é facilmente verificável que:

$$(\underline{b}_1^t)^P [\underline{VC}_1^P(j)]^T = (\underline{b}_1^t) [\underline{VC}_1(j)]^T \quad (4.13)$$

Logo, a partir das eqs. 4.6, 4.12 e 4.13, para

$j = 1, \dots, N$, e um instante genérico 't':

$$Y_j^t = Z_j^t \quad (4.14)$$

Assim, os bytes codificados \underline{Y}^t e \underline{Z}^t , dos códigos C_1 e C_2 , respectivamente, possuem igualdade de bits.

Em outras palavras, os mesmos bytes codificados \underline{Y} e \underline{Z} são gerados, respectivamente, por vetores de entrada \underline{b}_1^t ,

aplicados a G_1 e, por vetores de entrada $\underline{b}_2^t = (\underline{b}_1^t)^P$, aplicados a $G_2 = (G_1)^P$. Deste modo, para cada palavra-código em C_1 , há uma palavra-código idêntica em C_2 , mas que foi gerada pela sequência de vetores de entrada $(\underline{b}_1^t)^P$. Se for considerado o conjunto de todas as sequências causais de entrada, então toda sequência terá a sua sequência permutada respectiva, e os códigos C_1 e C_2 terão o mesmo conjunto de palavras-código. Portanto, são racionalmente equivalentes (Def.2.3) e, pela Propriedade 4.1, eles são equivalentes AR (Def.4.2).

Para cada codificador parcialmente simétrico em ' $u + 1$ ' entradas, há $(u + 1)! - 1$ codificadores permutados equivalentes.

4.4. A SEQUÊNCIA EXPURGADA DE CODIFICADORES

Para uma dada classe simples de codificadores $(G_{KN} ; m_1, \dots, m_K)$, onde $M = \sum_{i=1}^K m_i$, e onde cada codificador é representado pelo seu conjunto de vetores coeficientes $\{\underline{VC}(j); j = 1, \dots, N\}$ (eq.2.18):

Def.4.6: Considere-se uma sequência genérica de ' Q ' conjuntos de vetores coeficientes $\{\underline{VC}_1(j)\}, \{\underline{VC}_2(j)\}, \dots, \{\underline{VC}_Q(j)\}$, e seja $\underline{VC}_q(j)$ a representação decimal do vetor binário $\underline{VC}_q(j)$ de ' $K + M$ ' bits. Diz-se que a sequência de ' Q ' conjuntos de vetores coeficientes está naturalmente ordenada, quando, para cada dois conjuntos de índices ' q ' e ' $q-1$ ', na sequência e, para algum j^* , tal que $1 \leq j^* \leq N$, as relações::

$$\underline{VC}_q(j) > \underline{VC}_{q-1}(j) \text{ , para } j = j^* \quad (4.15)$$

$$\underline{VC}_q(j) = \underline{VC}_{q-1}(j) \text{ , para todo } j > j^* \text{ , } j^* \neq N$$

se verificam, entre as respectivas componentes $\underline{VC}_q(j)$ e $\underline{VC}_{q-1}(j)$

de cada conjunto [6].

A partir da Def.4.6 e das classes de equivalência AR (secção 4.3.), define-se, a seguir, a sequência expurgada de codificadores AR. Esta sequência, para todos os codificadores pertencentes a uma dada classe simples, é a que elimina as representações equivalentes de um mesmo codificador. Para tanto, algumas propriedades serão definidas:

Propriedade 4.2: Para a sequência naturalmente ordenada (Def.4.6) de codificadores pertencentes à classe simples $(G_{KN}; m_1, \dots, m_K)$, sempre que um conjunto $\{VC(j)\}$ de vetores coeficientes mantiver, para algum j^* , tal que $1 \leq j^* \leq N$, as seguintes relações, com o seu conjunto reverso, $\{VC^R(j)\}$ (eq.4.2):

$$VC(j) \supset VC^R(j), \text{ para } j = j^* \quad (4.16)$$

$$VC(j) = VC^R(j), \text{ para todo } j \geq j^*, j^* \neq N$$

então, este e todos os codificadores na sequência, para os quais, as componentes $VC(j)$ permanecem as mesmas, para todo $j \geq j^*$, devem ser eliminados. Isto se deve a serem, tais codificadores, equivalentes a outros anteriores a eles, na sequência [6].

Propriedade 4.3: Para o caso dos codificadores simétricos (Def.4.4) e, para a sequência naturalmente ordenada (Def.4.6) de codificadores pertencentes à classe simples $(G_{KN}; m_1, \dots, m_K)$, sempre que um conjunto $\{VC(j)\}$ de vetores coeficientes mantiver, para algum j^* , tal que $1 \leq j^* \leq N$, as seguintes relações, com qualquer um de seus conjuntos de vetores permutados $\{VC^P(j)\}$ (eq.4.5):

$$VC(j) \supset VC^P(j), \text{ para } j = j^* \quad (4.17)$$

$$VC(j) = VC^P(j), \text{ para todo } j \geq j^*, j^* \neq N$$

então, este e todos os codificadores simétricos na sequência, para os quais, as componentes $\underline{VC}(j)$ permanecem as mesmas, para $j > j^*$, devem ser eliminados. Isto se deve a serem, tais codificadores, equivalentes a outros anteriores a eles, na sequência [6].

Propriedade 4.4: Para o caso dos codificadores parcialmente simétricos (Def.4.5) e, para a sequência naturalmente ordenada (Def.4.6) de codificadores pertencentes à classe simples $(G_{KN} ; m_1, \dots, m_K)$, sempre que um conjunto $\{\underline{VC}(j)\}$ de vetores coeficientes mantiver, para algum j^* , tal que $1 \leq j^* \leq N$, as seguintes relações, com qualquer um de seus conjuntos de vetores permutados $\{\underline{VC}^P(j)\}$:

$$\underline{VC}(j) > \underline{VC}^P(j), \text{ para } j = j^* \quad (4.18)$$

$$\underline{VC}(j) = \underline{VC}^P(j), \text{ para todo } j > j^*, j^* \neq N$$

então, este e todos os codificadores parcialmente simétricos na sequência, para os quais, as componentes $\underline{VC}(j)$ permanecem as mesmas, para $j > j^*$, devem ser eliminados. Isto se deve a serem, tais codificadores, equivalentes a outros anteriores a eles, na sequência.

Prova: Esta prova é direta, uma vez que, sempre que um codificador parcialmente simétrico satisfizer à eq.4.18, para algum de seus conjuntos permutados, então, este conjunto permutado $\{\underline{VC}^P(j)\}$ é anterior a $\{\underline{VC}(j)\}$, na sequência naturalmente ordenada, e é equivalente AR ao mesmo, de acordo com o Teorema 4.5. Portanto, o conjunto $\{\underline{VC}(j)\}$ pode ser eliminado da sequência.

Def.4.7: Para uma dada classe simples de codificadores $(G_{KN} ; m_1, m_2, \dots, m_K)$, define-se a sequência expurgada de codificadores,

como a sequência naturalmente ordenada (Def.4.6) de todos os codificadores desta classe que apresentam as seguintes propriedades:

a) Para cada $\underline{VC}(j^*)$, $j^* = 1, \dots, N-1$, o seu bit '1' de maior ordem corresponde a um bit '0', nos outros vetores $\underline{VC}(j)$ do conjunto, para todo $j > j^*$;

b) Para todos os vetores do conjunto $\{\underline{VC}(j)\}$, os bits correspondentes a, pelo menos, um dos coeficientes $g_{i1}^0, g_{i2}^0, \dots, g_{iN}^0$ e a, pelo menos, um dos coeficientes $g_{i1}^{m_i}, g_{i2}^{m_i}, \dots, g_{iN}^{m_i}$ são iguais a '1', para $i = 1, \dots, K$ (ver a eq.2.18). Isto garante ter, o codificador, comprimento total de memória igual a $M = \sum_{i=1}^K m_i$.

Além disso, para esta sequência, são eliminados os codificadores que satisfazem às Propriedades 4.2, 4.3 e 4.4.

Na definição de sequência expurgada de codificadores (Def.4.7), pode-se demonstrar que a propriedade do item 'a' representa a eliminação dos conjuntos de vetores coeficientes que são equivalentes a um dado conjunto $\{\underline{VC}(j)\}$, segundo os Teoremas 4.2 e 4.4 [6].

Portanto, a sequência expurgada elimina todos os codificadores equivalentes a um dado codificador, segundo todas as classes de equivalência da secção 4.3.

5. A PROCURA DOS CÓDIGOS AR

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos necessários a uma procura dos melhores códigos, para um dado esquema de modulação/codificação AR e para cada classe simples de codificadores ($G_{KN} ; m_1 , \dots , m_K$). Para tanto, alguns conceitos aplicados a códigos serão estendidos aos codificadores que os geram.

Def.5.1: Um codificador G_{KN} , com comprimento total de memória igual a 'M', é um codificador ótimo, se o código a ele relacionado possui o máximo Δ_{MIN} (eq.3.5) obtido entre os codificadores do conjunto total de classes ($G_{KN} ; M$), ao qual pertence.

Def.5.2: Um codificador G_{KN} , com comprimento total de memória igual a 'M', é um bom codificador, se o código a ele relacionado tem o seu Δ_{MIN} maior do que o Δ_{MIN} do(s) código(s) ótimo(s) do conjunto total de classes ($G_{KN} ; M-1$).

Este trabalho atém-se à procura dos melhores códigos, sob o ponto de vista de máximo Δ_{MIN} (eq.3.5), que é um limitante inferior para d_{MIN} (eq.2.15). Assim, em linhas gerais, a procura consiste dos seguintes procedimentos (fig.5.1):

a) Para cada classe simples ($G_{KN} ; m_1 , \dots , m_K$), criar o conjunto inicial de procura (CIP), como consistindo de codificadores pertencentes à sequência expurgada (ver a secção 4.4). A procura será exaustiva, quando consistir de todos os codificadores da sequência expurgada. Caso contrário, será não-exaustiva (secção 5.2);

b) Submeter os codificadores do CIP a uma fase de seleção, onde são eliminados codificadores catastróficos (secção 5.3.1.) e, posteriormente, aqueles que não obedecem ao critério MDF (secção 5.3.2.). Este critério seleciona os codificadores bons, segundo a Def. 5.2. A partir daí, os codificadores selecionados nesta fase formarão o conjunto $\{SEL_{AR}\}$ de codificadores;

c) Submeter os codificadores do conjunto $\{SEL_{AR}\}$ à fase de classificação. Nesta fase, todos os codificadores têm calculado o Δ_{MIN} do seu código respectivo, e é(são) classificado(s) o(s) codificador(es) de maior Δ_{MIN} , na classe simples. Estes codificadores formarão o conjunto $\{CLAS_{AR}\}$;

O programa para calcular o Δ_{MIN} dos códigos AR foi escrito, baseando-se no algoritmo de Viterbi [2,7]. Embora não seja o mais eficiente para o cálculo da distância mínima [1,15], o algoritmo de Viterbi foi escolhido, pela sua facilidade de implementação e por atender às necessidades deste trabalho.

d) Escolher, entre os codificadores do conjunto $\{CLAS_{AR}\}$, um codificador que seja mínimo, de acordo com a Def. 2.13;

e) Os procedimentos de 'a' a 'd' são repetidos para todas as classes simples de um conjunto total de classes $\{G_{KN}; M\}$;

f) Realizar a comparação final, entre os codificadores representativos de cada classe simples, a fim de obter o codificador ótimo de $\{G_{KN}; M\}$.

O programa de procura de códigos e os conceitos apresentados a seguir baseiam-se no algoritmo de procura de Borelli [6]. Para tanto, foi estendida, a possibilidade de procura, para codificadores de até cinco entradas ($K = 5$). Além

disso, foram introduzidas melhorias que diminuíram o tempo computacional empregado, quais sejam:

a) De acordo com a eq.2.18 e fig.2.2, verifica-se que, neste trabalho, a ordenação decrescente dos bits mais significativos dos vetores $VC(j)$, $j=1, \dots, N$ é realizada no sentido de cima para baixo e da direita para a esquerda, na representação esquemática do codificador. Borelli [6] realizou esta ordenação no sentido de baixo para cima e da direita para a esquerda (ex: fig.5.2). Foi observado que a ordenação realizada neste trabalho acarreta a eliminação de um maior número de codificadores equivalentes do que a realizada por Borelli, na geração da sequência expurgada (fig.5.3). Isto acontece para classes simples com $K > 1$ e com estrutura de memória não-simétrica. A observação nos mostra que o tipo de ordenação realizado neste trabalho é mais coerente com a estrutura de memória não-simétrica (isto é, com comprimentos de memória não-crescentes, no sentido de cima para baixo) destas classes simples;

b) A introdução da classe de equivalência dos codificadores parcialmente simétricos permutados (ver a secção 4.3.6.), não anteriormente analisada por Borelli [6], representa uma eliminação adicional de codificadores equivalentes (fig.5.4). Logicamente, a eliminação de codificadores, segundo esta classe de equivalência, ainda não é suficiente para permitir uma procura exaustiva para estas classes simples. Isto se deve ao fato de ser, o número de codificadores da sequência expurgada, ainda assim muito grande, para classes simples com estrutura de memória parcialmente simétrica. No entanto, o conhecimento desta classe

de equivalência auxilia a procura não-exaustiva, no sentido de diminuir o conjunto inicial de procura (que é um subconjunto da sequência expurgada);

c) A eliminação imediata de grande parte dos codificadores catastróficos, através da subrotina CATASTROF (ver adiante a secção 5.3.1.).

O programa de procura de códigos foi realizado em linguagem FORTRAN e rodado no sistema VAX/VMS do CPqD/TELEBRÁS, em Campinas.

5.2. TIPOS DE PROCURA, DE ACORDO COM O CONJUNTO INICIAL

DE PROCURA (CIP)

5.2.1. A PROCURA EXAUSTIVA

O tipo exaustivo de procura consiste em ser, o CIP, igual à sequência expurgada, associada a cada classe simples, pertencente ao conjunto total de classes ($G_{KN}; M$). Desta forma, todos os códigos existentes em ($G_{KN}; M$) serão analisados, na procura dos melhores códigos. Infelizmente, a depender dos valores de K, N e M, há dois fatos que podem inviabilizar uma procura exaustiva, independentemente do algoritmo utilizado:

a) Um grande número de codificadores, na sequência expurgada, significaria um grande esforço computacional, na fase de seleção da procura, a fim de que fossem analisados todos os codificadores;

b) O cálculo de Δ_{MIN} , para cada codificador pertencente ao conjunto (SEL_{AR}), poderia representar, também, um grande esforço computacional. Isto se deve ao fato de que, embora de menor

tamanho do que a sequência expurgada, o conjunto (SEL_{AR}) poderia, ainda assim, ser muito grande.

5.2.2. A PROCURA NÃO-EXAUSTIVA

O tipo não-exaustivo de procura consiste em ser, o CIP, um subconjunto de codificadores pertencentes à sequência expurgada de uma dada classe simples, no qual, é grande a probabilidade de encontrar codificadores ótimos.

Estes subconjuntos de codificadores se caracterizarão por apresentarem os Δ_{MIN} limitados inferior e superiormente, ou seja:

a) O LIMITANTE INFERIOR, Δ_{INF} :

Devido ao fato de cada classe simples de codificadores ($G_{\text{KN}} ; m_1, \dots, m_K$) estar associada a uma dada estrutura de treliça, os conteúdos das entradas e dos registradores de deslocamento, expressos pelos vetores \underline{b} (eq.2.17), ao longo da treliça, são os mesmos, em cada classe.

Assim, para todos os códigos, o Δ_{MIN} pode ser limitado inferiormente por:

$$\Delta_{\text{INF}} = \min [W_{\text{AR}}^2(\underline{y}_{\underline{b}'}) + W_{\text{AR}}^2(\underline{y}_{\underline{b}''})]^{1/2} \quad (5.1)$$

para $\underline{b}', \underline{b}'' \neq \emptyset$

onde:

- \underline{b}' e \underline{b}'' são as representações decimais dos vetores \underline{b}' e \underline{b}'' , respectivamente;
- \underline{b}' está associado a um dos possíveis ramos que iniciam uma palavra-código não-nula, podendo \underline{b}' assumir os valores de '1' a ' $2^K - 1$,';
- \underline{b}'' está associado a um dos possíveis ramos que finalizam uma

palavra-código não-nula, podendo b'' assumir os valores do tipo :

$$\sum_{u=1}^K a_u \cdot 2^{(u \cdot m_u - u + K + \sum_{i=u+1}^K m_i)}$$

com a_u , $u = 1, \dots, K$, podendo assumir os valores de '0' ou '1'.

Portanto, há 2^K possíveis valores de b'' ;

- $W_{AR}(\underline{Y}_{b'})$ é o peso AR (eq.3.4) do vetor codificado $\underline{Y}_{b'}$, associado ao vetor $\underline{b'}$;

- $W_{AR}(\underline{Y}_{b''})$ é o peso AR do vetor codificado $\underline{Y}_{b''}$, associado ao vetor $\underline{b''}$.

Portanto, o limitante inferior considera a palavra-código de peso AR igual a Δ_{MIN} como consistindo apenas de um ramo inicial ($\underline{b'}$) e de um ramo final ($\underline{b''}$). E, dentre as várias possibilidades para $\underline{b'}$ e $\underline{b''}$, o valor do limitante é o que minimiza o cálculo da distância Euclidiana, em função dos pesos respectivos.

Para o caso especial em que $K = 1$ e $m_1 > 1$, então $\underline{b'} = 1$ e $\underline{b''} = 2^{m_1}$. Neste caso, pode-se ampliar o limitante inferior, de modo a conter três ou mais ramos, a depender do valor de ' m_1 '.

b) O LIMITANTE SUPERIOR, Δ_{SUP} :

Para um código, cujo codificador pertença a uma classe simples $(G_{KN}; m_1, \dots, m_K)$, sempre se pode limitar superiormente o seu Δ_{MIN} , pelo peso AR de qualquer palavra-código y de comprimento L_y , isto é:

$$\Delta_{SUP} = W_{AR}(y, L_y) \quad (5.2)$$

Este limitante superior será mais próximo de Δ_{MIN} se a palavra-código utilizada representar um caminho

fundamental y_{CF} (Def.2.14), uma vez que qualquer palavra-código é composta de um, ou mais caminhos fundamentais. Além disso, em grande parte dos códigos, o caminho fundamental de comprimento mínimo representa o caminho de peso mínimo, Δ_{MIN} [6]. Portanto, é interessante que:

$$\Delta_{SUP} = w_{AR}(y_{CF}, \min L_y) \quad (5.3)$$

No apêndice II, são mostrados exemplos de subconjuntos especiais de codificadores, para algumas classes simples, e definidos limitantes inferiores e superiores para os Δ_{MIN} dos respectivos códigos. Estes subconjuntos serão utilizados na procura não-exaustiva de códigos AR, para os esquemas de modulação/codificação AR propostos neste trabalho (ver adiante o Cap.6).

5.3. A FASE DE SELEÇÃO

5.3.1. A ELIMINAÇÃO DE CODIFICADORES CATASTRÓFICOS

No programa de procura de códigos, realizado neste trabalho, a eliminação de codificadores catastróficos (Def.2.8) é realizada de duas formas:

a) Através da subrotina CATASTROF, são eliminados os codificadores catastróficos, cujos diagramas de estado apresentam:

- Ao menos uma transição, de algum estado não-nulo, para ele mesmo, com saída (vetor codificado \underline{y}) nula;
- Ao menos um caminho, composto de duas transições, de algum estado, para ele mesmo (passando por um estado intermediário diferente do estado de origem), com saídas (vetores codificados

Y) nulas;

- Ao menos um caminho, composto de três transições, de algum estado, para ele mesmo (passando por dois estados intermediários diferentes entre si e do estado de origem), com saídas (vetores codificados Y) nulas.

b) No cálculo do Δ_{MIN} dos códigos classificados, são eliminados outros códigos catastróficos que, porventura, não tenham sido eliminados anteriormente. Isto é realizado pela verificação da repetitividade das métricas de um código catastrófico, na condição de finalização do algoritmo.

5.3.2. O CRITÉRIO MDF DE ELIMINAÇÃO DE CODIFICADORES

Para uma dada classe simples $(G_{\text{KN}}; m_1, \dots, m_K)$, seja $\{y_{\text{CF}}\}$ um dado conjunto de caminhos fundamentais (Def.2.14), associados a esta classe.

Pelo critério MDF de eliminação dos codificadores [6], serão descartados da procura, todos aqueles cujos códigos tiverem, ao menos, um caminho fundamental y_{CF} , de comprimento L_y , tal que:

$$W_{\text{AR}}(y_{\text{CF}}, L_y) < \text{MDF} \quad (5.4)$$

onde $W_{\text{AR}}(.)$ é o peso AR (eq.3.4), e MDF é um valor mínimo exigido para o Δ_{MIN} (eq.3.5) dos códigos desta classe. Geralmente, MDF é um valor maior do que o máximo Δ_{MIN} , associado ao conjunto total de classes $(G_{\text{KN}}; M-1)$, onde $M = \sum_{i=1}^K m_i$. Neste caso, o critério MDF descarta codificadores, cujos códigos são tais que:

$$\Delta_{\text{MIN}} < \text{MDF} \quad (5.5)$$

Por outro lado, os codificadores selecionados são tais que:

$$W_{AR}(y, Ly) \succ \text{MDF} \quad (5.6)$$

para $y \in \{y_{CF}\}$

Desde que $\{y_{CF}\}$ é, apenas, um subconjunto do conjunto de todos os caminhos fundamentais do código, pode-se definir um Δ_{MIN} parcial, como:

Def.5.3: Define-se um Δ_{MIN} parcial $\Delta_{PMIN}(y_{CF})$, em relação a um dado conjunto de caminhos fundamentais $\{y_{CF}\}$, como o peso AR do caminho y de menor peso, no conjunto $\{y_{CF}\}$, ou seja:

$$\Delta_{PMIN}(y_{CF}) = \min_{y \in \{y_{CF}\}} W_{AR}(y, Ly) \quad (5.7)$$

Logicamente que, para um código qualquer:

$$\Delta_{MIN} \preceq \Delta_{PMIN}(y_{CF}) \quad (5.8)$$

ou seja, $\Delta_{PMIN}(y_{CF})$ é um limitante superior para Δ_{MIN} . Para os melhores códigos, observa-se [6] que $\Delta_{PMIN}(y_{CF})$ é um limitante muito próximo (quando não, o próprio Δ_{MIN}), para conjuntos $\{y_{CF}\}$ de pequeno a médio tamanho.

Assim, supondo-se $\Delta_{PMIN}(y_{CF})$ como um limitante superior muito próximo de Δ_{MIN} , pode-se considerar que o critério MDF selecciona os codificadores bons (Def.5.2), de uma dada classe simples.

Após a fase de selecção, os codificadores seleccionados formarão o conjunto $\{\text{SEL}_{AR}\}$ de codificadores bons, os quais serão submetidos à fase de classificação (item 'c', secção 5.1).

A partir daí, procede-se, como anteriormente mencionado, aos itens 'c', 'd', 'e' e 'f' da secção 5.1., para a determinação do código ótimo de um conjunto total de classes $(G_{KN}; M)$.

No próximo capítulo, são propostos novos esquemas de modulação/codificação AR, aos quais, será aplicado o programa de procura de códigos ora descrito.

6. PROPOSIÇÃO DE NOVOS ESQUEMAS DE MODULAÇÃO/CODIFICAÇÃO AR

6.1. INTRODUÇÃO

Com base no esquema de modulação/codificação AR 2-FSK/M-PSK (ver a secção 3.6.2.) e nas considerações de Ungerboeck (ver a secção 3.1.), novos esquemas são propostos neste trabalho, produzindo constelações de sinais em três (secção 6.2.) e em quatro dimensões (secção 6.4.). São, portanto, esquemas que permitem maiores ganhos de codificação do que aqueles em duas dimensões, sob o preço de requererem maiores larguras de faixa espectral.

Uma análise das propriedades espectrais dos esquemas de modulação não-codificados é realizada, assumindo-se as mesmas considerações da secção 3.6.3., quanto aos dados de entrada e ao pulso $g_T(t)$.

Para ambos os esquemas, o sinal transmitido pode ser expresso por:

$$r(t) = \text{Re}\{ u(t) \cdot \text{EXP}[j \cdot \omega_C \cdot t] \}$$

onde $\text{Re}\{ \cdot \}$ representa a parte real de um número complexo; $\text{EXP}(z) = e^z$ e $u(t)$ é o processo aleatório em banda básica, específico para cada esquema.

Outro ponto a considerar é a análise destes esquemas, em termos da taxa de corte R_0 do canal [21,36], o que dá uma indicação dos limites máximos de ganho, considerando-se complexidade irrestrita de codificação.

Para um canal AWGN, com ruído branco bilateral de variância igual a $N_0/2$, a expressão para R_0 é dada por [21]:

$$R_0 = - \log_2 \left(\min_{P(i)} \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q \text{EXPE} - \|\underline{S}_i - \underline{S}_j\|^2 / 4N_0 \right] \cdot P(i) \cdot P(j) \right) \quad (6.1)$$

onde \underline{S}_i é o vetor com as coordenadas do sinal S_i ; $\|\underline{S}_i\|$ é a norma do vetor \underline{S}_i ; $P(i)$ é a probabilidade de ocorrência do sinal S_i ; Q é o número de sinais da constelação.

Fazendo-se a consideração de que somente códigos com a ocorrência equiprovável dos sinais são de interesse, a expressão para R_0 se resume a:

$$R_0 = - \log_2 \left(1/Q^2 \cdot \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^Q \text{EXPE} - \|\underline{S}_i - \underline{S}_j\|^2 / 4N_0 \right) \quad (6.2)$$

Trata-se, portanto, de uma expressão bastante simples e que permite o traçado de curvas de R_0 versus a relação sinal-ruído (SNR), apenas em se possuindo as coordenadas dos sinais da constelação.

Assim, para estes esquemas, são apresentados exemplos de algumas constelações (secções 6.3. e 6.5., respectivamente) e traçadas curvas de R_0 (em bits/símbolo) versus SNR (em dB). Com a finalidade de comparação, também foram traçadas as curvas para constelações M-PSK (em 2 dimensões) e 2-FSK/M-PSK (em 4 dimensões) [35]. Para tanto, foi definida, a relação sinal-ruído, como:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10} (1/N_0) \text{ dB} \quad (6.3)$$

onde a energia média dos sinais foi considerada igual a 1.

Finalmente, para os exemplos de constelações considerados nas secções 6.3. e 6.5., é realizada a partição de conjunto e são obtidas as distâncias mínimas de subconjunto. A partir daí, é feita uma procura dos melhores códigos AR, segundo

os critérios dos Caps. 4 e 5. Esta procura será realizada para codificadores de até 5 entradas e comprimento total de memória CTM ≤ 5 .

Supondo uma decodificação por máxima-verossimilhança, segundo o algoritmo de Viterbi (ver a secção 2.5.2.), verifica-se que a complexidade da mesma apresenta uma relação exponencial com o CTM do codificador.

Portanto, a procura de códigos permite determinar a eficiência destes esquemas, para uma determinada complexidade de codificação. Esta eficiência será avaliada em termos do ganho de codificação assintótico, GCA (eq.3.3).

6.2. ESQUEMA EM 3 DIMENSÕES: 2F/2xM-PSK

6.2.1. DESCRIÇÃO

O esquema 2F/2xM-PSK, proposto neste trabalho, gera uma constelação composta de sinais do tipo:

$$S(t) = (1/\sqrt{T}) \cdot [\cos(\omega_C + h\pi/T)t - \varphi_i] + \cos(\omega_C - h\pi/T)t - \varphi_j - \psi] \quad (6.4)$$

onde $0 \leq t < T$ e T é o intervalo de modulação; $\varphi_i = 2\pi i/M$, $i=0,1,\dots,M-1$; $\varphi_j \in (0, \pi)$; h é o índice de modulação; $M = 2^m$, $m \geq 1$ e inteiro; $\omega_C = 2\pi n_C/T$ e n_C é um número inteiro; ψ é uma fase qualquer que, em geral, pode ser assumida igual a zero.

Para h inteiro, o espaço de sinais gerado por este esquema é tridimensional e apresenta, graficamente, as características de um cilindro (exs: figs. 6.1 e 6.2).

Para h não-inteiro, o espaço de sinais gerado por este esquema pode ser considerado tridimensional, embora rigorosamente não o seja. Isto se deve a algumas assimetrias que as constelações passam a apresentar. No entanto, é sempre

possível obter uma base em quatro dimensões, de modo que as coordenadas dos sinais, em uma das dimensões, possuam valores praticamente desprezíveis.

Aplicando-se a codificação AR a este esquema, um conjunto de 2^K sinais não-codificados é associado à constelação de $2M = 2^N$ sinais, representando uma taxa binária de codificação $R = K/N$.

6.2.2. PROPRIEDADES ESPECTRAIS

O processo aleatório $u(t)$, representativo do esquema $2F/2 \times M$ -PSK, é da forma:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B \cdot g_T(t - nT) \cdot \left(\exp[j(W_d \cdot t - a_n)] + \exp[-j(W_d \cdot t + b_n)] \right) \quad (6.5)$$

onde $\exp(z) = e^z$; $B = 1/\sqrt{T}$; $W_d = h\pi/T$; a_n e b_n são variáveis aleatórias independentes; a_n pode assumir os valores $2\pi i/M$, $i=0,1,\dots,M-1$, com iguais probabilidades; b_n pode assumir os valores '0' ou ' π ', com iguais probabilidades; $g_T(t)$ é um pulso retangular de amplitude unitária e de duração ' T ' segundos.

A eq.6.5 é obtida, admitindo-se $\psi = 0$, na eq.6.4. Isto não altera a análise espectral, embora simplifique as expressões.

Verifica-se (ver o apêndice III, para a

demonstração completa) que o esquema $2F/2 \times M$ -PSK apresenta as mesmas propriedades espectrais do esquema 2 -FSK/ M -PSK (ver a secção 3.6.3.), sendo, a sua FDE, tal como na eq.3.13 e gráfico da fig.3.5:

$$FDE(W) = (Sa^2[(W - W_d).T/2] + Sa^2[(W + W_d).T/2])$$

onde $W_d = h \pi / T$; $Sa(z) = \text{SEN}(z)/z$.

Portanto, o aumento do Índice de modulação h representa uma expansão lateral da FDE, no espectro de frequências. Uma medida desta expansão, em relação à FDE do esquema M -PSK (a curva para $h = 0$, na fig.3.5), está na tabela da fig.3.6.

6.3. ANÁLISE DE CONSTELAÇÕES PARA O ESQUEMA EM 3 DIMENSÕES:

CURVAS DE R0 E PROCURA DE CÓDIGOS

A base vetorial aqui considerada é aquela em 4 dimensões definida por Wolf e Padovani [35], composta dos seguintes sinais:

$$\Phi_1(t) = \sqrt{2/T} \cdot \text{COSE } W_C \cdot t + h \pi t/T]$$

$$\Phi_2(t) = \sqrt{2/T} \cdot \text{SENE } W_C \cdot t + h \pi t/T] \quad (6.6)$$

$$\Phi_3(t) = 1/\sqrt{D} \cdot (\sqrt{2/T} \cdot \text{COSE } W_C \cdot t - h \pi t/T] - C_1 \Phi_1(t) - C_2 \Phi_2(t))$$

$$\Phi_4(t) = 1/\sqrt{D} \cdot (\sqrt{2/T} \cdot \text{SENE } W_C \cdot t - h \pi t/T] + C_2 \Phi_1(t) - C_1 \Phi_2(t))$$

onde $C_1 = \text{SEN}(2 \pi h)/2 \pi h$; $C_2 = [1 - \text{COS}(2 \pi h)]/2 \pi h$; $D = 1 - C_1^2 - C_2^2$.

Embora esta base não seja, rigorosamente, ortonormal, para qualquer valor de h (o é apenas para h inteiro), o erro cometido é desprezível, se for assumido que $W_C \gg 2 \pi / T$, o que pode ser considerado, na prática.

A partir desta consideração, verifica-se que, para

qualquer constelação do esquema $2F/2 \times M$ -PSK, as coordenadas dos sinais, em relação à dimensão $\phi_4(t)$ (eq.6.6), são sempre nulas. Portanto, para qualquer valor de h , pode-se considerar que o espaço de sinais gerado por este esquema apresenta 3 dimensões e pode ser gerado pelos sinais $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ e $\phi_3(t)$, da eq.6.6.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de constelações, para o esquema $2F/2 \times M$ -PSK da secção anterior.

a) Constelação $2F/2 \times 4$ -PSK

De acordo com a eq.6.4, esta constelação é composta de 8 sinais, de forma que $\varphi_i = 2\pi i/4$, $i = 0, \dots, 3$ e $\varphi_j \in \{0, \pi\}$ (fig.6.1).

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foram traçadas curvas de $R_0 \times$ SNR, para alguns valores de h (figs.6.3 e 6.4). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times$ SNR, para as constelações 2-FSK/4-PSK, $h = 1.0$ (8 sinais, em 4 dimensões) [35] e 8-PSK (8 sinais, em 2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times$ SNR, para a constelação 4-PSK não-codificada (4 sinais, em 2 dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 2/3$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.3 permite observar uma característica por demais interessante: a de que à taxa $R_0 = 2.0$, a constelação $2F/2 \times 4$ -PSK ($h = 1.0$) apresenta uma melhor característica de ganho do que a constelação 2-FSK/4-PSK ($h =$

= 1.0), mesmo estando, a última, em 4 dimensões. Ambas se distanciam em $\cong 0.3$ dB. Também se verifica que ambas têm uma melhor característica de ganho do que a constelação 8-PSK.

Já na fig.6.4, pode-se observar a relação de ganhos, quando se varia o valor de h . Verifica-se que a constelação 2F/2x4-PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 4-PSK não-codificada) de $\cong 7.1$ dB, para $h = 1.0$; de $\cong 7.0$ dB, para $h = 0.75$; de $\cong 6.7$ dB, para $h = 0.5$ e, de $\cong 6.1$ dB, para $h = 0.25$. Estes ganhos, comparados com o ganho máximo da constelação 8-PSK codificada, representam margens de ganho de $\cong 1.2$ dB, para $h = 1.0$; de $\cong 1.1$ dB, para $h = 0.75$; de $\cong 0.8$ dB, para $h = 0.5$ e, de $\cong 0.2$ dB, para $h = 0.25$.

Verifica-se, portanto, que, para $h = 0.25$, a margem de ganho, sobre a constelação 8-PSK codificada, é bastante pequena. Além disso, neste valor de h , a constelação 2F/2x4-PSK apresenta assimetrias consideráveis.

Assim, por estes motivos, conclui-se que não há vantagem, na utilização desta constelação, em lugar da 8-PSK codificada.

Na tentativa de obter os ganhos de codificação previstos nas curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto, aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para alguns valores do índice de modulação h , resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2
0.25	1.000	1.000	1.732
0.50	1.000	1.414	1.483
0.75	1.000	1.414	1.775
1.00	1.000	1.414	2.000

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0,1,2$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com $CTM \leq 5$. A tabela da fig.6.5 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 2/3$. Na tabela, estão listados, para cada valor de h , os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 4-PSK não-codificada.

Verifica-se que, com $h = 0.5$, para quase todos os valores de CTM analisados, não foram encontrados valores de GCA interessantes, no sentido de serem maiores do que os da constelação 8-PSK codificada com a mesma taxa. Isto tem a ver com a assimetria da constelação 2F/2x4-PSK, para $h = 0.5$. Esta

assimetria pode acarretar um distanciamento do valor de Δ_{MIN} (eq.3.5), em relação ao valor real de d_{MIN} . Além disso, o GCA é um ganho assintótico, definido para altos valores de relação sinal-ruído (SNR). Nestes valores, apenas a palavra-código de

peso igual à distância mínima é considerada. Para valores não tão altos de SNR, uma análise mais completa do código deve incluir o número de palavras-código com peso igual à distância mínima, as outras palavras-código e seus respectivos pesos [6]. Neste caso, um código AR proveniente de uma constelação assimétrica pode apresentar um melhor desempenho do que um outro código de mesmo Δ_{MIN} , proveniente de uma constelação simétrica.

Na tabela da fig.6.6, estão os valores de GCA dos melhores códigos das constelações codificadas 2F/2x4-PSK, 8-PSK [30], 2-FSK/4-PSK [35] e octal cúbica (8 sinais, em 3 dimensões) [3,19]. Nela, verifica-se uma condição de ganhos intermediários da constelação 2F/2x4-PSK, com relação à de 2 e de 4 dimensões. Este resultado não evidencia a previsão das curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, de que seriam maiores os ganhos para a constelação 2F/2x4-PSK, em relação às outras duas.

No entanto, para este fato, há algumas possíveis explicações. Primeiro, as curvas prevêem limites de ganho, admitindo-se complexidade irrestrita de codificação e estamos longe disto. Também, a análise em termos de GCA, como já dito anteriormente, é válida para altos valores de relação sinal-ruído. Para valores mais baixos de SNR, uma análise mais completa dos códigos deveria levar em conta o número de palavras-código com peso igual à distância mínima, bem como, as outras palavras-código e seus respectivos pesos. Desta forma, o desempenho dos códigos para a constelação 2F/2x4-PSK tenderia a melhorar, em relação ao dos códigos para a constelação 2-FSK/4-

-PSK. Isto se deve a uma não-uniformidade que a constelação 2F/2x4-PSK apresenta, mesmo para o caso em que o índice de modulação é a unidade ($h = 1.0$). Esta não-uniformidade pode ser visualizada na fig.6.1, onde percebe-se que a constelação apresenta as características de um prisma de altura igual ao dobro da aresta da base. Ao serem computados os pesos das palavras-código, para esta constelação, em função dos Δ_i da partição de conjunto, estes se tornam, de fato, limitantes inferiores das reais distâncias envolvidas. Isto não ocorre para a constelação 2-FSK/4-PSK, onde a uniformidade das distâncias é tal que os Δ_i representam as reais distâncias entre todos os sinais das partições.

Uma outra comparação que pode ser realizada é a da constelação 2F/2x4-PSK, com a constelação octal cúbica [3,19], composta também de 8 sinais, em 3 dimensões, e que apresenta uma característica de maior uniformidade dos sinais. Embora não tenha sido traçada a curva de $R_0 \times \text{SNR}$, para esta constelação, valores obtidos para a mesma demonstram uma margem de ganho de $\cong 0.3$ dB, sobre a curva 2F/2x4-PSK, para $h = 1.0$. Na tabela da fig.6.6, verifica-se que, para valores pequenos de CTM, a constelação octal cúbica já encontra valores bem interessantes de GCA [3,19].

No entanto, há um preço a ser pago por estes ganhos maiores. Bezerra [3] realizou um estudo mais acurado da constelação octal cúbica, em que propôs uma base vetorial e obteve a função de densidade espectral dos sinais da mesma, representados segundo esta base. Pela análise espectral desta constelação e, utilizando o critério de largura de faixa de 90%, verificou uma expansão de largura de faixa de 52%, em relação à

constelação 8-PSK. Já na tabela da fig.3.6, observa-se que a constelação 2F/2x4-PSK, para $h = 1.0$, e para o mesmo critério de 90%, representa uma expansão de largura de faixa de 34.5%, em relação à constelação 8-PSK. Portanto, a constelação cúbica apresenta maiores ganhos, ao preço de uma maior largura de faixa requerida.

Uma outra constelação, proposta por Bezerra [3], a octal prismática (8 sinais, em 3 dimensões), embora apresente menor expansão de largura de faixa (33%), também apresenta menores ganhos. Os ganhos são, inclusive, menores do que os ganhos da constelação 2F/2x4-PSK, para $h = 0.75$, cuja expansão de largura de faixa é de apenas 25.4% .

Finalmente, vale salientar a igualdade dos ganhos da constelação 2F/2x4-PSK, para $h = 1.0$ e $h = 0.75$, o que pode ser conseguido com uma menor expansão da largura de faixa, para $h = 0.75$ (figs.3.5 e 3.6). Por outro lado, deve-se levar em conta a maior facilidade de tratamento dos sinais, para $h = 1.0$.

b) Constelação 2F/2x8-PSK

De acordo com a eq.6.4, esta constelação é composta de 16 sinais, de forma que $\varphi_i = 2\pi i/8$, $i = 0, \dots, 7$ e $\varphi_j \in \{0, \pi\}$ (fig.6.2).

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foram traçadas curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para alguns valores de h (figs.6.7 e 6.8). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para as constelações 2-FSK/8-PSK, $h = 1.0$ (16 sinais, em 4 dimensões) [35] e 16-PSK (16 sinais, em

2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times \text{SNR}$, para a constelação 8-PSK não-codificada (8 sinais, em 2 dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 3/4$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.7 permite observar a condição intermediária do ganho da constelação 2F/2x8-PSK ($h = 1.0$), comparado com os ganhos das constelações 2-FSK/8-PSK ($h = 1.0$) e 16-PSK. A primeira curva se distancia em ≈ 1.7 dB, da segunda e, em ≈ 2.6 dB, da terceira.

Já na fig.6.8, pode-se observar a relação de ganhos, quando se varia o valor de h . Verifica-se que a constelação 2F/2x8-PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 8-PSK não-codificada) de ≈ 8.1 dB, para $h = 1.0$ e 0.75 ; de ≈ 8.0 dB, para $h = 0.5$ e, de ≈ 7.5 dB, para $h = 0.25$. Estes ganhos, comparados com o ganho máximo da constelação 16-PSK codificada, representa margens de ganho de ≈ 2.6 dB, para $h = 1.0$ e 0.75 ; de ≈ 2.5 dB, para $h = 0.5$ e, de ≈ 1.9 dB, para $h = 0.25$.

Na tentativa de obter esses ganhos de codificação, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para alguns valores do índice de modulação h , resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0.25	0.541	0.631	1.000	1.414
0.50	0.541	1.000	1.095	1.414
0.75	0.541	1.000	1.414	1.673
1.00	0.541	1.000	1.414	2.000

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0,1,2,3$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com CTM ≤ 5 . A tabela da fig.6.9 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 3/4$. Na tabela, estão listados, para cada valor de h , os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 8-PSK não-codificada.

Verifica-se que, para os valores de CTM analisados, e para $h = 0.25$, não foram encontrados valores de GCA interessantes, no sentido de serem maiores do que os da constelação 16-PSK codificada com a mesma taxa. Isto tem a ver com a assimetria da constelação 2F/2x8-PSK, para $h = 0.25$, que pode acarretar um distanciamento do valor de Δ_{MIN} , em relação de valor real de d_{MIN} (eq.3.5), como para $h = 0.5$, no item 'a' desta secção.

Na tabela da fig.6.10, estão os valores de GCA dos

melhores códigos das constelações codificadas 2F/2x8-PSK, 16-PSK [32] e 2-FSK/8-PSK [35]. Nela, confirmam-se os ganhos intermediários da constelação em 3 dimensões, com relação à de 2 e de 4 dimensões.

Outro fato interessante é a igualdade dos ganhos para $h = 1.0$ e $h = 0.75$, o que pode ser conseguido com uma menor expansão da largura de faixa, para $h = 0.75$ (figs.3.5 e 3.6). Por outro lado, deve-se levar em conta a maior facilidade de tratamento dos sinais, para $h = 1.0$.

Embora a procura não se tenha estendido para valores de CTM > 5 , os resultados obtidos com valores tão baixos de CTM já se aproximaram bastante dos limites máximos previstos pelas curvas de R_0 . Para $h = 1.0$ e 0.75 , ficaram ≈ 1.0 dB aquém e, para $h = 0.5$, ficaram ≈ 1.5 dB aquém.

c) Constelação 2F/2x16-PSK

De acordo com a eq.6.4, esta constelação é composta de 32 sinais, de forma que $\varphi_i = 2\pi i/16$, $i = 0, \dots, 15$ e $\varphi_j \in \{0, \pi\}$.

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foi traçada a curva de $R_0 \times$ SNR, para $h = 1.0$ (fig.6.11). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times$ SNR, para as constelações 2-FSK/16-PSK, $h = 1.0$ (32 sinais, em 4 dimensões) [35] e 32-PSK (32 sinais, em 2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times$ SNR, para a constelação 16-PSK não-codificada (16 sinais, em 2

dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 4/5$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.11 permite observar a condição intermediária do ganho da constelação 2F/2x16-PSK ($h = 1.0$), comparado com os ganhos das constelações 2-FSK/16-PSK ($h = 1.0$) e 32-PSK. A primeira curva se distancia em ≈ 2.8 dB, da segunda e, em ≈ 2.9 dB, da terceira.

Também, pode-se verificar que a constelação 2F/2x16-PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 16-PSK não-codificada) de ≈ 8.4 dB, para $h = 1.0$.

Na tentativa de obter esses ganhos de codificação, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para $h = 1.0$, resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
1.00	0.276	0.541	1.000	1.414	2.000

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0,1,2,3,4$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com $\text{CTM} \leq 5$. A tabela da fig.6.12 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 4/5$. Na tabela, estão listados os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de

seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 16-PSK não-codificada.

Embora a procura não se tenha estendido para valores de $\text{CTM} > 5$, os resultados obtidos com valores tão baixos de CTM já se aproximaram bastante dos limites máximos previstos pelas curvas de R_0 . Ficaram ≈ 0.4 dB aquém, para o caso estudado de $h = 1.0$.

d) Constelação 2F/2x32-PSK

De acordo com a eq.6.4, esta constelação é composta de 64 sinais, de forma que $\varphi_i = 2\pi i/32$, $i = 0, \dots, 31$ e $\varphi_j \in (0, \pi)$.

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foi traçada a curva de $R_0 \times \text{SNR}$, para $h = 1.0$ (fig.6.13). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para as constelações 2-FSK/32-PSK, $h = 1.0$ (64 sinais, em 4 dimensões) [35] e 64-PSK (64 sinais, em 2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times \text{SNR}$, para a constelação 32-PSK não-codificada (32 sinais, em 2 dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 5/6$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.13 permite observar a condição intermediária do ganho da constelação 2F/2x32-PSK ($h = 1.0$), comparado com os ganhos das constelações 2-FSK/32-PSK ($h = 1.0$) e

64-PSK. A primeira curva se distancia em ≈ 3.1 dB, da segunda e, em ≈ 3.0 dB, da terceira.

Também, pode-se verificar que a constelação 2F/2x32-PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 32-PSK não-codificada) de ≈ 8.4 dB, para $h = 1.0$.

Na tentativa de obter esses ganhos de codificação, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para $h = 1.0$, resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
1.00	0.139	0.276	0.541	1.000	1.414	2.000

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0,1,2,3,4,5$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com $\text{CTM} \leq 5$. A tabela da fig.6.14 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 5/6$. Na tabela, estão listados os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 32-PSK não-codificada.

Embora a procura não se tenha estendido para valores de $\text{CTM} > 5$, os resultados obtidos com valores tão baixos

de CTM já se aproximaram bastante dos limites máximos previstos pelas curvas de R0. Ficaram ≈ 0.3 dB aquém, para o caso estudado de $h = 1.0$.

6.4. ESQUEMA EM 4 DIMENSÕES: 2F/PxM-PSK

6.4.1. DESCRIÇÃO

O esquema 2F/PxM-PSK, proposto neste trabalho, gera uma constelação composta de sinais do tipo:

$$S(t) = (1/\sqrt{T}) \cdot \{ \cos[(W_C + h\pi/T)t - \varphi_i] + \cos[(W_C - h\pi/T)t - \varphi_j - \psi] \} \quad (6.7)$$

onde: $0 \leq t < T$ e T é o intervalo de modulação; h é o índice de modulação; $\varphi_j = 2\pi j/P$, $j = 0, \dots, P-1$; $\varphi_i = 2\pi i/M$, $i = 0, 1, \dots, M-1$; $M = 2^m$, $m > 1$ e inteiro; $P = 2^p$, $p > 1$ e inteiro; $W_C = 2\pi n_C/T$ e n_C é um número inteiro; ψ é uma fase qualquer que, em geral, pode ser assumida igual a zero.

O espaço de sinais, gerado por este esquema, tem, portanto, quatro dimensões. Para h inteiro, os sinais descrevem constelações simétricas.

Aplicando-se a codificação AR a este esquema, um conjunto de 2^K sinais não-codificados é associado à constelação de $P \cdot M = 2^N$ sinais, representando uma taxa binária de codificação $R = K/N$. Para a aplicação do método da partição de conjunto [30] a este esquema, a condição de Ungerboeck foi ampliada para: $\Delta_0 \leq \Delta_1 \leq \dots \leq \Delta_{N-1}$.

6.4.2. PROPRIEDADES ESPECTRAIS

O processo aleatório $u(t)$, representativo do esquema 2F/PxM-PSK, é da forma:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B \cdot g_T(t - nT) \cdot (\text{EXPE } j(W_d \cdot t - a_n) + \text{EXPE } -j(W_d \cdot t + b_n)) \quad (6.8)$$

onde $\text{EXP}(z) = e^z$; $B = 1/\sqrt{T}$; $W_d = h\pi/T$; a_n e b_n são variáveis aleatórias independentes; a_n pode assumir os valores $2\pi i/M$, $i = 0, 1, \dots, M-1$, com iguais probabilidades; b_n pode assumir os valores $2\pi j/P$, $j = 0, 1, \dots, P-1$, com iguais probabilidades; $g_T(t)$ é um pulso retangular de amplitude unitária e de duração 'T' segundos.

A eq.6.5 é obtida, admitindo-se $\psi = 0$, na eq.6.7. Isto não altera a análise espectral, embora simplifique as expressões.

Verifica-se (ver o apêndice III, para a demonstração completa) que o esquema 2F/PxM-PSK apresenta as mesmas propriedades espectrais do esquema 2-FSK/M-PSK (ver a secção 3.6.3.) e do esquema 2F/2xM-PSK (ver a secção 6.2.2.), sendo a sua FDE(.) tal como na eq.3.13 e gráfico da fig.3.5:

$$FDE(W) = (\text{Sa}^2[(W - W_d) \cdot T/2] + \text{Sa}^2[(W + W_d) \cdot T/2])$$

onde $W_d = h\pi/T$; $\text{Sa}(z) = \text{SEN}(z)/z$.

Portanto, o aumento do Índice de modulação h representa uma expansão lateral FDE, no espectro de frequências. Uma medida desta expansão, em relação à FDE do esquema M-PSK (a curva para $h = 0$, na fig.3.5) está na tabela da fig.3.6.

Não é surpreendente que os esquemas 2F/2xM-PSK (3 dimensões) e 2F/PxM-PSK (4 dimensões) apresentem as mesmas propriedades espectrais. Na verdade, o esquema em 3 dimensões poderia ser encarado como um caso especial do esquema em 4 dimensões.

6.5. ANÁLISE DE CONSTELAÇÕES PARA O ESQUEMA EM 4 DIMENSÕES:

CURVAS DE R_0 E PROCURA DE CÓDIGOS

A base vetorial aqui considerada é aquela em 4 dimensões, proposta por Wolf e Padovani [35], e apresentada na eq.6.6 .

Como já dito, na secção 6.3, esta base não é rigorosamente ortonormal, para qualquer valor de h (o é apenas para h inteiro). No entanto, se for assumido que $W_C \gg 2\pi/T$, o que pode ser considerado, na prática, o erro cometido será desprezível.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de constelações, para o esquema 2F/PxM-PSK da secção anterior.

a) Constelação 2F/4x4-PSK

De acordo com a eq.6.7, esta constelação é composta de 16 sinais, de forma que $\varphi_j, \varphi_i = 2\pi i/4, i = 0, \dots, 3$.

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foram traçadas curvas de $R_0 \times$ SNR, para alguns valores de h (figs.6.15 e 6.16). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times$ SNR, para as constelações 2-FSK/8-PSK, $h = 1.0$ (16 sinais, em 4 dimensões) [35] e 16-PSK (16 sinais, em 2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times$ SNR, para a constelação 8-PSK não-codificada (8 sinais, em 2 dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 3/4$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação

ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.15 permite observar a melhor característica de ganho da curva 2F/4x4-PSK ($h = 1.0$), comparada à curva 2-FSK/8-PSK ($h = 1.0$), também em 4 dimensões. Ambas se distanciam em ≈ 0.7 dB.

Já na fig.6.16, pode-se observar a relação de ganhos, quando se varia o valor de h . Verifica-se que a constelação 2F/4x4-PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 8-PSK não-codificada) de ≈ 10.8 dB, para $h = 1.0$; de ≈ 10.7 dB, para $h = 0.75$; de ≈ 10.2 dB, para $h = 0.5$ e, de ≈ 9.0 dB, para $h = 0.25$. Estes ganhos, comparados com o ganho máximo da constelação 16-PSK codificada, representam margens de ganho de ≈ 5.2 dB, para $h = 1.0$; de ≈ 5.1 dB, para $h = 0.75$; de ≈ 4.6 dB, para $h = 0.5$ e, de ≈ 3.4 dB, para $h = 0.25$.

Na tentativa de obter esses ganhos de codificação, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto, aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para alguns valores do Índice de modulação h , resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0.25A	0.673	0.852	0.852	1.809
0.25B	0.673	0.673	1.000	1.809
0.50	1.000	1.049	1.414	1.483

0.75	1.000	1.255	1.414	1.775
1.00	1.000	1.414	1.414	2.000

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0,1,2,3$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com $CTM \leq 5$. A tabela da fig.6.17 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 3/4$. Na tabela, estão listados, para cada valor de h , os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 8-PSK não-codificada.

Verifica-se que, para alguns valores de CTM e para $h = 0.25A$, não foram encontrados valores de GCA interessantes, no sentido de serem maiores do que os da constelação 16-PSK codificada com a mesma taxa. Isto tem a ver com a assimetria da constelação 2F/4x4-PSK, para $h = 0.25$, como no item 'b', da secção 6.3.

Na tabela da fig.6.18, estão os valores de GCA dos melhores códigos das constelações codificadas 2F/4x4-PSK, 16-PSK [32] e 2-FSK/8-PSK [35]. Nela, verifica-se que, para $h = 1.0$, os ganhos da constelação 2F/4x4-PSK são sempre maiores ou iguais aos da constelação 2-FSK/8-PSK [35], também, em 4 dimensões.

Com valores menores de h , verifica-se que, para diferentes valores de CTM, ora os maiores ganhos são para uma constelação, ora, para outra. No entanto, as curvas de R_0

prometem maiores ganhos máximos para a constelação $2F/4 \times 4$ -PSK. Isto se deve, mais uma vez, à assimetria da constelação $2F/4 \times 4$ -PSK, para h não-inteiro. Tal fato praticamente não ocorre para a constelação 2 -FSK/ 8 -PSK, o que é uma vantagem da mesma, para esses valores de h .

Embora a procura não se tenha estendido para valores de $CTM > 5$, os resultados obtidos com valores tão baixos de CTM já se aproximaram bastante dos limites máximos previstos pelas curvas de R_0 . Para $h = 1.0$, por exemplo, ficaram ≈ 1.5 dB aquém do limite.

Outro ponto a considerar, e que pode ser verificado pelas figs. 6.15 e 6.16, é a codificação da constelação $2F/4 \times 4$ -PSK com uma taxa $R = 2/4$. Isto equivale a uma taxa de corte $R_0 = 2$ bits de informação por símbolo. Deste modo, se estará quadruplicando o alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

Esta quadruplicação do alfabeto tem razão de ser, apenas, por não haver uma constelação de 8 sinais, para o esquema $2F/P \times M$ -PSK. Além disso, se for realizada uma comparação com a constelação $2F/2 \times 4$ -PSK (em 3 dimensões), há uma margem de ganho de ≈ 1 dB, para a constelação $2F/4 \times 4$ -PSK.

A análise da fig. 6.15 permite observar que a curva $2F/4 \times 4$ -PSK ($h = 1.0$) sugere ganhos ainda melhores do que a curva 2 -FSK/ 8 -PSK ($h = 1.0$), codificada com a mesma taxa. Ambas as curvas se distanciam em ≈ 0.5 dB.

Já na fig. 6.16, pode-se verificar a relação de ganhos, quando se varia o valor de h . Verifica-se que a constelação $2F/4 \times 4$ -PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 4 -PSK não-codificada) de ≈ 8 dB, para $h = 1.0$; de \approx

7.8 dB, para $h = 0.75$; de ≈ 7.4 dB, para $h = 0.5$ e de ≈ 6.6 dB, para $h = 0.25$. Isto, comparado com o ganho máximo da constelação 8-PSK codificada, representa margens de ganho de ≈ 2.2 dB, para $h = 1.0$; de ≈ 2.0 dB, para $h = 0.75$; de ≈ 1.6 dB, para $h = 0.5$ e de ≈ 0.8 dB, para $h = 0.25$.

Para este caso, não foi realizada a procura de códigos. Supõe-se, também, que não serão encontrados valores interessantes de GCA (no sentido de serem melhores do que aqueles da constelação 2F/2x4-PSK codificada), para valores pequenos de CTM. Haverá necessidade de um pouco mais de complexidade, para encontrar valores próximos do limite máximo de ganho.

b) Constelação 2F/4x8-PSK

De acordo com a eq.6.4, esta constelação é composta de 32 sinais, de forma que $\varphi_i = 2\pi i/8$, $i = 0, \dots, 7$ e $\varphi_j = 2\pi j/4$, $j = 0, \dots, 3$ (fig.6.2).

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foram traçadas curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para alguns valores de h (figs.6.19 e 6.20). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para as constelações 2-FSK/16-PSK, $h = 1.0$ (32 sinais, em 4 dimensões) [35] e 32-PSK (32 sinais, em 2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times \text{SNR}$, para a constelação 16-PSK não-codificada (16 sinais, em 2 dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 4/5$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.19 permite observar a melhor característica de ganho da curva 2F/4x8-PSK ($h = 1.0$), comparada à curva 2-FSK/16-PSK ($h = 1.0$), também em 4 dimensões. Ambas se distanciam em ≈ 1.8 dB.

Já na fig.6.20, pode-se observar a relação de ganhos, quando se varia o valor de h . Verifica-se que a constelação 2F/4x8-PSK apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 16-PSK não-codificada) de ≈ 13.5 dB, para $h = 1.0$; de ≈ 13.4 dB, para $h = 0.75$; de ≈ 13.0 dB, para $h = 0.5$ e, de ≈ 11.6 dB, para $h = 0.25$. Estes ganhos, comparados com o ganho máximo da constelação 32-PSK codificada, representam margens de ganho de ≈ 8.0 dB, para $h = 1.0$; de ≈ 7.9 dB, para $h = 0.75$; de ≈ 7.5 dB, para $h = 0.5$ e, de ≈ 6.1 dB, para $h = 0.25$.

Na tentativa de obter esses ganhos de codificação, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para alguns valores do índice de modulação h , resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0.25	0.446	0.541	0.631	1.000	1.414
0.50	0.541	0.852	1.000	1.206	1.414
0.75	0.541	1.000	1.183	1.414	1.673

1.00	0.541	1.000	1.414	1.414	2.000
------	-------	-------	-------	-------	-------

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0,1,2,3,4$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com $CTM \leq 5$. A tabela da fig.6.21 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 4/5$. Na tabela, estão listados, para cada valor de h , os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 16-PSK não-codificada.

Na tabela da fig.6.22, estão os valores de GCA dos melhores códigos das constelações codificadas 2F/4x8-PSK e 2-FSK/16-PSK [35]. Nela, verifica-se que, para $h = 1.0$, os ganhos da primeira constelação são sempre maiores do que os da segunda, em ≈ 1.8 dB, tendendo a comprovar a previsão das curvas de $R_0 \times \times$ SNR. Para $h = 0.75$, com exceção do valor de $CTM = 2$, a mesma situação se verifica, em relação aos ganhos. Para $h = 0.5$, também se verifica uma tendência de maiores ganhos, embora que, para tais valores de CTM , a diferença de ganhos só tenha chegado a ≈ 0.7 dB.

Outro fato interessante é a igualdade dos ganhos para $h = 1.0$ e $h = 0.75$, o que pode ser conseguido com uma menor expansão da largura de faixa, para $h = 0.75$ (figs.3.5 e 3.6). Por outro lado, deve-se levar em conta a maior facilidade de tratamento dos sinais, para $h = 1.0$.

Embora a procura não se tenha estendido para

valores de $CTM > 5$, os resultados obtidos com valores tão baixos de CTM já se aproximaram bastante dos limites máximos previstos pelas curvas de R_0 . Para $h = 1.0$, ficaram ≈ 1.7 dB aquém e, para $h = 0.75$, ficaram ≈ 1.6 dB aquém.

c) Constelação 2F/8x8-PSK

De acordo com a eq.6.4, esta constelação é composta de 64 sinais, de forma que φ_j , $\varphi_i = 2\pi i/16$, $i = 0, \dots, 7$.

A partir das expressões para R_0 (eq.6.2) e SNR (eq.6.3), foi traçada a curva de $R_0 \times SNR$, para $h = 1.0$ (fig.6.23). Para tanto, foram obtidas as coordenadas dos sinais da constelação, segundo a base da eq.6.6. Também foram traçadas as curvas de $R_0 \times SNR$, para as constelações 2F/4x16-PSK, $h = 1.0$ (64 sinais, em 4 dimensões), 2-FSK/32-PSK, $h = 1.0$ (64 sinais, em 4 dimensões) [35] e 64-PSK (64 sinais, em 2 dimensões). Deste modo, podem ser feitas comparações, observando-se os máximos ganhos de codificação, em relação à curva de $R_0 \times SNR$, para a constelação 32-PSK não-codificada (32 sinais, em 2 dimensões). Isto pressupõe uma taxa de codificação $R = 5/6$, ou seja, uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte.

A análise da fig.6.23 permite observar a melhor característica de ganho da curva 2F/8x8-PSK ($h = 1.0$), comparada às curvas 2F/4x16-PSK ($h = 1.0$) e 2-FSK/32-PSK ($h = 1.0$), também em 4 dimensões. A primeira curva se distancia da segunda, em ≈ 2.8 dB e, da terceira, em ≈ 5.6 dB.

Também, verifica-se que a constelação 2F/8x8-PSK, para $h = 1.0$, apresenta um ganho máximo (em relação à constelação 32-PSK não-codificada) de ≈ 17.2 dB.

Observa-se, portanto, que as constelações $2F/P \times M$ -PSK estarão mais bem distribuídas no espaço de sinais, quanto mais próximos entre si forem os valores de P e M . No caso, a constelação com $P = M = 8$ é melhor do que aquela com $P = 4$, $M = 16$, embora ambas tenham o mesmo número de sinais.

Outro fato importante a considerar é que, quanto maior o número de sinais das constelações $2F/P \times M$ -PSK e 2 -FSK/ M -PSK, mais eficiente torna-se o primeiro esquema, em relação ao segundo. Ou seja, o esquema $2F/P \times M$ -PSK aproveita melhor o espaço em 4 dimensões.

Na tentativa de obter esses ganhos de codificação, foi realizada uma procura dos melhores códigos AR, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (eq.3.5). Para tanto, aplicando-se o método da partição de conjunto aos sinais da constelação (ver o apêndice IV), para $h = 1.0$, resultou na obtenção dos seguintes valores de distâncias mínimas de subconjunto:

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
1.00	0.541	0.765	1.000	1.414	1.414	2.000

A partir destes valores de Δ_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, foi realizada a procura de códigos, para cada classe simples de codificadores, dos conjuntos totais de classes com $\text{CTM} \leq 5$. A tabela da fig.6.24 apresenta os resultados desta procura, para códigos de taxa $R = 5/6$. Na tabela, estão listados os melhores códigos (representados pelos conjuntos de vetores coeficientes de seus codificadores), as classes simples às quais pertencem, os

valores de Δ_{MIN} e os de GCA, em relação à constelação 32-PSK não-codificada.

Verifica-se, mais uma vez, que, embora a procura não se tenha estendido para valores de CTM > 5 , os resultados obtidos com valores tão baixos de CTM já se aproximaram bastante dos limites máximos previstos pelas curvas de R_0 . Ficaram ≈ 0.6 dB aquém, para o caso estudado de $h = 1.0$.

7. CONCLUSÃO

Este trabalho teve, como finalidade, o estudo da codificação de alfabeto redundante [30], aplicada a esquemas de modulação em mais de duas dimensões, na busca por esquemas associados a maiores ganhos de codificação.

Neste sentido, foram propostos novos esquemas de modulação/codificação AR, em três ($2F/2 \times M$ -PSK) e em quatro dimensões ($2F/P \times M$ -PSK), que possuem a característica de apresentarem maiores ganhos de codificação, do que aqueles em uma e duas dimensões, porém, ao preço de requererem maiores larguras de faixa. São, portanto, esquemas que têm aplicação em sistemas de comunicação, onde a potência de transmissão disponível é limitada, mas que apresentam alguma flexibilidade na alocação de faixa.

Inicialmente, foi feita uma descrição e realizada uma análise espectral dos esquemas. Em seguida, foram obtidas curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para diversas constelações dos mesmos, bem como, para constelações em duas (M -PSK) e em quatro dimensões [35]. Uma análise comparativa, em termos do máximo ganho de codificação, pôde, então, ser realizada. Finalmente, procedeu-se a uma procura dos melhores códigos, sob o critério do máximo Δ_{MIN} (um limitante inferior para a distância mínima Euclidiana). Uma comparação com os ganhos de codificação, obtidos para os esquemas em duas [6,30,32] e em quatro dimensões [34,35], foi, então, realizada.

Assim, a partir do estudo destes esquemas e dos resultados obtidos neste trabalho, algumas conclusões podem ser

salientadas:

I. A Respeito da Procura de Códigos:

a) O programa de procura de códigos foi implementado, baseando-se no algoritmo de procura de Borelli [6], quanto à representação dos codificadores e ao tipo de procura. A possibilidade de procura foi estendida para codificadores de até cinco entradas ($K = 5$). Após esta extensão, o programa passou a apresentar a flexibilidade de se poder aumentar o número de entradas e o valor de CTM, com a necessidade de reduzida complexidade adicional;

b) Em relação ao algoritmo de Borelli [6], foram introduzidas, melhorias, que diminuíram o tempo computacional empregado, quais sejam:

- A eliminação de uma maior número de codificadores equivalentes, através de uma nova ordenação para os bits dos vetores $\underline{VC}(j)$, $j = 1, \dots, N$ (eq.2.18), bem como, pela introdução de uma classe de equivalência não anteriormente analisada (a classe dos codificadores parcialmente simétricos permutados);

- A eliminação imediata de grande parte dos codificadores catastróficos, através da subrotina CATASTROF;

c) O aprofundamento no estudo do tipo não-exaustivo de procura, introduzido por Borelli [6], resultou na definição de diversos subconjuntos especiais de codificadores, para algumas classes simples, e correspondentes limitantes inferiores e superiores, para os Δ_{MIN} dos respectivos códigos (ver o apêndice II). Estes subconjuntos, embora tenham sido utilizados para a procura

de códigos dos esquemas propostos neste trabalho, são válidos para qualquer constelação de sinais, em que se aplique a codificação AR.

II. A Respeito dos Esquemas de Modulação/Codificação AR

Propostos:

a) Pela análise das propriedades espectrais, verificou-se que, para um mesmo valor do Índice de modulação h , os esquemas de modulação propostos demandam a mesma largura de faixa espectral requerida pelo esquema de Wolf e Padovani, 2-FSK/M-PSK (em 4 dimensões) [35]. Estas larguras de faixa são maiores do que aquelas requeridas pelo esquema M-PSK e, são tanto maiores, quanto maior for o valor de h (figs. 3.5 e 3.6);

b) A análise das constelações do esquema 2F/2xM-PSK (em 3 dimensões) demonstrou a característica de ganhos de codificação intermediários, entre os ganhos do esquema M-PSK (em duas dimensões) e aqueles do esquema 2-FSK/M-PSK (em 4 dimensões) [35]. Além disso, as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$, para estes esquemas, apresentaram uma tendência de separação de ≈ 3 dB, entre os mesmos, à medida que aumenta o número de sinais das constelações;

c) A procura de códigos AR 2F/2xM-PSK foi realizada apenas para taxas $R = K/N$, com $N = K + 1$, o que representa uma duplicação do alfabeto de canal, em relação ao alfabeto fonte. Não foram utilizadas outras taxas, porque as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$ não prevêem margens de ganho consideráveis, em se aumentando o alfabeto de canal;

d) A análise das constelações do esquema 2F/PxM-PSK (em 4

dimensões) demonstrou a tendência dos ganhos de codificação destas constelações serem melhores do que os das constelações 2-FSK/M-PSK [35]. Para $h = 1.0$, os ganhos são sempre maiores ou iguais; para valores menores de h , esta tendência é evidenciada, à medida que se aumenta o número de sinais das constelações. Deste modo, comprova-se que o esquema 2F/PxM-PSK apresenta uma melhor distribuição dos sinais, no espaço de 4 dimensões, do que o esquema 2-FSK/M-PSK [35], o que representa uma maior eficiência, mormente, para altas taxas de transmissão. No caso da constelação de 32 sinais, há uma margem de ganho da ordem de 1.8 dB e, para a de 64 sinais, a margem de ganho é da ordem de 5.6 dB;

e) A procura de códigos AR 2F/PxM-PSK foi realizada apenas para taxas $R = K/N$, com $N = K + 1$. Para outras taxas, somente em um caso, as curvas de $R_0 \times \text{SNR}$ previram uma margem de ganho considerável: a codificação da constelação 2F/4x4-PSK, com taxa $R = 2/4$. Isto acontece, por não haver uma constelação de 8 sinais, para este esquema de modulação. Comparando-se com o ganho da constelação 2F/2x4-PSK (8 sinais, em 3 dimensões), codificada à taxa $R = 2/3$, é possível obter um ganho adicional de 1.0 dB. A procura de códigos para a taxa $R = 2/4$ não foi, no entanto, realizada. Esta margem de ganho deverá ser conseguida, para valores de CTM maiores do que cinco;

f) Para duas constelações do esquema 2F/PxM-PSK, ambas com o mesmo número de sinais, porém, com valores de P e M diferentes, será maior, o ganho da constelação, cujos valores de P e M forem os mais próximos entre si. Deste modo, a constelação estará aproveitando melhor o espaço de sinais, em quatro dimensões. Isto

explica a margem de ganho que a constelação 2F/8x8-PSK apresenta, sobre a constelação 2F/4x16-PSK, de ≈ 2.8 dB;

g) Para ambos os esquemas propostos, e para valores pequenos do Índice de modulação h , assimetrias decorrentes vêm a diminuir a eficiência dos mesmos, para valores pequenos de CTM. Deste modo, para serem conseguidos ganhos de codificação próximos dos limites máximos de ganho (curvas de $R_0 \times \text{SNR}$), será requerida uma maior complexidade de codificação, do que aquela requerida para valores maiores de h ;

h) Para ambos os esquemas propostos, e para qualquer valor de h , a eficiência destes aumenta, com o aumento do número de sinais das constelações, de modo que são conseguidos ganhos próximos do limite máximo de ganho, com valores de CTM cada vez menores.

Sugestões para Trabalhos Futuros

A partir dos resultados deste trabalho, algumas sugestões podem ser apresentadas, para possíveis trabalhos futuros, quais sejam:

a) A definição de limitantes da probabilidade de erro, e a simulação de códigos AR, para os esquemas propostos neste trabalho, tanto para o canal AWGN, como para um canal de características não-lineares, consolidaria o estudo da eficiência dos mesmos;

b) A aplicação das características de modulação QAM e PAM, aos esquemas propostos, criando esquemas do tipo 2F/2xM-QAM, ou 2F/PxM-QAM, por exemplo, poderia ser investigada;

c) A extensão da dimensionalidade do espaço de sinais também poderia ser investigada, com a inclusão de outra(s) frequência(s), o que representaria maiores ganhos de codificação, ao preço de uma expansão maior da largura de faixa;

d) Finalmente, a recente associação, entre códigos de treliça variantes no tempo e codificação AR [22], poderia ser investigada, para os esquemas propostos neste trabalho. Devido à estrutura variante no tempo, tais códigos introduzem alguma flexibilidade, na representação de treliça. Acreditamos que, por meio desta flexibilidade, talvez se possa explorar mais a não-uniformidade de algumas constelações (como a $2F/2 \times 4$ -PSK), conseguindo códigos com maiores distâncias mínimas.

APÊNDICE I

1.1. INTRODUÇÃO

Este apêndice trata das propriedades espectrais dos sinais não-codificados do esquema de modulação/codificação AR 2-FSK/M-PSK, proposto por Wolf e Padovani [34,35] (ver a secção 3.6.). Inicialmente, demonstra-se que o processo aleatório $u(t)$ é um processo ciclo-estacionário [25]. Portanto, sua função de auto-correlação (FAC) é dependente do tempo de ocorrência das amostras, sendo, a média temporal da FAC, dependente apenas do intervalo de tempo entre as ocorrências das amostras. A partir daí, é obtida, a função de densidade espectral (média) do processo (FDE), como a transformada de Fourier da média temporal da FAC.

1.2. A FUNÇÃO DE AUTO-CORRELAÇÃO

Como anteriormente analisado (secção 3.6.3., eq.3.12), o processo aleatório $u(t)$ para o esquema 2-FSK/M-PSK é da forma:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot g_T(t - nT) \cdot \text{EXP} [j(b_n \cdot W_d \cdot t - a_n)] \quad (I.1)$$

onde $A = \sqrt{2/T}$; $g_T(t)$ é um pulso retangular de amplitude unitária e de duração 'T' segundos; $\text{EXP}[z] = e^z$; a_n e b_n são variáveis aleatórias independentes; a_n pode assumir os valores $2\pi i/M$, $i = 0, \dots, M-1$, com iguais probabilidades; b_n pode assumir os valores '+1' ou '-1', com iguais probabilidades; $W_d = h\pi/T$ e h é o índice de modulação.

Para este processo, a função de auto-correlação é

expressa por:

$$\begin{aligned}
 \text{FAC}(t, t + \tau) &= E(u(t) \cdot u^*(t + \tau)) = & (I.2) \\
 &= E\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A^2 \cdot g_T(t - nT) \cdot g_T(t + \tau - nT) \cdot \text{EXPE}^{-j \cdot b_n \cdot W_d \cdot \tau}\right) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^2 \cdot g_T(t - nT) \cdot g_T(t + \tau - nT) \cdot E(\text{EXPE}^{-j \cdot b_n \cdot W_d \cdot \tau})
 \end{aligned}$$

onde $E(\cdot)$ representa a média estatística.

$$\begin{aligned}
 &\text{Seja:} \\
 R(t, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT) \cdot g_T(t + \tau - nT) = & (I.3) \\
 &= \begin{cases} 1, & \text{para } nT < t < (n+1) \cdot T - \tau, \text{ e para todo } n \\ 0, & \text{fora do intervalo} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Na eq.I.2, verifica-se que:

$$E(\text{EXPE}^{-j \cdot b_n \cdot W_d \cdot \tau}) = \text{COS}(W_d \cdot \tau) \quad (I.4)$$

Portanto, substituindo-se as eqs.I.3 e I.4, em I.2:

$$\text{FAC}(t, t + \tau) = A^2 \cdot \text{COS}(W_d \cdot \tau) \cdot R(t, \tau) \quad (I.5)$$

Observa-se, então, que a FAC é função de τ e t , o que comprova não ser, o processo aleatório $u(t)$, estacionário no sentido amplo.

No entanto, verifica-se, pela eq.I.5, que a FAC é periódica na variável t , com período ' T ', pois, de acordo com a eq.I.3:

$$\begin{aligned}
 R(t + T, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T[t - (n-1) \cdot T] \cdot g_T[t + \tau - (n-1) \cdot T] = \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_T[t - mT] \cdot g_T[t + \tau - mT] = R(t, \tau) & (I.6)
 \end{aligned}$$

Além disso, a média estatística do processo $u(t)$ é expressa por:

$$E(u(t)) = E\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot g_T(t - nT) \cdot \text{EXPE}^{j \cdot (b_n \cdot W_d \cdot t - a_n)}\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot g_T(t - nT) \cdot E[\exp j \cdot (b_n \cdot W_d \cdot t - a_n)] \quad (I.7)$$

Na eq.I.7, verifica-se que:

$$E[\exp j \cdot (b_n \cdot W_d \cdot t - a_n)] = 0 \quad (I.8)$$

Dalí, conclui-se que:

$$E[u(t)] = 0 \quad (I.9)$$

Portanto, as eqs. I.6 e I.9 comprovam que o processo aleatório $u(t)$ é um processo ciclo-estacionário, ou periodicamente estacionário no sentido amplo [25].

Para se determinar a função de densidade espectral (FDE) de um processo ciclo-estacionário, deve-se obter a média temporal da FAC, sobre o período 'T', eliminando-se, assim, a dependência da FAC com a variável t . Portanto:

$$\begin{aligned} \langle \text{FAC}(t, t + \tau) \rangle &= 1/T \cdot \int_0^T \text{FAC}(t, t + \tau) \cdot dt = \quad (I.10) \\ &= A^2/T \cdot \cos(W_d \cdot \tau) \cdot \int_0^T R(t, \tau) \cdot dt \end{aligned}$$

Mas, pela eq.I.3, tem-se que:

$$\int_0^T R(t, \tau) \cdot dt = \begin{cases} \int_0^{T - |\tau|} dt = T - |\tau|, & \text{para } |\tau| \leq T \\ 0, & \text{para } |\tau| > T \end{cases} \quad (I.11)$$

Logo, substituindo-se a eq.I.11, na eq.I.10:

$$\langle \text{FAC}(t, t + \tau) \rangle = \begin{cases} A^2 \cdot \cos(W_d \cdot \tau) \cdot (1 - |\tau|/T), & \text{para } |\tau| \leq T \\ 0, & \text{para } |\tau| > T \end{cases} \quad (I.12)$$

a qual é função apenas do intervalo de tempo ' τ ' entre as ocorrências das amostras.

1.3. A FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL

A transformada de Fourier da média temporal da FAC

(eq.I.12) representa a função de densidade espectral (média) do processo aleatório $u(t)$. Assim:

$$\begin{aligned}
 FDE(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle FAC(t, t + \tau) \rangle \cdot \text{EXPE}^{-j.W.\tau} \cdot d\tau = \quad (I.13) \\
 &= \int_0^T A \cdot \text{COS}(W_d \cdot \tau) (1 - |\tau|/T) \cdot \text{EXPE}^{-j.W.\tau} \cdot d\tau = \\
 &= A^2 \cdot T/2 \cdot \{ \text{Sa}^2[(W + W_d) \cdot T/2] + \text{Sa}^2[(W - W_d) \cdot T/2] \} = \\
 &= \{ \text{Sa}^2[(W + W_d) \cdot T/2] + \text{Sa}^2[(W - W_d) \cdot T/2] \}
 \end{aligned}$$

onde $\text{Sa}(z) = \text{SEN}(z)/z$.

A fig.3.5. apresenta o gráfico da função $FDE(W)$ (eq.I.13), para vários valores do índice de modulação h .

APÊNDICE II

Neste apêndice, são apresentados, alguns exemplos de subconjuntos especiais de codificadores (representados pelos vetores coeficientes, eq.2.18), para algumas classes simples, e correspondentes limitantes inferiores e superiores para os Δ_{MIN} dos respectivos códigos. Estes subconjuntos foram utilizados na procura não-exaustiva de códigos AR, para os esquemas de modulação/codificação AR propostos neste trabalho.

São os seguintes, os subconjuntos especiais:

a) Classe simples (G_{23} ; 2 , 2)

<u>VC</u> (1)	0	0	1	X	0	0
<u>VC</u> (2)	0	1	0	X	1	0
<u>VC</u> (3)	1	0	0	X	X	1

$$\Delta_{\text{INF}}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{\text{SUP}}^2 = \Delta_0^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2$$

b) Classe simples (G_{23} ; 3 , 1)

<u>VC</u> (1)	0	1	X	0	0	0
<u>VC</u> (2)	0	0	X	1	1	0
<u>VC</u> (3)	1	0	X	X	X	1

$$\Delta_{\text{INF}}^2 = 2\Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{\text{SUP}}^2 = \Delta_2^2 + \Delta_1^2$$

c) Classe simples (G_{23} ; 3 , 2)

<u>VC(1)</u>	0	1	0	X	X	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	1	X	X	1	0
<u>VC(3)</u>	1	0	0	X	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = 3 \Delta_1^2 + \Delta_0^2$$

d) Classe simples (G_{23} ; 4 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	1	X	X	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	X	X	1	1	0
<u>VC(3)</u>	1	0	X	X	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = \Delta_2^2 + \Delta_1^2$$

e) Classe simples (G_{34} ; 1 , 1 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	0	1	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	0	1	X	X
<u>VC(3)</u>	0	1	0	0	1	0
<u>VC(4)</u>	1	0	0	0	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 = \Delta_{MIN}^2$$

f) Classe simples (G_{34} ; 2 , 1 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	1	0	0	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	1	X	1	X	X
<u>VC(3)</u>	0	0	0	1	X	1	0
<u>VC(4)</u>	1	0	0	0	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = 2 \Delta_1^2 + \Delta_0^2$$

g) Classe simples (G_{34} ; 2 , 2 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	0	1	X	0	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	0	X	1	1	0	0
<u>VC(3)</u>	0	1	0	X	X	X	1	0
<u>VC(4)</u>	1	0	0	X	X	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = 2 \Delta_1^2 + \Delta_0^2$$

h) Classe simples (G_{34} ; 3 , 1 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	1	0	0	0	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	X	0	1	1	0	0
<u>VC(3)</u>	0	0	X	1	X	X	1	0
<u>VC(4)</u>	1	0	X	0	0	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = \Delta_2^2 + \Delta_1^2$$

i) Classe simples (G₄₅ ; 1 , 1 , 1 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	0	0	1	0	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	0	0	1	0	0	0
<u>VC(3)</u>	0	0	1	0	0	1	0	0
<u>VC(4)</u>	0	1	0	0	0	X	1	0
<u>VC(5)</u>	1	0	0	0	0	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_0^2 = \Delta_{MIN}^2$$

j) Classe simples (G₄₅ ; 2 , 1 , 1 , 1)

<u>VC(1)</u>	0	1	0	0	0	0	0	0	0
<u>VC(2)</u>	0	0	0	0	1	1	0	0	0
<u>VC(3)</u>	0	0	0	1	0	X	1	0	0
<u>VC(4)</u>	0	0	1	0	0	X	X	1	0
<u>VC(5)</u>	1	0	0	0	0	X	X	X	1

$$\Delta_{INF}^2 = 2 \Delta_1^2 \quad ; \quad \Delta_{SUP}^2 = 2 \Delta_1^2 + \Delta_0^2$$

1) Classe simples (G₅₆ ; 1 , 1 , 1 , 1 , 1)

<u>VC</u> (1)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
<u>VC</u> (2)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
<u>VC</u> (3)	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
<u>VC</u> (4)	0	0	1	0	0	0	X	1	0	0
<u>VC</u> (5)	0	1	0	0	0	0	X	X	1	0
<u>VC</u> (6)	1	0	0	0	0	0	X	X	X	1

$$\Delta^2_{INF} = \Delta^2_1 + \Delta^2_0 \quad ; \quad \Delta^2_{SUP} = \Delta^2_1 + \Delta^2_0 = \Delta^2_{MIN}$$

APÊNDICE III

III.1. INTRODUÇÃO

Este apêndice trata das propriedades espectrais dos sinais não-codificados dos esquemas de modulação/codificação AR propostos neste trabalho, quais sejam:

- a) Esquema em 3 dimensões: 2-FSK/2xM-PSK (ver a secção 6.2.);
- b) Esquema em 4 dimensões: 2-FSK/PxM-PSK (ver a secção 6.4.).

Para ambos os esquemas, os processos aleatórios $u(t)$ apresentam a mesma expressão geral:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B \cdot g_T(t - nT) \cdot \left(\text{EXPE } j \cdot (W_d \cdot t - a_n) \right) + \left(\text{EXPE } -j \cdot (W_d \cdot t + b_n) \right) \quad (\text{III.1})$$

onde $B = 1/\sqrt{T}$; $g_T(t)$ é um pulso retangular de amplitude unitária e de duração 'T' segundos; $\text{EXP}(z) = e^z$; a_n e b_n são variáveis aleatórias independentes; a_n pode assumir os valores $2\pi i/M$, $i = 0, \dots, M-1$, com iguais probabilidades; $W_d = h\pi/T$ e h é o índice de modulação.

Os esquemas diferem, apenas, quanto à variável aleatória b_n . Esta assume, com iguais probabilidades, os valores '0' ou ' π ', para o esquema em 3 dimensões e, $2\pi j/P$, $j = 0, \dots, P-1$, para o esquema em 4 dimensões. Tal fato, no entanto, não altera a demonstração a seguir, que é válida para ambos os esquemas.

Inicialmente, demonstra-se que o processo aleatório $u(t)$ é um processo ciclo-estacionário [25]. Portanto, sua função de auto-correlação (FAC) é dependente do tempo de ocorrência das amostras, sendo, a média temporal da FAC, dependente apenas do

intervalo de tempo entre as ocorrências das amostras. A partir daí, é obtida, a função de densidade espectral (média) do processo (FDE), como a transformada de Fourier da média temporal da FAC.

III.2. A FUNÇÃO DE AUTO-CORRELAÇÃO

Para o processo aleatório $u(t)$ da eq.III.1, a função de auto-correlação é expressa por:

$$\begin{aligned} \text{FAC}(t, t + \tau) &= E(u(t) \cdot u^*(t + \tau)) = & (III.2) \\ &= E\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} B^2 \cdot g_T(t - nT) \cdot g_T(t + \tau - nT) \cdot (\text{EXPE}^{-j \cdot W_d \cdot \tau} + \right. \\ &\quad + \text{EXPE}^{j \cdot W_d \cdot \tau} + \text{EXPE}^{j \cdot (2W_d \cdot t + W_d \cdot \tau + b_n - a_n)} + \\ &\quad \left. + \text{EXPE}^{-j \cdot (2W_d \cdot t + W_d \cdot \tau + b_n - a_n)})\right) \end{aligned}$$

onde $E(\cdot)$ representa a média estatística.

Seja:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT) \cdot g_T(t + \tau - nT) = & (III.3) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{para } nT < t < (n+1) \cdot T - \tau, \text{ para todo } n \\ 0, & \text{fora do intervalo} \end{cases} \end{aligned}$$

Na eq.III.2, verifica-se que:

$$\begin{aligned} E(\text{EXPE}^{-j \cdot W_d \cdot \tau} + \text{EXPE}^{j \cdot W_d \cdot \tau}) &= & (III.4a) \\ &= E(2\text{COS}(W_d \cdot \tau)) = 2 \text{COS}(W_d \cdot \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\text{EXPE}^{j \cdot (2W_d \cdot t + W_d \cdot \tau + b_n - a_n)} + \text{EXPE}^{-j \cdot (2W_d \cdot t + W_d \cdot \tau + b_n - a_n)}) &= 0 & (III.4b) \end{aligned}$$

Portanto, substituindo-se as eqs. III.3 e III.4, em III.2:

$$\text{FAC}(t, t + \tau) = 2B^2 \cdot \text{COS}(W_d \cdot \tau) \cdot R(t, \tau) \quad (III.5)$$

Observa-se, então, que a FAC é função de τ e t , o que comprova não ser, o processo aleatório $u(t)$, estacionário no

sentido amplo.

No entanto, verifica-se, pela eq.III.5, que a FAC é periódica na variável t , com período ' T ', pois, de acordo com a eq.III.3:

$$\begin{aligned} R(t + T, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T[t - (n-1)T] \cdot g_T[t + \tau - (n-1)T] = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_T[t - mT] \cdot g_T[t + \tau - mT] = R(t, \tau) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Além disso, a média estatística do processo $u(t)$ é expressa por:

$$\begin{aligned} E\{u(t)\} &= E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} B \cdot g_T(t - nT) \cdot \left[\text{EXPE } j \cdot (W_d \cdot t - a_n) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{EXPE } j \cdot (W_d \cdot t + b_n) \right\} = \quad (\text{III.7}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B \cdot g_T(t - nT) \cdot E\left\{ \text{EXPE } j \cdot (W_d \cdot t - a_n) \right\} + \\ &\quad + \text{EXPE } -j \cdot (W_d \cdot t + b_n) \} \end{aligned}$$

Na eq.III.7, verifica-se que:

$$E\left\{ \text{EXPE } j \cdot (W_d \cdot t - a_n) \right\} + \text{EXPE } -j \cdot (W_d \cdot t + b_n) \} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Dai, conclui-se que:

$$E\{u(t)\} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Portanto, as eqs. III.6 e III.9 comprovam que o processo aleatório $u(t)$ é um processo ciclo-estacionário, ou periodicamente estacionário no sentido amplo [25].

Para se determinar a função de densidade espectral (FDE) de um processo ciclo-estacionário, deve-se obter a média temporal da FAC, sobre o período ' T ', eliminando-se, assim, a dependência da FAC com a variável t . Portanto:

$$\langle \text{FAC}(t, t + \tau) \rangle = 1/T \cdot \int_0^T \text{FAC}(t, t + \tau) \cdot dt = \quad (\text{III.10})$$

$$= 2B^2/T \cdot \cos(W_d \cdot \tau) \cdot \int_0^T R(t, \tau) \cdot dt$$

Mas, pela eq.III.3, tem-se que:

$$\int_0^T R(t, \tau) \cdot dt = \begin{cases} \int_0^{T-|\tau|} dt = T - |\tau|, & \text{para } |\tau| \leq T \\ 0, & \text{para } |\tau| > T \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Logo, substituindo-se a eq.III.11, na eq.III.10:

$$\langle \text{FAC}(t, t + \tau) \rangle = \begin{cases} 2B^2 \cdot \cos(W_d \cdot \tau) \cdot (1 - |\tau|/T), & \text{para } |\tau| \leq T \\ 0, & \text{para } |\tau| > T \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

a qual é função apenas do intervalo de tempo ' τ ' entre as ocorrências das amostras.

III.3. A FUNÇÃO DE DENSIDADE ESPECTRAL

A transformada de Fourier da média temporal da FAC (eq.III.12) representa a função de densidade espectral (média) do processo aleatório $u(t)$. Assim:

$$\begin{aligned} \text{FDE}(W) &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \text{FAC}(t, t + \tau) \rangle \cdot \text{EXPE}^{-j \cdot W \cdot \tau} \cdot d\tau = \quad (\text{III.13}) \\ &= \int_0^T 2B^2 \cdot \cos(W_d \cdot \tau) \cdot (1 - |\tau|/T) \cdot \text{EXPE}^{-j \cdot W \cdot \tau} \cdot d\tau = \\ &= B^2 \cdot T \left(\text{Sa}^2[(W + W_d) \cdot T/2] + \text{Sa}^2[(W - W_d) \cdot T/2] \right) = \\ &= \left(\text{Sa}^2[(W + W_d) \cdot T/2] + \text{Sa}^2[(W - W_d) \cdot T/2] \right) \end{aligned}$$

onde $\text{Sa}(z) = \text{SEN}(z)/z$.

A fig.3.5 apresenta o gráfico da função $\text{FDE}(W)$ (eq.III.13), para vários valores do índice de modulação h .

APÊNDICE IV

IV.1. INTRODUÇÃO

Neste apêndice, é apresentada uma associação de símbolos, aos sinais das constelações estudadas no CAP.6 . Para tanto, considera-se a constelação de 64 sinais, onde cada sinal é representado por um símbolo S_i , $i=0,\dots,63$, e definido pelo conjunto de fases (φ_i , φ_j), expressas em radianos.

Posteriormente, para cada constelação estudada nas seções 6.3. e 6.5. e, para alguns valores do Índice de modulação h , é realizada a partição de conjunto, e são apresentadas as distâncias mínimas de subconjunto.

IV.2. A REPRESENTAÇÃO DOS SINAIS

IV.2.1. O ESQUEMA EM 3 DIMENSÕES: 2F/2xM-PSK

A seguir, é apresentada a associação de símbolos aos sinais da constelação 2F/2x32-PSK, portanto, composta de 64 sinais. Todas as outras constelações estudadas na secção 6.3. são subconjuntos desta, de modo que será utilizada a mesma associação. São os seguintes, os sinais:

S_i	φ_i	φ_j	S_i	φ_i	φ_j	S_i	φ_i	φ_j	S_i	φ_i	φ_j
S_0	0	0	S_{16}	π	0	S_{32}	π	π	S_{48}	0	π
S_1	$\frac{\pi}{16}$	0	S_{17}	$\frac{17\pi}{16}$	0	S_{33}	$\frac{17\pi}{16}$	π	S_{49}	$\frac{\pi}{16}$	π
S_2	$\frac{\pi}{8}$	0	S_{18}	$\frac{9\pi}{8}$	0	S_{34}	$\frac{9\pi}{8}$	π	S_{50}	$\frac{\pi}{8}$	π
S_3	$\frac{3\pi}{16}$	0	S_{19}	$\frac{19\pi}{16}$	0	S_{35}	$\frac{19\pi}{16}$	π	S_{51}	$\frac{3\pi}{16}$	π

S_4	$\frac{\pi}{4}$	0	S_{20}	$\frac{5\pi}{4}$	0	S_{36}	$\frac{5\pi}{4}$	π	S_{52}	$\frac{\pi}{4}$	π
S_5	$\frac{5\pi}{16}$	0	S_{21}	$\frac{21\pi}{16}$	0	S_{37}	$\frac{21\pi}{16}$	π	S_{53}	$\frac{5\pi}{16}$	π
S_6	$\frac{3\pi}{8}$	0	S_{22}	$\frac{11\pi}{8}$	0	S_{38}	$\frac{11\pi}{8}$	π	S_{54}	$\frac{3\pi}{8}$	π
S_7	$\frac{7\pi}{16}$	0	S_{23}	$\frac{23\pi}{16}$	0	S_{39}	$\frac{23\pi}{16}$	π	S_{55}	$\frac{7\pi}{16}$	π
S_8	$\frac{\pi}{2}$	0	S_{24}	$\frac{3\pi}{2}$	0	S_{40}	$\frac{3\pi}{2}$	π	S_{56}	$\frac{\pi}{2}$	π
S_9	$\frac{9\pi}{16}$	0	S_{25}	$\frac{25\pi}{16}$	0	S_{41}	$\frac{25\pi}{16}$	π	S_{57}	$\frac{9\pi}{16}$	π
S_{10}	$\frac{5\pi}{8}$	0	S_{26}	$\frac{13\pi}{8}$	0	S_{42}	$\frac{13\pi}{8}$	π	S_{58}	$\frac{5\pi}{8}$	π
S_{11}	$\frac{11\pi}{16}$	0	S_{27}	$\frac{27\pi}{16}$	0	S_{43}	$\frac{27\pi}{16}$	π	S_{59}	$\frac{11\pi}{16}$	π
S_{12}	$\frac{3\pi}{4}$	0	S_{28}	$\frac{7\pi}{4}$	0	S_{44}	$\frac{7\pi}{4}$	π	S_{60}	$\frac{3\pi}{4}$	π
S_{13}	$\frac{13\pi}{16}$	0	S_{29}	$\frac{29\pi}{16}$	0	S_{45}	$\frac{29\pi}{16}$	π	S_{61}	$\frac{13\pi}{16}$	π
S_{14}	$\frac{7\pi}{8}$	0	S_{30}	$\frac{15\pi}{8}$	0	S_{46}	$\frac{15\pi}{8}$	π	S_{62}	$\frac{7\pi}{8}$	π
S_{15}	$\frac{15\pi}{16}$	0	S_{31}	$\frac{31\pi}{16}$	0	S_{47}	$\frac{31\pi}{16}$	π	S_{63}	$\frac{15\pi}{16}$	π

IV.2.2. O ESQUEMA EM 4 DIMENSÕES: 2F/PxM-PSK

A seguir, é apresentada a associação de símbolos aos sinais da constelação 2F/8x8-PSK, portanto, composta de 64 sinais. Todas as outras constelações estudadas na secção 6.5. são subconjuntos desta, de modo que será utilizada a mesma associação. São os seguintes, os sinais:

S_i	φ_i	φ_j	S_i	φ_i	φ_j	S_i	φ_i	φ_j	S_i	φ_i	φ_j
S_0	0	0	S_{16}	0	π	S_{32}	π	π	S_{48}	π	0
S_1	0	$\frac{\pi}{4}$	S_{17}	0	$\frac{5\pi}{4}$	S_{33}	π	$\frac{5\pi}{4}$	S_{49}	π	$\frac{\pi}{4}$
S_2	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	S_{18}	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	S_{34}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	S_{50}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
S_3	$\frac{\pi}{4}$	0	S_{19}	$\frac{\pi}{4}$	π	S_{35}	$\frac{5\pi}{4}$	π	S_{51}	$\frac{5\pi}{4}$	0
S_4	0	$\frac{\pi}{2}$	S_{20}	0	$\frac{3\pi}{2}$	S_{36}	π	$\frac{3\pi}{2}$	S_{52}	π	$\frac{\pi}{2}$
S_5	0	$\frac{3\pi}{4}$	S_{21}	0	$\frac{7\pi}{4}$	S_{37}	π	$\frac{7\pi}{4}$	S_{53}	π	$\frac{3\pi}{4}$
S_6	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	S_{22}	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	S_{38}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	S_{54}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
S_7	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	S_{23}	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	S_{39}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	S_{55}	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
S_8	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	S_{24}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	S_{40}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	S_{56}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
S_9	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	S_{25}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	S_{41}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	S_{57}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
S_{10}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	S_{26}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	S_{42}	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	S_{58}	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
S_{11}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	S_{27}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	S_{43}	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	S_{59}	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
S_{12}	$\frac{\pi}{2}$	0	S_{28}	$\frac{\pi}{2}$	π	S_{44}	$\frac{3\pi}{2}$	π	S_{60}	$\frac{3\pi}{2}$	0
S_{13}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	S_{29}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	S_{45}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	S_{61}	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
S_{14}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	S_{30}	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	S_{46}	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	S_{62}	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
S_{15}	$\frac{3\pi}{4}$	0	S_{31}	$\frac{3\pi}{4}$	π	S_{47}	$\frac{7\pi}{4}$	π	S_{63}	$\frac{7\pi}{4}$	0

IV.3. A PARTIÇÃO DE CONJUNTO

IV.3.1. O ESQUEMA EM 3 DIMENSÕES: 2F/2xM-PSK

A partir da definição da base tridimensional (secção 6.2.) e da representação dos sinais, segundo esta base, foi realizada a partição de conjunto para as constelações estudadas na secção 6.3., e para alguns valores do índice de modulação h .

A seguir, para cada constelação, e para cada valor de h , são apresentadas tabelas com a associação entre o símbolo do sinal (secção IV.2.1.) e a representação binária do mesmo, bem como, com os valores das distâncias mínimas de subconjunto.

a) Constelação 2F/2x4-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS SINAIS								
h	000	001	010	011	100	101	110	111
0.25	S_0	S_{16}	S_8	S_{24}	S_{56}	S_{40}	S_{48}	S_{32}
0.50	S_0	S_8	S_{16}	S_{24}	S_{32}	S_{40}	S_{48}	S_{56}
0.75	S_0	S_8	S_{16}	S_{24}	S_{32}	S_{40}	S_{48}	S_{56}
1.00	S_0	S_8	S_{16}	S_{24}	S_{32}	S_{40}	S_{48}	S_{56}

Obs: Para a tabela acima, e para o caso de $h = 0.50$, foi considerada, na eq.6.4 (secção 6.2.1.), a fase $\psi = \pi/4$. Isto não representa alteração básica no tratamento dos sinais, embora sejam conseguidas maiores distâncias mínimas de subconjunto.

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2
0.25	1.000	1.000	1.732
0.50	1.000	1.414	1.483
0.75	1.000	1.414	1.775
1.00	1.000	1.414	2.000

b) Constelação 2F/2x8-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS SINAIS								
	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
h	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0.25	S_0	S_4	S_{16}	S_{28}	S_8	S_{12}	S_{24}	S_{20}
	S_{56}	S_{52}	S_{32}	S_{60}	S_{48}	S_{44}	S_{40}	S_{36}
0.50	S_0	S_4	S_8	S_{12}	S_{16}	S_{20}	S_{24}	S_{28}
	S_{32}	S_{60}	S_{56}	S_{52}	S_{48}	S_{44}	S_{40}	S_{36}
0.75	S_0	S_4	S_8	S_{12}	S_{16}	S_{20}	S_{24}	S_{28}
	S_{32}	S_{36}	S_{40}	S_{44}	S_{48}	S_{52}	S_{56}	S_{60}
1.00	S_0	S_4	S_8	S_{12}	S_{16}	S_{20}	S_{24}	S_{28}
	S_{32}	S_{36}	S_{40}	S_{44}	S_{48}	S_{52}	S_{56}	S_{60}

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0.25	0.541	0.631	1.000	1.414
0.50	0.541	1.000	1.095	1.414
0.75	0.541	1.000	1.414	1.673
1.00	0.541	1.000	1.414	2.000

c) Constelação 2F/2x16-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS SINAIS								
	00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
	10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
h	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
1.00	S ₀	S ₂	S ₄	S ₆	S ₈	S ₁₀	S ₁₂	S ₁₄
	S ₁₆	S ₁₈	S ₂₀	S ₂₂	S ₂₄	S ₂₆	S ₂₈	S ₃₀
	S ₃₂	S ₃₄	S ₃₆	S ₃₈	S ₄₀	S ₄₂	S ₄₄	S ₄₆
	S ₄₈	S ₅₀	S ₅₂	S ₅₄	S ₅₆	S ₅₈	S ₆₀	S ₆₂

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
1.00	0.276	0.541	1.000	1.414	2.000

d) Constelação 2F/2x32-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS SINAIS								
	000000	000001	000010	000011	000100	000101	000110	000111
	001000	001001	001010	001011	001100	001101	001110	001111
	010000	010001	010010	010011	010100	010101	010110	010111
	100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
	101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
	110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
h	111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111
1.00	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇
	S ₈	S ₉	S ₁₀	S ₁₁	S ₁₂	S ₁₃	S ₁₄	S ₁₅
	S ₁₆	S ₁₇	S ₁₈	S ₁₉	S ₂₀	S ₂₁	S ₂₂	S ₂₃
	S ₂₄	S ₂₅	S ₂₆	S ₂₇	S ₂₈	S ₂₉	S ₃₀	S ₃₁
	S ₃₂	S ₃₃	S ₃₄	S ₃₅	S ₃₆	S ₃₇	S ₃₈	S ₃₉
	S ₄₀	S ₄₁	S ₄₂	S ₄₃	S ₄₄	S ₄₅	S ₄₆	S ₄₇
	S ₄₈	S ₄₉	S ₅₀	S ₅₁	S ₅₂	S ₅₃	S ₅₄	S ₅₅
	S ₅₆	S ₅₇	S ₅₈	S ₅₉	S ₆₀	S ₆₁	S ₆₂	S ₆₃

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
1.00	0.139	0.276	0.541	1.000	1.414	2.000

IV.3.2. O ESQUEMA EM 4 DIMENSÕES: 2F/P×M-PSK

A partir da definição da base em quatro dimensões (secção 6.4.) e da representação dos sinais, segundo esta base, foi realizada a partição de conjunto, para as constelações estudadas na secção 6.5., e para alguns valores do índice de modulação h .

A seguir, para cada constelação, e para cada valor de h , são apresentadas tabelas com a associação entre o símbolo do sinal e a representação binária do mesmo, bem como, com os valores das distâncias mínimas de subconjunto.

a) Constelação 2F/4×4-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS VETORES								
	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
h	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0.25A	S_0	S_4	S_{24}	S_{12}	S_8	S_{20}	S_{40}	S_{52}
	S_{56}	S_{44}	S_{32}	S_{36}	S_{16}	S_{28}	S_{48}	S_{60}
0.25B	S_0	S_8	S_{40}	S_{12}	S_4	S_{20}	S_{52}	S_{24}
	S_{56}	S_{16}	S_{48}	S_{36}	S_{44}	S_{28}	S_{60}	S_{32}
0.50	S_1	S_5	S_9	S_{13}	S_{17}	S_{21}	S_{25}	S_{29}
	S_{33}	S_{37}	S_{41}	S_{45}	S_{49}	S_{53}	S_{57}	S_{61}

0.75	S_0	S_4	S_8	S_{12}	S_{16}	S_{20}	S_{24}	S_{28}
	S_{32}	S_{36}	S_{40}	S_{44}	S_{48}	S_{52}	S_{56}	S_{60}
1.00	S_0	S_4	S_8	S_{12}	S_{16}	S_{20}	S_{24}	S_{28}
	S_{32}	S_{36}	S_{40}	S_{44}	S_{48}	S_{52}	S_{56}	S_{60}

Obs: Mais uma vez, para $h = 0.50$, na tabela acima, foi considerada a fase $\psi = \pi/4$.

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0.25A	0.673	0.852	0.852	1.809
0.25B	0.673	0.673	1.000	1.809
0.50	1.000	1.049	1.414	1.483
0.75	1.000	1.255	1.414	1.775
1.00	1.000	1.414	1.414	2.000

b) Constelação 2F/4x8-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS SINAIS							
00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
h	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11111

0.25	S_0	S_8	S_3	S_7	S_{40}	S_{12}	S_{31}	S_{23}
	S_4	S_{20}	S_{15}	S_{11}	S_{52}	S_{24}	S_{35}	S_{43}
	S_{56}	S_{16}	S_{19}	S_{39}	S_{48}	S_{36}	S_{63}	S_{55}
	S_{44}	S_{28}	S_{47}	S_{27}	S_{60}	S_{32}	S_{51}	S_{59}
0.50	S_0	S_3	S_4	S_7	S_{12}	S_{11}	S_8	S_{15}
	S_{16}	S_{19}	S_{36}	S_{23}	S_{44}	S_{27}	S_{24}	S_{31}
	S_{32}	S_{35}	S_{20}	S_{39}	S_{28}	S_{43}	S_{40}	S_{47}
	S_{48}	S_{51}	S_{52}	S_{55}	S_{60}	S_{59}	S_{56}	S_{63}
0.75	S_0	S_3	S_4	S_7	S_8	S_{11}	S_{12}	S_{15}
	S_{16}	S_{19}	S_{36}	S_{23}	S_{24}	S_{27}	S_{28}	S_{31}
	S_{32}	S_{35}	S_{20}	S_{39}	S_{40}	S_{43}	S_{44}	S_{47}
	S_{48}	S_{51}	S_{52}	S_{55}	S_{56}	S_{59}	S_{60}	S_{63}
1.00	S_0	S_3	S_4	S_7	S_8	S_{11}	S_{12}	S_{15}
	S_{16}	S_{19}	S_{20}	S_{23}	S_{24}	S_{27}	S_{28}	S_{31}
	S_{32}	S_{35}	S_{36}	S_{39}	S_{40}	S_{43}	S_{44}	S_{47}
	S_{48}	S_{51}	S_{52}	S_{55}	S_{56}	S_{59}	S_{60}	S_{63}

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0.25	0.446	0.541	0.631	1.000	1.414
0.50	0.541	0.852	1.000	1.206	1.414
0.75	0.541	1.000	1.183	1.414	1.673
1.00	0.541	1.000	1.414	1.414	2.000

c) Constelação 2F/8x8-PSK

REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DOS SINAIS							
000000	000001	000010	000011	000100	000101	000110	000111
001000	001001	001010	001011	001100	001101	001110	001111
010000	010001	010010	010011	010100	010101	010110	010111
011000	011001	011010	011011	011100	011101	011110	011111
100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
h	111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110
	S ₀	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆
	S ₈	S ₉	S ₁₀	S ₁₁	S ₁₂	S ₁₃	S ₁₄
							S ₁₅

1.00	S_{16}	S_{17}	S_{18}	S_{19}	S_{20}	S_{21}	S_{22}	S_{23}
	S_{24}	S_{25}	S_{26}	S_{27}	S_{28}	S_{29}	S_{30}	S_{31}
	S_{32}	S_{33}	S_{34}	S_{35}	S_{36}	S_{37}	S_{38}	S_{39}
	S_{40}	S_{41}	S_{42}	S_{43}	S_{44}	S_{45}	S_{46}	S_{47}
	S_{48}	S_{49}	S_{50}	S_{51}	S_{52}	S_{53}	S_{54}	S_{55}
	S_{56}	S_{57}	S_{58}	S_{59}	S_{60}	S_{61}	S_{62}	S_{63}

h	Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
1.00	0.541	0.765	1.000	1.414	1.414	2.000

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bahl, L.R.; Cullum, C.D.; Frazer, W.D.; Jelinek, F.: An Efficient Algorithm for Computing Free Distance - IEEE Trans. on Inf. Theory, vol IT-18, May 1972, p.437.
- [2] Batson, B.; Moorehead, R.W.: Simulation Results for the Viterbi Decoding Algorithm - Technical Report, Manned Space Craft Center, Houston, Texas/ NASA, Washington, D.C., 1972.
- [3] Bezerra, J.B.: Códigos Convolucionais para Modulação Codificada - Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, SP, Março 1987.
- [4] Biglieri, E.: High Level Modulation and Coding for Nonlinear Satellite Channels - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-32, May 1984, p.616.
- [5] Biglieri, E.: Ungerboeck Codes Do Not Shape the Signal Power Spectrum - IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. IT-32, July 1986, p.595.
- [6] Borelli, W.C.: Convolutional Codes for Multilevel Data Transmission - Ph.D Thesis, University of Kent at Canterbury, England, June 1983.
- [7] Conan, J.; Oliver, R.: Hardware and Software Implementation of the Viterbi Decoding Algorithm for Convolutional Code - Proc. 1976 International Symposium on Mini & Micro Computers, Toronto, Canada, November 1976.
- [8] Costello, D.J.: Construction of Convolutional Codes for Sequential Decoding; Ph.D. Thesis, University of Notre Dame, U.S.A., 1966.
- [9] Digeon, A.: On Improving Bit Error Probability of QPSK and 4-

- Level Amplitude Modulation Systems by Convolutional Coding - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-25, October 1977, p.1238.
- [10] Divsalar, D.; Simon, M.K.; Yuen, J.H.: Trellis Coding with Asymmetric Modulations - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-35, February 1987, p.130.
- [11] Forney, G.D.Jr: Convolutional Codes I: Algebraic Structure - IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. IT-16, November 1970, p.720.
- [12] Forney, G.D.Jr: The Viterbi Algorithm; IEEE Proc., March 1976, p.268.
- [13] Foschini, G.J.; Gitlin, R.D.; Weinstein, S.B.: Optimization of Two-Dimensional Signal Constelations in the Presence of Gaussian Noise - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-22, January 1974, p.28.
- [14] Heller, J.A.; Jacobs, I.M.: Viterbi Decoding for Satellite and Space Communication - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-19, October 1971, p.835.
- [15] Larsen, K.J.: Comments on "An Efficient Algorithm for Computing Free Distance" - IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. IT-19, July 1973, p.577.
- [16] Lebowitz, S.H.; Rhodes, S.A.: Performance of Coded 8-PSK Signaling for Satellite Communications - Proc. GLOBECOM'81, December 1981, p. 47.4.1 .
- [17] Marsan, M.A.; Albertengo, G.; Benedetto, S.; Giachin, E.: Theoretical Aspects and Performance Evaluation of Channel Encoding with Redundant Modulator Alphabets - Proc. GLOBECOM'84, Atlanta, U.S.A., November 1984, p.688.
- [18] Marsan, M.A.; Albertengo, G.; Benedetto, S.: On the

Performance Analysis of Combined Coding and Modulation Schemes over Real Channels - Proc. GLOBECOM'85, New Orleans, U.S.A., December 1985, p.641.

[19] Markman, I.: Estudos de Códigos de Alfabeto Redundante - trabalho não publicado, 1985.

[20] Massey, J.L.; Sain, M.K.: Inverses of Linear Sequential Circuits - IEEE, Trans. on Computers, vol. C-17, April 1968, p.330.

[21] Massey, J.L.: Coding and Modulation in Digital Communications - Proc. 1974 Int. Zurich Seminar Digital Commun., Zurich, Switzerland, March 1974, p. E2(1).

[22] Fonseca, K.V.O.: Uma Contribuição à Modulação para Códigos de Treliça Periodicamente Variantes no Tempo - Tese de Mestrado, em fase de andamento, Universidade Estadual de Campinas.

[23] Peterson, W.W.; Weldon, E.S.: Error-Correcting Codes - The MIT Press, Cambridge, Mass., U.S.A., 1972.

[24] Portugheis, J.: Uma Contribuição ao Estudo de Sistemas de Modulação Codificada M-PSK - Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, SP, Março 1987.

[25] Proakis, J.G.: Digital Communications - McGraw Hill, 1983.

[26] Shusta, T.J.: Minimal Convolutional Encoders - PH.D. Thesis, IL Institute of Technology, Chicago, U.S.A., 1973.

[27] Taylor, D.P.; Chan, H.C.: A Simulation Study of Two Bandwidth-Efficient Modulation Techniques - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-29, March 1981, p.267.

[28] Thapar, H.K.: Real-Time Application of Trellis Coding to High-Speed Voiceband Data Transmission - IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. SAC-2, September 1985, p.648.

- [29] Ungerboeck, G.: Channel Coding with Multilevel/Phase Signal, 1977, unpublished.
- [30] Ungerboeck, G.: Channel Coding with Multilevel/Phase Signal IEEE Tran, Inf. Theory, vol. IT-28, January 1982, p.55.
- [31] Viterbi, A.J.; Omura, J.K.: Principles of Digital Communication and Coding - McGraw Hill Kogakusha, LTD., 1979.
- [32] Wilson, S.G.; Sleeper, II, H.A.; Schottler, P.J.; Lyons, M.T.: Rate 3/4 Convolutional Coding of 16-PSK: Code Design and Performance Study - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-32, December 1984, p.1308.
- [33] Wilson, S.G.: Bandwidth-Efficient Modulation and Coding: A Survey of Recent Results - Proc. GLOBECOM'86, December 1986, p. 965.
- [34] Wolf, J.K.; Padovani, R.: A Generalization of Ungerboeck Codes - Second Joint Swedish-Soviet International Workshop on Information Theory, Granna, Sweden, April 1985, p.231.
- [35] Padovani, R.; Wolf, J.K.: Coded Phase/Frequency Modulation - IEEE Trans. on Commun., vol. COM-34, May 1986, p.446.
- [36] Wozencraft, J.M.; Jacobs, I.M.: Principles of Communication Engineering - New York, Wiley, 1965.

FIGURAS

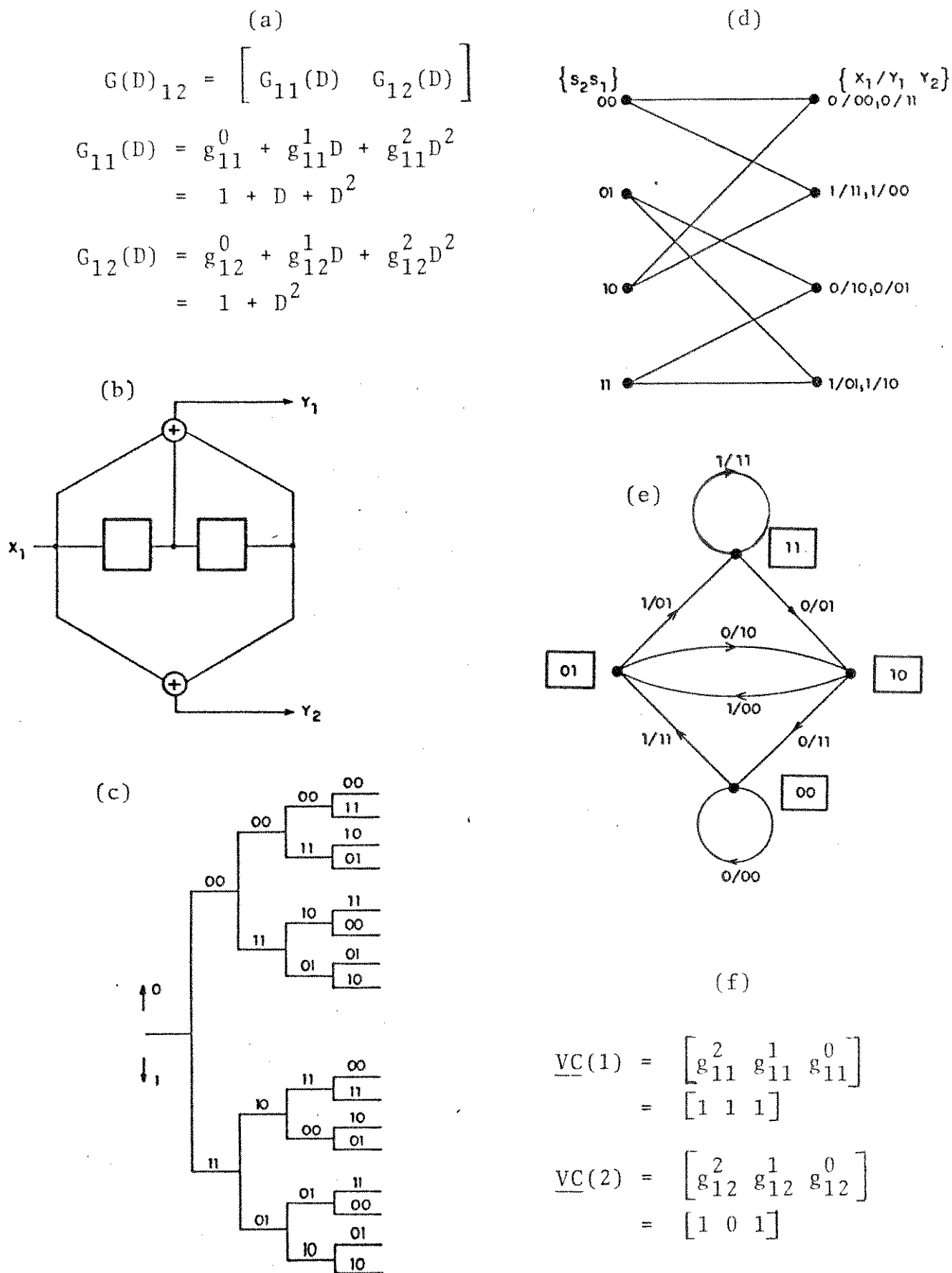


Figura 2.1 - As representações de um codificador convolucional binário de taxa $R = 1/2$: a) matricial; b) esquemática; c) diagrama de árvore; d) célula de treliça; e) diagrama de estados; f) vetores coeficientes.

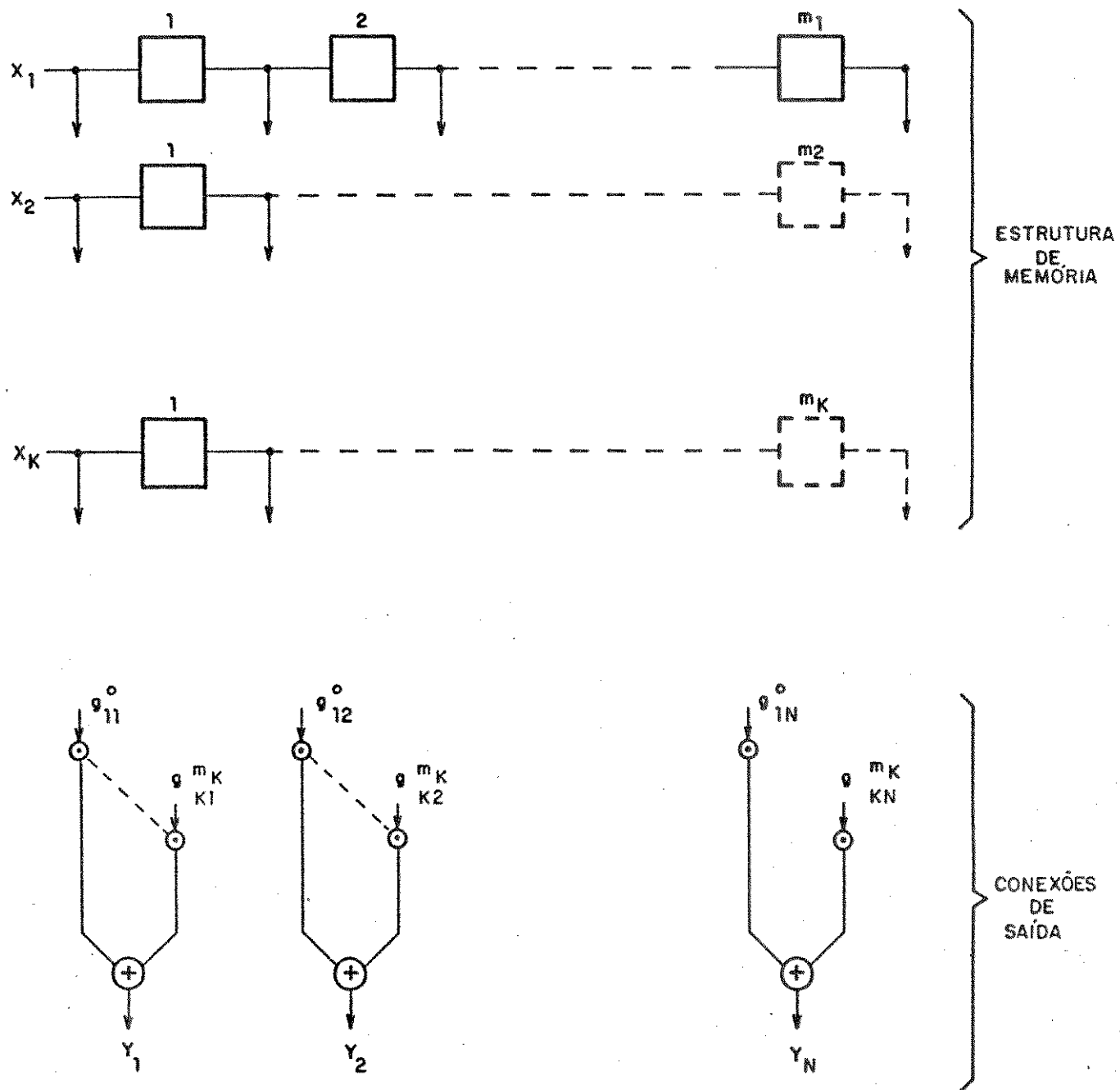


Figura 2.2 - Representação esquemática "óbvia" de codificadores convolucionais sem realimentação , com $R = K/N$.

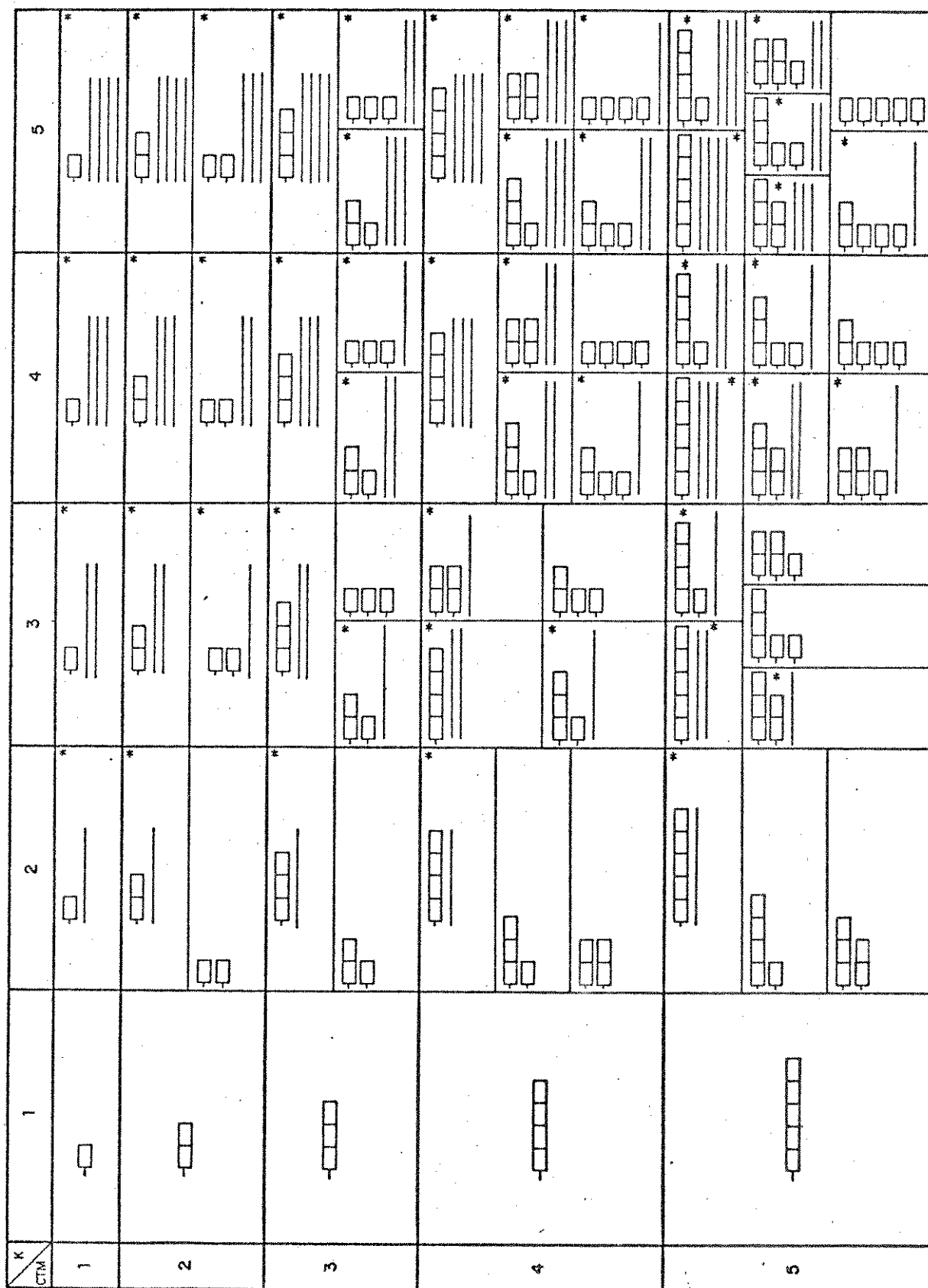


Figura 2.3 - Estrutura de memória de codificadores com $K=1, \dots, 5$ e $CTM=1, \dots, 5$. O asterisco '*' significa a presença de transições paralelas em seus diagramas de

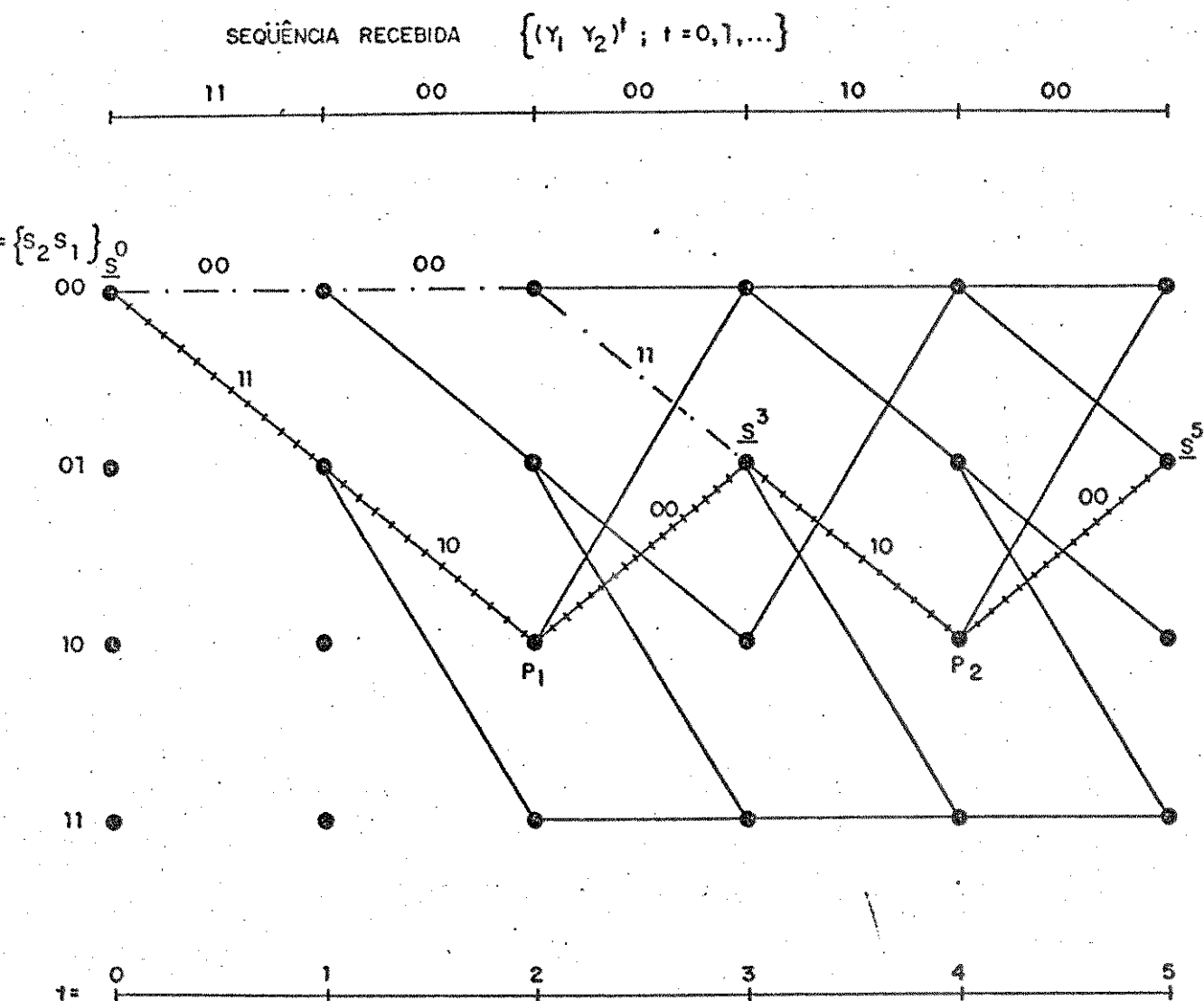


Figura 2.4 - Diagrama de treliça do codificador convolucional da fig.2.1 e o exemplo de duas sequências codificadas.

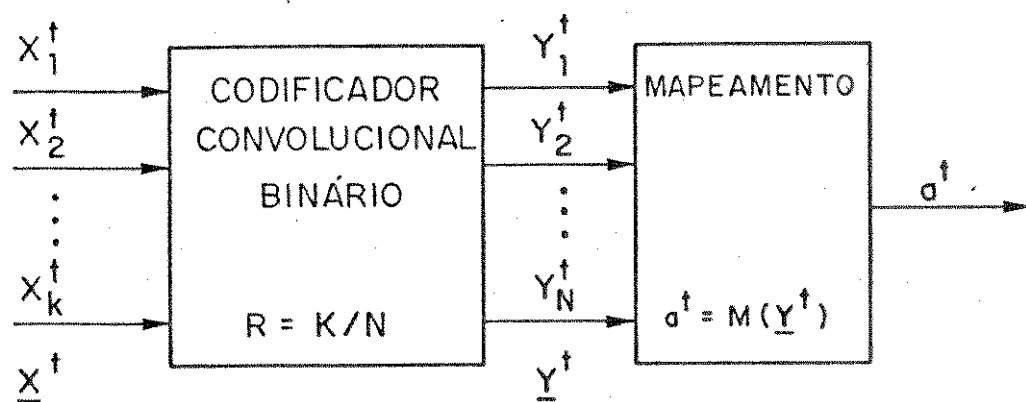


Figura 3.1 - Estrutura do codificador AR.

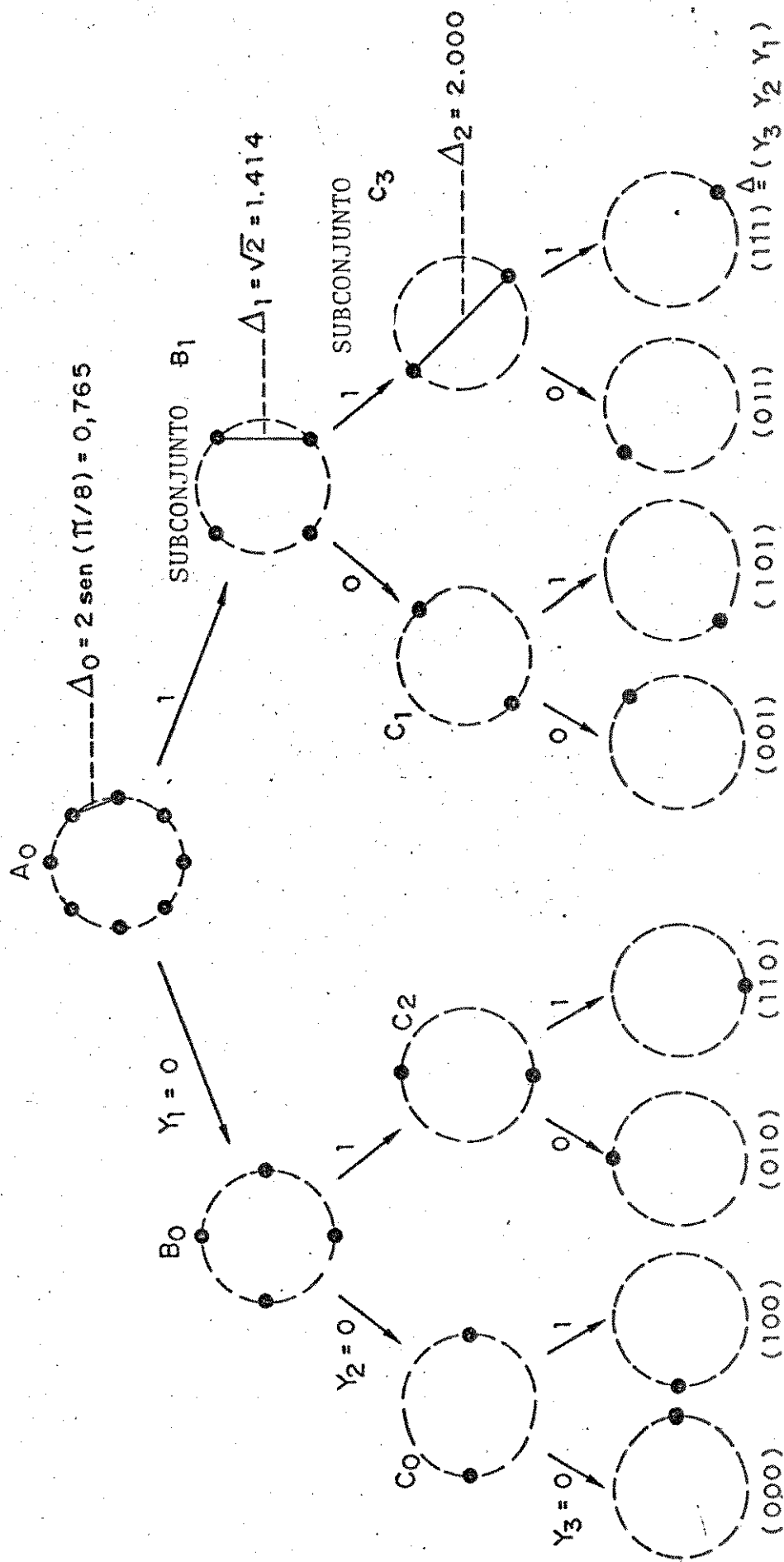


Figura 3.2 - Método da partição de conjunto aplicado à constelação 8-PSK.

(a)

$$G(D)_{23} = \begin{bmatrix} G_{11}(D) & G_{12}(D) & G_{13}(D) \\ G_{21}(D) & G_{22}(D) & G_{23}(D) \end{bmatrix}$$

$$G_{11}(D) = g_{11}^0 + g_{11}^1 D + g_{11}^2 D^2$$

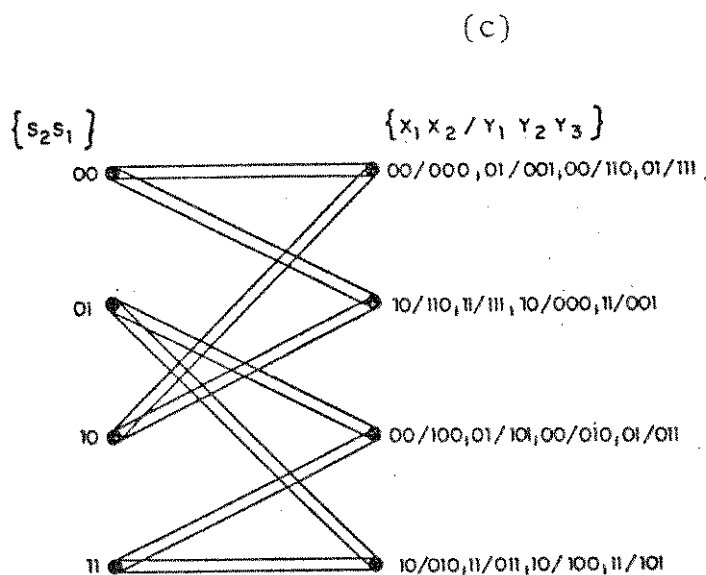
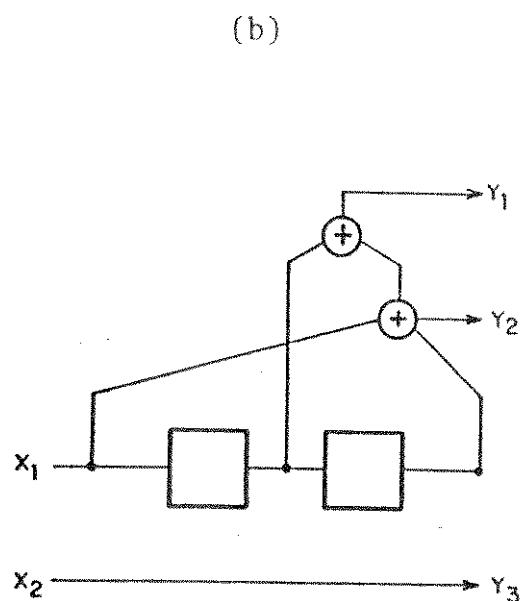
$$= 1 + D + D^2$$

$$G_{12}(D) = g_{12}^0 + g_{12}^1 D + g_{12}^2 D^2$$

$$= 1 + D^2$$

$$G_{13}(D) = G_{21}(D) = G_{22}(D) = 0$$

$$G_{23}(D) = 1$$



(d)

$$\underline{VC}(1) = \begin{bmatrix} g_{11}^2 & g_{11}^1 & g_{11}^0 & g_{21}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{VC}(2) = \begin{bmatrix} g_{12}^2 & g_{12}^1 & g_{12}^0 & g_{22}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{VC}(3) = \begin{bmatrix} g_{13}^2 & g_{13}^1 & g_{13}^0 & g_{23}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 3.3 - A representação de um codificador convolucional binário de taxa $R = 2/3$, com transições paralelas (extensão do codificador da fig.2.1): a) matricial; b) esquemática; c) célula de treliça; d) vetores coeficientes.

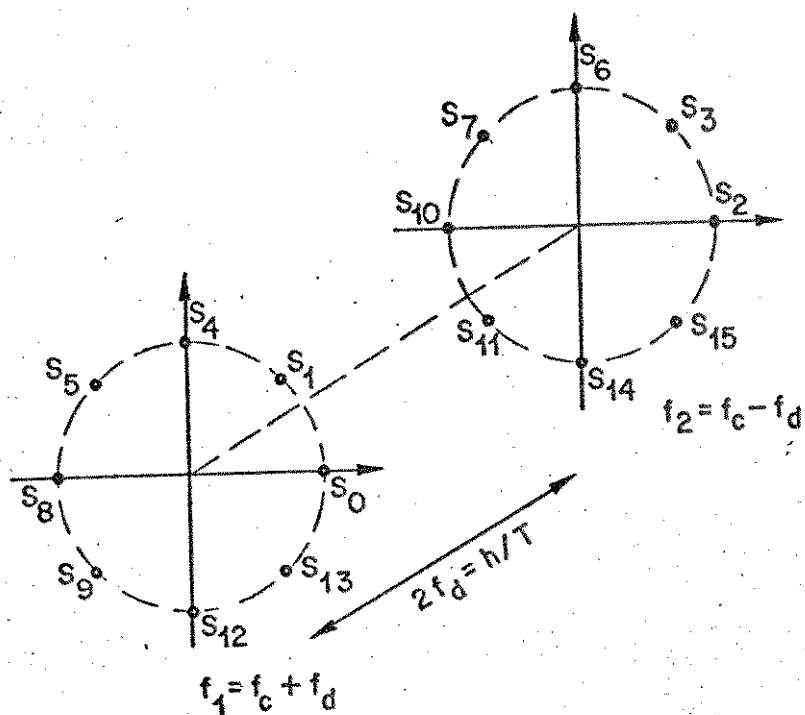


Figura 3.4 - Representação ilustrativa da constelação de sinais 2-FSK/8-PSK.

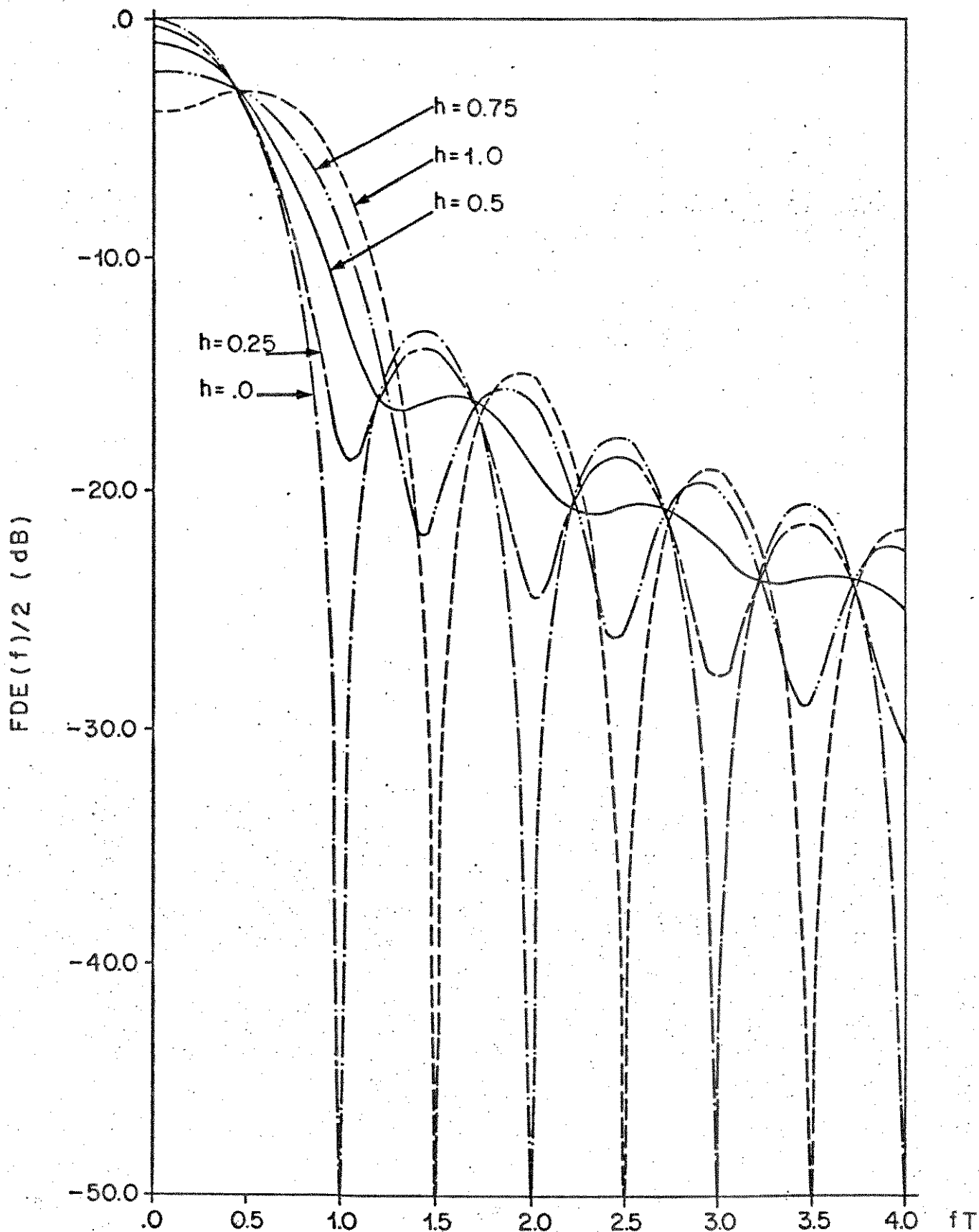


Figura 3.5 - Função de densidade espectral $\frac{1}{2}FDE(f)$, versus fT , para os esquemas de modulação 2-FSK/M-PSK, 2F/2xM-PSK e 2F/PxM-PSK, para alguns valores do índice de modulação h .

h	0.25	0.50	0.75	1.00
90%	1.102	1.187	1.254	1.345
99%	0.996	0.985	0.981	0.980

Figura 3.6 - Taxas da largura de faixa dos esquemas 2-FSK/M-PSK, 2F/2xM-PSK e 2F/PxM-PSK, em relação ao esquema M-PSK, para dois critérios de definição da largura de faixa: o de 90% e o de 99%.

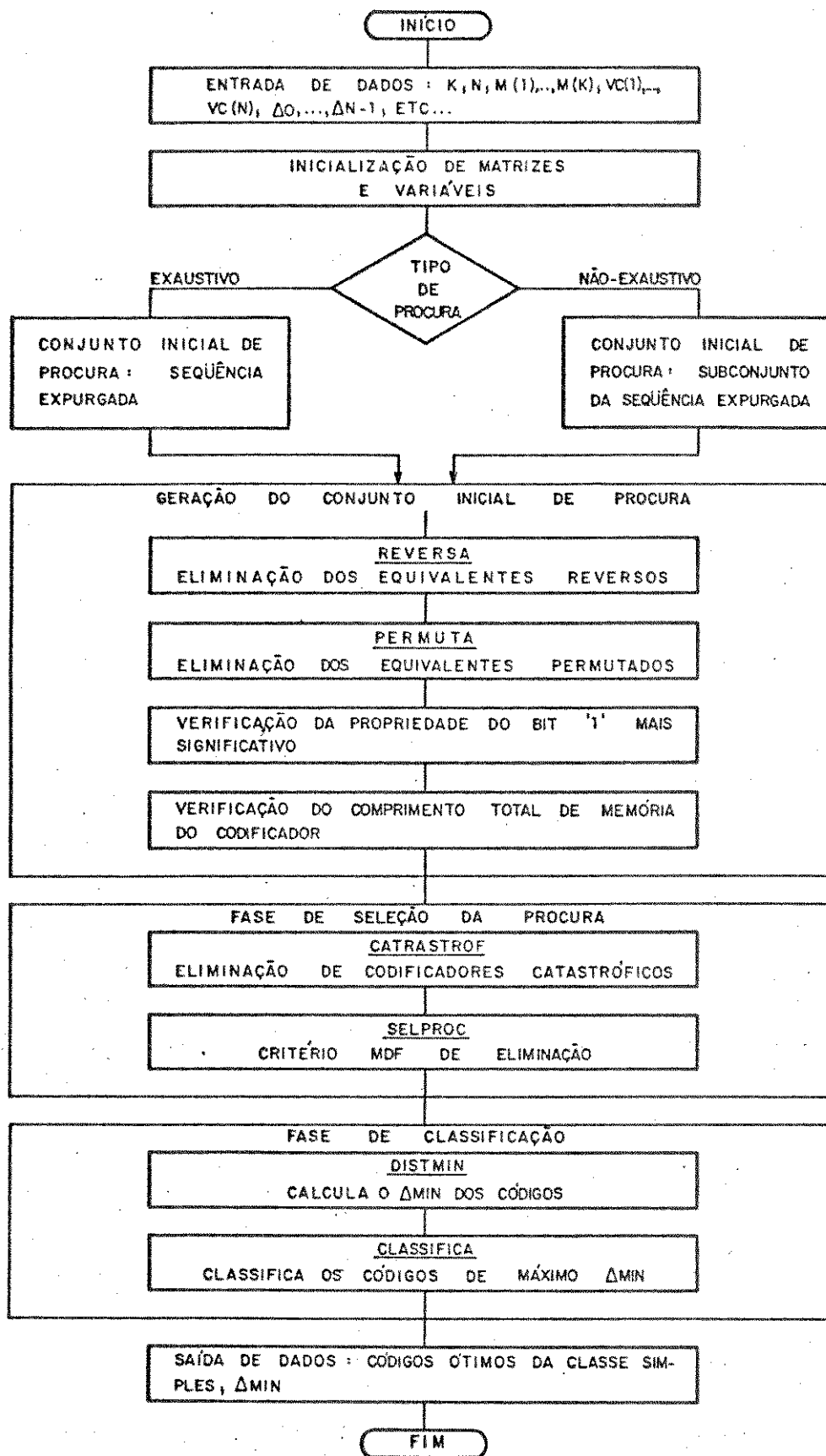


Figura 5.1 - Diagrama de blocos simplificado do programa de procura de códigos AR, para cada classe simples $\{G_{KN}; m_1, \dots, m_K\}$ de codificadores.

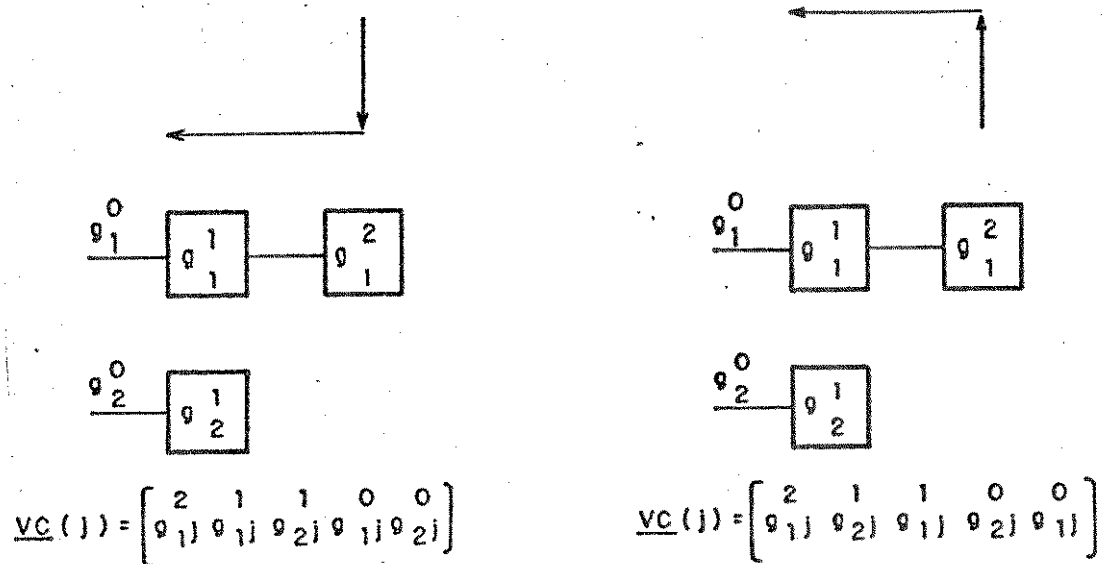


Figura 5.2 - A ordenação dos vetores $\underline{VC}(j)$, segundo:
a) Este trabalho; b) Borelli [4] .

	Número de Codificadores pertencentes à seqüência expurgada	
	ESTE TRABALHO	BORELLI [4]
$\{G_{23}; 2,1\}$	1618	1728
$\{G_{24}; 2,1\}$	6705	7272
$\{G_{25}; 2,1\}$	8064	8568
$\{G_{23}; 3,1\}$	13730	14401
$\{G_{24}; 3,1\}$	131151	141402
$\{G_{25}; 3,1\}$	458724	502404
$\{G_{23}; 3,2\}$	118836	121768
$\{G_{23}; 4,1\}$	116443	119353

Figura 5.3 - Tabela comparativa do número de codificadores pertencentes à seqüência expurgada de algumas classes simples a depender da ordenação dos vetores $\underline{VC}(j)$, na fig. 5.2.

Classe Simples	Número de Codificadores da seqüência expurgada	
	Com a eliminação	Sem a eliminação
$\{G_{34}; 2,1,1\}$	1361202	2129322

Figura 5.4 - Tabela comparativa do número de codificadores pertencentes à seqüência expurgada de classes simples de estrutura de memória parcialmente simétrica, com ou sem a eliminação dos codificadores permutados.

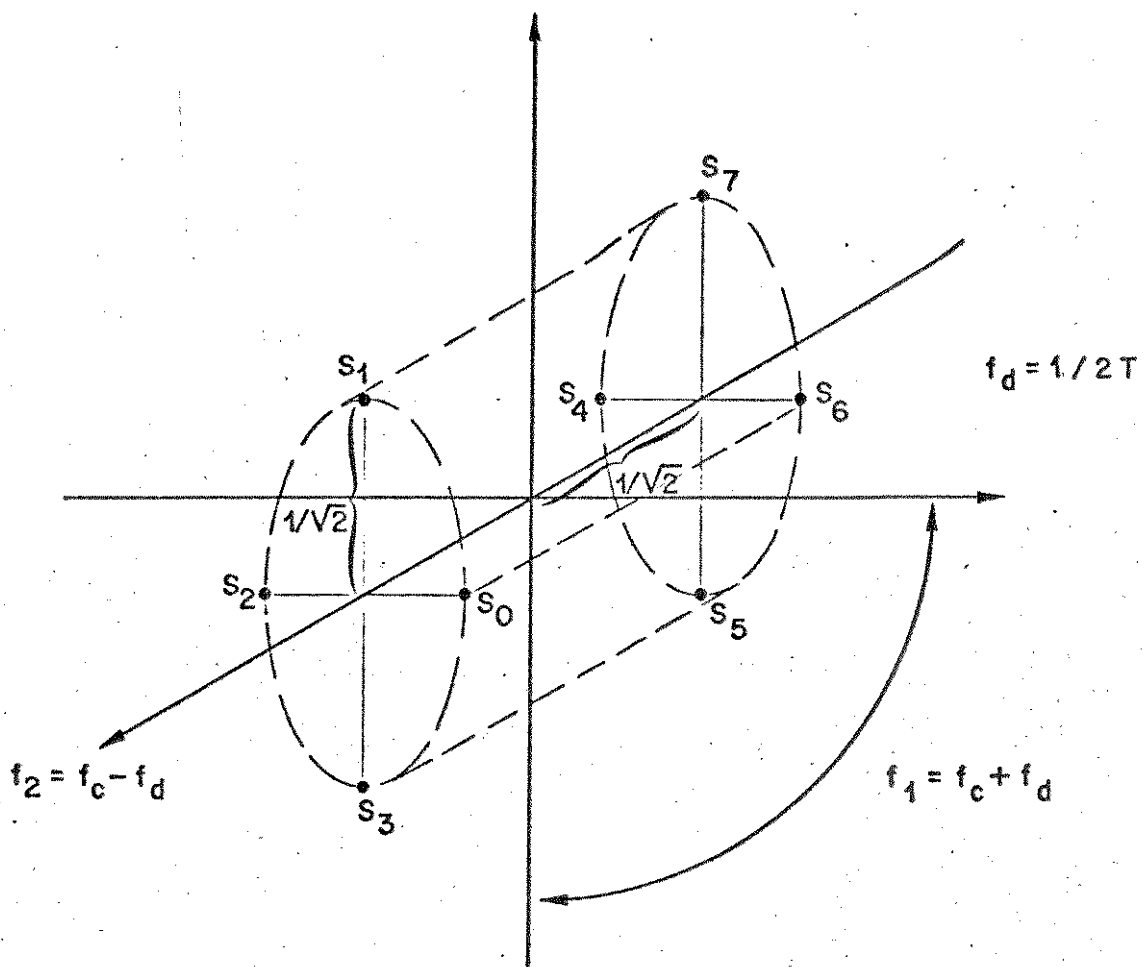


Figura 6.1 - Representação da constelação 2F/2x4-PSK ($h=1.0$).

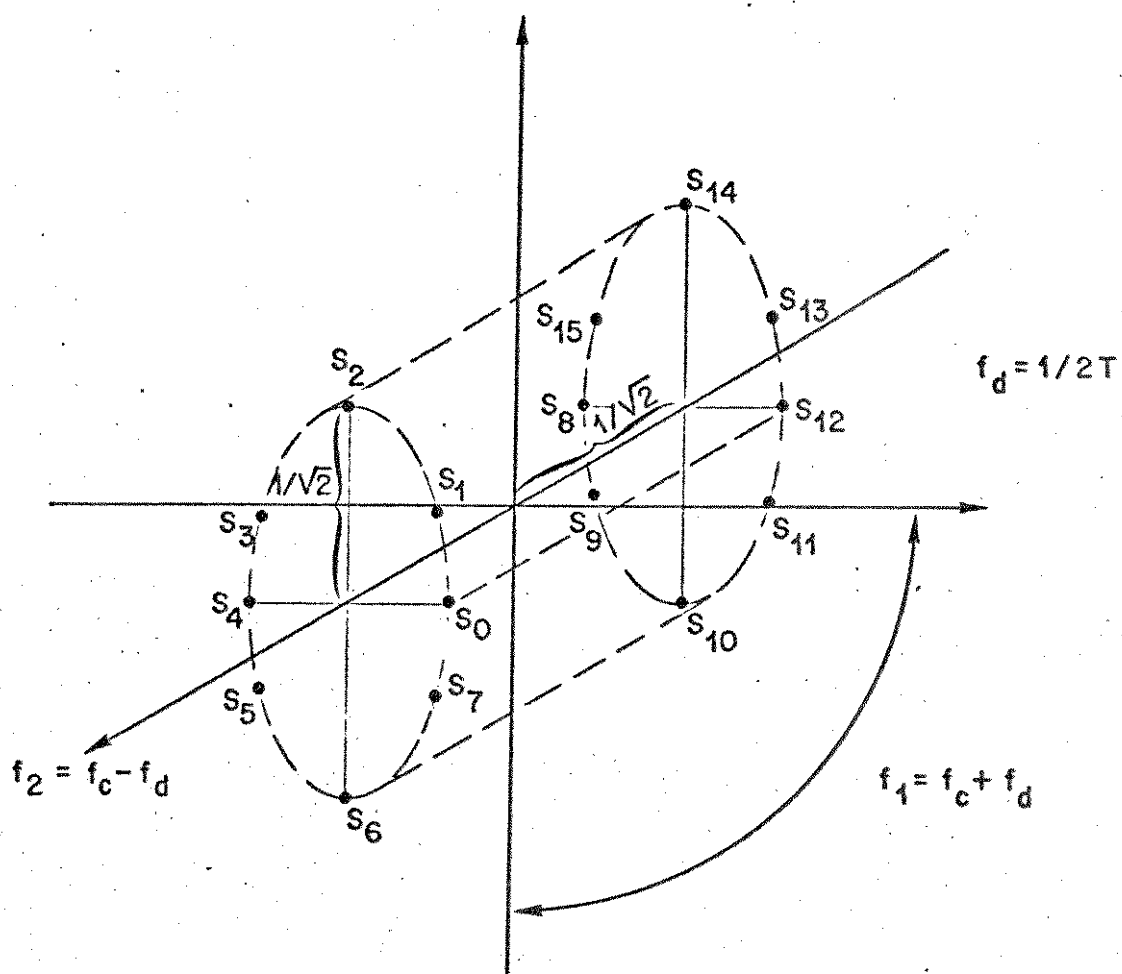


Figura 6.2 - Representação da constelação 2F/2x8-PSK ($h=1.0$).

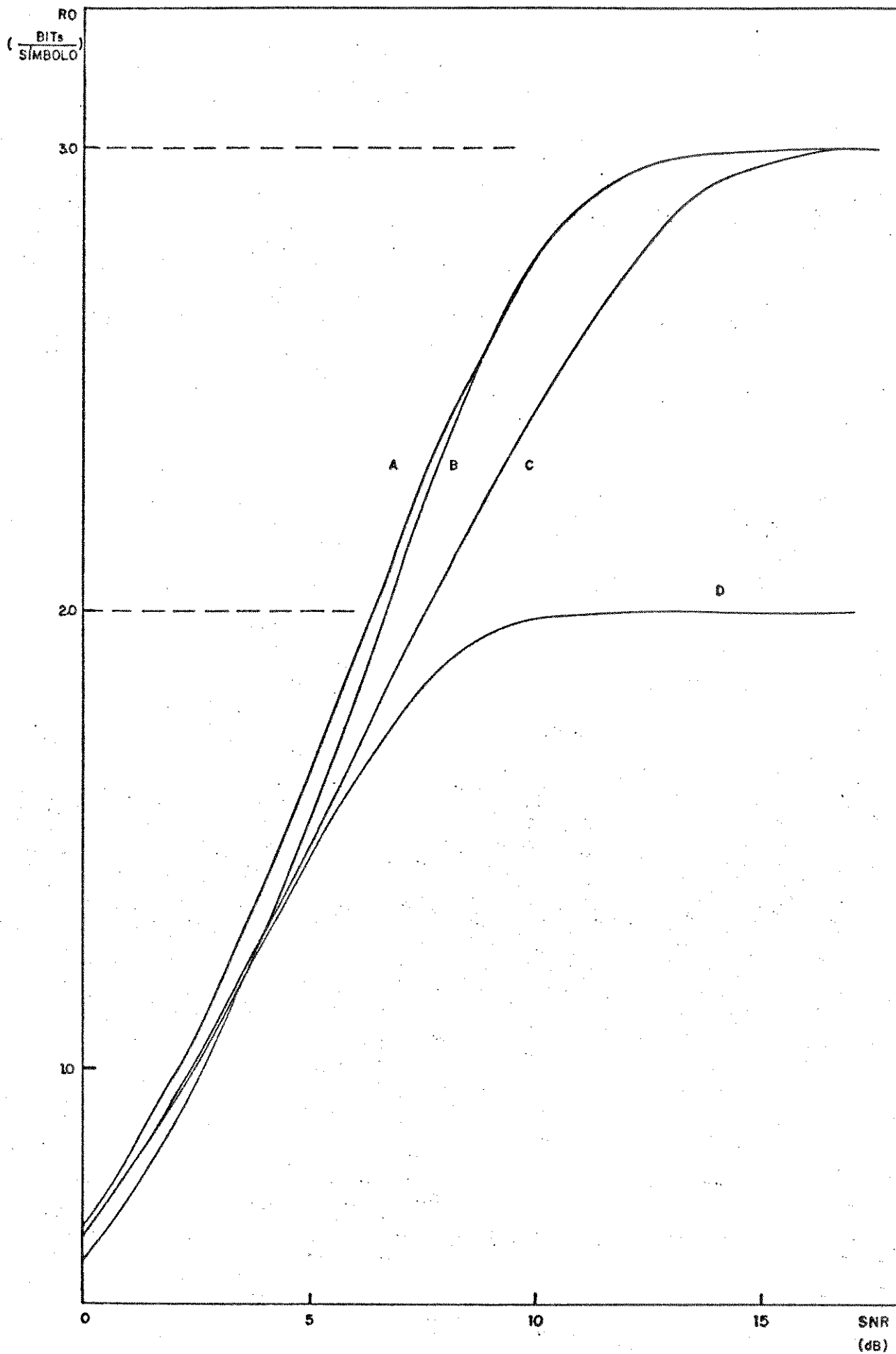


Figura 6.3 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/2x4-PSK ($h=1.0$); B) 2-FSK/4-PSK ($h=1.0$); C) 8-PSK; D) 4-PSK.

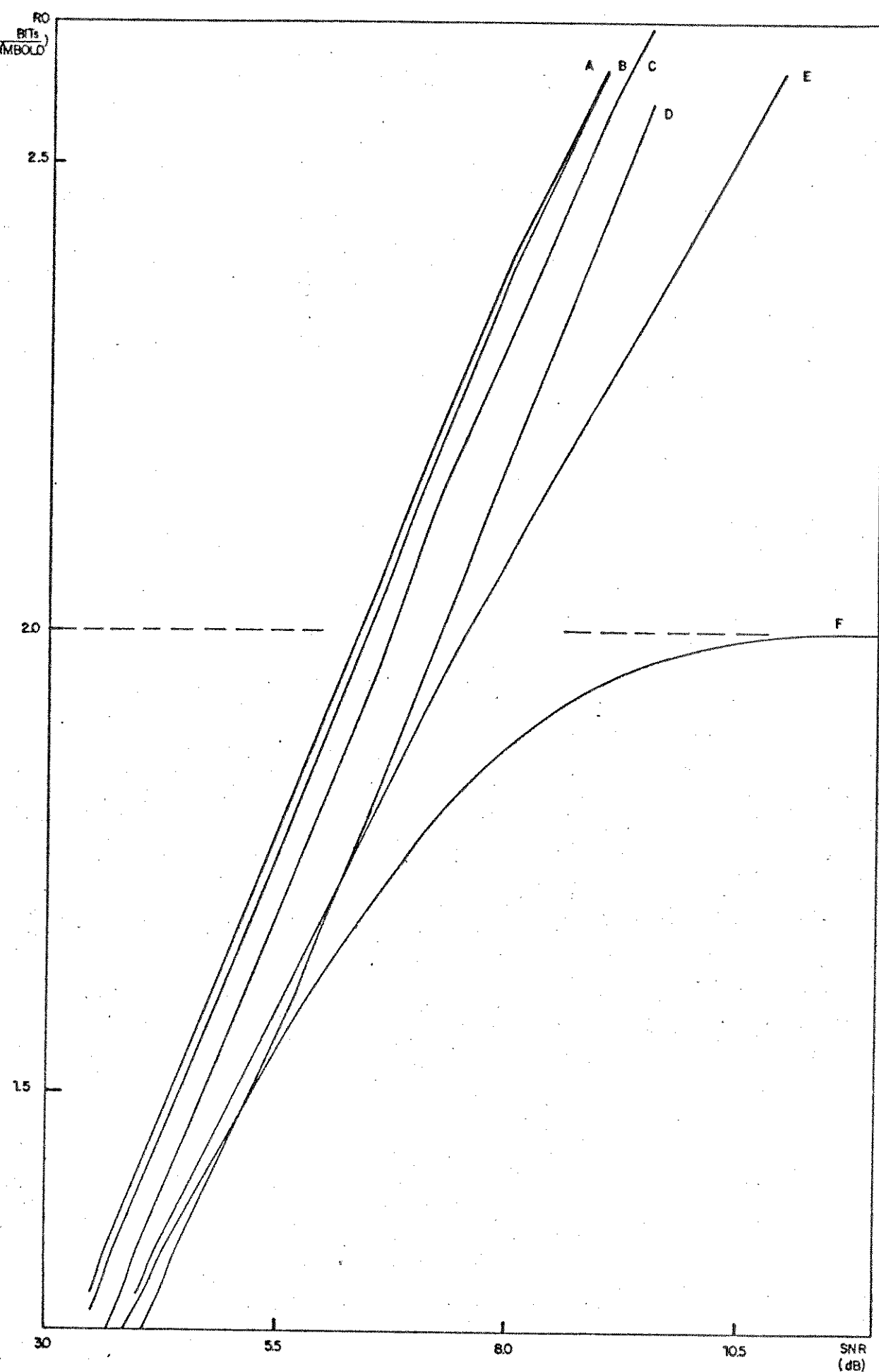


Figura 6.4 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/2x4-PSK ($h=1.0$); B) 2F/2x4-PSK ($h=0.75$); C) 2F/2x4-PSK ($h=0.5$); D) 2F/2x4-PSK ($h=0.25$); F) 8-PSK; G) 4-PSK.

		$h = 1.00$	$h = 0.75$	$h = 0.50$
CTM=1	Classe Simples	$\{G_{23}; 1,0\}$	$\{G_{23}; 1,0\}$	$\{G_{23}; 1,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	4;2;1	4;2;1	4;2;1
	Δ_{\min}	1.732	1.732	1.483
	GCA (dB)	1.76	1.76	0.41
CTM=2	Classe Simples	$\{G_{23}; 2,0\}$	$\{G_{23}; 2,0\}$	$\{G_{23}; 1,1\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	4;10;1	4;10;1	12;6;1
	Δ_{\min}	2.000	1.775	1.732
	GCA (dB)	3.01	1.97	1.76
CTM=3	Classe Simples	$\{G_{23}; 2,1\}$	$\{G_{23}; 2,1\}$	$\{G_{23}; 2,1\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	8;19;5	8;19;5	8;19;5
	Δ_{\min}	2.236	2.236	2.049
	GCA (dB)	3.98	3.98	3.22
CTM=4	Classe Simples	$\{G_{23}; 2,2\}$	$\{G_{23}; 2,2\}$	$\{G_{23}; 2,2\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	12;22;33	12;22;33	12;22;33
	Δ_{\min}	2.449	2.449	2.280
	GCA (dB)	4.77	4.77	4.15
CTM=5	Classe Simples	$\{G_{23}; 4,1\}$	$\{G_{23}; 3,2\}$	$\{G_{23}; 3,2\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	56;22;65	40;22;65	40;22;65
	Δ_{\min}	2.449	2.449	2.449
	GCA (dB)	4.77	4.77	4.77

Figura 6.5 - Resultados da procura dos melhores códigos AR, para a constelação 2F/2x4-PSK, com o GCA obtido em relação à constelação 4-PSK não-codificada.

	CTM=1	CTM=2	CTM=3	CTM=4	CTM=5
8-PSK	1.1	3.0	3.6	4.1	4.6
2F/2x4-PSK h = 0.75	1.8	2.0	4.0	4.1	4.8
2F/2x4-PSK h = 1.00	1.8	3.0	4.0	4.8	4.8
CONSTELAÇÃO CÚBICA	1.3	3.0	4.3	5.2	6.0
2-FSK/4-PSK h = 1.00	3.0	4.8	4.8	6.0	6.0

Figura 6.6 - Valores de GCA (em dB), para constelações de 8 sinais, obtidos em relação à constelação 4-PSK não-codificada, e para alguns valores de comprimento total de memória.

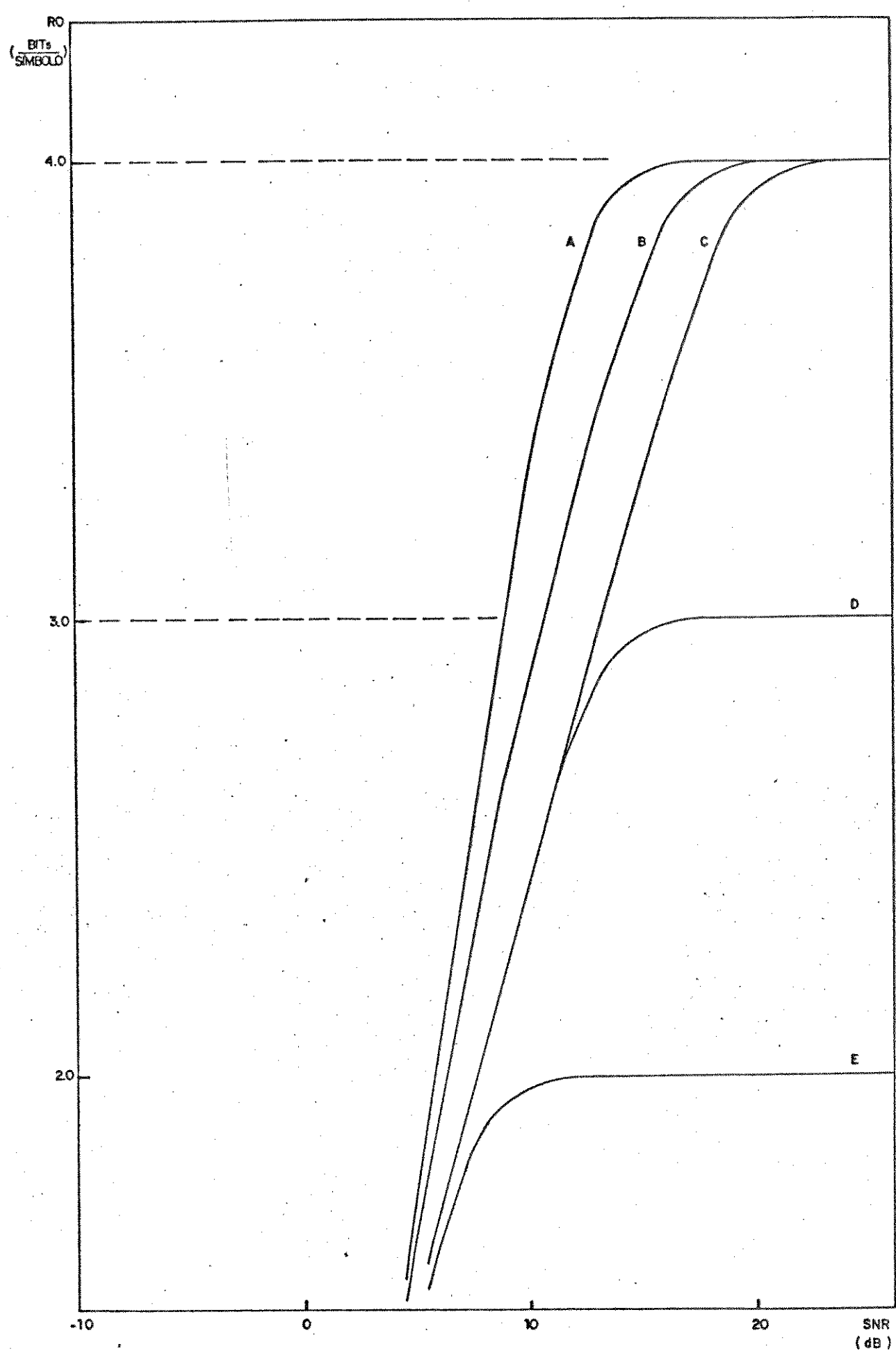


Figura 6.7 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2-FSK/8-PSK ($h=1.0$); B) 2F/2x8-PSK ($h=1.0$); C) 16-PSK; D) 8-PSK; E) 4-PSK.

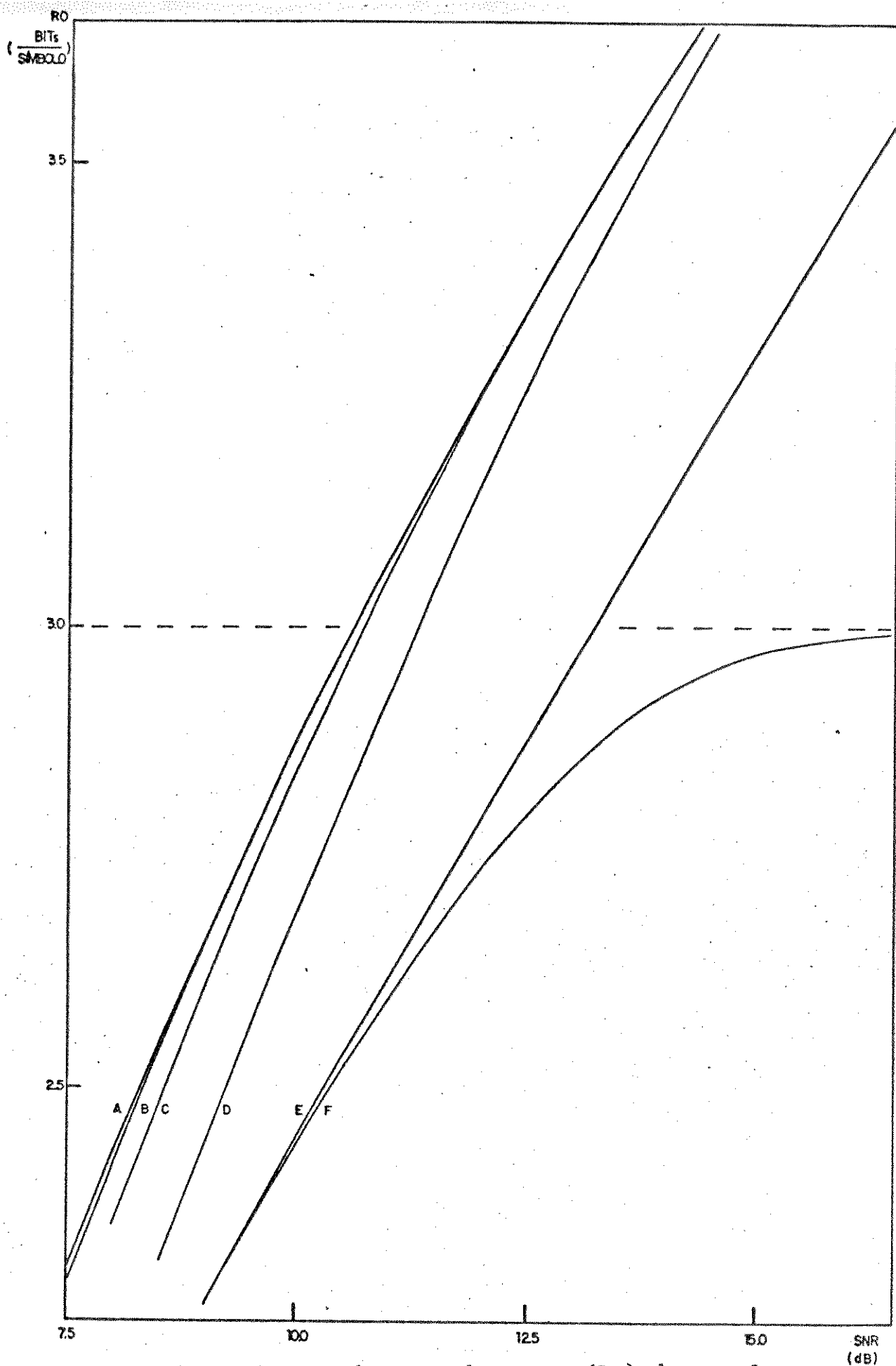


Figura 6.8 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/2x8-PSK ($h=1.0$); B) 2F/2x8-PSK ($h=0.75$); C) 2F/2x8-PSK ($h=0.5$); D) 2F/2x8-PSK ($h=0.25$); E) 16-PSK; F) 8-PSK.

		$h = 1.00$	$h = 0.75$	$h = 0.50$	$h = 0.25$
CTM=1	Classe Simples	$\{G_{34}; 1,0,0\}$	$\{G_{34}; 1,0,0\}$	$\{G_{34}; 1,0,0\}$	$\{G_{34}; 1,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	8;4;2;1	8;4;2;1	8;4;2;1	8;4;2;1
	A_{min}	1.137	1.137	1.095	0.831
	GCA (dB)	3.44	3.44	3.12	0.72
CTM=2	Classe Simples	$\{G_{34}; 2,0,0\}$	$\{G_{34}; 2,0,0\}$	$\{G_{34}; 1,1,0\}$	$\{G_{34}; 2,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	8;20;2;1	8;20;2;1	16;12;2;1	8;20;2;1
	A_{min}	1.414	1.414	1.137	1.000
	GCA (dB)	5.33	5.33	3.44	2.33
CTM=3	Classe Simples	$\{G_{34}; 2,1,0\}$	$\{G_{34}; 2,1,0\}$	$\{G_{34}; 2,1,0\}$	$\{G_{34}; 2,1,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	16;12;34;1	16;12;34;1	16;12;34;1	16;12;34;1
	A_{min}	1.514	1.514	1.414	1.044
	GCA (dB)	5.93	5.93	5.33	2.70
CTM=4	Classe Simples	$\{G_{34}; 3,1,0\}$	$\{G_{34}; 3,1,0\}$	$\{G_{34}; 2,1,1\}$	$\{G_{34}; 3,1,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	48;28;66;1	48;28;66;1	32;20;10;65	48;28;66;1
	A_{min}	1.608	1.608	1.483	1.175
	GCA (dB)	6.45	6.45	5.75	3.73
CTM=5	Classe Simples	$\{G_{34}; 4,1,0\}$	$\{G_{34}; 4,1,0\}$	$\{G_{34}; 2,2,1\}$	$\{G_{34}; 4,1,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	112;44;130;1	112;44;130;1	32;28;66;129	112;44;130;1
	A_{min}	1.696	1.673	1.514	1.182
	GCA (dB)	6.91	6.80	5.93	3.78

Figura 6.9 - Resultados da procura dos melhores códigos AR., para a constelação 2F/2x8-PSK, com o GCA obtido em relação à constelação 8-PSK não-codificada.

	CTM=1	CTM=2	CTM=3	CTM=4	CTM=5
16-PSK	1.0	3.5	4.0	4.4	4.8
2F/2x8-PSK h = 0.50	3.1	3.4	5.3	5.8	5.9
2F/2x8-PSK h = 0.75	3.4	5.3	5.9	6.5	6.8
2F/2x8-PSK h = 1.00	3.4	5.3	5.9	6.5	6.9
2-FSK/8-PSK h = 1.00	5.3	5.3	8.3	8.3	8.3

Figura 6.10 - Valores de GCA (em dB), para constelações de 16 sinais, obtidos em relação à constelação 8-PSK não-codificada, e para alguns valores de comprimento total de memória (CTM) dos codificadores.

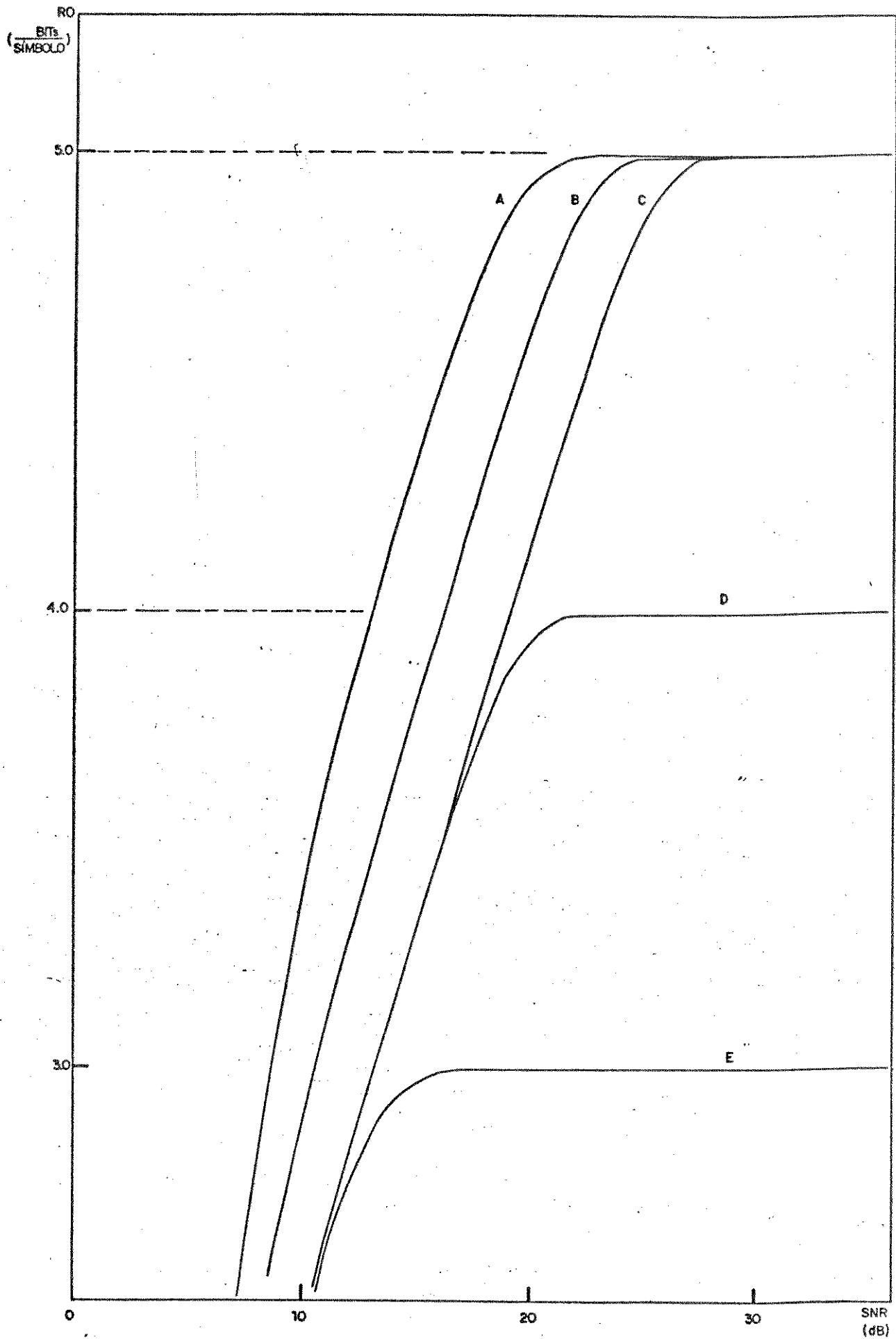


Figura 6.11 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2-FSK/16-PSK ($h=1.0$); B) 2F/2x16-PSK ($h=1.0$); C) 32-PSK; D) 16-PSK ; E) 8-PSK.

		$h = 1.00$
CTM=1	Classe Simples	$\{G_{45}; 1,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	16;8;4;2;1
	Δ_{min}	0.607
	GCA (dB)	3.84
CTM=2	Classe Simples	$\{G_{45}; 2,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	16;40;4;2;1
	Δ_{min}	0.813
	GCA (dB)	6.38
CTM=3	Classe Simples	$\{G_{45}; 3,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	48;88;4;2;1
	Δ_{min}	0.859
	GCA (dB)	6.96
CTM=4	Classe Simples	$\{G_{45}; 4,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	112;152;4;2;1
	Δ_{min}	0.902
	GCA (dB)	7.28
CTM=5	Classe Simples	$\{G_{45}; 5,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	64;296;4;2;1
	Δ_{min}	0.977
	GCA (dB)	7.98

Figura 6.12 - Resultados da procura dos melhores códigos AR, para a constelação 2F/2x16-PSK ($h=1.00$), com o GCA obtido em relação à constelação 16-PSK não-codificada.

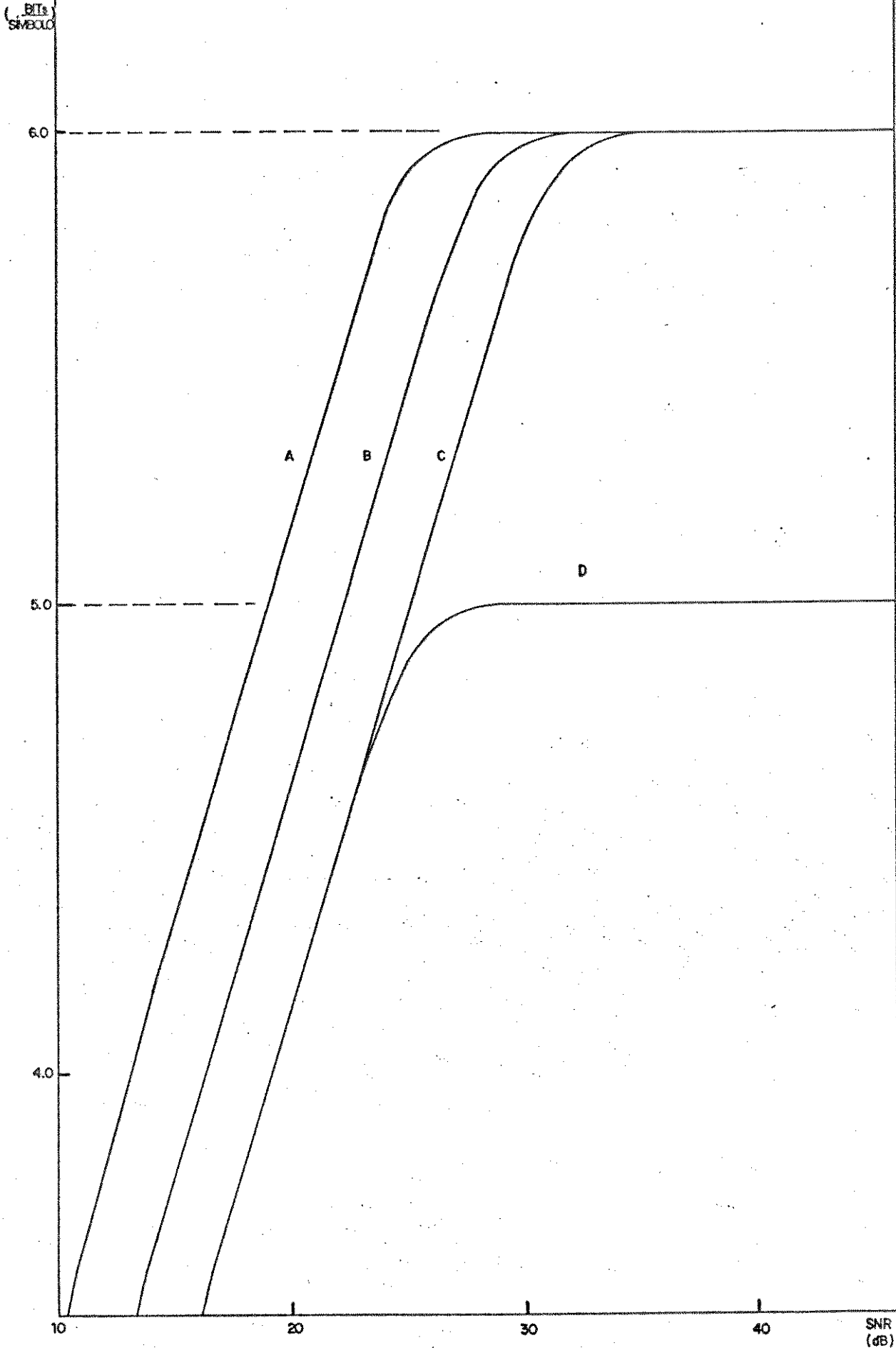


Figura 6.13 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2-FSK/32-PSK ($h=1.0$); B) 2F/2x32-PSK ($h=1.0$); C) 64-PSK; D) 32-PSK.

		$h = 1.00$
CTM=1	Classe Simples	$\{G_{56}; 1,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	32;16;8;4;2;1
	Δ_{min}	0.309
	GCA (dB)	3.95
CTM=2	Classe Simples	$\{G_{56}; 2,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	32;80;8;4;2;1
	Δ_{min}	0.414
	GCA (dB)	6.49
CTM=3	Classe Simples	$\{G_{56}; 3,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	96;176;8;4;2;1
	Δ_{min}	0.437
	GCA (dB)	6.96
CTM=4	Classe Simples	$\{G_{56}; 4,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	224,304,8,4,2,1
	Δ_{min}	0.459
	GCA (dB)	7.39
CTM=5	Classe Simples	$\{G_{56}; 5,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	128;592;8;4;2;1
	Δ_{min}	0.498
	GCA (dB)	8.10

Figura 6.14 - Resultados da procura dos melhores códigos AR, para a constelação 2F/2x32-PSK ($h=1.00$), com o GCA obtido em relação à constelação 32-PSK não-codificada.

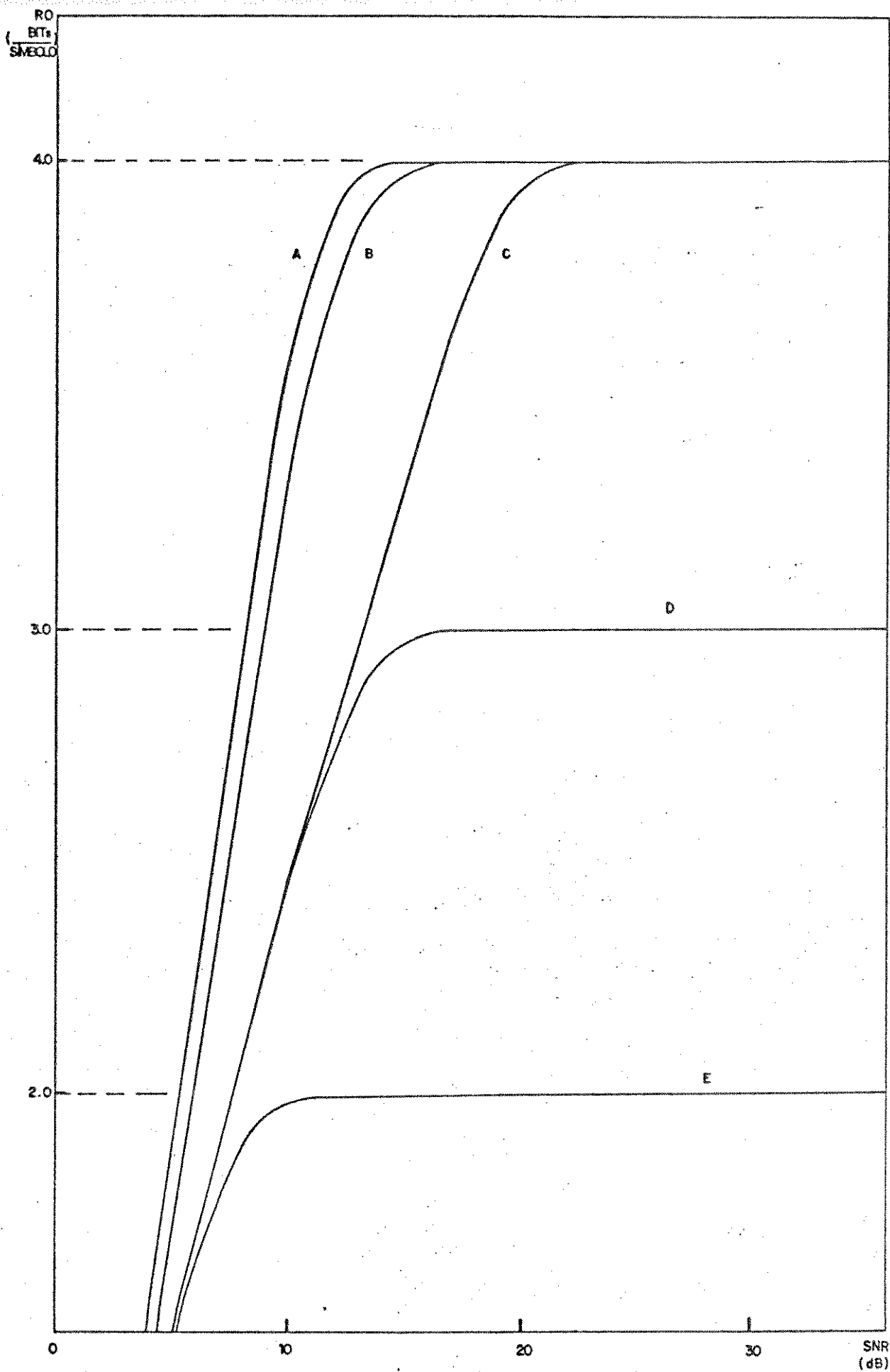


Figura 6.15 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/4x4-PSK ($h=1.0$); B) 2-FSK/8-PSK ($h=1.0$); C) 16-PSK; D) 8-PSK; E) 4-PSK.

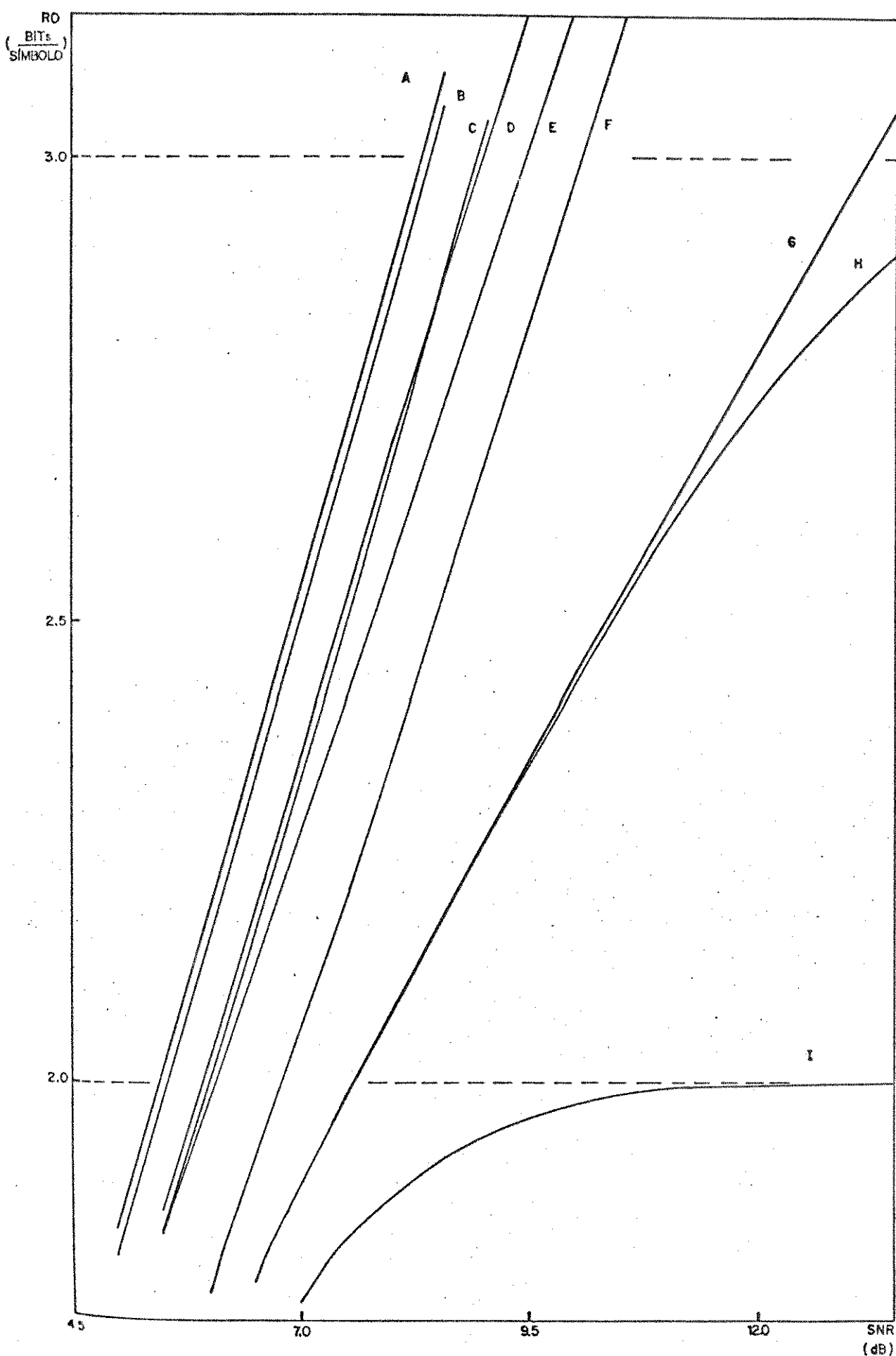


Figura 6.16 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/4x4-PSK ($h=1.0$); B) 2F/4x4-PSK ($h=0.75$); C) 2F/4x4-PSK ($h=0.5$); D) 2-FSK/8-PSK ($h=1.0$); E) 2-FSK/8-PSK ($h=0.5$); F) 2F/4x4-PSK ($h=0.25$); G) 16-PSK; H) 8-PSK; I) 4-PSK.

		h = 1.00	h = 0.75	h = 0.50	h = 0.25A	h = 0.25B
CTM=1	Classe Simples	{G ₃₄ : 1,0,0}	{G ₃₄ : 1,0,0}	{G ₃₄ : 1,0,0}	{G ₃₄ : 1,0,0}	{G ₃₄ : 1,0,0}
	Código VC(1);...;VC(N)	8;4;2;1	8;4;2;1	8;4;2;1	8;4;2;1	8;4;2;1
	Δ _{min}	1.414	1.414	1.414	0.852	0.952
	GCA (dB)	5.33	5.33	5.33	0.94	1.90
CTM=2	Classe Simples	{G ₃₄ : 1,1,0}	{G ₃₄ : 1,1,0}	{G ₃₄ : 1,1,0}	{G ₃₄ : 1,1,0}	{G ₃₄ : 2,0,0}
	Código VC(1);...;VC(N)	16;12;2;1	16;12;2;1	16;12;2;1	16;12;2;1	8;20;2;1
	Δ _{min}	1.732	1.605	1.449	1.086	1.000
	GCA (dB)	7.09	6.44	5.55	3.04	2.33
CTM=3	Classe Simples	{G ₃₄ : 2,1,0}	{G ₃₄ : 2,1,0}	{G ₃₄ : 2,1,0}	{G ₃₄ : 2,1,0}	{G ₃₄ : 2,1,0}
	Código VC(1);...;VC(N)	16;12;34;1	16;12;34;1	16;12;34;1	16;12;34;1	16;12;34;1
	Δ _{min}	2.000	1.775	1.483	1.205	1.166
	GCA (dB)	8.34	7.31	5.75	3.95	3.66
CTM=4	Classe Simples	{G ₃₄ : 3,1,0}	{G ₃₄ : 2,1,1}	{G ₃₄ : 2,1,1}	{G ₃₄ : 2,2,0}	{G ₃₄ : 3,1,0}
	Código VC(1);...;VC(N)	48;28;66;1	32;20;10;65	32;20;10;65	24;44;66;1	48;28;66;1
	Δ _{min}	2.000	1.891	1.761	1.380	1.205
	GCA (dB)	8.34	7.86	7.24	5.12	3.95
CTM=5	Classe Simples	{G ₃₄ : 2,2,1}	{G ₃₄ : 2,2,1}	{G ₃₄ : 2,2,1}	{G ₃₄ : 3,2,0}	{G ₃₄ : 3,2,0}
	Código VC(1);...;VC(N)	32;12;82;145	32;12;82;145	32;12;82;145	80;44;130;1	80;44;130;1
	Δ _{min}	2.236	2.037	1.789	1.476	1.346
	GCA (dB)	9.32	8.51	7.38	5.71	4.91

Figura 6.17 - Resultados da procura dos melhores códigos AR, para a constelação 2F/4x4-PSK, com o GCA obtido em relação à constelação 8-PSK não-codificada.

	CTM=1	CTM=2	CTM=3	CTM=4	CTM=5
16-PSK	1.0	3.5	4.0	4.4	4.8
2F/4x4-PSK h = 0.25	1.9	3.0	4.0	5.1	5.7
2F/4x4-PSK h = 0.50	5.3	5.6	5.8	7.2	7.4
2-FSK/8-PSK h = 0.50	-	5.3	6.8	7.5	8.3
2F/4x4-PSK h = 0.75	5.3	6.4	7.3	7.9	8.5
2-FSK/8-PSK h = 0.75	-	5.3	7.9	8.3	8.3
2F/4x4-PSK h = 1.00	5.3	7.1	8.3	8.3	9.3
2-FSK/8-PSK h = 1.00	-	5.3	8.3	8.3	8.3

Figura 6.18 - Valores de GCA (em dB), para constelações de 16 sinais, obtidos em relação à constelação 8-PSK não-codificada, e para alguns valores de comprimento total de memória (CTM) dos codificadores.

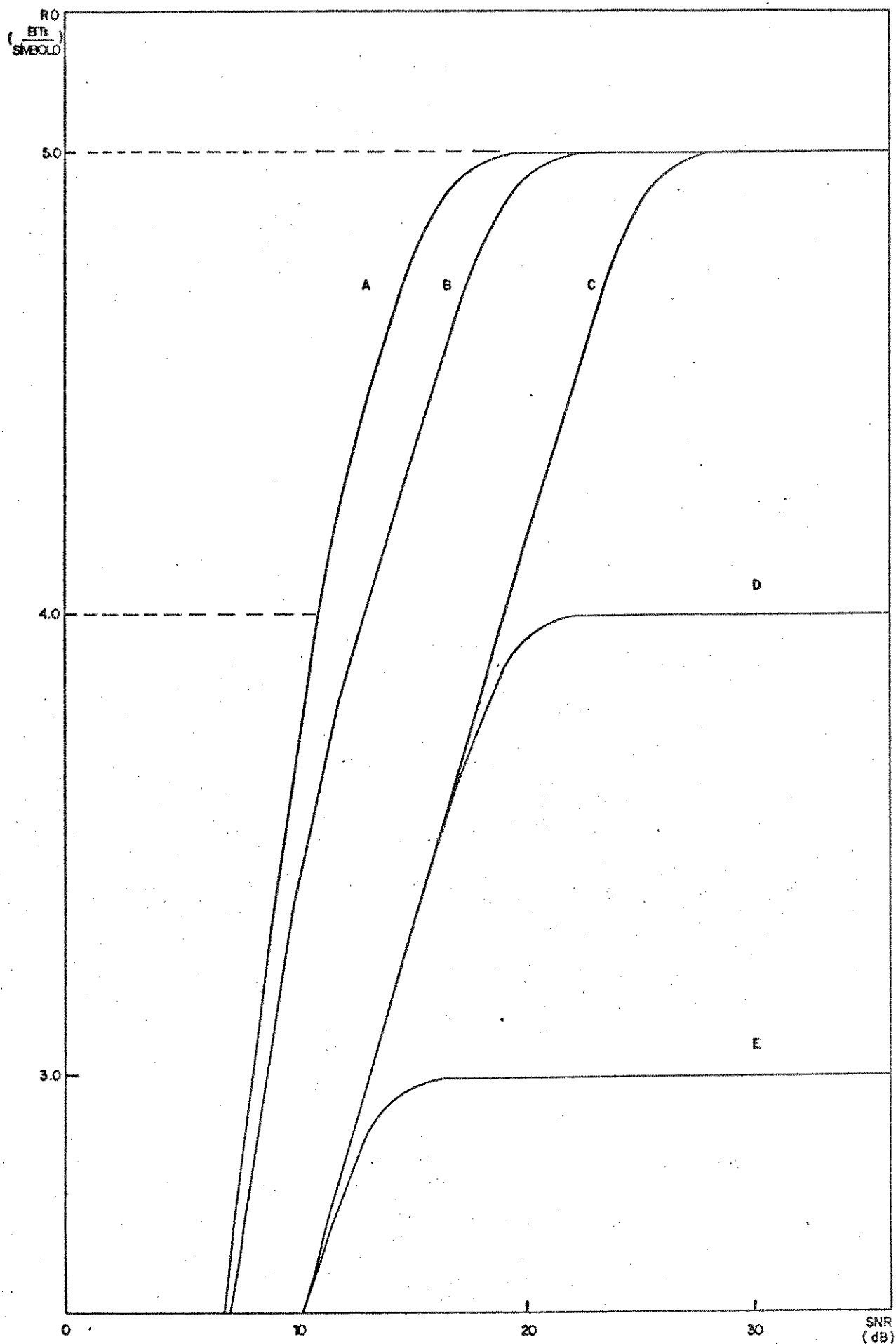


Figura 6.19 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/4x8-PSK ($h=1.0$); B) 2-FSK/16-PSK ($h=1.0$); C) 32-PSK; D) 16-PSK ; E) 8-PSK.

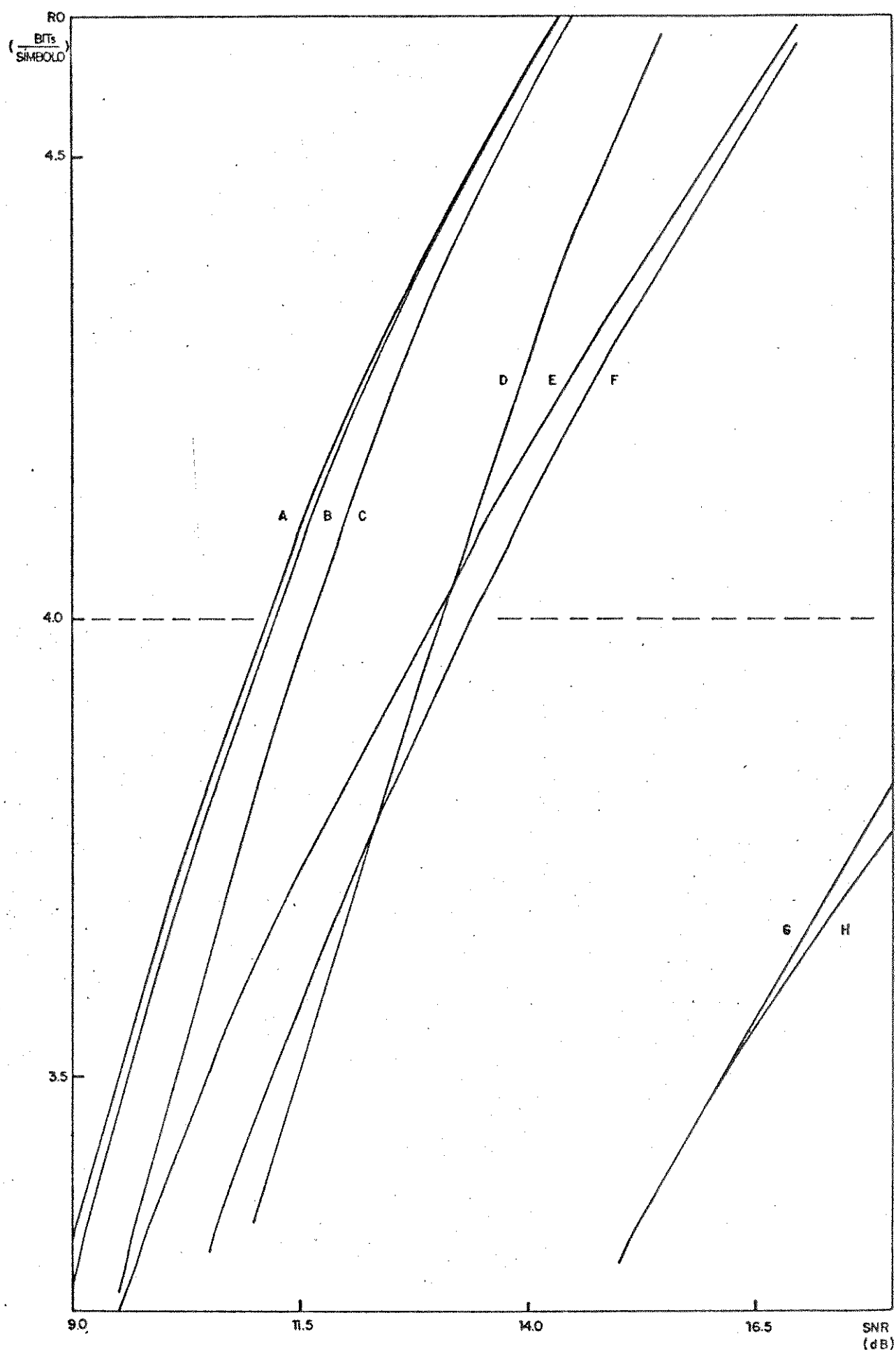


Figura 6.20 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/4x8-PSK ($h=1.0$); B) 2F/4x8-PSK ($h=0.75$); C) 2F/4x8-PSK ($h=0.5$); D) 2F/4x8-PSK ($h=0.25$); E) 2-FSK/16-PSK ($h=1.0$); F) 2-FSK/16-PSK ($h=0.5$); G) 32-PSK; H) 16-PSK.

		$h = 1.00$	$h = 0.75$	$h = 0.50$	$h = 0.25$
CTM=1	Classe Simples	$\{G_{45}; 1,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 1,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 1,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 1,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	16;8;4;2;1	16;8;4;2;1	16;8;4;2;1	16;8;4;2;1
	Amin	1.137	1.137	1.000	0.631
	GCA (dB)	9.29	9.29	8.18	4.18
CTM=2	Classe Simples	$\{G_{45}; 2,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 2,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 2,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 1,1,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	16;40;4;2;1	16;40;4;2;1	16;40;4;2;1	32;24;4;2;1
	Amin	1.414	1.183	1.000	0.701
	GCA (dB)	11.19	9.64	8.18	5.09
CTM=3	Classe Simples	$\{G_{45}; 3,0,0,0\}$	$\{G_{45}; 2,1,0,0\}$	$\{G_{45}; 2,1,0,0\}$	$\{G_{45}; 2,1,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	48;88;4;2;1	32;24;68;2;1	32;24;68;2;1	32;24;68;2;1
	Amin	1.414	1.414	1.206	0.831
	GCA (dB)	11.19	11.19	9.81	6.57
CTM=4	Classe Simples	$\{G_{45}; 2,1,1,0\}$	$\{G_{45}; 2,1,1,0\}$	$\{G_{45}; 2,1,1,0\}$	$\{G_{45}; 2,2,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	64;40;20;130;1	64;40;20;130;1	64;40;20;130;1	48;88;132;2;1
	Amin	1.514	1.514	1.314	0.937
	GCA (dB)	11.78	11.78	10.55	7.61
CTM=5	Classe Simples	$\{G_{45}; 2,2,1,0\}$	$\{G_{45}; 2,2,1,0\}$	$\{G_{45}; 2,2,1,0\}$	$\{G_{45}; 3,2,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	64;24;164;290;1	64;24;164;290;1	64;24;164;290;1	160;88;260;2;1
	Amin	1.514	1.514	1.321	0.992
	GCA (dB)	11.78	11.78	10.60	8.11

Figura 6.21 - Resultados da procura dos melhores códigos AR, para a constelação 2F/4x8-PSK, com o GCA obtido em relação à constelação 16-PSK não-codificada.

	CTM=1	CTM=2	CTM=3	CTM=4	CTM=5
16-PSK	1.0	3.5	4.0	4.4	4.8
2F/4x8-PSK h = 0.25	4.2	5.1	6.6	7.6	8.1
2F/4x8-PSK h = 0.50	8.2	8.2	9.8	10.6	10.6
2-FSK/16-PSK h = 0.50	-	8.6	9.4	9.9	9.9
2F/4x8-PSK h = 0.75	9.3	9.6	11.2	11.8	11.8
2-FSK/16-PSK h = 0.75	-	9.4	9.4	9.9	9.9
2F/4x8-PSK h = 1.00	9.3	11.2	11.2	11.8	11.8
2-FSK/16-PSK h = 1.00	-	9.4	9.4	9.9	9.9

Figura 6.22 - Valores de GCA (em dB), para constelações de 32 sinais, obtidos em relação à constelação 16-PSK não-codificada, e para alguns valores de comprimento to tal de memória (CTM) dos codificadores.

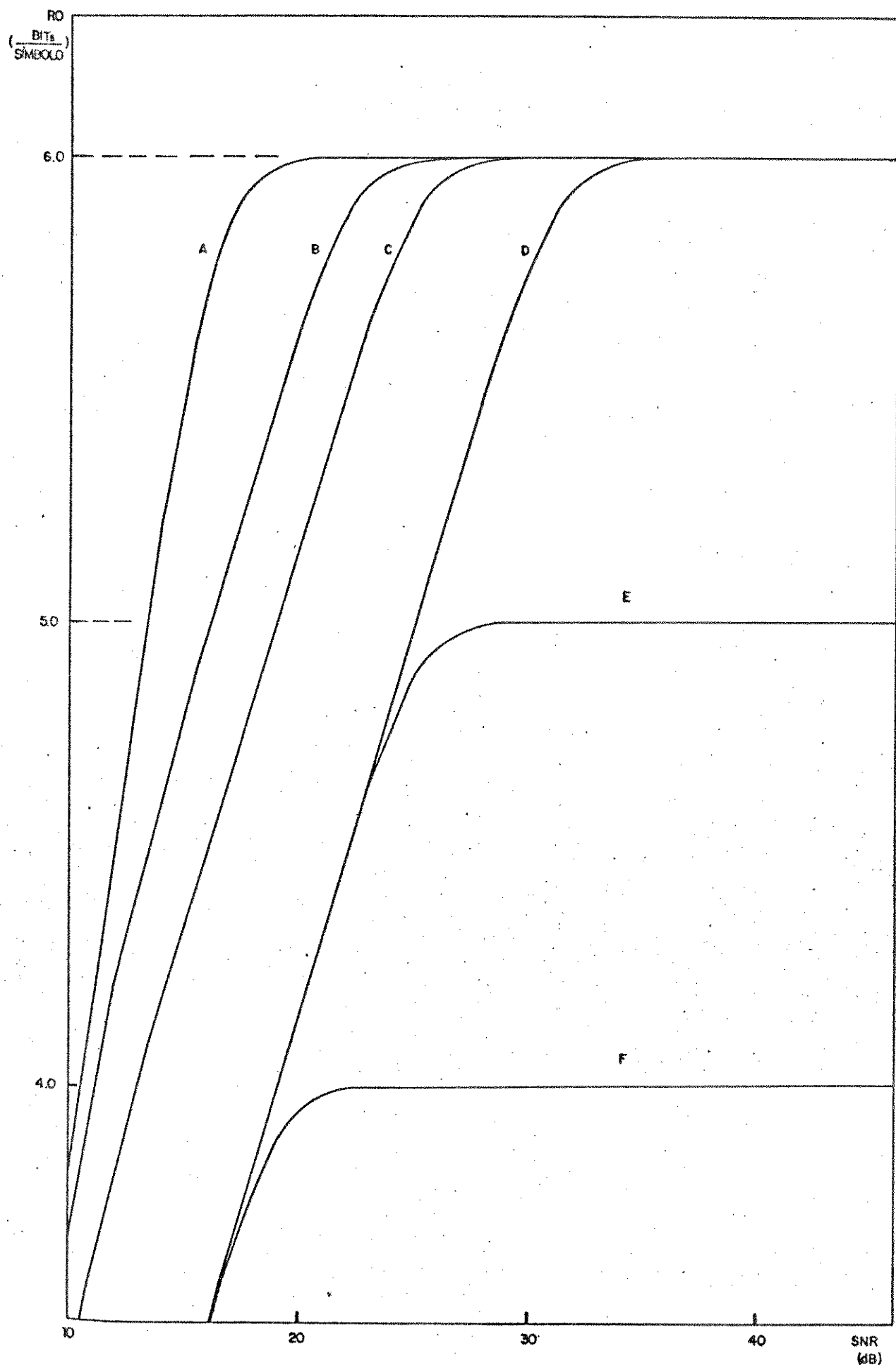


Figura 6.23 - Curvas da taxa de corte (R_0) do canal, versus a relação sinal-ruído (SNR), para as constelações: A) 2F/8x8-PSK ($h=1.0$); B) 2F/4x16-PSK ($h=1.0$); C) 2-FSK/32-PSK ($h=1.0$); D) 64-PSK; E) 32-PSK; F) 16-PSK.

		$h = 1.00$
CTM=1	Classe Simples	$\{G_{56}; 1,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	32;16;8;4;2;1
	Δ_{min}	0.937
	GCA (dB)	13.59
CTM=2	Classe Simples	$\{G_{56}; 2,0,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	32;80;8;4;2;1
	Δ_{min}	1.000
	GCA (dB)	14.15
CTM=3	Classe Simples	$\{G_{56}; 2,1,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	64;48;136;4;2;1
	Δ_{min}	1.210
	GCA (dB)	15.81
CTM=4	Classe Simples	$\{G_{56}; 2,2,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	96;176;264;4;2;1
	Δ_{min}	1.325
	GCA (dB)	16.60
CTM=5	Classe Simples	$\{G_{56}; 3,2,0,0,0\}$
	Código VC(1);...;VC(N)	320;176;520;4;2;1
	Δ_{min}	1.325
	GCA (dB)	16.60

Figura 6.24 - Resultados da procura dos melhores códigos AR, para a constelação 2F/8x8-PSK, com o GCA obtido em relação à constelação 32-PSK não-codificada.