



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Alvaro Arnanz Lemaire

**Métodos Iterativos Baseados em Desigualdades
Matriciais Lineares para Controle de Sistemas
Lineares Incertos Positivos Contínuos no Tempo**

Campinas
2019

Alvaro Arnanz Lemaire

**Métodos Iterativos Baseados em Desigualdades
Matriciais Lineares para Controle de Sistemas Lineares
Incertos Positivos Contínuos no Tempo**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Automação.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres

Coorientadora: Dra. Cecília de Freitas Moraes

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO ALVARO ARNANZ LEMAIRE E ORIENTADA PELO PROF. DR. PEDRO LUIS DIAS PERES.

Campinas
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Ar61m Arnanz Lemaire, Alvaro, 1989-
Métodos iterativos baseados em desigualdades matriciais lineares para controle de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo / Alvaro Arnanz Lemaire. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Coorientador: Cecília de Freitas Moraes.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Sistemas lineares invariantes no tempo. 2. Controle robusto. 3. Desigualdades matriciais lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias, 1960-. II. Moraes, Cecília de Freitas, 1987-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Iterative methods based on linear matrix inequalities for control of continuous-time positive uncertain linear systems

Palavras-chave em inglês:

Linear systems

Robust control

Linear matrix inequalities

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Pedro Luis Dias Peres [Orientador]

Daniel Dotta

Leonardo Amaral Mazelli

Data de defesa: 21-08-2019

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: 0000-0003-4805-2566

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7476123320807178>

COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Alvaro Arnanz Lemaire

RA: 181641

Data da Defesa: 21/08/2019

Título da Dissertação: “Métodos Iterativos Baseados em Desigualdades Matriciais Lineares para Controle de Sistemas Lineares Incertos Positivos Contínuos no Tempo ”

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Daniel Dotta (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Leonardo Amaral Mozelli (DELT/UFMG)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Dedico meu trabalho à minha família: meu pai Angel, minha mãe Carole, minha irmã
Candela e meus avós, os quais mesmo estando longe me fazem sentir perto deles.*

Agradecimentos

Agradeço de coração a todo mundo que tornou possível este momento e a todas as pessoas que conheci e contribuíram com experiências e conhecimentos ao longo destes dois anos. Para eles, dedico as seguintes linhas:

Primeiramente, gostaria de agradecer às pessoas mais importantes na minha vida, meus pais, Angel e Carole, aos quais devo tudo o que hoje sou e sem os quais nunca teria chegado onde cheguei.

Também, agradeço à minha querida irmã Candela, melhor amiga e pessoa que conheci. Uma mulher cheia de amor e alegria.

Ao meu orientador Dr. Pedro L. D. Peres, por me brindar com a oportunidade de fazer este projeto. Deixo aqui meus sinceros agradecimentos pela fantástica orientação e colaboração. Pela paciência e por tudo o que me ensinou nestes últimos dois anos.

À minha coorientadora Dra. Cecília de Freitas Morais, um exemplo a seguir na minha vida profissional e uma incrível pesquisadora. Obrigado pela infinita paciência comigo e por toda a ajuda que você me prestou.

Ao Dr. Ricardo C. L. F. Oliveira. Sem a sua ajuda e conhecimentos transmitidos nas disciplinas e no cotidiano do laboratório esta tese seria inconcebível.

Às minhas irmãs por parte de orientador, Amanda e Izabella. Por todos esses momentos bons que nós passamos juntos. Pelos ânimos e ajudas mútuas.

De grande importância foram também as pessoas do LE16. Sempre solícitos e dispostos. Foi um prazer compartilhar experiências e o laboratório com vocês.

Agradecer à minha namorada Paola e a todos os moradores de minha casa, pelo suporte nos momentos difíceis, as boas experiências e os momentos maravilhosos que passamos juntos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) processo nº 132544/2017-2, pelo apoio financeiro concedido durante um mês.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Esta dissertação propõe uma nova abordagem para estabilização e controle \mathcal{H}_∞ de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo, por realimentação de estados ou de saída. Sistemas positivos, no espaço de estados, caracterizam-se por apresentar estados e saídas não negativas para entradas e condições iniciais não negativas. Em tempo contínuo, sistemas lineares positivos são representados no espaço de estados por uma matriz dinâmica Metzler (ou seja, com elementos fora da diagonal não negativos) e matrizes de entrada, saída e transmissão direta com elementos não negativos. Enquanto as abordagens da literatura, desenvolvidas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs), empregam mudanças de variáveis e imposição de estruturas diagonais nas variáveis de recuperação do ganho de controle para poder incorporar a restrição de positividade em malha fechada, propõe-se nesta dissertação um procedimento iterativo baseado em LMIs que trata o ganho de realimentação diretamente como variável do problema. Dessa forma, pode-se abordar indistintamente o controle por realimentação estática de estados ou de saída, sistemas precisamente conhecidos ou com incerteza politópica, com restrições de descentralização ou de máxima magnitude dos elementos dos ganhos sem mudanças de variáveis e sem restringir as demais variáveis do problema. Tanto no problema de estabilização quanto no de controle \mathcal{H}_∞ , são propostas duas condições suficientes, que dependem de uma escolha inicial de variáveis, para a existência de um ganho de realimentação com as características desejadas (estabilidade, positividade e custo garantido \mathcal{H}_∞ em malha fechada). A primeira é baseada apenas na relação entre a matriz de Lyapunov e o ganho estabilizante, enquanto que a segunda conta com a introdução de variáveis extras. As condições propostas são exploradas de maneira iterativa por meio de algoritmos com os seguintes atributos: relaxações das condições de estabilidade (ou custo garantido \mathcal{H}_∞) e de positividade; escolha de condições iniciais que asseguram a existência de soluções factíveis a cada iteração para o problema relaxado; garantia de convergência local. A versatilidade e a eficiência da abordagem proposta são ilustradas por meio de exemplos da literatura, comparações e testes estatísticos.

Palavras-chaves: Controle Robusto; Sistemas Lineares Positivos Incertos; Sistemas Contínuos no Tempo; Realimentação Estática de Saída; Realimentação de Estados; Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

This dissertation proposes a new approach for stabilization and \mathcal{H}_∞ control of continuous-time positive uncertain linear systems through state or output feedback. Positive systems, in state space, are characterized by presenting non-negative states and outputs for non-negative inputs and initial conditions. In continuous-time, positive linear systems are represented in state space by a Metzler dynamic matrix (i.e., non-negative non-diagonal elements) and input, output, and direct transmission matrices with non-negative elements. While the approaches from the literature, developed in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs), employ variable changes and diagonal structures on the variables used to recover the control gain in order to incorporate the closed-loop positivity constraint, in this dissertation an iterative procedure based on LMIs that treats the feedback gain directly as a variable of the problem is proposed. Thus, state-feedback or static output-feedback control, precisely known systems or systems with polytopic uncertainty, with decentralization or maximum magnitude constraints on the gain elements are indistinctly handled without changes of variables and imposing no restrictions to the other variables of the problem. In both stabilization and \mathcal{H}_∞ control problems, two sufficient conditions, which depend on an initial choice of variables, are proposed for the existence of a feedback gain with the desired characteristics (closed-loop stability, positivity and \mathcal{H}_∞ guaranteed cost). The first one is based on the relationship between the Lyapunov matrix and the stabilizing control gain, while the second introduces extra variables. The proposed conditions are explored in an iterative way by means of algorithms with the following attributes: relaxations applied to the stability (or \mathcal{H}_∞ guaranteed cost) and positivity conditions; choice of initial conditions that ensure feasible solutions at each iteration for the relaxed problem; guarantee of local convergence. The versatility and efficiency of the proposed approach are illustrated by means of examples from the literature, comparisons and statistical tests.

Keywords: Robust Control; Positive Uncertain Linear Systems; Continuous-time Systems; Static Output-feedback Control; State-feedback Control; Linear Matrix Inequalities.

Lista de Ilustrações

Figura 1 – Faixa estabilizável de σ nos exemplos 1 a 4 de BP18.	40
Figura 2 – Faixa estabilizável de σ nos exemplos 5.1 a 5.4 de BP18 (ganho com estrutura).	40
Figura 3 – Evolução temporal das saídas do sistema em malha aberta.	42
Figura 4 – Valores das saídas do sistema.	43
Figura 5 – Custo garantido γ e norma \mathcal{H}_∞ de pior caso γ^* para o Caso 1.	57
Figura 6 – Custo garantido γ e norma \mathcal{H}_∞ de pior caso γ^* para o Caso 2.	58
Figura 7 – Custo garantido γ e norma \mathcal{H}_∞ de pior caso γ^* para o Caso 3.	60

Lista de Tabelas

Tabela 1	– Resultados obtidos com o Algoritmo 1 baseado no Teorema 3.1 (Est1v1) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e $T(s)$ o tempo médio em segundos para resolver cada caso.	35
Tabela 2	– Resultados obtidos com o Algoritmo 2 baseado no Teorema 3.1 (Est1v2) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e $T(s)$ o tempo médio em segundos para resolver cada caso.	35
Tabela 3	– Resultados obtidos com o Algoritmo 1 baseado no Teorema 3.2 (Est2v1) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e $T(s)$ o tempo médio em segundos para resolver cada caso.	36
Tabela 4	– Resultados obtidos com o Algoritmo 2 baseado no Teorema 3.2 (Est2v2) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e $T(s)$ o tempo médio em segundos para resolver cada caso.	36
Tabela 5	– Número de variáveis em função das diferentes estruturas e dimensões do problema. Sendo que n é o número de estados, N o número de vértices. As estruturas diagonal (D), simétrica (S), escalar (E) e cheia (C) são aplicadas nas variáveis de decisão $P(\alpha)$ (Teorema 3.1) e $P(\alpha)$ e $X_i(\alpha)$, $i = 1,2,3$ (Teorema 3.2).	38
Tabela 6	– Resultados obtidos para estabilização de base de sistemas sem incertezas. Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e $T(s)$ o tempo médio em segundos para resolver cada caso.	42

Lista de Símbolos e Abreviações

α	Vetor de parâmetros incertos
γ	Custo garantido \mathcal{H}_∞
γ^*	Custo garantido de pior caso
Λ	Simplex unitário
$\lambda_i(M)$	i -ésimo autovalor de uma matriz quadrada M
\mathbb{R}^n ($\mathbb{R}^{n \times n}$)	Espaço de vetores (matrizes) reais de ordem n ($n \times n$)
\mathcal{L}_2	Espaço de funções quadraticamente integráveis
0	Matriz de zeros de dimensão apropriada
$\text{He}(M)$	Indica a soma da matriz M com a transposta M'
I	Matriz identidade de dimensão apropriada
$\text{Tr}\{\cdot\}$	Traço de uma matriz
$\sigma_i(H(j\omega))$	i -ésimo valor singular de $H(j\omega)$
\star	Indica o bloco simétrico da matriz
A_{ij}	Elemento da linha i coluna j da matriz A
$\text{diag}(M_1, M_2)$	Matriz bloco diagonal
$H(s)$	Função de transferência
$M \geq 0$	Matriz com todos os elementos não negativos
M'	Transposta da matriz M
$M = M' \succ 0$	Matriz M é simétrica e definida positiva
M^*	Complexo conjugado de M
M^{-1}	Inversa da matriz M
M^\perp	Base ortogonal para a matriz M
BMI	Bilinear Matrix Inequality (Desigualdade Matricial Bilinear)
KYP	Kalman-Yakubovich-Popov

LMI	Linear Matrix Inequality (Desigualdade Matricial Linear)
LTI	Linear Time Invariant (Linear e Invariante no Tempo)
$\text{Re}(s)$	Parte real de s
SISO	Single Input Single Output (Uma Entrada Uma Saída)

Sumário

1	Introdução	15
2	Fundamentos Matemáticos	18
2.1	Fundamentos de Sistemas Positivos	18
2.2	Cômputo da Norma \mathcal{H}_∞	19
2.3	Definição do Problema de Controle Robusto	20
2.3.1	Estabilidade Robusta	21
2.3.2	Custo Garantido \mathcal{H}_∞	22
2.4	Lemas Auxiliares	24
2.5	Considerações Computacionais	25
3	Estabilização de Sistemas Positivos	26
3.1	Primeira Abordagem	26
3.2	Segunda Abordagem	28
3.3	Descrição dos Algoritmos	29
3.3.1	Versão 1 do Procedimento Iterativo (v1): Duas Fases	31
3.3.2	Versão 2 do Procedimento Iterativo (v2): Uma Única Fase	33
3.4	Resultados Numéricos	34
3.4.1	Estabilização Robusta (Teste Estatístico)	34
3.4.2	Exemplos da Literatura	39
3.4.3	Estabilização de Sistemas sem Incerteza (Teste Estatístico)	41
3.4.4	Simulação Temporal	42
4	Controle \mathcal{H}_∞ de Sistemas Positivos	45
4.1	Primeira Abordagem	45
4.2	Segunda Abordagem	46
4.3	Descrição dos Algoritmos	47
4.3.1	Versão 1 do Procedimento Iterativo (v1): Três Fases	50
4.3.2	Versão 2 do Procedimento Iterativo (v2): Duas Fases	53
4.3.3	Outros Procedimentos Iterativos Testados	54
4.3.3.1	Procedimento Iterativo Alternativo 1: Uma Fase com Bissecção Externa	54
4.3.3.2	Procedimento Iterativo Alternativo 2: Duas Fases com Bissecção Externa	55
4.3.3.3	Procedimento Iterativo Alternativo 3: Duas Fases com Bissecção Interna	55
4.3.3.4	Procedimento Iterativo Alternativo 4: Três Fases com Bissecção Interna	55

4.4	Resultados Numéricos	55
4.4.1	Exemplo 1	56
5	Considerações Finais	61
	Referências	64

1 Introdução

Devido à evolução dos procedimentos numéricos e ao grande avanço computacional, problemas de controle e análise de estabilidade de sistemas dinâmicos sujeitos a incertezas, cada vez mais complexos, começaram a ser tratados. Nesse cenário, destacam-se as técnicas de otimização baseadas em programação semidefinida, sobretudo as formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs). Veja [Boyd *et al.* \(1994\)](#), [El Ghaoui e Niculescu \(2000\)](#) e [Oliveira e Peres \(2010\)](#) para uma introdução ao tema.

Adicionalmente, uma ampla gama de problemas práticos apresenta uma restrição importante: a não negatividade dos estados e das saídas, geralmente variáveis associadas a grandezas físicas que só assumem valores positivos ou nulos. Tais sistemas são conhecidos como *sistemas positivos*. Dentre as principais aplicações dessa classe de sistemas em engenharia, podem ser citados os processos industriais envolvendo reatores químicos, trocadores de calor, redes de reservatórios, fluxo em redes ou sistemas de armazenamento ou comunicações ([BERMAN; PLEMMONS, 1979](#); [FARINA; RINALDI, 2000](#); [LUENBERGER, 1979](#)). Fora da área de engenharia, existem outras aplicações como na economia e na sociologia, com modelos demográficos e sociológicos sobre populações, ou na medicina e na biologia, analisando e controlando cultivos de bactérias ou células ([BERMAN; PLEMMONS, 1979](#); [FARINA; RINALDI, 2000](#); [LUENBERGER, 1979](#)).

O estudo de sistemas positivos é uma área ainda aberta à pesquisa, pois nem todos os métodos empregados no tratamento de sistemas lineares podem ser estendidos diretamente para sistemas positivos, uma vez que tais sistemas estão definidos em cones convexos e não em um espaço linear ([CACCETTA; RUMCHEV, 2000](#)).

Esta dissertação dedica-se à síntese de controladores robustos para sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo. Note que, para que o sistema em malha fechada seja positivo, é necessário (adicionalmente ao exigido no problema de controle clássico) garantir que a matriz dinâmica do sistema em malha fechada seja Metzler. Várias abordagens têm surgido na literatura com o objetivo de tratar esse problema ([BRIAT, 2013](#); [EBIHARA *et al.*, 2014](#); [SHEN; LAM, 2015](#); [SHEN; LAM, 2017](#); [SHEN; LAM, 2016](#); [TANAKA; LANGBORT, 2011](#); [WANG; HUANG, 2013](#)). Mesmo no caso precisamente conhecido, isto é, sem incertezas, pode-se dizer que um dos desafios do controle de sistemas positivos é estender métodos que funcionam bem para sistemas com uma entrada de controle e uma saída, por exemplo, baseados em programação linear ([ARNESON; LANGBORT, 2012](#); [AIT RAMI, 2011](#); [ROSZAK; DAVISON, 2009](#)), para o caso multivariável. Embora condições de síntese de controle por realimentação de estados para sistemas positivos por meio de LMIs possam ser obtidas como uma extensão direta dos métodos

apresentados na literatura para sistemas lineares tradicionais, a dificuldade maior está em tratar a restrição de que o sistema em malha fechada mantenha-se positivo, o que pode ser conseguido impondo-se restrições de estrutura à matriz de Lyapunov utilizada para computar o ganho, como foi feito em Tanaka e Langbort (2011), Ebihara *et al.* (2014).

Outra alternativa poderia ser, por exemplo, o uso de abordagens iterativas que trabalham diretamente com as variáveis do ganho (FELIPE, 2017), estratégias de cômputo do ganho em dois estágios (AGULHARI *et al.*, 2012a; ARZELIER *et al.*, 2003; PEAUCELLE; ARZELIER, 2001) ou LMIs com variáveis escalares (VIEIRA *et al.*, 2015), nas quais pode-se impor restrições às variáveis de recuperação do ganho.

A estratégia adotada nesta dissertação faz o uso de procedimentos iterativos baseados em LMIs. Para isso, são elaboradas condições em termos de LMIs dependentes de parâmetros, baseadas em Felipe (2017), para a síntese de controladores robustamente estabilizantes, nas quais a matriz dinâmica do sistema não aparece multiplicando nenhuma variável de decisão e o ganho robusto de controle é tratado diretamente como uma variável de otimização do problema. Sendo assim, o conservadorismo que existe nos outros métodos da literatura, baseados em LMIs e adaptados para síntese de controladores para sistemas contínuos positivos (imposição de estrutura diagonal na matriz de Lyapunov ou na matriz quadrada de recuperação do ganho), desaparece. Como resultado, as probabilidades de sucesso do método proposto aumentam, tornando-o, ao menos em teoria, menos conservador. É importante enfatizar que ao utilizar o ganho diretamente como variável de otimização do problema é possível impor estruturas particulares, restrições de magnitude e realizar realimentação de estados ou estática de saída sem conservadorismo adicional. No que se refere à realimentação estática de saída, são poucos os trabalhos da literatura que discutem esse problema no âmbito de sistemas positivos (BHATTACHARYYA; PATRA, 2018; AIT RAMI, 2011; SHEN; LAM, 2015; FENG *et al.*, 2011; WANG; HUANG, 2013). Uma novidade, com relação à maioria das técnicas de controle de sistemas por realimentação de saída disponíveis na literatura, é que nesta dissertação investiga-se um caso mais geral, considerando a presença de incertezas politópicas no modelo, inclusive nas matrizes de saída do sistema, uma vez que no método proposto, diferentemente de outras técnicas existentes para realimentação de saída, não é exigida uma estrutura fixa para a matriz de saída nem há necessidade da aplicação de transformações de similaridade no modelo de espaço de estados.

Além do problema mais básico de estabilização, é interessante investigar a otimização de algum critério de desempenho associado. Por exemplo, a minimização de um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ , associada à rejeição de ruídos. No que se refere ao problema de controle \mathcal{H}_∞ de sistemas positivos, existem condições necessárias e suficientes apenas para realimentação de estados no caso precisamente conhecido. Dentre as pesquisas que tratam sistemas lineares invariantes no tempo (em inglês, *Linear Time Invariant* — LTI), pode-se citar Tanaka e Langbort (2011), que mostra a prova de que a LMI do

Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) admite a matriz de Lyapunov com estrutura diagonal em sistemas positivos, enquanto em Ebihara *et al.* (2014) é apresentada uma demonstração de que a matriz de Lyapunov nas LMIs do tipo KYP e nas desigualdades de Lyapunov pode ser diagonal, e ainda ser relaxada para não simétrica, se introduzidas algumas restrições adicionais. Seguindo uma direção diferente, empregando uma estratégia iterativa baseada em LMIs dependentes de parâmetros similar à discutida no caso de estabilização, nesta dissertação também é investigado o problema de controle \mathcal{H}_∞ robusto por realimentação estática de saída para sistemas incertos positivos contínuos no tempo.

Uma descrição resumida dos capítulos que compõem a dissertação é apresentada na sequência.

Capítulo 2: Introduce os fundamentos de sistemas positivos contínuos no tempo, assim como a caracterização da estabilidade dessa classe de sistemas por meio da existência de uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva. Define o problema de controle estudado e apresenta condições LMIs suficientes para análise de estabilidade e cálculo da norma \mathcal{H}_∞ de sistemas incertos contínuos no tempo, além de alguns conceitos e lemas auxiliares empregados no decorrer da dissertação.

Capítulo 3: Expõe os primeiros resultados desta dissertação, que são procedimentos iterativos em termos de condições LMIs dependentes de parâmetros para a estabilização robusta por realimentação estática de saída para sistemas lineares politópicos positivos contínuos no tempo. A eficiência dos métodos propostos é comparada com a de outras técnicas por meio de experimentos estatísticos e outros exemplos numéricos retirados da literatura.

Capítulo 4: Apresenta novos algoritmos para a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída de sistemas politópicos positivos contínuos no tempo. As diferenças entre os algoritmos propostos e a eficácia da abordagem são discutidas no final do capítulo.

Capítulo 5: Contém as considerações finais e a apresentação de propostas para investigações futuras.

2 Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo apresentam-se fundamentos teóricos relacionados com o controle de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo. Na sequência, introduz-se a definição do problema de controle robusto a ser tratado. Posteriormente, são explicados conceitos relacionados à estabilidade robusta, ao cômputo do custo garantido \mathcal{H}_∞ e, finalmente, são apresentados lemas auxiliares empregados no desenvolvimento das contribuições desta dissertação.

2.1 Fundamentos de Sistemas Positivos

Nesta seção, são reunidas definições e fundamentos de sistemas positivos necessários para o desenvolvimento dos principais resultados desta dissertação. Primeiramente são diferenciadas duas definições dentro do contexto de sistemas positivos: os conceitos de internamente e externamente positivos.

Definição 2.1. (*FARINA; RINALDI, 2000*) *Um sistema linear é externamente positivo se, para cada entrada não negativa e estados iniciais nulos, as saídas são não negativas.*

Definição 2.2. (*FARINA; RINALDI, 2000*) *Um sistema linear é internamente positivo se, para cada entrada não negativa e estados iniciais não negativos, os estados e as saídas são não negativos.*

Note que, para ser mais abrangente, este texto trata de sistemas internamente positivos, ou seja, tanto os estados quanto as saídas são não negativos para entradas e condições iniciais não negativas.

Outra definição necessária para o tratamento de sistemas positivos contínuos no tempo representados por equações de estados é apresentada a seguir.

Definição 2.3. (*FARINA; RINALDI, 2000*) *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Metzler se todos os elementos fora da diagonal forem não negativos, ou seja, $A_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$.*

Considere o sistema linear contínuo no tempo precisamente conhecido

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ são os vetores de estados, entradas e saídas respectivamente. A seguir, uma definição equivalente às definições 2.1 e 2.2 para sistemas lineares positivos no tempo, descrita em termos de matrizes de espaço de estados, é apresentada.

Definição 2.4. O sistema (2.1) é positivo se, e somente se, A for Metzler, $B \geq 0$, $C \geq 0$ e $D \geq 0$.

Em relação à Definição 2.4, $M \geq 0$ significa que todos os elementos da matriz M são não negativos, e uma matriz A é Metzler se todos os elementos fora da diagonal forem não negativos. Um conceito importante na análise de sistemas dinâmicos é o de estabilidade assintótica, definido a seguir.

Definição 2.5. (BOYD et al., 1994). Um sistema linear invariante no tempo (LTI) $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é assintoticamente estável se para qualquer estado inicial $x(0)$, todas trajetórias $x(t)$ convergem assintoticamente para a origem, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (2.2)$$

Adicionalmente, o sistema LTI contínuo no tempo precisamente conhecido (2.1) é Hurwitz estável se, e somente se, as partes reais de todos os autovalores¹ do sistema forem negativas, isto é, $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, para $i = 1, \dots, n_x$. Nesse sentido, uma outra forma de se garantir a Hurwitz estabilidade do sistema, sem a necessidade de computar os autovalores da matriz dinâmica, é fazendo-se o uso da teoria de Lyapunov, ou seja, satisfazendo-se as condições apresentadas no lema seguinte.

Lema 2.1. O sistema positivo (2.1) é assintoticamente estável se, e somente se, existir uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva P tal que

$$A'P + PA \prec 0 \quad (2.3)$$

ou, equivalentemente,

$$PA' + AP \prec 0. \quad (2.4)$$

Note que a existência de uma matriz de Lyapunov diagonal definida satisfazendo (2.3) ou (2.4) também assegura propriedades de robustez com respeito a perturbações no estado $x(t)$, um resultado conhecido na literatura como D -estabilidade (KASZKUREWICZ; BHAYA, 1999; OLIVEIRA; PERES, 2005).

2.2 Cômputo da Norma \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ é um critério de desempenho adotado para atenuar efeitos causados por distúrbios externos. Considerando o sistema (2.1), a matriz de transferência de $w(t)$ para $y(t)$ é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.5)$$

¹ A notação $\lambda_i(A)$ é empregada para denotar o i -ésimo autovalor da matriz $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$.

e a norma \mathcal{H}_∞ é definida como

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{w \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (2.6)$$

com $\sigma_i(H(j\omega))$, $i = 1, \dots, \min(n_w, n_y)$ (valores singulares de $H(j\omega)$) dados por²

$$\sigma_i(H(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(H(j\omega)^* H(j\omega))} = \sqrt{\lambda_i(H(j\omega) H(j\omega)^*)}. \quad (2.7)$$

Em sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas, a norma \mathcal{H}_∞ é o máximo valor alcançado pelo diagrama de valores singulares. Considerando que $w(t)$ é um sinal de energia ($w(t) \in \mathcal{L}_2$), ou seja, é absolutamente integrável, a norma \mathcal{H}_∞ pode ser caracterizada pelo menor valor γ tal que³

$$\|y(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2. \quad (2.8)$$

Se (2.1) é estável (ou, equivalentemente, a matriz A é Hurwitz), um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ ($\|H(s)\|_\infty < \gamma$) também pode ser obtido por meio da função de Lyapunov $v(x(t)) = x(t)' P x(t)$, em que $P = P' \succ 0$ e $x(0) = 0$, tal que

$$\dot{v}(t) + y(t)' y(t) + \gamma^2 w(t)' w(t) < 0. \quad (2.9)$$

Levando-se em conta as equações de espaço de estados do sistema (2.1) obtém-se o seguinte lema de cômputo da norma \mathcal{H}_∞ , também conhecido como *bounded real lemma* (BOYD *et al.*, 1994).

Lema 2.2. (*Bounded Real Lemma*) O sistema (2.1) é estável e satisfaz $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se, e somente se, existir $P = P' \succ 0$, tal que a LMI abaixo seja satisfeita.

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & C^T & P B \\ C & -I & D \\ B^T P & D^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.10)$$

2.3 Definição do Problema de Controle Robusto

Considere o sistema linear incerto positivo contínuo no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + E(\alpha)w(t), \\ z(t) = C_z(\alpha)x(t) + D_z(\alpha)u(t) + E_z(\alpha)w(t), \\ y(t) = C_y(\alpha)x(t) + E_y(\alpha)w(t), \end{cases} \quad (2.11)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entradas, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada de ruído, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída controlada, e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saídas medidas.

² O símbolo sobrescrito * representa o complexo conjugado.

³ A notação $\|v(t)\|_2$ representa a norma \mathcal{L}_2 do sinal $v(t)$.

As matrizes do sistema (2.11) são politópicas, isto é, podem ser escritas como a combinação convexa de N vértices conhecidos, ou seja

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \quad \alpha \in \Lambda \quad (2.12)$$

sendo que $\alpha = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_N]'$ é um vetor de parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simplex unitário

$$\Lambda = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (2.13)$$

Esta dissertação aborda o problema de projeto de uma lei de controle robusta (independente de parâmetros) de realimentação estática de saída dada por

$$u(t) = Ky(t) \quad (2.14)$$

com $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$, para (2.11) tal que o sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha)x(t) + B_{cl}(\alpha)w(t), \\ z(t) = C_{cl}(\alpha)x(t) + D_{cl}(\alpha)w(t), \end{cases} \quad (2.15)$$

com

$$\begin{aligned} A_{cl}(\alpha) &= A(\alpha) + B(\alpha)KC_y(\alpha), \\ B_{cl}(\alpha) &= E(\alpha) + B(\alpha)KE_y(\alpha), \\ C_{cl}(\alpha) &= C_z(\alpha) + D_z(\alpha)KC_y(\alpha), \\ D_{cl}(\alpha) &= E_z(\alpha) + D_z(\alpha)KE_y(\alpha), \end{aligned} \quad (2.16)$$

seja assintoticamente estável e positivo $\forall \alpha \in \Lambda$. Uma condição suficiente para garantir a estabilidade assintótica do sistema incerto em malha fechada (2.15) é apresentada na seção seguinte.

2.3.1 Estabilidade Robusta

No caso de sistemas incertos (2.15), a fim de que a matriz $A_{cl}(\alpha)$ seja Hurwitz estável, a relação $\text{Re}(\lambda_i(A_{cl}(\alpha))) < 0$ deve ser satisfeita para todo $\alpha \in \Lambda$. Assim como no caso precisamente conhecido discutido na Seção 2.1, a Hurwitz estabilidade do sistema incerto $\dot{x}(t) = A_{cl}(\alpha)x(t)$ pode ser avaliada por meio da teoria de Lyapunov sem a necessidade de computar explicitamente os autovalores da matriz dinâmica para todo $\alpha \in \Lambda$. As condições de estabilidade robusta, nas quais estão baseadas as condições de síntese deste trabalho, são desenvolvidas a partir das LMIs dependentes de parâmetros apresentadas a seguir (BOYD *et al.*, 1994).

Lema 2.3. *O sistema (2.15) é assintoticamente estável para todo $\alpha \in \Lambda$ se, e somente se, existir $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$ tal que*

$$A_{cl}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A_{cl}(\alpha) \prec 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda. \quad (2.17)$$

A condição (2.17) deve ser avaliada para toda combinação convexa das matrizes dependentes de parâmetros envolvidas ($P(\alpha)$ e $A_{cl}(\alpha)$), para todo $\alpha \in \Lambda$. Ou seja, resolver (2.17) é um problema de dimensão infinita. Note que, *a priori*, não foi estabelecida nenhuma estrutura para a matriz de Lyapunov $P(\alpha)$. As ferramentas computacionais empregadas para a obtenção de um conjunto finito e programável de LMIs a partir de uma escolha particular para a estrutura de $P(\alpha)$ são discutidas na Seção 2.5.

2.3.2 Custo Garantido \mathcal{H}_∞

Além de tratar o problema de estabilidade robusta, ou seja, sintetizar controladores por realimentação estática de saída robustos para sistemas LTI incertos, pretende-se estender os resultados de projeto otimizando-se algum critério de desempenho. A norma \mathcal{H}_∞ é adotada nesta dissertação como o critério a ser minimizado, pois pode ser empregada para atenuar efeitos causados por distúrbios externos. Uma extensão do *bounded real lemma* (2.10) para o caso incerto é apresentada a seguir.

Lema 2.4. *O sistema incerto (2.15) é estável e γ é um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ se, e somente se, existe $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$ tal que a condição abaixo⁴ seja válida para todo $\alpha \in \Lambda$*

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A_{cl}(\alpha) & \star & \star \\ B_{cl}(\alpha)'P(\alpha) & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.18)$$

A partir da condição (2.18), multiplicando-se à esquerda e à direita por

$$\text{diag}(P^{-1}, I, I),$$

chamando $W(\alpha) = P^{-1}(\alpha)$ (também definida positiva), tem-se uma condição equivalente

$$\begin{bmatrix} W(\alpha)A_{cl}(\alpha)' + A_{cl}(\alpha)W(\alpha) & \star & \star \\ B_{cl}(\alpha)' & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha)W(\alpha) & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.19)$$

Com a utilização do Lema de Finsler e do Lema da Projeção (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001; PIPELEERS *et al.*, 2009; XIE, 2008), outras condições podem ser obtidas em termos de LMIs dependentes de parâmetros com variáveis de folga (ou multiplicadores) e escalares, como apresentado no próximo teorema.

⁴ O símbolo \star representa blocos simétricos em uma matriz quadrada.

Teorema 2.1. *O sistema positivo (2.15) é assintoticamente estável e $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se existirem matrizes $W(\alpha) = W(\alpha)' \succ 0$, $X(\alpha)$ e um escalar $\xi > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)X(\alpha) + X(\alpha)'A_{cl}(\alpha)' & \star & \star & \star \\ W(\alpha) + \xi X(\alpha)'A_{cl}(\alpha)' - X(\alpha) & -\xi(X(\alpha) + X(\alpha)') & \star & \star \\ C_{cl}(\alpha)X(\alpha) & \xi C_{cl}(\alpha)X(\alpha) & -\gamma I & \star \\ B_{cl}(\alpha)' & 0 & D_{cl}(\alpha)' & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.20)$$

No caso particular de controle por realimentação de estados (lei de controle $u(t) = Kx(t)$), os teoremas de cômputo de custo garantido podem ser estendidos para síntese de ganhos estabilizantes, trocando-se $A_{cl}(\alpha)$ por $A(\alpha) + B(\alpha)K$, $B_{cl}(\alpha)$ por $E(\alpha)$, $C_{cl}(\alpha)$ por $C_z(\alpha) + D_z(\alpha)K$ e $D_{cl}(\alpha)$ por $E_y(\alpha)$ nas condições (2.19) e (2.20), em que essas matrizes aparecem multiplicando à esquerda variáveis de decisão, impondo $W(\alpha) = W$ (constante) e fazendo a habitual mudança de variáveis $K = ZW^{-1}$ (BERNUSSOU *et al.*, 1989) em (2.19) e $K = ZX^{-1}$ em (2.20). Além disso, podem ser impostas condições adicionais que garantem a positividade do sistema em malha fechada. Por exemplo, uma extensão do Teorema 2.1 produz o seguinte resultado para o cômputo de um ganho de realimentação de estados K .

Teorema 2.2. *O sistema positivo (2.11) é estabilizável por um ganho de realimentação de estados $K = ZX^{-1}$ que garante um limitante superior γ para a norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada se existirem uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal definida positiva $W(\alpha)$, uma matriz diagonal X , uma matriz Z e um escalar $\xi > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X + B(\alpha)Z + X'A(\alpha)' + Z'B(\alpha)' & \star & \star & \star \\ W(\alpha) + \xi(A(\alpha)X + B(\alpha)Z)' - X & -\xi(X + X') & \star & \star \\ C_z(\alpha)X + D_z(\alpha)Z & \xi(C_z(\alpha)X + D_z(\alpha)Z) & -\gamma I & \star \\ E(\alpha) & 0 & E_z(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.21)$$

e, além disso, $A(\alpha) + B(\alpha)K$ for Metzler e $C_z(\alpha) + D_z(\alpha)K \geq 0$.

Note que, para que o sistema em malha fechada seja positivo, é necessário (adicionalmente ao exigido no problema de controle \mathcal{H}_∞ clássico) garantir que a matriz $A(\alpha) + B(\alpha)K$ seja Metzler e também que $C_z(\alpha) + D_z(\alpha)K \geq 0$. No caso de realimentação de saída, é preciso garantir que a matriz $A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)$ seja Metzler e também que $C_z(\alpha) + D_z(\alpha)KC_y(\alpha) \geq 0$.

Como foi discutido na introdução, embora condições de síntese de controle por realimentação de estados por meio de LMIs para sistemas positivos possam ser obtidas de maneira direta como feito nos teoremas anteriores, com mudança de variáveis e a exigência adicional de que a matriz de Lyapunov seja diagonal, o caso de controle por realimentação de saída tende a ser mais desafiador, sendo objeto de estudo desta dissertação.

2.4 Lemas Auxiliares

Nesta seção são apresentados os lemas necessários para poder construir e desenvolver as condições LMIs desta dissertação. Esses lemas permitem incluir variáveis adicionais aos teoremas ou eliminar produtos de variáveis, aumentando o grau de liberdade e podendo linearizar as condições propostas.

Lema 2.5. (*Lema de Finsler*). Considere $w \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $\text{rank}(B) < n$ e B^\perp uma base para o espaço nulo de B (isto é, $BB^\perp = 0$). Então, as seguintes condições são equivalentes:

1. $w'Qw, \forall w \neq 0 : Bw = 0$;
2. $B^{\perp'}QB^\perp \prec 0$;
3. $\exists \mu \in \mathbb{R} : Q - \mu B'B \prec 0$;
4. $\exists X \in \mathbb{R}^{n \times m} : Q + XB + B'X' \prec 0$.

Lema 2.6. (*Lema da Projeção*). Dados $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{r \times n}$, existe $X \in \mathbb{R}^{r \times m}$ tal que

$$Q + AX'B + B'XA' \prec 0 \quad (2.22)$$

se e somente se $A_\perp'QA_\perp \prec 0$ e $B_\perp'QB_\perp \prec 0$ com $AA_\perp = 0$, $BB_\perp = 0$

Note que, no caso particular $B = I$, obtém-se a equivalência do Lema da Projeção com os itens (2) e (4) do Lema de Finsler.

Lema 2.7. (*Complemento de Schur*). Sejam as matrizes $A = A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C = C' \in \mathbb{R}^{m \times m}$, então as seguintes desigualdades matriciais são equivalentes:

1. $\begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix} \succ 0$
2. $A \succ 0$ e $C - B'A^{-1}B \succ 0$
3. $C \succ 0$ e $A - BC^{-1}B' \succ 0$

Lema 2.8. (*Transformação de Congruência*). Duas matrizes simétricas $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são congruentes se existir $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular tal que $Q = T'RT$. Se Q e R são congruentes, então $Q \succ 0$ se e somente se $R \succ 0$.

2.5 Considerações Computacionais

Assim como mencionado na Seção 2.3.1, é necessário destacar que as condições propostas nesta dissertação são problemas de dimensão infinita, pois devem ser resolvidas para todo $\alpha \in \Lambda$. Para contornar esse obstáculo, utilizam-se as chamadas relaxações, que são condições suficientes na forma de LMIs construídas a partir da imposição de estruturas polinomiais homogêneas de grau fixo para as variáveis de otimização do problema (OLIVEIRA; PERES, 2007). Esse conjunto finito de LMIs pode ser gerado automaticamente pelo *toolbox* Robust LMI Parser (ROLMIP) (AGULHARI *et al.*, 2012b).

Finalmente, é válido mencionar que todas rotinas usadas nesta dissertação foram programadas em Matlab (R2014a) empregando os pacotes Yalmip (LÖFBERG, 2004) e ROLMIP (AGULHARI *et al.*, 2012b) e os resolvedores Mosek (ANDERSEN; ANDERSEN, 2000) e SeDuMi (STURM, 1999). Em particular, restrições de não negatividade dos elementos de uma matriz M são programadas de maneira automática no pacote Yalmip com o comando $M \geq 0$ para M não simétrica.

3 Estabilização de Sistemas Positivos

Neste capítulo são apresentados dois teoremas, em termos de dois conjuntos distintos de condições LMIs dependentes de parâmetros, para a síntese de controladores robustos por realimentação estática de saída (adaptável para realimentação de estados) para sistemas lineares politópicos ou para sistemas precisamente conhecidos positivos contínuos no tempo. Nas condições LMIs propostas a matriz dinâmica do sistema em malha fechada não multiplica nenhuma variável de decisão permitindo que o ganho de controle seja tratado diretamente como uma variável de otimização do problema. Sendo assim, o conservadorismo que existia nos outros métodos da literatura baseados em LMIs adaptados para síntese de controladores para sistemas contínuos positivos (imposição de estrutura diagonal na matriz de Lyapunov ou na matriz quadrada de recuperação do ganho) desaparece. Além disso, também são apresentados dois procedimentos iterativos que pretendem resolver de maneira eficiente o conjunto de condições LMIs dependentes de parâmetros apresentado em cada teorema. Como resultado, os métodos propostos podem trabalhar em um espaço de busca menos restrito, tornando-se em tese menos conservadores.

3.1 Primeira Abordagem

A primeira abordagem, que apresenta a vantagem de usar menos variáveis de decisão que a segunda técnica, é desenvolvida a partir do teorema apresentado a seguir.

Teorema 3.1. *(Est1) Para uma dada matriz simétrica definida positiva $P_0(\alpha)$ e um dado escalar positivo $\mu_0(\alpha)$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha)$, uma matriz K , e escalares $\mu(\alpha)$, δ e r tais que as seguintes condições sejam verificadas em todo domínio $\alpha \in \Lambda$*

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha)P_0(\alpha) - P_0(\alpha)P(\alpha) & \star \\ A_{cl}(\alpha) - rI + \mu_0(\alpha)P(\alpha) + \mu(\alpha)P_0(\alpha) & -2\mu(\alpha)\mu_0(\alpha)I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.1)$$

$$A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq 0, \quad (3.2)$$

com $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)KC_y(\alpha)$, então K é um ganho robusto de realimentação de saída tal que os autovalores de $A_{cl}(\alpha)$ têm parte real à esquerda de r e a positividade do sistema (2.11) em malha fechada é assegurada para todo $\alpha \in \Lambda$.

Prova. Primeiramente observe que a desigualdade (3.2) certifica a positividade em malha fechada do sistema (nenhum termo fora da diagonal é negativo), ou seja, $A(\alpha) + B(\alpha)KC_y(\alpha)$ é Metzler. Adicionalmente, note que (3.1) pode ser rescrita como

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' \prec 0 \quad (3.3)$$

com

$$\mathcal{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \star \\ (A_{cl}(\alpha) - rI) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) \\ \mu(\alpha)I \end{bmatrix} = -\mu(\alpha) \begin{bmatrix} \mu(\alpha)^{-1}P(\alpha) \\ -I \end{bmatrix} = -\mu(\alpha) \begin{bmatrix} \tilde{P}(\alpha) \\ -I \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} P_0(\alpha) & -\mu_0(\alpha)I \end{bmatrix} = \mu_0(\alpha) \begin{bmatrix} \mu_0(\alpha)^{-1}P_0(\alpha) & -I \end{bmatrix} = \mu_0(\alpha) \begin{bmatrix} \tilde{P}_0(\alpha) & -I \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\tilde{P}_0(\alpha) = \mu_0(\alpha)^{-1}P_0(\alpha), \quad \tilde{P}(\alpha) = \mu(\alpha)^{-1}P(\alpha). \quad (3.7)$$

Note ainda que o termo $-2\mu(\alpha)\mu_0(\alpha)I$ que aparece na diagonal da desigualdade (3.1) assegura que $\mu(\alpha) > 0$, $\forall \alpha \in \Lambda$ (uma vez que $\mu_0(\alpha)$ é positivo por hipótese), garantindo $\tilde{P}(\alpha) \succ 0$ e $\tilde{P}_0(\alpha) \succ 0$. Sabendo que

$$\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) = 0, \quad \mathcal{X}^\perp(\alpha)\mathcal{X}(\alpha) = 0 \quad (3.8)$$

tem-se

$$\mathcal{B}^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} I \\ \tilde{P}_0(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} I & \tilde{P}(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Aplicando uma transformação de congruência e o Lema de Finsler (Lema 2.5), as seguintes LMIs são equivalentes a (3.1)

$$\tilde{P}_0(\alpha)(A_{cl}(\alpha) - rI) + (A_{cl}(\alpha) - rI)'\tilde{P}_0(\alpha)' \prec 0, \quad (3.10)$$

$$\tilde{P}(\alpha)(A_{cl}(\alpha) - rI) + (A_{cl}(\alpha) - rI)'\tilde{P}(\alpha)' \prec 0. \quad (3.11)$$

Observe que (3.10) é obtida multiplicando-se (3.1) à esquerda por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ e à direita por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$, enquanto (3.11) é obtida multiplicando-se (3.1) à esquerda por $\mathcal{X}^\perp(\alpha)$ e à direita por $\mathcal{X}^\perp(\alpha)'$. As condições (3.10) e (3.11) certificam a estabilidade assintótica (ver Lema 2.3) do sistema com matriz dinâmica dada por $A(\alpha) + B(\alpha)KC_y(\alpha) - rI$. Isso significa que K é um ganho de realimentação de saídas que aloca a parte real dos autovalores do sistema (2.11) em malha fechada à esquerda de r . Então, se $r \leq 0$, K é um ganho robustamente estabilizante para (2.11). \square

Corolário 3.1. Para uma dada matriz $P_0(\alpha) = P_0(\alpha)' \succ 0$ e um dado escalar real $\mu_0(\alpha) > 0$, se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, uma matriz K , e escalares $\mu(\alpha)$, δ e r tais que (3.1)-(3.2) sejam verificadas em todo domínio $\alpha \in \Lambda$ com $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K$,

então K é um ganho robusto de realimentação de estados que assegura a positividade e que os autovalores de $A_{cl}(\alpha)$ para o sistema (2.11) com $C_y(\alpha) = I$ têm parte real à esquerda de r para todo $\alpha \in \Lambda$.

3.2 Segunda Abordagem

O segundo teorema também trata o ganho de controle diretamente como uma variável de otimização do problema sem multiplicar nenhuma outra variável, como a matriz de Lyapunov ou variáveis de folga. A principal diferença com relação ao método anterior vem da inclusão de variáveis extras no problema, o que pode tornar os resultados menos conservadores, superando, por exemplo, em termos estatísticos, o Teorema 3.1 e demais condições de projeto presentes na literatura, ao preço de um esforço computacional mais elevado.

Teorema 3.2. (Est2) Para matrizes dadas $Y_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, se existirem matrizes dependentes de parâmetros $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, escalares r , δ e uma matriz K tais que (3.2) e

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' \prec 0 \quad (3.12)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Lambda$, em que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) \end{bmatrix}, \\ \mathcal{X}(\alpha) &= \begin{bmatrix} X_1(\alpha)' & X_2(\alpha)' & X_3(\alpha)' \end{bmatrix}', \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha)' & (A_{cl}(\alpha)' - rI) \\ P(\alpha) & 0 & -I \\ (A_{cl}(\alpha) - rI) & -I & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)KC_y(\alpha)$, então K é um ganho robusto de realimentação de saída tal que os autovalores de $A_{cl}(\alpha)$ têm parte real à esquerda de r e a positividade do sistema (2.11) em malha fechada é assegurada para todo $\alpha \in \Lambda$.

Prova. Note que (3.2) garante a positividade do sistema em malha fechada. Adicionalmente, se (3.12) é factível, o bloco (3,3) de (3.12), dado por $X_3Y_3 + Y_3'X_3' < 0$, garante que $Y_3(\alpha)$ tem posto completo e, portanto, $\mathcal{B}(\alpha)$ pode ser reescrita como $\mathcal{B}(\alpha) = Y_3(\alpha) \begin{bmatrix} -F(\alpha) & -G(\alpha) & I \end{bmatrix}$. Em seguida, usando a equivalência do Lema de Finsler (Lema 2.5), ou seja, pré- e pós-multiplicando (3.12) respectivamente por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ e $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ em que

$$\mathcal{B}^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ F(\alpha)' & G(\alpha)' \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} F(\alpha)A_{cl}(\alpha) + A_{cl}(\alpha)'F(\alpha)' & \star \\ P(\alpha) - F(\alpha) + G(\alpha)(A_{cl}(\alpha) - rI) & -G(\alpha) - G(\alpha)' \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.14)$$

Multiplicando-se (3.14) à esquerda por $\Gamma(\alpha)'$ e à direita por $\Gamma(\alpha)$, com

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} I & (A_{cl}(\alpha) - rI)' \end{bmatrix}' \quad (3.15)$$

tem-se

$$(A_{cl}(\alpha) - rI)'P(\alpha) + P(\alpha)(A_{cl}(\alpha) - rI) \prec 0 \quad (3.16)$$

que assegura a estabilidade assintótica (ver Lema 2.3) do sistema com matriz dinâmica dada por $A_{cl}(\alpha) - rI$. Isso significa que K é um ganho de realimentação de saídas que aloca a parte real dos autovalores do sistema (2.11) em malha fechada à esquerda de r . Então, se $r \leq 0$, K é um ganho robustamente estabilizante para (2.11). \square

Corolário 3.2. Para uma dada matriz $\mathcal{B}(\alpha)$, se existirem matrizes $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, uma matriz K , e escalares δ e r tais que (3.2)-(3.12) sejam verificadas em todo domínio $\alpha \in \Lambda$ com $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)K$, então K é um ganho robusto de realimentação de estados que assegura a positividade e que os autovalores de $A_{cl}(\alpha)$ para o sistema (2.11) com $C_y(\alpha) = I$ têm parte real à esquerda de r para todo $\alpha \in \Lambda$.

3.3 Descrição dos Algoritmos

Note que para resolver os Teoremas 3.1 e 3.2 é necessário fornecer valores para algumas das variáveis do problema ($\mu_0(\alpha)$ e $P_0(\alpha)$ para o Teorema 3.1 e $Y_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$ no caso do Teorema 3.2), evitando assim que (3.1) e (3.12) constituam desigualdades matriciais bilineares (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities* — BMIs). Para que as escolhas particulares das variáveis não sejam imposições muito restritivas, foi adicionada uma relaxação de estabilidade (introdução de r) aos teoremas 3.1 e 3.2. Antes de apresentar os algoritmos que visam minimizar r e fornecer soluções estabilizantes para o sistema (2.11) a partir de um dos teoremas apresentados anteriormente, são propostas escolhas particulares das condições iniciais que garantem a existência de soluções factíveis para o Teorema 3.1 e o Teorema 3.2.

Teorema 3.3. A escolha $P_0(\alpha) = I$ e $\mu_0(\alpha) = 1$ garante a existência de uma solução factível para o Teorema 3.1.

Prova. Com $P_0(\alpha) = I$ e $\mu_0(\alpha) = 1$, a desigualdade (3.1) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \star \\ A_{cl}(\alpha) - rI + P(\alpha) + \mu(\alpha)I & -2\mu(\alpha)I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.17)$$

Escolhendo uma estrutura diagonal para a matriz de Lyapunov, $P(\alpha) = \rho I$, com $\rho > 0$, e aplicando-se um complemento de Schur, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2\mu(\alpha)I \end{bmatrix}}_{T_1} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{M}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\rho I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(\alpha) \end{bmatrix}'}_{T_2} \prec 0, \quad (3.18)$$

em que $\mathcal{M}(\alpha) = A_{cl}(\alpha) - rI + \mu(\alpha)I + \rho I$. Para $\mu(\alpha) > 0$, $T_1 \prec 0$ e se $\rho \rightarrow \infty$, então $T_2 \rightarrow 0$. Isso significa que para a condição inicial proposta existem pelo menos um $\mu(\alpha) > 0$ e $P(\alpha) = \rho I$ com $\rho > 0$ suficientemente grande tais que (3.1) seja factível, independentemente do ganho K . A escolha $K = 0$ garante que (3.2) também é satisfeita, pois $A(\alpha)$ é por hipótese Metzler. \square

Teorema 3.4. A escolha $\mathcal{B}_0(\alpha) = \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & -I \end{bmatrix}$ garante a existência de uma solução factível para o Teorema 3.2.

Prova. Note que (3.12) pode ser reescrita como¹

$$\begin{bmatrix} 0 & P(\alpha)' & (A_{cl}(\alpha) - rI)' \\ P(\alpha) & 0 & -I \\ (A_{cl}(\alpha) - rI) & -I & 0 \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \\ X_3(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & Y_3(\alpha) \end{bmatrix} \right) \prec 0. \quad (3.19)$$

Com $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} I & I & -I \end{bmatrix}$, e escolhendo-se $\mathcal{X}(\alpha) = -r/2\mathcal{B}_0'$, (3.19) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -rI & P(\alpha)' - rI & A_{cl}(\alpha)' \\ P(\alpha) - rI & -rI & -I + rI \\ A_{cl}(\alpha) & -I + rI & -rI \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.20)$$

Adicionalmente, para a escolha particular $P(\alpha) = rI$, a desigualdade resultante é

$$\begin{bmatrix} -rI & 0 & A_{cl}(\alpha)' \\ 0 & -rI & (r-1)I \\ A_{cl}(\alpha) & (r-1)I & -rI \end{bmatrix} \prec 0. \quad (3.21)$$

Aplicando o complemento de Schur em (3.21), tem-se

$$\begin{bmatrix} -rI \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha) & (r-1)I \end{bmatrix} (-rI)^{-1} \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)' \\ (r-1)I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (3.22)$$

que é equivalente a

$$-rI + r^{-1}A_{cl}(\alpha)A_{cl}(\alpha)' + r^{-1}(r-1)^2I \prec 0. \quad (3.23)$$

Supondo $r > 0$ e multiplicando-se (3.23) por r dos dois lados da desigualdade, tem-se

$$(-2r+1)I + A_{cl}(\alpha)A_{cl}(\alpha)' \prec 0, \quad (3.24)$$

a qual pode ser satisfeita com qualquer r tal que $(2r-1)$ seja maior que o raio espectral de $A_{cl}(\alpha)A_{cl}(\alpha)'$, $\forall \alpha \in \Lambda$. Finalmente, a escolha $K = 0$ garante que (3.2) também é satisfeita, pois $A(\alpha)$ é por hipótese Metzler. \square

¹ $\text{He}(M)$ representa a soma da matriz M com sua transposta: $\text{He}(M) = M + M'$.

3.3.1 Versão 1 do Procedimento Iterativo (v1): Duas Fases

Para resolver tanto o Teorema 3.1 como o Teorema 3.2 de maneira eficiente, o Algoritmo 1 foi proposto. Este algoritmo pode ser dividido em duas fases, que são executadas a cada iteração.

Primeiramente, são inicializadas as variáveis $P_0(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha)$ no caso do Teorema 3.1 e $Y_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, no caso do Teorema 3.2 com os valores definidos pelo projetista (sugere-se $\mu_0 = 1$ e $P_0(\alpha) = I$ no caso do primeiro teorema, e $\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} I & I & -I \end{bmatrix}$ no caso do segundo teorema, pois sempre produzem solução factível, como mostrado nos teoremas 3.3 e 3.4). Em seguida, inicia-se a Fase 1 do Algoritmo 1, que busca uma solução factível para o teorema usado. Em caso de factibilidade, os valores das variáveis encontradas (r , K e δ) são armazenados e o algoritmo segue para a Fase 2. Caso contrário, o algoritmo se encerra sem fornecer uma solução estabilizante (a não factibilidade pode ocorrer para condições iniciais diferentes das propostas no teoremas 3.3 e 3.4).

Na Fase 2, é realizado um teste de sinal na variável r , pois r é um limitante superior para os autovalores do sistema em malha fechada. Se $r \leq 0$, os autovalores do sistema em malha fechada estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo, indicando que K é um ganho robusto estabilizante e o algoritmo pode ser terminado.

Por outro lado, se $r > 0$, não é possível garantir a estabilidade do sistema. No entanto, uma vez que r é apenas um *limitante superior* para a parte real dos autovalores do sistema em malha fechada, os autovalores podem ter parte real tanto positiva ou nula quanto negativa. Por esse motivo, quando $r > 0$, além da condição de síntese resolvida na Fase 1, são realizados testes de análise de estabilidade e positividade do sistema em malha fechada para que, caso a resposta seja factível, o algoritmo possa ser interrompido indicando ter encontrado uma solução estabilizante. Para reduzir o esforço computacional desse teste *a posteriori*, é feito primeiramente um teste rápido, sequencial, verificando os autovalores dos vértices do politopo ($\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0$, $j \neq i$) em malha fechada. Se todos forem negativos (o que é uma condição necessária para a estabilidade do politopo), testa-se uma condição LMI de análise de estabilidade e outra de positividade do sistema e, se os resultados confirmarem a estabilidade e positividade, o valor de K salvo na Fase 1 é um ganho estabilizante. Caso contrário, se alguma parte real dos autovalores for positiva, ou a condição de análise de estabilidade ou positividade não forem verificadas, os valores de $P(\alpha)$ e $\mu(\alpha)$ no caso do Teorema 3.1 ($\mathcal{B}(\alpha)$ no caso do Teorema 3.2) encontrados pelo algoritmo nessa iteração, serão os novos valores de $P_0(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha)$ ($\mathcal{X}(\alpha)$ no caso do Teorema 3.2) da próxima iteração.

Note que a factibilidade está garantida ($P_0(\alpha)$ e $P(\alpha)$, assim como $\mu_0(\alpha)$ e $\mu(\alpha)$, são intercambiáveis no Teorema 3.1, e $\mathcal{X}(\alpha)$ e $\mathcal{B}(\alpha)$ no caso do Teorema 3.2), repetindo-se, no pior dos casos, a solução anterior. Com esta estratégia garante-se que o valor de r sempre diminui ou permanece igual ao valor da iteração anterior, mas nunca aumenta.

O procedimento continua até achar um ganho que garanta simultaneamente a positividade e estabilidade assintótica do sistema em malha fechada ($r \leq 0$, ou solução factível no teste de análise da Fase 2), ou quando o número máximo de iterações (it_{max}) for atingido.

Algoritmo 1: Versão 1 do procedimento iterativo (v1): Duas Fases

```

1  $K_{sol} \leftarrow \emptyset, K_{aux} \leftarrow \emptyset, r_k \leftarrow \emptyset, \delta_k \leftarrow \emptyset, k \leftarrow 0$ 
2 Inicialização das condições iniciais:
3 No Teorema 3.1  $P_0(\alpha) \leftarrow I_n$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow 1$ ;
4 No Teorema 3.2  $\mathcal{B}_0(\alpha) \leftarrow \begin{bmatrix} I & I & -I \end{bmatrix}$ ;
5 enquanto  $k < it_{max}$  faça
6    $k = k + 1$ ;
7   minimize  $r$  sujeito a Teorema 3.1 ou Teorema 3.2
8   se for factível então
9      $r_k \leftarrow r$ ;
10     $K_{aux} \leftarrow K$ ;
11     $\delta_k \leftarrow \delta$ ;
12     $A_{cl}(\alpha) \leftarrow A(\alpha) + B(\alpha)K_{aux}C_y(\alpha)$ ;
13  senão
14    | Abandone (não há solução para as condições iniciais escolhidas);
15  fim
16  se  $r \leq 0$  então
17    |  $K_{sol} \leftarrow K_{aux}$ ;
18  senão
19    | se  $A_{cli} + \delta_k I \geq 0$  e  $\max_{i=1,\dots,N} (Re(\lambda(A_{cli}))) < 0$  então
20      | | Teste de Estabilidade Quadrática com  $A_{cl}(\alpha)$ ;
21      | | se for factível então
22      | | |  $K_{sol} \leftarrow K_{aux}$ ;
23      | | fim
24    | fim
25  fim
26  Atualização das variáveis:
27  No Teorema 3.1  $P_0(\alpha) \leftarrow P(\alpha)$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow \mu(\alpha)$ ;
28  No Teorema 3.2  $\mathcal{B}(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}(\alpha)'$ ;
29 fim

```

3.3.2 Versão 2 do Procedimento Iterativo (v2): Uma Única Fase

Outra estratégia iterativa pode ser empregada para sintetizar controladores robustamente estabilizantes a partir dos teoremas 3.1 e 3.2. O algoritmo alternativo é muito similar ao descrito anteriormente (Algoritmo 1), porém elimina-se a Fase 2, na qual tanto a estabilidade quanto a positividade do sistema em malha fechada são testadas *a posteriori*, mesmo quando $r > 0$ a cada iteração.

Esta versão alternativa apresenta um único critério de parada: $r \leq 0$. A vantagem deste algoritmo de uma única fase é resolver um único bloco de LMIs dependentes de parâmetros (associadas à síntese, eliminando blocos associados à análise de estabilidade), o que reduz o custo computacional de cada iteração. No entanto, a quantidade de iterações necessárias para obter uma solução estabilizante pode ser maior.

Algoritmo 2: Versão 2 do procedimento iterativo (v2): Uma Única Fase

```

1   $K_{sol} \leftarrow \emptyset, K_{aux} \leftarrow \emptyset, r_k \leftarrow \emptyset, \delta_k \leftarrow \emptyset, k \leftarrow 0$ 
2  Inicialização das condições iniciais:
3  No Teorema 3.1  $P_0(\alpha) \leftarrow I_n$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow 1$ ;
4  No Teorema 3.2  $\mathcal{B}_0(\alpha) \leftarrow \begin{bmatrix} I & I & -I \end{bmatrix}$ ;
5  enquanto  $k < it_{max}$  faça
6       $k = k + 1$ ;
7      minimize  $r$  sujeito a Teorema 3.1 ou Teorema 3.2
8      se for factível então
9           $r_k \leftarrow r$ ;
10          $K_{aux} \leftarrow K$ ;
11          $\delta_k \leftarrow \delta$ ;
12          $A_{cl}(\alpha) \leftarrow A(\alpha) + B(\alpha)K_{aux}C_y(\alpha)$ ;
13     senão
14         Abandone (não há solução para as condições iniciais escolhidas);
15     fim
16     se  $r \leq 0$  então
17          $K_{sol} \leftarrow K_{aux}$ ;
18     fim
19     Atualização das variáveis:
20     No Teorema 3.1  $P_0(\alpha) \leftarrow P(\alpha)$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow \mu(\alpha)$ ;
21     No Teorema 3.2  $\mathcal{B}(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}(\alpha)'$ ;
22 fim

```

3.4 Resultados Numéricos

Esta seção apresenta² um experimento numérico para avaliar o desempenho estatístico das abordagens desenvolvidas nesta dissertação. São sintetizados controladores robustos que asseguram a estabilidade e positividade de sistemas incertos contínuos em malha fechada. Outro objetivo desta seção é comparar os métodos de síntese propostos nesta dissertação com as técnicas da literatura apresentadas em [Bhattacharyya e Patra \(2018\)](#), BP18, e [Feng et al. \(2011\)](#), FLLS11. Deve-se destacar que, como as condições da literatura não tratam o caso incerto, para a análise comparativa investiga-se o controle de sistemas precisamente conhecidos usando exemplos retirados da literatura ou uma base de sistemas sem incertezas.

3.4.1 Estabilização Robusta (Teste Estatístico)

Pretende-se estabilizar uma base composta por 1000 sistemas incertos (com incertezas politópicas) de $N = 2, 3, 4, 5$ vértices, com $n_x = 2, 3, 4, 5$ estados e $n_u = n_y = 1, 2, 3, 4$ entradas (n_u) e saídas (n_y). Todos os sistemas da base são positivos e têm solução comprovada (garantidamente estabilizáveis) mas não são quadraticamente estabilizáveis, ou seja, não é possível encontrar solução factível usando uma única matriz de Lyapunov (independente de parâmetros).

Para a criação dos sistemas da base de dados, foram gerados randomicamente os vértices das matrizes incertas \hat{A} e B e matrizes K , de maneira a garantir que a matriz \hat{A} fosse estável e Metzler e as matrizes B e K fossem positivas (todos elementos não negativos). Em seguida, é realizado um teste de estabilidade. Se $\hat{A} - BK$ for instável, salva-se na base de dados os vértices da matriz dinâmica $A = \hat{A} - BK$ (instável). Dessa forma, a matriz K é um ganho de realimentação de estados garantidamente estabilizante, pois $A + BK = (\hat{A} - BK) + BK = \hat{A}$, que foi gerada inicialmente como estável. Adicionalmente, uma vez que B e K possuem todos elementos não negativos, a positividade do sistema em malha fechada também é assegurada.

São apresentados resultados estatísticos em termos da porcentagem de sistemas estabilizados pelo método proposto (Sol(%)), o número médio de iterações (It.) e o tempo médio gasto (T(s)) para resolver cada caso.

Nas tabelas 1, 2, 3 e 4, são apresentados os resultados obtidos pelos diferentes algoritmos com $it_{max} = 13$ e com dois resolvidores diferentes: SeDuMi e Mosek. No caso dos algoritmos baseados no Teorema 3.1 (Est1v1 e Est1v2, como discutido na Seção 3.3.2), duas estruturas distintas foram impostas à matriz de Lyapunov $P(\alpha)$: diagonal (D) ou simétrica (S). Para o caso dos algoritmos baseados no Teorema 3.2 (Est2v1 e Est2v2), além das duas estruturas para a matriz de Lyapunov $P(\alpha)$, foram testadas quatro estruturas

² As bases de dados usadas nos experimentos podem ser encontradas em www.dt.fee.unicamp.br/~cfmorais/basesdedadosartigo.zip.

para a variável de folga $X_3(\alpha)$: escalar vezes identidade (E), diagonal (D), simétrica (S) ou cheia (C), enquanto as variáveis $X_1(\alpha)$ e $X_2(\alpha)$ foram fixadas com estrutura cheia. Em relação aos graus das variáveis, escolheu-se grau um para as matrizes $P(\alpha)$ e $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$.

Tabela 1 – Resultados obtidos com o Algoritmo 1 baseado no Teorema 3.1 (Est1v1) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e T(s) o tempo médio em segundos para resolver cada caso.

$P(\alpha)$	Resolvedores	Sol(%)	It.	T(s)
D	SeDuMi	77,8	4,6	1,05
	Mosek	98,7	1,4	0,22
S	SeDuMi	97,8	2,5	0,85
	Mosek	99,3	1,37	0,25

Tabela 2 – Resultados obtidos com o Algoritmo 2 baseado no Teorema 3.1 (Est1v2) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e T(s) o tempo médio em segundos para resolver cada caso.

$P(\alpha)$	Resolvedores	Sol(%)	It.	T(s)
D	SeDuMi	25,9	10,9	2,09
	Mosek	27	10,7	0,11
S	SeDuMi	94,4	3,7	1,04
	Mosek	92,1	3,5	0,04

Tabela 3 – Resultados obtidos com o Algoritmo 1 baseado no Teorema 3.2 (Est2v1) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e T(s) o tempo médio em segundos para resolver cada caso.

$P(\alpha)$	$X(\alpha)$	Resolvedores	Sol(%)	It.	T(s)
D	E	SeDuMi	90,9	4,9	2,57
		Mosek	99,3	2,8	1,77
	D	SeDuMi	93,3	4,7	2,62
		Mosek	99,1	2,8	1,89
	S	SeDuMi	95,8	4,7	2,72
		Mosek	98,7	3	2,14
	C	SeDuMi	46,7	7,3	4,42
		Mosek	98,9	3,2	2,82
S	E	SeDuMi	98,9	2,55	1,81
		Mosek	98,9	1,79	2,30
	D	SeDuMi	99	2,5	1,89
		Mosek	99	1,75	2,37
	S	SeDuMi	99,6	2,4	1,87
		Mosek	98,7	1,76	2,66
	C	SeDuMi	80,6	4,15	3,26
		Mosek	98,8	1,85	3,11

Tabela 4 – Resultados obtidos com o Algoritmo 2 baseado no Teorema 3.2 (Est2v2) para estabilização robusta (teste estatístico). Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e T(s) o tempo médio em segundos para resolver cada caso.

$P(\alpha)$	$X(\alpha)$	Resolvedores	Sol(%)	It.	T(s)
D	E	SeDuMi	82	6,9	2,54
		Mosek	80,7	6,7	0,22
	D	SeDuMi	85,3	6,6	2,49
		Mosek	83,7	6,3	0,21
	S	SeDuMi	90,7	6,1	2,45
		Mosek	87,6	6,1	0,24
	C	SeDuMi	22,2	9,5	3,92
		Mosek	84,8	6,7	0,31
S	E	SeDuMi	97,2	3,3	1,09
		Mosek	94,1	3,1	0,10
	D	SeDuMi	98	3,2	1,07
		Mosek	95,2	3,1	0,10
	S	SeDuMi	98,8	3	1,04
		Mosek	95,5	3	0,11
	C	SeDuMi	63,3	6,2	2,62
		Mosek	96,5	3,5	0,16

Pode-se observar que os algoritmos de duas fases, tanto o Est1v1, baseado no

Teorema 3.1 (Tabela 1) quanto o Est2v1, baseado no Teorema 3.2 (Tabela 3), obtêm melhores resultados quando comparados aos algoritmos de uma fase, Est1v2 e Est2v2 (tabelas 2 e 4). Outro dado importante retirado das tabelas é que o número médio de iterações requeridas pelos algoritmos de duas fases (v1) para produzir soluções estabilizantes é menor, mas o tempo computacional gasto pode ser maior devido à necessidade de serem resolvidos dois blocos de LMIs dependentes de parâmetros (chamados de fases: síntese e análise de estabilidade) a cada iteração. Observa-se também que, independente do algoritmo avaliado, o uso de uma matriz de Lyapunov simétrica fornece resultados melhores que a imposição de uma estrutura diagonal. No caso particular dos algoritmos baseados no Teorema 3.2 (Est2v1 e Est2v2), uma conclusão semelhante pode ser feita no que se refere à variável de folga, ou seja, um maior número de variáveis escalares, com $X_3(\alpha)$ cheia ou simétrica em vez de diagonal ou escalar, geralmente implica em um melhor resultado estatístico. Apesar disso, destaca-se que utilizar mais variáveis não assegura necessariamente melhores resultados estatísticos quando se utiliza um procedimento iterativo. O que é possível garantir é que na primeira iteração o resultado baseado em uma LMI dependente de parâmetros com matrizes de estrutura cheia inclui resultados obtidos com a estrutura simétrica, que por sua vez inclui a estrutura diagonal e finalmente a escalar como casos particulares. No entanto, como o procedimento iterativo busca soluções em um espaço não convexo, o resultado final em termos de qual estrutura é melhor não pode ser inferido *a priori*.

Como esperado, o tempo médio de cômputo de solução está diretamente relacionado ao número de iterações necessárias para se chegar a uma conclusão, sendo que, se a quantidade de iterações necessárias diminui, o tempo também é menor. É possível verificar também que o resolvedor Mosek requer um número menor de iterações, resultando em tempos computacionais bem menores.

Finalmente, observe que para a mesma estrutura (diagonal ou simétrica) nas variáveis matriciais $P(\alpha)$ e $X_3(\alpha)$ dos teoremas 3.1 e 3.2, os resultados estatísticos obtidos pelo algoritmo baseado no Teorema 3.2 são no geral melhores do que os obtidos pelo baseado no Teorema 3.1 (especialmente considerando o método de uma única fase (v2)). No entanto, essa melhoria vem ao custo de um aumento no tempo de cômputo das soluções decorrente do maior número de variáveis empregadas. Nesse sentido, a Tabela 5 apresenta outro dado importante na síntese de controladores usando LMIs dependentes de parâmetros: o número de variáveis escalares utilizadas no problema de otimização para diferentes combinações de número de estados e vértices considerando sistemas SISO (do inglês, *Single Input Single Output*). Note que conforme a ordem dos sistemas e o número de vértices aumenta, o número de variáveis cresce rapidamente. Pensando na aplicação do método em problemas de grandes dimensões, o emprego de matrizes diagonais ou escalares permite reduzir drasticamente o número de variáveis. Por isso, escolher entre as diferentes estruturas de $P(\alpha)$ e $X_{1,2,3}(\alpha)$ pode ser de grande importância.

Tabela 5 – Número de variáveis em função das diferentes estruturas e dimensões do problema. Sendo que n é o número de estados, N o número de vértices. As estruturas diagonal (D), simétrica (S), escalar (E) e cheia (C) são aplicadas nas variáveis de decisão $P(\alpha)$ (Teorema 3.1) e $P(\alpha)$ e $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$ (Teorema 3.2).

n	N	Teorema 3.1		Teorema 3.2							
		P D	P S	P D				P S			
				X_3 E	X_3 D	X_3 S	X_3 C	X_3 E	X_3 D	X_3 S	X_3 C
2	2	12	14	28	30	32	34	30	32	34	36
	3	15	18	39	42	45	48	42	45	48	51
	4	18	22	50	54	58	62	54	58	62	66
	5	21	26	61	66	71	76	66	71	76	81
3	2	16	22	52	56	62	68	58	62	68	74
	3	20	29	74	80	89	98	83	89	98	107
	4	24	36	96	104	116	128	108	116	128	140
	5	28	43	118	128	143	158	133	143	158	173
4	2	20	32	84	90	102	114	96	102	114	126
	3	25	43	121	130	148	166	139	148	166	184
	4	30	54	158	170	194	218	182	194	218	242
	5	35	65	195	210	240	270	225	240	270	300
5	2	24	44	124	132	152	172	144	152	172	192
	3	30	60	180	192	222	252	210	222	252	282
	4	36	76	236	252	292	332	276	292	332	372
	5	42	92	292	312	362	412	342	362	412	462

3.4.2 Exemplos da Literatura

Esta seção tem o objetivo de comparar os algoritmos propostos com os métodos apresentados em BP18. Em BP18, são propostos dois algoritmos (chamados de BP18-1 e BP18-2) para estabilizar sistemas precisamente conhecidos lineares invariantes no tempo positivos com múltiplas entradas e múltiplas saídas por realimentação de saída. Os quatro primeiros exemplos (Ex 1, 2, 3, 4) apresentados em BP18 consistem na estabilização de sistemas precisamente conhecidos sem a imposição de estruturas ao ganho. O quinto exemplo de BP18 propõe a estabilização do sistema investigado no primeiro exemplo (Ex 1) impondo quatro diferentes restrições de estrutura ao ganho K (Ex 5.1, 5.2, 5.3, 5.4). O Algoritmo BP18-1 é capaz de prover soluções estabilizantes apenas para três dos quatro primeiros exemplos, e para nenhum dos exemplos com restrições. Por outro lado, o BP18-2 provê soluções estabilizantes para todos os exemplos propostos. Nenhum dos demais métodos com os quais o autor comparou (FLLS11, [Shen e Lam \(2015\)](#), [Ait Rami \(2011\)](#), [Wang e Huang \(2013\)](#)) foi capaz de fornecer soluções factíveis para todos os exemplos. No entanto, os métodos iterativos propostos nesta dissertação são capazes de prover ganhos de realimentação de saída para todos os exemplos de BP18.

Nesse sentido, para avaliar adequadamente o conservadorismo dos métodos, considere o projeto de um controlador por realimentação estática de saída para os sistemas dos exemplos de BP18 substituindo a matriz dinâmica A por $A + \sigma I$. O objetivo é verificar qual dos métodos é capaz de garantir soluções para uma faixa mais ampla de valores (positivos) de σ . Para este experimento foram testados os algoritmos baseados no Teorema 3.1 (Est1v1 e Est1v2, e estrutura simétrica para a matriz $P(\alpha)$) e os algoritmos baseados no Teorema 3.2 (Est2v1 e Est2v2, estrutura simétrica para as matrizes $P(\alpha)$ e $X_3(\alpha)$, estrutura cheia para as matrizes $X_1(\alpha)$ e $X_2(\alpha)$) propostos nesta dissertação, os dois algoritmos propostos por BP18 (BP18-1 e BP18-2), e o algoritmo proposto em FLLS11. Todos os algoritmos foram testados com o resolvedor SeDuMi, pois o SeDuMi fornece os melhores resultados para os métodos da literatura. O número máximo de iterações imposto para todos os algoritmos é $it_{max} = 20$. A Figura 1 apresenta os resultados para os quatro primeiros exemplos enquanto a Figura 2 mostra os resultados dos exemplos com restrições na estrutura no ganho K . Note que os métodos propostos nesta dissertação são melhores em praticamente todos os exemplos, nunca produzindo resultados piores que os dos algoritmos comparados. Além disso, em termos de conservadorismo, os algoritmos propostos nesta dissertação têm desempenho praticamente idêntico, estabilizando sistemas com matrizes dinâmicas associadas aos mesmos valores máximos de σ para todos exemplos testados.

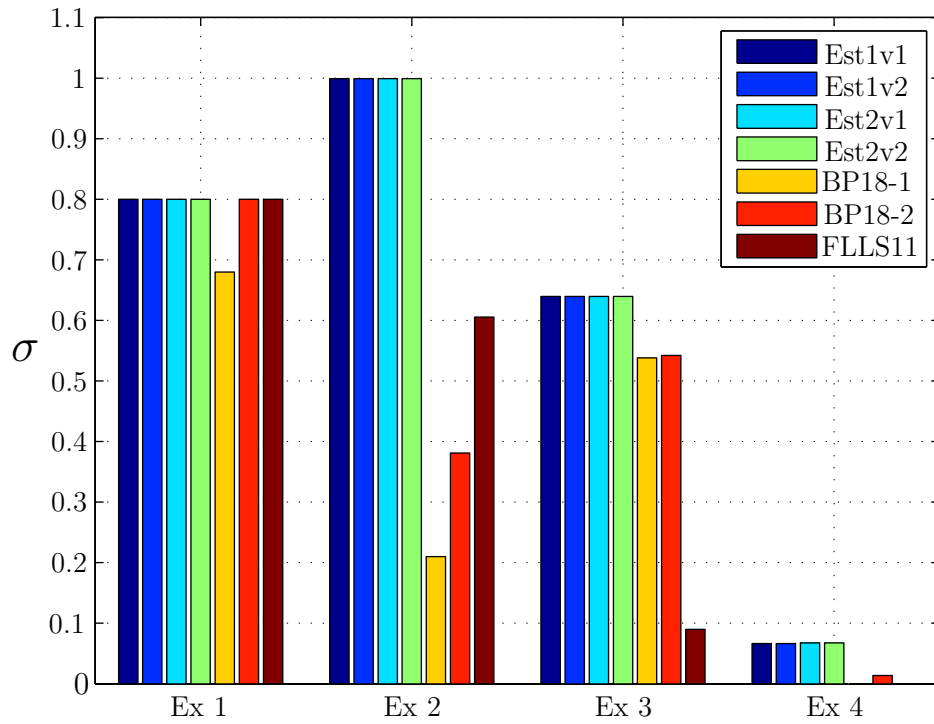


Figura 1 – Faixa estabilizável de σ nos exemplos 1 a 4 de BP18.

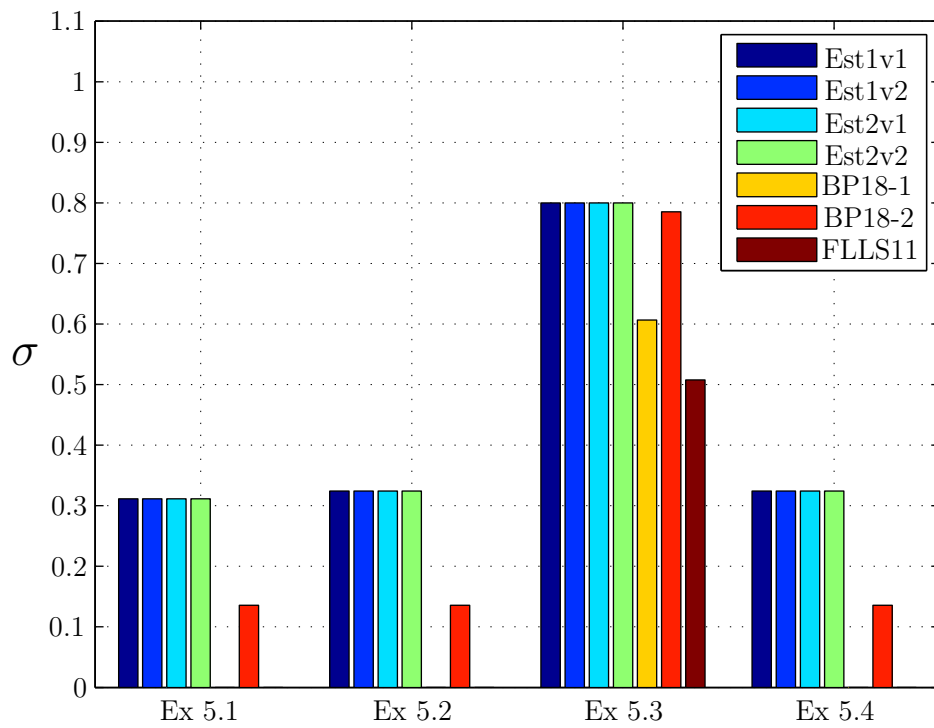


Figura 2 – Faixa estabilizável de σ nos exemplos 5.1 a 5.4 de BP18 (ganho com estrutura).

3.4.3 Estabilização de Sistemas sem Incerteza (Teste Estatístico)

Pretende-se comparar o desempenho estatístico dos métodos da literatura BP18 e FLLS11 com as abordagens propostas nesta dissertação na estabilização de uma base composta por 1000 sistemas *precisamente conhecidos* positivos garantidamente estabilizáveis com $n_x = 2,3,4,5$ estados e $n_u = n_y = 1,2,3,4$ entradas (n_u) e saídas (n_y). Para ser o mais justo possível na comparação, todos os algoritmos foram testados com os resolvidores SeDuMi e Mosek e um máximo de 13 iterações foi imposto a todos os métodos.

Os algoritmos baseados no Teorema 3.1 foram testados com $P(\alpha)$ simétrica e os algoritmos baseados no Teorema 3.2 foram testados com $X_{1,2}(\alpha)$ cheias e $X_3(\alpha)$ e $P(\alpha)$ simétricas. A Tabela 6 apresenta as porcentagens de sistemas estabilizados (Sol(%)), o número médio de iterações (It.) e o tempo médio de cômputo exigido pelos algoritmos (T(s)). Os algoritmos propostos nesta dissertação obtiveram resultados bem superiores aos demais métodos da literatura, mesmo empregando apenas uma única fase (a fase de síntese, sem usar as condições de análise como critério de parada). Usando os métodos propostos, foram produzidos ganhos estabilizantes para no mínimo 79% dos sistemas da base, enquanto os métodos da literatura conseguiram produzir solução para no máximo 41.3% dos sistemas. Outro dado interessante é o número de iterações: os algoritmos propostos, por exemplo, precisam de menos de cinco iterações em média para resolver a maioria dos problemas, quantidade bem menor que as requeridas por BP18-1 e BP18-2, os quais obtêm cerca de menos da metade de soluções estabilizantes que os algoritmo Est1v1 e Est2v1. Observe ainda que o algoritmo FLLS11, embora consiga resolver o problema de estabilização mais rapidamente, requerendo menos iterações, encontra solução para apenas 5,5% dos sistemas testados usando o resolvidor SeDuMi ou ainda menos (1%) quando o resolvidor empregado é o Mosek. Finalmente, note que, com exceção do algoritmo baseados no Teorema 3.2 com duas fases (Est2v1), o tempo de cômputo dos métodos propostos é similar (ou menor) ao tempo de cômputo dos métodos de BP18 (que produzem os melhores resultados dentre as condições da literatura testadas).

Tabela 6 – Resultados obtidos para estabilização de base de sistemas sem incertezas. Sol(%) representa o percentual de sistemas estabilizados, It. o número médio de iterações e T(s) o tempo médio em segundos para resolver cada caso.

Métodos	SeDuMi			Mosek		
	Sol(%)	It.	T(s)	Sol(%)	It.	T(s)
Est1v1 (2 Fases)	94,3	2,1	0,43	93,4	1,8	0,07
Est1v2 (1 Fase)	79,2	4,9	0,73	82,1	3,2	0,01
Est2v1 (2 Fases)	96,0	2,0	0,69	94,6	1,8	0,18
Est2v2 (1 Fase)	88,1	4,0	0,73	88,7	2,8	0,02
BP18-1	21,6	10,2	2,02	5,5	12,3	0,15
BP18-2	41,3	9,5	0,61	10,2	12,1	0,05
FLLS11	5,5	1,5	0,13	1,0	1,1	0,01

3.4.4 Simulação Temporal

Para ilustrar o comportamento dinâmico de um sistema positivo realimentado, considere o Exemplo 4 de BP18, em que a matriz dinâmica A é substituída por $A + \sigma I$, com $\sigma = 0.05$. Como é mostrado na Figura 1, com esse valor de σ , o sistema é instável em malha aberta. Além disso, para essa escolha de σ , nenhum dos métodos da literatura consegue prover um ganho estabilizante. Por outro lado, utilizando os métodos propostos nesta dissertação, podem ser computados ganhos de realimentação de saída que estabilizam e mantêm a positividade do sistema. Os ganhos estabilizantes obtidos pelas quatro diferentes estratégias propostas neste trabalho (Est1v1, Est1v2, Est2v1, Est2v2) são apresentados a seguir.

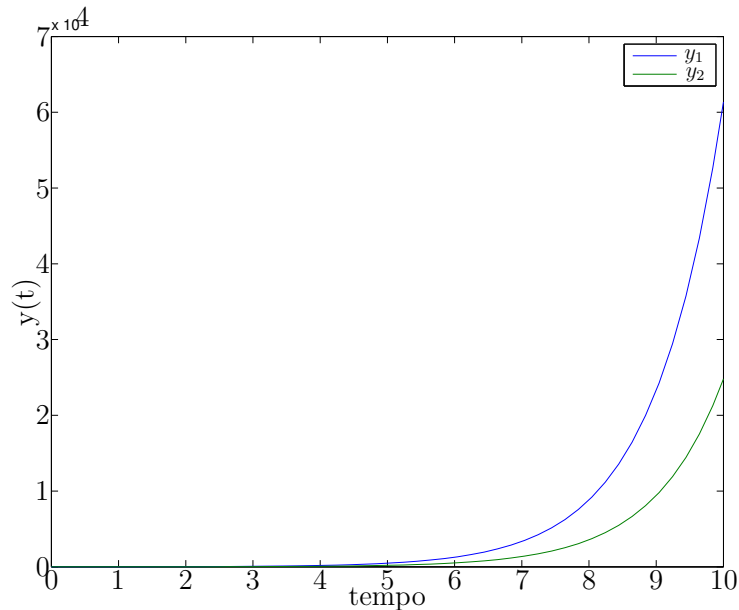


Figura 3 – Evolução temporal das saídas do sistema em malha aberta.

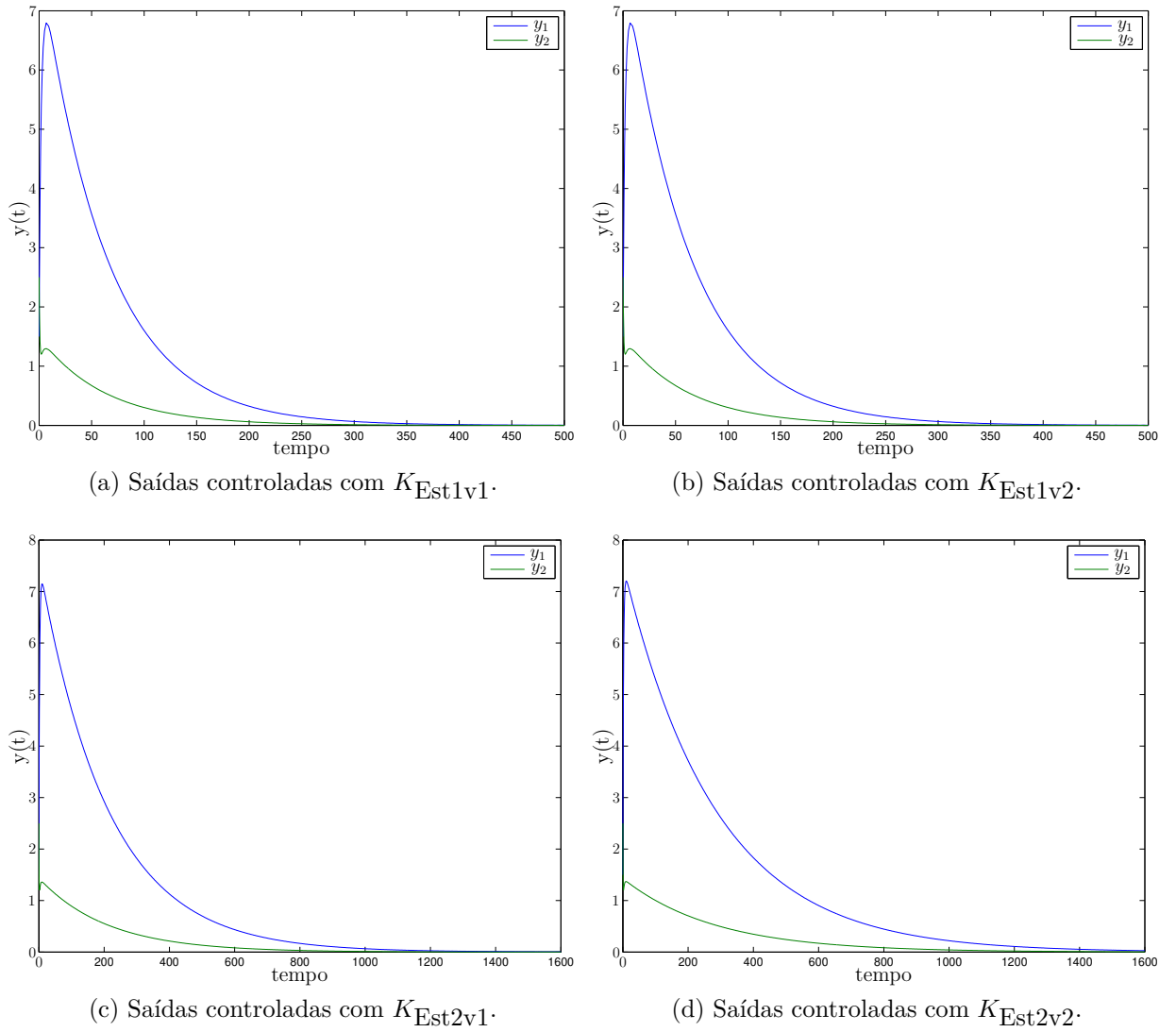


Figura 4 – Valores das saídas do sistema.

$$K_{\text{Est1v1}} = \begin{bmatrix} -1.0010 & 0.0937 \\ 0.4005 & -0.2967 \end{bmatrix},$$

$$K_{\text{Est1v2}} = \begin{bmatrix} -1.0010 & 0.0937 \\ 0.4005 & -0.2967 \end{bmatrix},$$

$$K_{\text{Est2v1}} = \begin{bmatrix} -1.0050 & 0.0708 \\ 0.4028 & -0.2838 \end{bmatrix},$$

$$K_{\text{Est2v2}} = \begin{bmatrix} -1.0054 & 0.0670 \\ 0.4031 & -0.2818 \end{bmatrix}.$$

A Figura 4 mostra o comportamento dinâmico das variáveis de saída ($y(t)$) do sistema em malha fechada com os ganhos obtidos pelos quatro métodos propostos nesta dissertação. Pode-se notar que os métodos baseados no Teorema 3.1 (Est1v1 e Est1v2)

fazem as trajetórias convergir mais rapidamente para zero, quando comparadas com as trajetórias de saída obtidas com os controladores resultantes do Teorema 3.2 (Est2v1 e Est2v2) .

4 Controle \mathcal{H}_∞ de Sistemas Positivos

Técnicas iterativas similares às desenvolvidas no capítulo anterior, no contexto de estabilização robusta, são aplicadas neste capítulo para a síntese de controladores robustos por realimentação de saída com critério de desempenho \mathcal{H}_∞ para sistemas LTI positivos politópicos contínuos no tempo. A seguir, são propostos dois teoremas para controle \mathcal{H}_∞ e são discutidos procedimentos iterativos que buscam resolver de maneira eficiente o conjunto de condições LMIs dependentes de parâmetros apresentado em cada teorema. No final do capítulo, a eficiência dos métodos propostos é ilustrada por meio de exemplos numéricos.

4.1 Primeira Abordagem

Nesta seção são apresentadas condições LMIs dependentes de parâmetros suficientes para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída de sistemas politópicos positivos contínuos no tempo. A principal vantagem com relação à segunda abordagem, apresentada na seção seguinte, é o reduzido número de variáveis necessárias para produzir uma solução.

Teorema 4.1. (*Hinf1*) Para uma dada matriz simétrica definida positiva $P_0(\alpha)$ e um dado escalar real positivo $\mu_0(\alpha)$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P(\alpha)$, uma matriz K , e escalares $\mu(\alpha)$, δ e γ tais que as seguintes condições sejam verificadas em todo domínio $\alpha \in \Lambda$

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' \prec 0, \quad (4.1)$$

$$A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq 0, \quad B_{cl}(\alpha) \geq 0, \quad C_{cl}(\alpha) \geq 0, \quad D_{cl}(\alpha) \geq 0, \quad (4.2)$$

em que

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} P_0(\alpha) & -\mu_0(\alpha)I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & \mu(\alpha)I & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad (4.3)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star \\ A_{cl}(\alpha) & 0 & \star & \star \\ 0 & B_{cl}(\alpha)' & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

com $A_{cl}(\alpha)$, $B_{cl}(\alpha)$, $C_{cl}(\alpha)$ e $D_{cl}(\alpha)$ descritas em (2.16), então γ é um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema (2.15) e K é um ganho robusto de realimentação estática de saída, o qual assegura simultaneamente a positividade e estabilidade assintótica do sistema (2.11) em malha fechada para todo $\alpha \in \Lambda$.

Prova. Primeiramente, note que (4.2) garante a positividade do sistema (2.15) em malha fechada. Por outro lado, sabendo que $\mathcal{B}(\alpha)\mathcal{B}^\perp(\alpha) = 0$ e $\mathcal{X}^\perp(\alpha)\mathcal{X}(\alpha) = 0$ com $\mathcal{B}(\alpha)$ e $\mathcal{X}(\alpha)$ dadas em (4.3), considere

$$\mathcal{B}(\alpha)^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \mu_0(\alpha)^{-1}P_0(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} I & \mu(\alpha)^{-1}P(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Fazendo as seguintes mudanças de variáveis $\tilde{P}(\alpha) = \mu(\alpha)^{-1}P(\alpha)$ e $\tilde{P}_0(\alpha) = \mu_0(\alpha)^{-1}P_0(\alpha)$, pré e pós-multiplicando (4.1) respectivamente por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ e $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$, ou por $\mathcal{X}^\perp(\alpha)$ e $\mathcal{X}^\perp(\alpha)'$ têm-se

$$\begin{bmatrix} \text{He}(\tilde{P}_0(\alpha)A_{cl}(\alpha)) & \star & \star \\ B_{cl}(\alpha)'\tilde{P}_0(\alpha) & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad \begin{bmatrix} \text{He}(\tilde{P}(\alpha)A_{cl}(\alpha)) & \star & \star \\ B_{cl}(\alpha)'\tilde{P}(\alpha) & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.6)$$

que recuperam o bounded real lemma dado em (2.18). \square

4.2 Segunda Abordagem

Nesta seção são apresentadas condições LMIs dependentes de parâmetros suficientes para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de saída de sistemas politópicos positivos contínuos no tempo. A principal diferença desse método com relação à primeira abordagem é a introdução de variáveis de folga, o que pode tornar o resultado menos conservador, ao preço do aumento da complexidade.

Teorema 4.2. (Hinf2) Para matrizes dadas $Y_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, se existirem matrizes dependentes de parâmetros $P(\alpha) = P(\alpha)' \succ 0$, $X_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, escalares γ , δ e uma matriz K tais que (4.2) e

$$\mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)' \prec 0 \quad (4.7)$$

sejam válidas para todo $\alpha \in \Lambda$, em que

$$\mathcal{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & 0 & 0 & Y_3(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X}(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha)' & X_2(\alpha)' & 0 & 0 & X_3(\alpha)' \end{bmatrix}', \quad (4.8)$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star & \star & \star \\ P(\alpha) & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I & \star \\ A_{cl}(\alpha) & -I & B_{cl}(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

com $A_{cl}(\alpha)$, $B_{cl}(\alpha)$, $C_{cl}(\alpha)$ e $D_{cl}(\alpha)$ descritas em (2.16), então γ é um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema (2.15) e K é um ganho robusto de realimentação estática de saída, o qual assegura simultaneamente a positividade e estabilidade assintótica do sistema (2.11) em malha fechada para todo $\alpha \in \Lambda$.

Prova. Primeiramente, note que (4.2) garante a positividade do sistema (2.15) em malha fechada. Adicionalmente, se (4.7) é factível, $Y_3(\alpha)$ tem posto completo e, portanto, $\mathcal{B}(\alpha)$ pode ser reescrita como

$$\mathcal{B}(\alpha) = Y_3(\alpha) \begin{bmatrix} -F(\alpha)' & -G(\alpha)' & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Em seguida, usando a equivalência do Lema de Finsler (Lema 2.5), ou seja, pre- e pós-multiplicando (4.7) respectivamente por $\mathcal{B}^\perp(\alpha)'$ e $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$ com

$$\mathcal{B}^\perp(\alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ F(\alpha)' & G(\alpha)' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} F(\alpha)A_{cl}(\alpha) + A_{cl}(\alpha)'F(\alpha)' & \star & \star & \star \\ P(\alpha) + G(\alpha)A_{cl}(\alpha) - F(\alpha)' & -G(\alpha) - G(\alpha)' & \star & \star \\ B_{cl}(\alpha)'F(\alpha)' & B_{cl}(\alpha)'G(\alpha)' & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.12)$$

Multiplicando (4.12) à esquerda por $N(\alpha)'$ e à direita por

$$N(\alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{cl}(\alpha) & B_{cl}(\alpha) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

obtem-se o bounded real lemma dado em (2.18). \square

4.3 Descrição dos Algoritmos

Observe que para resolver os teoremas 4.1 e 4.2 é necessário que o projetista forneça os valores de algumas variáveis do problema ($P_0(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha)$ no caso do Teorema 4.1 e $Y_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$ no caso do Teorema 4.2) para evitar que (4.1) e (4.7) constituam BMIs. No entanto, determinar escolhas que garantem a existência de uma solução factível para os teoremas não é uma tarefa simples. Uma estratégia que facilita esse trabalho foi adotada em (FELIPE, 2017) e no Capítulo 3 desta dissertação: a introdução de relaxações.

No caso particular de estabilização, a relaxação consiste em resolver o problema de síntese substituindo-se $A_{cl}(\alpha)$ por $A_{cl}(\alpha) - rI$, o que implica em assegurar que a parte real do autovalor mais à direita no plano complexo é limitada por r , sendo negativa se $r \leq 0$ (Hurwitz estabilidade), mas podendo ser positiva ou nula se $r > 0$. Sendo assim, assegurar a estabilidade de $A_{cl}(\alpha) - rI$ é menos restritivo que garantir a estabilidade de $A_{cl}(\alpha)$, relaxando a condição de projeto. Desse modo, o primeiro passo para a síntese dos controladores \mathcal{H}_∞ é determinar condições iniciais que garantam a existência de soluções factíveis para os teoremas 4.1 e 4.2 com o auxílio das relaxações, conforme demonstrado nos teoremas seguintes.

Teorema 4.3. *A escolha $P_0(\alpha) = I$ e $\mu_0(\alpha) = 1$ garante a existência de uma solução factível para o Teorema 4.1 com $A_{cl}(\alpha)$ substituído por $A_{cl}(\alpha) - rI$ e um γ o suficientemente grande.*

Prova. Com $P_0(\alpha) = I$, $\mu_0(\alpha) = 1$ e $A_{cl}(\alpha) = A_{cl}(\alpha) - rI$, a desigualdade (4.1) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \star & \star & \star \\ A_{cl}(\alpha) - rI + \mu(\alpha)I + P(\alpha) & -2\mu(\alpha)I & \star & \star \\ 0 & B_{cl}(\alpha)' & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4.14)$$

Aplicando-se um complemento de Schur, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2P(\alpha) & \star \\ A_{cl}(\alpha) - rI + \mu(\alpha)I + P(\alpha) & -2\mu(\alpha)I \end{bmatrix}}_{T_1} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & B_{cl}(\alpha)' \\ C_{cl}(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma I & \star \\ D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & B_{cl}(\alpha)' \\ C_{cl}(\alpha) & 0 \end{bmatrix}'}_{T_2} \prec 0, \quad (4.15)$$

Observe que se γ for o suficientemente grande, $T_2 \rightarrow 0$ e (4.15) tende a $T_1 \prec 0$. Por outro lado, assim como feito na prova do Teorema 3.3, escolhendo-se $P(\alpha) = \rho I$ com $\rho > 0$ e aplicando-se um complemento de Schur em $T_1 \prec 0$, tem-se

$$\underbrace{[-2\mu(\alpha)I]}_{R_1} - \underbrace{\mathcal{M}(\alpha) (-2\rho I)^{-1} \mathcal{M}(\alpha)'}_{R_2} \prec 0, \quad (4.16)$$

em que $\mathcal{M}(\alpha) = A_{cl}(\alpha) - rI + \mu(\alpha)I + \rho I$. Note que para um ρ suficientemente grande, $R_2 \rightarrow 0$ e se $\mu(\alpha) > 0$, $R_1 \prec 0$ implicando que (4.16) é satisfeita.

Portanto, isso significa que para a condição inicial proposta existem pelo menos um $\mu(\alpha) > 0$ e $P(\alpha) = \rho I$ com $\rho > 0$ e $\gamma > 0$ suficientemente grandes tais que (4.1) seja factível, independentemente do ganho K . A escolha $K = 0$ garante que (4.2) também é

satisfeita, pois $A(\alpha)$ é por hipótese Metzler, e $E(\alpha)$, $C_z(\alpha)$ e $E_z(\alpha)$ são, por hipótese, não negativas. \square

Teorema 4.4. A escolha $\mathcal{B}_0(\alpha) = \begin{bmatrix} Y_1(\alpha) & Y_2(\alpha) & 0 & 0 & Y_3(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$ garante a existência de uma solução factível para o Teorema 4.2 com $A_{cl}(\alpha)$ substituído por $A_{cl}(\alpha) - rI$ e um γ suficientemente grande.

Prova. Primeiramente, é importante mencionar que, como mostrado em (FELIPE, 2017), $\mathcal{B}(\alpha)$ e $\mathcal{X}(\alpha)$ são intercambiáveis uma vez que $\text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) = \text{He}(\mathcal{B}(\alpha)'\mathcal{X}(\alpha)')$. Isso significa que todos valores de $\mathcal{X}(\alpha)'$ são escolhas válidas para $\mathcal{B}(\alpha)$ e vice-versa. Assim, assumindo $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_0(\alpha) = \begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$, $A_{cl}(\alpha) = A_{cl}(\alpha) - rI$ e $\mathcal{X}(\alpha) = -(r/2)\mathcal{B}_0(\alpha)'$, trocando a terceira e quarta e, em seguida, a terceira e quinta colunas e linhas de (4.7), tem-se

$$\begin{bmatrix} -rI & \star & \star & \star & \star \\ P(\alpha) - rI & -rI & \star & \star & \star \\ A_{cl}(\alpha) & (r-1)I & -rI & \star & \star \\ 0 & 0 & B_{cl}(\alpha) & -\gamma I & \star \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & 0 & D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.17)$$

Aplicando um complemento de Schur em (4.17), obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -rI & \star & \star \\ P(\alpha) - rI & -rI & \star \\ A_{cl}(\alpha) & (r-1)I & -rI \end{bmatrix}}_{T_1} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_{cl}(\alpha)' \\ 0 & 0 \\ B_{cl}(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma I & \star \\ D_{cl}(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{cl}(\alpha)' \\ C_{cl}(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_2} \prec 0. \quad (4.18)$$

Com a escolha de um γ o suficientemente grande, T_2 tende para zero fazendo que $T_2 \rightarrow 0$ e (4.18) tende a $T_1 \prec 0$. Adicionalmente, para a escolha particular $P(\alpha) = rI$, a desigualdade resultante é

$$\begin{bmatrix} -rI & \star & \star \\ 0 & -rI & \star \\ A_{cl}(\alpha) & (r-1)I & -rI \end{bmatrix} \prec 0. \quad (4.19)$$

Aplicando o complemento de Schur em (4.19), tem-se

$$-rI - \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha) & (r-1)I \end{bmatrix} (-rI)^{-1} \begin{bmatrix} A_{cl}(\alpha)' \\ (r-1)I \end{bmatrix} \prec 0,$$

que é equivalente a

$$-rI + r^{-1}A_{cl}(\alpha)A_{cl}(\alpha)' + r^{-1}(r-1)^2I \prec 0. \quad (4.20)$$

Supondo $r > 0$ e multiplicando-se (4.20) de ambos os lados por r , obtém-se

$$(-2r+1)I + A_{cl}(\alpha)A_{cl}(\alpha)' \prec 0,$$

que pode ser satisfeita para qualquer r tal que $(2r-1)$ seja maior que o raio espectral de $A_{cl}(\alpha)A_{cl}(\alpha)'$, $\forall \alpha \in \Lambda$. Isso significa que para a condição inicial proposta existem pelo menos $\mathcal{X}(\alpha) = -(r/2)\mathcal{B}_0(\alpha)'$, $P(\alpha) = rI$ e variáveis r e γ suficientemente grandes tais que (4.7) seja factível, independentemente do ganho K . A escolha $K = 0$ garante que (4.2) também é satisfeita, pois $A(\alpha)$ é por hipótese Metzler, e $E(\alpha)$, $C_z(\alpha)$ e $E_z(\alpha)$ são, por hipótese, não negativas. \square

Após serem empregadas as relaxações e serem definidas as condições iniciais que garantidamente produzem soluções factíveis para os teoremas 4.1 e 4.3, foram investigadas diferentes versões de procedimentos iterativos para a síntese de controladores por realimentação de saída com desempenho \mathcal{H}_∞ . Em cada uma dessas versões foram tomados caminhos e estratégias de otimização diferentes com a finalidade de verificar e investigar quais obtêm melhor resultado. Cada um dos procedimentos iterativos pode ser empregado para resolver ambos os teoremas. As duas versões do algoritmo usadas no exemplo numérico apresentado no final do capítulo são descritas a seguir.

4.3.1 Versão 1 do Procedimento Iterativo (v1): Três Fases

Neste algoritmo, foram introduzidas duas relaxações distintas. Além da relaxação anteriormente mencionada aplicada aos autovalores do sistema em malha fechada para facilitar a estabilização (substituição de $A_{cl}(\alpha)$ por $A_{cl}(\alpha) - rI$), utiliza-se outra relaxação nas condições que testam a positividade do sistema. Essa relaxação consiste em substituir a restrição de que as matrizes $A_{cl}(\alpha) + \delta I$, $B_{cl}(\alpha)$, $C_{cl}(\alpha)$ e $D_{cl}(\alpha)$ sejam não negativas ≥ 0 por $\geq q$. Assim, se $q < 0$ a produção de uma solução factível para o problema é facilitada (condição relaxada). O algoritmo pode ser dividido em três fases ou etapas, cada uma responsável pela otimização de um parâmetro diferente do problema. Todas essas fases são alocadas dentro de um laço no qual o programa atualiza as condições iniciais ($P_0(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha)$ no Teorema 4.1 e $\mathcal{B}_0(\alpha)$ no Teorema 4.2) com o transposto das variáveis de folga resultantes de cada iteração ($P(\alpha)$ e $\mu(\alpha)$ no Teorema 4.1 e $\mathcal{X}(\alpha)$ no Teorema 4.2) o que garante que o resultado da iteração seguinte nunca será pior que o da iteração anterior. O procedimento iterativo que resolve o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) é descrito a seguir.

Fase 1: Após aplicar as relaxações de estabilidade e positividade no teorema, para um certo valor de γ suficientemente grande e uma condição inicial dada no Teo-

rema 4.3 (Teorema 4.4), resolva o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) minimizando r e maximizando q (usando pesos diferentes para cada uma das variáveis de otimização). Atualize o vetor $\mathcal{B}(\alpha)$ com as variáveis resultantes da iteração atual ($P_0(\alpha) = P(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha) = \mu(\alpha)$ no Teorema 4.1 e $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{X}(\alpha)'$ no Teorema 4.2). Repita esse procedimento enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$ a Hurwitz estabilidade de $A_{cl}(\alpha)$ é assegurada e o algoritmo passa para a Fase 2.

Fase 2: Para o mesmo valor de γ suficientemente grande usado na Fase 1, mantenha a relaxação de positividade e elimine a restrição de estabilidade fazendo $r = 0$ ou $A_{cl}(\alpha) - rI \leftarrow A_{cl}(\alpha)$ e resolva o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) maximizando q . Atualize o vetor $\mathcal{B}(\alpha)$ com as variáveis resultantes da iteração atual ($P_0(\alpha) = P(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha) = \mu(\alpha)$ no Teorema 4.1 e $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{X}(\alpha)'$ no Teorema 4.2). Repita esse procedimento até que $p \geq 0$, o que implica que a não negatividade do sistema em malha fechada é garantida e o algoritmo pode passar para a Fase 3.

Fase 3: Remova ambas relaxações ($r = q = 0$) e converta o custo garantido γ em variável de otimização do problema. Resolva o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) minimizando γ e atualize $\mathcal{B}(\alpha)$ enquanto $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| < tol$, em que m é uma determinada iteração e tol é uma tolerância pré-especificada pelo projetista.

Algoritmo 3: VERSÃO 1 DO PROCEDIMENTO ITERATIVO (V1): TRÊS FASES

```

1 Função ( $A, B, B_w, C_z, D_{zu}, D_{zw}, C_y, E_y(\alpha), tol, it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\gamma_0 \leftarrow 10^2$ ,  $it \leftarrow 0$ ,  $fase \leftarrow 1$ ;
3   Inicialização das condições iniciais:
4   No Teorema 4.1  $P_0(\alpha) \leftarrow I_n$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow 1$ ;
5   No Teorema 4.2  $\mathcal{B}_0(\alpha) \leftarrow \begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$ ;
6   enquanto  $it < it_{max}$  &  $|\gamma_{it} - \gamma_{it-1}| \geq tol$  faça
7      $it \leftarrow it + 1$ ;  $\bar{A} \leftarrow A_{cl}(\alpha) - rI$ ;
8     se  $fase=1$  então
9       minimize  $r$  e maximize  $q$  sujeito a  $\mathcal{Q}(\alpha, \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0$ ,
10         $P(\alpha) \succ 0$ ,  $A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq q$ ,  $B_{cl}(\alpha) \geq q$ ,  $C_{cl}(\alpha) \geq q$ ,  $D_{cl}(\alpha) \geq q$ ;
11      se factível &  $r \leq 0$  então
12         $\bar{A} \leftarrow A_{cl}(\alpha(k))$ ;
13         $fase \leftarrow 2$ ;
14      se não se  $fase=2$  então
15        maximize  $q$  sujeito a
16         $\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0$ ,  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq q$ ,  $B_{cl}(\alpha) \geq q$ ,
17         $C_{cl}(\alpha) \geq q$ ,  $D_{cl}(\alpha) \geq q$ ;
18      se factível &  $q \geq 0$  então
19         $fase \leftarrow 3$ ;
20      se  $fase=3$  então
21        minimize  $\gamma$  sujeito a
22         $\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0$ ,  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq 0$ ,  $B_{cl}(\alpha) \geq 0$ ,
23         $C_{cl}(\alpha) \geq 0$ ,  $D_{cl}(\alpha) \geq 0$ ;
24      se factível então
25        retorna( $\gamma_{it}, A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$ );
26      se não se  $fase=3$  então
27        retorna( $\gamma_{it}, A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$ );
28      se não se  $fase=1$  então
29        retorna( $\gamma_{it}, A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$ );
30    fim
31 fim

```

4.3.2 Versão 2 do Procedimento Iterativo (v2): Duas Fases

Este procedimento iterativo é muito similar ao descrito anteriormente. A principal diferença é a eliminação da relaxação nas condições que testam a positividade do sistema, ou seja, o parâmetro q é eliminado das LMIs dependentes de parâmetros. Também é eliminada a Fase 2, na qual o parâmetro q é maximizado. O procedimento iterativo que resolve o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) é descrito a seguir.

Fase 1: Após aplicar a relaxação de estabilidade, para um certo valor de γ suficientemente grande e uma condição inicial dada no Teorema 4.3 (Teorema 4.4), resolva o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) minimizando única e exclusivamente r . Atualize o vetor $\mathcal{B}(\alpha)$ com as variáveis resultantes da iteração atual ($P_0(\alpha) = P(\alpha)$ e $\mu_0(\alpha) = \mu(\alpha)$ no Teorema 4.1 e $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{X}(\alpha)'$ no Teorema 4.2). Repita esse procedimento enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$ a Hurwitz estabilidade de $A_{cl}(\alpha)$ é assegurada e o algoritmo passa para a Fase 2.

Fase 2: A relaxação nos autovalores do sistema em malha fechada é eliminada ($r = 0$) e o custo garantido γ passa a ser variável de otimização do problema. Resolva o Teorema 4.1 (Teorema 4.2) minimizando γ e atualize $\mathcal{B}(\alpha)$ enquanto $|\gamma_m - \gamma_{m-1}| < tol$, em que m é uma determinada iteração e tol é uma tolerância pré-especificada pelo projetista.

Algoritmo 4: VERSÃO 2 DO PROCEDIMENTO ITERATIVO (v2): DUAS FASES

```

1 Função ( $A, B, Bw, Cz, Dzu, Dzw, Cy, Ey(\alpha), tol, it_{max}$ )
2   Inicialização de  $\gamma_0 \leftarrow 10^2$ ,  $it \leftarrow 0$ ,  $fase \leftarrow 1$ ;
3   Inicialização das condições iniciais:
4   No Teorema 4.1  $P_0(\alpha) \leftarrow I_n$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow 1$ ;
5   No Teorema 4.2  $\mathcal{B}_0(\alpha) \leftarrow \begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$ ;
6   enquanto  $it < it_{max}$  &  $|\gamma_{it} - \gamma_{it-1}| \geq tol$  faça
7      $it \leftarrow it + 1$ ;  $\bar{A} = A_{cl}(\alpha) - rI$ ;
8     se  $fase=1$  então
9       minimize  $r$  sujeito a  $\mathcal{Q}(\alpha, \bar{A}) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0$ ,  $P(\alpha) \succ 0$ ,
10         $A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq 0$ ,  $B_{cl}(\alpha) \geq 0$ ,  $C_{cl}(\alpha) \geq 0$ ,  $D_{cl}(\alpha) \geq 0$ ;
11       se factível &  $r \leq 0$  então
12          $\bar{A} = A_{cl}(\alpha(k))$ ;
13          $fase \leftarrow 2$ ;
14       fim
15     se  $fase=2$  então
16       minimize  $\gamma$  sujeito a
17        $\mathcal{Q}(\alpha) + \text{He}(\mathcal{X}(\alpha)\mathcal{B}(\alpha)) \prec 0$ ,  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $A_{cl}(\alpha) + \delta I \geq 0$ ,  $B_{cl}(\alpha) \geq 0$ ,
18        $C_{cl}(\alpha) \geq 0$ ,  $D_{cl}(\alpha) \geq 0$ ;
19       se factível então
20         retorna  $(\gamma_{it}, A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl})$ ;
21       fim
22     fim
23   Atualização das variáveis:
24   No Teorema 4.1  $P_0(\alpha) \leftarrow P(\alpha)$  e  $\mu_0(\alpha) \leftarrow \mu(\alpha)$ ;
25   No Teorema 4.2  $\mathcal{B}(\alpha) \leftarrow \mathcal{X}(\alpha)'$ ;
26 fim

```

4.3.3 Outros Procedimentos Iterativos Testados

A seguir são apresentadas outras estratégias iterativas testadas para resolução dos Teorema 4.1 e 4.2, as quais mostraram-se mais conservadoras que os algoritmos apresentados na seção anterior.

4.3.3.1 Procedimento Iterativo Alternativo 1: Uma Fase com Bisseção Externa

Para minimizar o custo garantido, esta estratégia realiza uma bisseção em γ fora do procedimento iterativo. Sendo assim, para cada novo valor dado de $\gamma = (\gamma_{max} +$

$\gamma_{min})/2$) a inicialização de $\mathcal{B}(\alpha)$ utilizada é a apresentada nos teoremas 4.1 e 4.2. Testa-se a factibilidade das condições LMIs dependentes de parâmetros considerando a relaxação de estabilidade porém sem a relaxação de positividade, minimizando r e atualizando $\mathcal{B}(\alpha)$ enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$ tanto a estabilidade quanto a positividade são garantidas. Finalmente, as LMIs dependentes de parâmetros são testadas uma última vez sem a relaxação de estabilidade para garantir que γ realmente seja um custo garantido para o sistema original ($r = 0$). Se esse último teste for factível $\gamma_{max} = \gamma$, caso contrário $\gamma_{min} = \gamma$.

4.3.3.2 Procedimento Iterativo Alternativo 2: Duas Fases com Bissecção Externa

Este procedimento é muito similar ao Procedimento Iterativo Alternativo 1, pois também realiza uma bissecção externa e testa-se a factibilidade das condições LMIs dependentes de parâmetros para um dado γ , porém, neste caso consideram-se ambas as relaxações: de estabilidade e positividade. Dessa forma, assim como no algoritmo de três fases apresentado na Subseção 4.3.1, minimiza-se r e maximiza-se q , atualizando $\mathcal{B}(\alpha)$ enquanto $r > 0$. Quando $r \leq 0$ passa-se a maximizar apenas q até que $q \geq 0$. Neste ponto, tanto a estabilidade, quanto a positividade são garantidas. Finalmente, as LMIs dependentes de parâmetros são testadas uma última vez sem as relaxações para garantir que γ realmente seja um custo garantido para o sistema original ($r = 0$). Se esse último teste for factível $\gamma_{max} = \gamma$, caso contrário $\gamma_{min} = \gamma$.

4.3.3.3 Procedimento Iterativo Alternativo 3: Duas Fases com Bissecção Interna

Esse método é um pouco distinto dos dois descritos anteriormente, pois o custo garantido não é computado por uma bissecção externa e sim interna. O procedimento começa em um laço no qual minimiza-se r com um γ inicial dado. As LMIs dependentes de parâmetros são resolvidas com a relaxação de estabilidade até que $r \leq 0$. Neste ponto o algoritmo passa para a segunda fase em que a relaxação de estabilidade é eliminada e γ é minimizado por um procedimento de bissecção.

4.3.3.4 Procedimento Iterativo Alternativo 4: Três Fases com Bissecção Interna

Este procedimento, similar ao procedimento iterativo anterior, tem como principal diferença a inclusão da relaxação de positividade $\geq q$ em vez de ≥ 0 e de uma fase de maximização de q entre a minimização da relaxação de estabilidade r e a bissecção de γ .

4.4 Resultados Numéricos

Nesta seção é apresentada uma comparação numérica para avaliar o desempenho das abordagens desenvolvidas nesta dissertação no que se refere à síntese de con-

troladores robustos com critérios de desempenho \mathcal{H}_∞ que asseguram a estabilidade e positividade de sistemas incertos contínuos em malha fechada. Outro objetivo desta seção é comparar os métodos de síntese propostos nesta dissertação com as técnicas da literatura apresentadas em Ebihara *et al.* (2014). Deve-se destacar que, como as condições de Ebihara *et al.* (2014) não tratam o caso de síntese e sim de análise, as mesmas foram modificadas e adaptadas para projeto de um ganho de realimentação de estados.

4.4.1 Exemplo 1

Considere o sistema linear incerto positivo contínuo no tempo (2.11) com os seguintes vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.5 & 0.1 & 1.2 \\ 0.4 & -1.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & -0.9 & 1.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & -0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 1 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.7 \\ 0.7 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$C_{z1} = [0.1 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.5], \quad C_{z2} = [0.5 \ 0.7 \ 0.4 \ 0], \quad (4.23)$$

$$D_{z1} = [0.8 \ 0.6], \quad D_{z2} = [0.3 \ 0.7], \quad E_{z1} = [0.1], \quad E_{z2} = [0.1]. \quad (4.24)$$

O objetivo deste exemplo é, primeiramente, projetar controladores robustos por realimentação de estados \mathcal{H}_∞ sem estrutura particular (Caso 1). Em seguida impõe-se uma estrutura ao ganho de realimentação de estados para verificar a factibilidade dos métodos testados e o custo garantido associado (Caso 2). Finalmente, um ganho estático de realimentação de saída é projetado para ilustrar a flexibilidade dos métodos propostos (Caso 3).

Caso 1:

Neste caso pretende-se sintetizar um controlador de realimentação de estados que assegure a estabilidade e positividade em malha fechada além de proporcionar um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Neste experimento foram testadas as duas principais versões do procedimento iterativo (v1 e v2) com ambos os teoremas 4.1 e 4.2 (Hinf1 e Hinf2). Além dos algoritmos propostos nesta dissertação, foi testada uma adaptação do Corolário 2 apresentado em Ebihara *et al.* (2014) (EPA). A seguinte tabela apresenta os custos garantidos fornecidos por cada um dos métodos testados (γ) juntamente com uma aproximação interna da norma \mathcal{H}_∞ de pior caso dos sistemas em malha fechada com os

controladores projetados (γ^*), computada usando uma fina grade de valores dentro do politopo.

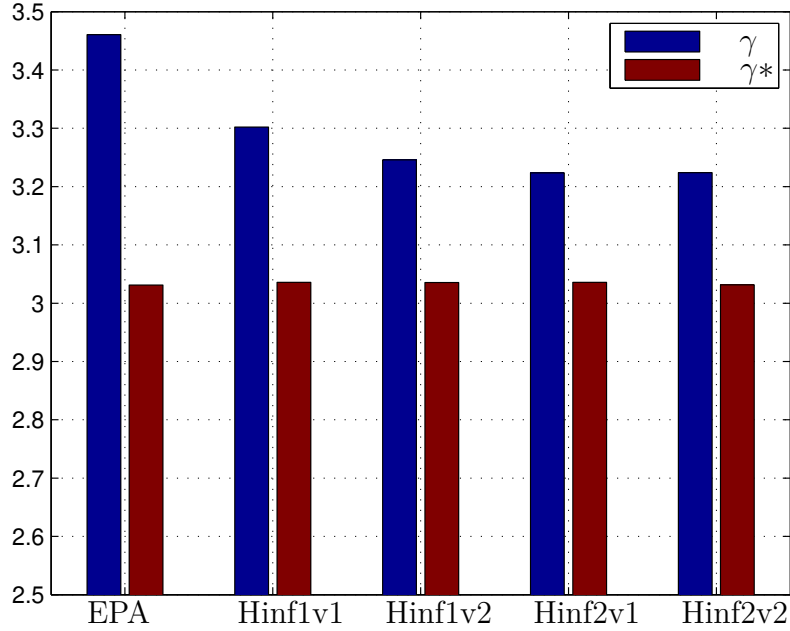


Figura 5 – Custo garantido γ e norma \mathcal{H}_∞ de pior caso γ^* para o Caso 1.

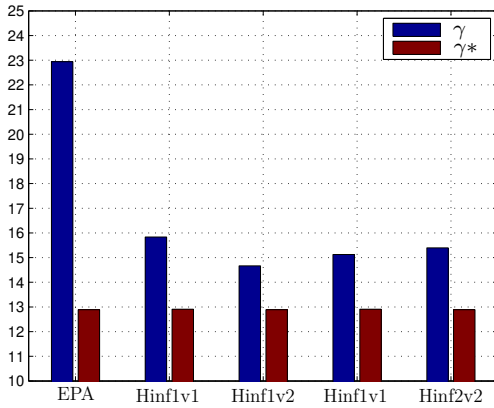
Pode-se observar que todos os algoritmos propostos nesta seção fornecem melhores resultados que a adaptação do método proposto em Ebihara *et al.* (2014). Mesmo que a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada seja praticamente a mesma para todos os métodos testados, o custo garantido consegue ser inferior ao método de Ebihara *et al.* (2014), o que significa que as abordagens desta dissertação fornecem uma melhor estimativa da norma \mathcal{H}_∞ de pior caso do sistema em malha fechada.

Caso 2:

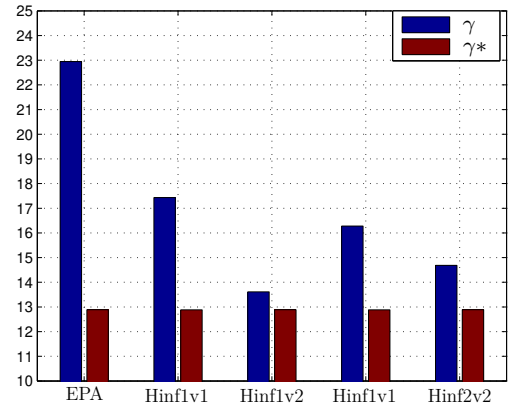
Para aumentar a dificuldade do problema e simular um cenário no qual não é possível acessar alguns estados do sistema para realimentação, ou o caso em que algum atuador não está disponível, são impostas diferentes estruturas (chamadas de máscaras) ao ganho de realimentação de estados. A seguir são apresentados os resultados obtidos pelos diferentes métodos testados com os ganhos empregando as seguintes máscaras (apenas os elementos diferentes de zero são variáveis do problema de controle):

$$Mask\ 1 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}, \quad Mask\ 2 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

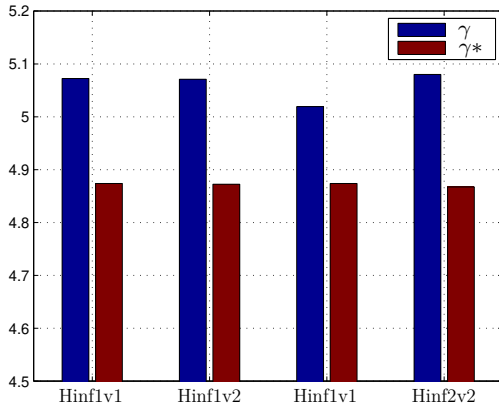
$$Mask\ 3 : \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Mask\ 4 : \begin{bmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



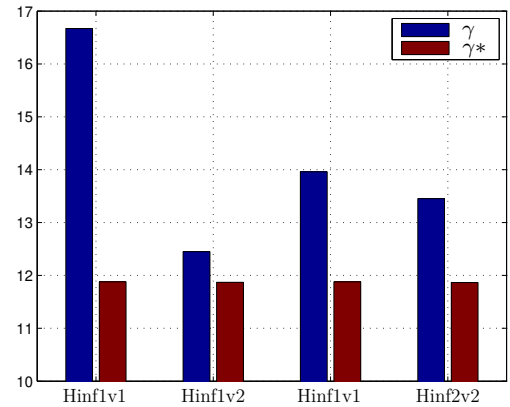
(a) Resultados com Mask 1.



(b) Resultados com Mask 2.



(c) Resultados com Mask 3.



(d) Resultados com Mask 4.

Figura 6 – Custo garantido γ e norma \mathcal{H}_∞ de pior caso γ^* para o Caso 2.

Observe que nas Figuras 6a e 6b, a adaptação do método proposto em Ebihara *et al.* (2014) provê um custo garantido muito superior à norma \mathcal{H}_∞ de pior caso dos sistemas em malha fechada, além de o valor ser pelo menos 25% maior que o obtido por todos os algoritmos propostos nesta dissertação, os quais fornecem limitantes que são boas estimativas para a norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada. Para as Figuras 6c e 6d são mostrados apenas os resultados produzidos pelos métodos apresentados nesta dissertação, pois o método de Ebihara *et al.* (2014) não consegue fornecer nenhuma solução factível para as restrições de estrutura impostas. Por outro lado, note que todos processos iterativos

desta dissertação conseguem fornecer soluções factíveis para as diferentes imposições de estrutura da matriz do ganho.

Caso 3:

Neste último caso, pretende-se sintetizar um controlador por realimentação estática de saída que assegure a estabilidade e positividade em malha fechada além de proporcionar um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema. Para isso, é necessário incluir no sistema as informações a respeito das matrizes de medida e ruído na medida para o projeto:

$$C_{y1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{y2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$E_{y1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_{y2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.05 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Observe que as matrizes acima simulam um cenário em que apenas os dois primeiros estados do sistema estão acessíveis para medição. Além disso o sensor responsável pelas medidas está sujeito a ruídos ($E_y(\alpha) \neq 0$) e o segundo vértice corresponde a uma perda de potência no sensor.

Neste Caso 3, o método de Ebihara *et al.* (2014) não pode ser utilizado para prover soluções uma vez que a matriz de medidas é incerta e a matriz de ruídos é não nula, o que impede o emprego de transformações de similaridade no sistema para se tentar obter um ganho de realimentação de saída. O gráfico da Figura 7 mostra os resultados obtidos pelos algoritmos propostos nesta dissertação.

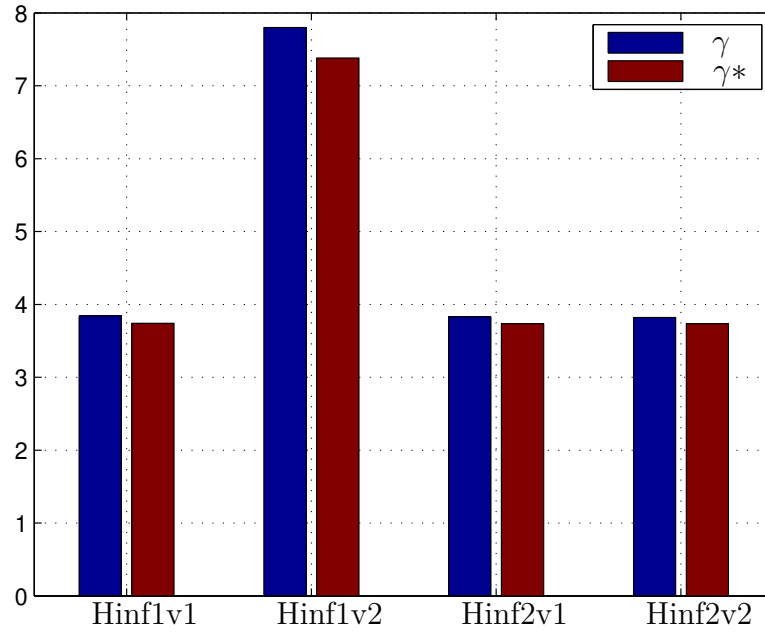


Figura 7 – Custo garantido γ e norma \mathcal{H}_∞ de pior caso γ^* para o Caso 3.

Pode-se observar que todos os algoritmos conseguem sintetizar um controlador robustamente estabilizante para o problema proposto. Repare que a primeira versão do algoritmo fornece soluções semelhantes para o Teorema 4.1 e Teorema 4.2 (Hinf1v1 e Hinf2v1), enquanto a segunda versão do algoritmo obtém uma solução menos conservadora quando é empregado o Teorema 4.2 (Hinf2v2), mas quando é baseada no Teorema 4.1 (Hinf1v2) produz uma solução com um custo garantido e norma \mathcal{H}_∞ em malha fechada bem superiores aos valores fornecidos pelos demais métodos. Mesmo assim, observe que o *gap* (diferença) entre a estimativa (γ) e o valor real da norma (γ^*) é bem pequeno independente da técnica de síntese empregada.

5 Considerações Finais

Esta dissertação apresentou abordagens iterativas, baseadas em LMIs dependentes de parâmetros, para a estabilização e o controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo.

A originalidade da técnica de síntese apresentada nesta dissertação, quando comparada às técnicas disponíveis na literatura, reside no fato de tratar o ganho diretamente como uma variável do problema de otimização, eliminando a necessidade de mudanças de variáveis e, potencialmente, diminuindo o conservadorismo do método. Além disso, a estratégia permite que a realimentação de estados ou saídas sejam tratadas indistintamente e que estruturas particulares sejam impostas ao ganho, tais como descentralização ou restrição em módulo para os elementos do ganho, sem afetar as demais variáveis do problema.

Como as condições de síntese, para serem tratadas como LMIs dependentes de parâmetros, requerem variáveis iniciais dadas, para que sejam resolvidas de maneira eficiente, foram propostos procedimentos iterativos nos quais são empregadas relaxações de estabilidade e de positividade (essa última apenas no caso de controle de \mathcal{H}_∞) com o objetivo de facilitar a busca por soluções factíveis. Os procedimentos iterativos foram divididos em fases ou etapas nas quais são otimizados diferentes parâmetros.

Nos métodos de estabilização o projetista pode escolher entre utilizar uma abordagem com uma ou duas fases. Na primeira procura-se uma solução factível aplicando uma relaxação na estabilidade do sistema em malha fechada. Na segunda fase, é resolvida uma condição de análise de estabilidade do sistema em malha fechada com o controlador encontrado na primeira etapa, caso a relaxação na primeira fase não seja mais necessária (condição de síntese garante que todos autovalores estão no semi-plano esquerdo do plano complexo) ou o teste de estabilidade *a posteriori* seja verificado, um controlador robustamente estabilizante é fornecido pelo método.

Por outro lado, os métodos iterativos de controle \mathcal{H}_∞ foram divididos em duas ou três etapas que incluem: garantia de estabilidade, positividade e minimização do custo garantido. Nas fases de estabilidade e positividade são empregadas relaxações que aumentam as chances de produzir uma solução factível, enquanto na fase de otimização do custo garantido são eliminadas todas as relaxações para que o resultado seja realmente um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada.

Diferentemente de muitos métodos de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída encontrados na literatura (no contexto de sistemas politópicos, positivos ou não), os quais necessitam impor restrições de estruturas nas matrizes de saída ou realizar transformações de similaridade que permitam obter um ganho de realimentação de saída, a abordagem

proposta é capaz de tratar as matrizes de ruído na saída $E_y(\alpha)$ ou matrizes de medida $C_y(\alpha)$ dependentes de parâmetros sem nenhum conservadorismo adicional.

Verificou-se a flexibilidade, eficiência estatística e complexidade computacional da técnica proposta nos testes de estabilização de uma base de dados de sistemas positivos estabilizáveis mas não quadraticamente estabilizáveis (incertos ou precisamente conhecidos), empregando-se diferentes resolvidores (SeDuMi e Mosek), condições de síntese (com e sem variáveis de folga), estruturas nas variáveis de otimização (simétrica, diagonal, cheia ou escalar), procedimentos iterativos (com ou sem análise de estabilidade *a posteriori*) para um certo número máximo de iterações. Além do teste estatístico, os exemplos ilustram que o método proposto tende a ser menos conservador quando comparado com outras técnicas disponíveis na literatura considerando realimentação de estados, saída, síntese de ganhos descentralizados e otimização do custo garantido.

Perspectivas

1. Investigação de um procedimento iterativo similar, em termos de condições LMIs dependentes de parâmetros, para síntese de controladores com otimização do custo garantido \mathcal{H}_2 para sistemas LTI incertos positivos contínuos no tempo. Diferentemente do caso \mathcal{H}_∞ , mesmo para o controle por realimentação de estados de sistemas positivos precisamente conhecidos existem apenas condições suficientes na literatura.
2. Investigação de condições iniciais diferentes que possam proporcionar resultados menos conservadores com um número menor de iterações nos procedimentos baseados em LMIs dependentes de parâmetros.

Trabalho Aceito para publicação

- Arnanz, A., Morais, C. F., Peres, P. L. D., Oliveira, R. C. L. F. Métodos Iterativos Baseados em Desigualdades Matriciais Lineares para Controle de Sistemas Lineares Incertos Positivos Contínuos no Tempo. In: 14^o SBAI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil, Outubro 2019.

Esse trabalho considera apenas o problema da estabilização de sistemas lineares incertos positivos contínuos no tempo, baseando-se nas contribuições apresentadas no Capítulo 3.

Trabalho em processo de submissão

- Arnanz, A., Morais, C. F., Peres, P. L. D., Oliveira, R. C. L. F. LMI-based iterative procedure for stabilization and \mathcal{H}_∞ control of polytopic positive continuous-time systems. Em processo de preparação para submissão a uma revista.

Esse trabalho considera o problema de controle \mathcal{H}_∞ baseando-se nas contribuições apresentadas no Capítulo 4.

Referências

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. LMI relaxations for reduced-order robust \mathcal{H}_∞ control of continuous-time uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 6, p. 1532–1537, June 2012. Citado na página 16.

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust LMI parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. In: *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande, PB, Brasil: [s.n.], 2012. p. 2298–2305. <<http://rolmip.github.io>>. Citado na página 25.

AIT RAMI, M. Solvability of static output-feedback stabilization for LTI positive systems. *Systems & Control Letters*, v. 60, n. 9, p. 704–708, September 2011. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 39.

ANDERSEN, E. D.; ANDERSEN, K. D. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In: FRENK, H.; ROOS, K.; TERLAKY, T.; ZHANG, S. (Ed.). *High Performance Optimization*. [S.l.]: Springer US, 2000, (Applied Optimization, v. 33). p. 197–232. <<http://www.mosek.com>>. Citado na página 25.

ARNESON, H.; LANGBORT, C. A linear programming approach to routing control in networks of constrained linear positive systems. *Automatica*, v. 48, n. 5, p. 800–807, May 2012. Citado na página 15.

ARZELIER, D.; PEAUCELLE, D.; SALHI, S. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: Improving the guaranteed performance bound. In: *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*. Milan, Italy: [s.n.], 2003. p. 425–430. Citado na página 16.

BERMAN, A.; PLEMMONS, R. J. *Nonnegative Matrices in The Mathematical Sciences*. New York: Academic Press, 1979. (Computer Science and Applied Mathematics). Citado na página 15.

BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, v. 13, n. 1, p. 65–72, July 1989. Citado na página 23.

BHATTACHARYYA, S.; PATRA, S. Static output-feedback stabilization for MIMO LTI positive systems using LMI-based iterative algorithms. *IEEE Control Systems Letters*, v. 2, n. 2, p. 242–247, April 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 34.

BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 15, 19, 20 e 21.

BRIAT, C. Robust stability and stabilization of uncertain linear positive systems via integral linear constraints: l_1 -gain and l_∞ -gain characterization. *International Journal of*

Robust and Nonlinear Control, v. 23, n. 16, p. 1932–1954, November 2013. Citado na página 15.

CACCETTA, L.; RUMCHEV, V. G. A survey of reachability and controllability for positive linear systems. *Annals of Operations Research*, v. 98, n. 1, p. 101–122, December 2000. Citado na página 15.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 22.

EBIHARA, Y.; PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. LMI approach to linear positive system analysis and synthesis. *Systems & Control Letters*, v. 63, p. 50–56, January 2014. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 17, 56, 57, 58 e 59.

EL GHAOU, L.; NICULESCU, S. I. (Ed.). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000. (Advances in Design and Control). Citado na página 15.

FARINA, L.; RINALDI, S. *Positive Linear Systems: Theory and Applications*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.

FELIPE, A. *Um algoritmo de busca local baseado em LMIs para computar ganhos de realimentação estabilizantes diretamente como variáveis de otimização*. Dissertação (M.Sc. Thesis) — FEEC – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 16, 47 e 49.

FENG, J.; LAM, J.; LI, P.; SHU, Z. Decay rate constrained stabilization of positive systems using static output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 21, n. 1, p. 44–54, dez. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 34.

KASZKUREWICZ, E.; BHAYA, A. *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*. Boston, MA: Birkhäuser, 1999. Citado na página 19.

LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. p. 284–289. <<http://yalmip.github.io>>. Citado na página 25.

LUENBERGER, D. G. *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models & Applications*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1979. Citado na página 15.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. A simple and less conservative test for D-stability. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 26, n. 2, p. 415–425, January 2005. Citado na página 19.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, July 2007. Citado na página 25.

- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Análise e controle de sistemas lineares por meio de desigualdades matriciais lineares. In: FELTRIN, A. P.; MINUSSI, C. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; LÁZARO, R. A. R. (Ed.). *Tutoriais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2010. p. 203–229. ISBN 978-85-7983-061-7. Citado na página 15.
- PEAUCELLE, D.; ARZELIER, D. An efficient numerical solution for \mathcal{H}_2 static output feedback synthesis. In: *Proceedings of the 2001 European Control Conference*. Porto, Portugal: [s.n.], 2001. p. 3800–3805. Citado na página 16.
- PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVER, J.; VANDENBERGHE, L. Extended LMI characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 7, p. 510–518, July 2009. Citado na página 22.
- ROSZAK, B.; DAVISON, E. J. Necessary and sufficient conditions for stabilizability of positive LTI systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 7, p. 474–481, July 2009. Citado na página 15.
- SHEN, J.; LAM, J. On static output-feedback stabilization for multi-input multi-output positive systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 25, n. 16, p. 3154–3162, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 39.
- SHEN, J.; LAM, J. Static output-feedback stabilization with optimal L_1 -gain for positive linear systems. *Automatica*, v. 63, p. 248–253, January 2016. Citado na página 15.
- SHEN, J.; LAM, J. Some extensions on the bounded real lemma for positive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 6, p. 3034–3038, June 2017. Citado na página 15.
- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 625–653, 1999. <<http://sedumi.ie.lehigh.edu/>>. Citado na página 25.
- TANAKA, T.; LANGBORT, C. The bounded real lemma for internally positive systems and H_∞ structured static state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 9, p. 2218–2223, September 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- VIEIRA, H. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Robust stabilization and \mathcal{H}_∞ control by means of state-feedback for polytopic linear systems using LMIs and scalar searches. In: *Proceedings of the 2015 American Control Conference*. Chicago, IL, USA: [s.n.], 2015. p. 5966–5973. Citado na página 16.
- WANG, C.; HUANG, T. Static output feedback control for positive linear continuous-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 23, n. 14, p. 1537–1544, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 39.
- XIE, W. An equivalent LMI representation of Bounded Real Lemma for continuous-time systems. *Journal of Inequalities and Applications*, v. 2008, n. 1, p. 1–8, January 2008. Citado na página 22.