

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL

# Controle Multivariável de Sistemas a Eventos Discretos em Dióides

**Ricardo Lüders**

Tese apresentada à Pós-graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial à obtenção do grau de **Doutor em Engenharia Elétrica** (Automação).

Banca examinadora: **Rafael Santos Mendes** (orientador)  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

José Eduardo Ribeiro Cury  
Departamento de Automação e Sistemas, UFSC

Stéphane Julia  
Departamento de Ciência da Computação, UFU

Paulo Augusto Valente Ferreira  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Pedro Luis Dias Peres  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Wagner Caradori do Amaral  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP

Campinas, 3 de dezembro de 2001

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L965c	<p>Lüders, Ricardo</p> <p>Controle multivariável de sistemas a eventos discretos em dióides / Ricardo Lüders. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.</p> <p>Orientador: Rafael Santos Mendes.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Redes de petri. 2. Controle automático. 3. Álgebra abstrata. I. Mendes, Rafael Santos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.</p>
-------	--

## Resumo

Sistemas a eventos discretos ocorrem em processos de manufatura e em aplicações de tráfego e compartilhamento de recursos, entre outros. Os sistemas considerados nessa tese são grafos a eventos temporizados que correspondem a uma classe de redes de Petri que modelam apenas sincronização de eventos. Embora não-lineares na álgebra convencional, esses sistemas podem ser descritos por modelos lineares numa estrutura algébrica genericamente denominada dióide. Esses modelos possuem representação tanto no espaço de estado quanto na forma de função de transferência. O objetivo dessa tese é propor uma metodologia de projeto de controle por modelo de referência, onde o controlador é obtido por um “matching” entre duas funções de transferência: a do sistema controlado com a da função desejada. A estrutura de controle proposta possui forte analogia com a realimentação de estado da teoria convencional de sistemas. Sob certas condições, a solução máxima do problema de “matching” existe e o controlador ótimo pode ser calculado analiticamente tanto para acesso completo quanto parcial ao estado. Em outros casos, o controlador ótimo é obtido apenas para acesso parcial, embora duas soluções sub-ótimas sempre possam ser obtidas.

## Abstract

Discrete event systems typically occur in manufacturing processes, traffic applications and resource sharing among others. The systems considered in this thesis are timed event graphs, a particular class of Petri nets that can model only synchronization phenomena. Although these systems are nonlinear in conventional algebra, they can be described by linear models in a generic algebraic structure named dioids. These models have both state space and transfer function representations. This thesis proposes a control synthesis methodology by using a model reference approach, where the controller is obtained by a matching between the transfer function of controlled system and a given transfer function. The proposed control structure has strong analogy with the state feedback control in conventional system theory. Under certain conditions, the maximal solution to the matching problem exists, with complete or partial access to system state, and the optimal controller can be calculated. In other cases, the optimal controller is only obtained for the problem with partial access, although two sub-optimal controllers always exist.



*Pra Luciana e Sofia*

“...não me considere desrespeitoso se me  
dirijo ao senhor chamando-o por seu  
nome próprio, sem referir-me às vestes  
que enverga. Entenda-o como um ato de  
homenagem e de prudência. De  
homenagem, pois sempre me  
impressionou o modo como os franceses,  
quando entrevistam um escritor, um  
artista, uma personalidade política,  
evitam usar apelativos redutivos, como  
professor, eminência, ou ministro. Há  
pessoas cujo capital intelectual é dado  
pelo nome com que assinam as próprias  
idéias...”

Umberto Eco



# Agradecimentos

Diferentemente da maioria dos agradecimentos em geral, nos quais destaca-se a ajuda recebida, uso esse espaço para de fato dividir com as pessoas aqui mencionadas a realização dessa tese. Tenho plena certeza de que sem elas nada disso existiria.

Ao Rafael Santos Mendes, amigo de longa data que, mesmo em momentos de incerteza, nunca deixou de acenar com apoio e amizade, sempre em busca de uma solução.

Um agradecimento especial aos meus pais, Cecília e Irineu, e à minha irmã Valéria pelo imenso suporte e estrutura prontamente colocados à nossa disposição nesse último ano de tese e cujo incômodo causado nunca saberei quantificar.

Aos amigos que em momentos diversos demonstraram seu apoio incondicional. Orgulho-me de tê-los ao meu lado:

Armando Delgado

Wagner Amaral

Myriam Delgado

Beatriz Daltrini

Luiz Gonzaga

Luiz Nacamura

Pedro Peres

Ivanil Bonatti

A Bertrand Cottenceau, várias vezes citado nessa tese e que, mesmo sem me conhecer, se dispôs a enviar sua versão das macros de autoria de Guy Cohen para a geração dos símbolos de residuação. Finalmente, ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná (CEFET-PR) em Curitiba pelo suporte financeiro.





# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Base Algébrica</b>	<b>7</b>
1.1 Introdução . . . . .	7
1.2 Reticulados . . . . .	8
1.2.1 Noções básicas . . . . .	9
1.2.2 Elementos de teoria da residuação . . . . .	11
1.2.3 Equações de ponto fixo . . . . .	13
1.3 Dióides . . . . .	15
1.3.1 Matrizes . . . . .	18
1.3.2 Séries de potência e polinômios . . . . .	20
1.4 Conclusão . . . . .	21
<b>2 Modelos Lineares de GETs em Dióides</b>	<b>23</b>
2.1 Introdução . . . . .	23
2.2 Grafo a eventos temporizado (GET) . . . . .	24
2.2.1 Dinâmica . . . . .	25
2.2.2 Datadores . . . . .	25
2.2.3 Contadores . . . . .	31
2.3 Descrição no dióide bidimensional . . . . .	34
2.4 Função de transferência . . . . .	38
2.5 Racionalidade, realizabilidade e periodicidade . . . . .	38
2.5.1 Representações racionais e realizabilidade . . . . .	39
2.5.2 Séries periódicas . . . . .	41
2.6 Conclusão . . . . .	42

<b>3</b>	<b>Controle de GETs em Dióides</b>	<b>45</b>
3.1	Introdução . . . . .	45
3.2	Controle ótimo . . . . .	46
3.3	Controle supervisão . . . . .	47
3.4	Controle preditivo . . . . .	49
3.5	Controle por modelo de referência . . . . .	50
3.6	Estabilidade . . . . .	53
3.7	Conclusão . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Controle Multivariável</b>	<b>57</b>
4.1	Introdução . . . . .	57
4.2	Realimentação de estado . . . . .	58
4.3	Controladores sub-ótimos . . . . .	64
4.4	Conclusão . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Controle Multivariável Restrito</b>	<b>67</b>
5.1	Introdução . . . . .	67
5.2	Realimentação de estado restrita . . . . .	68
5.3	Casos particulares . . . . .	70
5.3.1	Realimentação de saída . . . . .	71
5.3.2	Realimentação de estado sobre a entrada . . . . .	73
5.3.3	Realimentação de saída sobre o estado . . . . .	75
5.4	Conclusão . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Projeto do controlador</b>	<b>79</b>
6.1	Introdução . . . . .	79
6.2	Metodologia de projeto . . . . .	79
6.3	Exemplos . . . . .	82
6.3.1	Controle multivariável . . . . .	84
6.3.2	Realimentação de saída . . . . .	87
6.3.3	Controle multivariável restrito . . . . .	88
6.4	Implementação . . . . .	90
6.5	Conclusão . . . . .	96
	<b>Conclusão</b>	<b>99</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>106</b>

<b>A</b>	<b>Fórmulas</b>	<b>107</b>
<b>B</b>	<b>Exemplos de cálculo</b>	<b>109</b>



# Lista de Figuras

1	Classificação geral de sistemas. . . . .	1
2	Grafo a eventos temporizado. . . . .	2
3	Conjuntos parcialmente ordenados. . . . .	10
4	Isotonia. . . . .	12
5	Semicontinuidade inferior. . . . .	12
6	Exemplo de um GET. . . . .	24
7	Dinâmica de um GET. . . . .	25
8	Resposta temporal de um GET. . . . .	31
9	Regras de simplificação. . . . .	35
10	Elemento do dióide bidimensional. . . . .	36
11	Representação multivariável de um GET. . . . .	37
12	Exemplo com estado aumentado. . . . .	40
13	Resposta típica de um sistema racional. . . . .	41
14	Pré-compensação. . . . .	51
15	Realimentação de saída. . . . .	52
16	Realimentação de estado sobre a entrada. . . . .	53
17	Realimentação de saída sobre o estado. . . . .	53
18	Estrutura geral de controle. . . . .	57
19	Estrutura em realimentação de estado. . . . .	59
20	Estrutura em realimentação de estado restrita. . . . .	68
21	Estrutura em realimentação de estado com $P = B$ e $Q = C$ . . . . .	71
22	Estrutura em realimentação de saída. . . . .	71
23	Estrutura em realimentação de estado com $P = B$ e $Q = e$ . . . . .	73
24	Estrutura em realimentação de estado sobre a entrada. . . . .	74
25	Estrutura em realimentação de estado com $P = e$ e $Q = C$ . . . . .	75
26	Estrutura em realimentação de saída sobre o estado. . . . .	76
27	Exemplo instrumentado para observação e controle. . . . .	80

28	Embalagem final de um produto. . . . .	82
29	Grafo correspondente ao sistema de embalagem. . . . .	83
30	Resposta impulsiva do sistema de embalagem. . . . .	84
31	Modificação da resposta do sistema de embalagem. . . . .	85
32	Exemplo 6.2 - sistema controlado bloqueado. . . . .	92
33	Exemplo 6.2 - controlador em realimentação de estado. . . . .	92
34	Exemplo 6.4 - sistema com $F_{a+}$ . . . . .	93
35	Exemplo 6.4 - sistema com $F_{b+}$ . . . . .	93
36	Exemplo 6.6 - controlador ótimo em realimentação de saída. . . . .	94
37	Exemplo 6.8 - controlador ótimo em realimentação de saída. . . . .	95
38	Exemplo 6.9 - controlador ótimo em realimentação de saída. . . . .	96
39	Exemplo 6.12 - controlador ótimo em realimentação de estado restrito. . . . .	96
40	Possíveis relações entre especificações. . . . .	101
41	Exemplo de divisão de séries periódicas. . . . .	110

# Lista de Símbolos

$\phi$	divisão à direita; resíduo do produto à direita - pág. 17
$\backslash$	divisão à esquerda; resíduo do produto à esquerda - pág. 17
$F$	controlador para o caso irrestrito - pág. 58
<b>GET</b>	grafo a eventos temporizado - pág. 1
$G_{mf}(F)$	função de transferência do sistema com controlador $F$ - pág. 58
$G_{ref}$	função de transferência especificada - pág. 58
$H = CA^*B$	função de transferência do sistema - pág. 38
$e$	elemento identidade do dióide - pág. 16
$\wedge$	ínfimo - pág. 10
$a^*$	operação estrela - pág. 17
$L$	controlador para o caso restrito - pág. 67
$\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$	dióide bidimensional - pág. 35
$A = [a_{ij}]$	matriz com elementos $a_{ij}$ - pág. 18
$\overline{\mathbb{Z}}_{\text{max}}$	álgebra max-plus - pág. 26
$\preceq$	relação de ordem - pág. 9
$\overline{\mathbb{Z}}_{\text{min}}$	álgebra min-plus - pág. 32
$\epsilon$	elemento neutro da adição e nulo do produto em dióides - pág. 15
$P$	matriz de acesso para controle das transições internas do sistema - pág. 67

$\mathcal{D}[x_1, \dots, x_m]$	dióide dos polinômios em $m$ variáveis com coeficientes em $\mathcal{D}$ - pág. 21
$\otimes$	produto em dióides; normalmente adição usual - pág. 15
$Q$	matriz de acesso para observação das transições internas do sistema - pág. 67
<b>SED</b>	sistema a eventos discretos - pág. 1
$\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_m]]$	dióide das séries de potência em $m$ variáveis com coeficientes em $\mathcal{D}$ - pág. 20
$a = (a_k)$	série de potência com coeficientes $a_k$ - pág. 20
$\oplus$	soma em dióides; significado depende do dióide - pág. 15
$\vee$	supremo - pág. 10
$\top$	elemento de topo do dióide - pág. 17



# Introdução

Essa tese aborda o controle de sistemas a eventos discretos representados por uma classe particular de redes de Petri denominados Grafos a Eventos Temporizados (GETs), os quais podem ser descritos por um modelo multivariável numa álgebra particular denominada álgebra de dióides. Assim, a tese está fundamentada em três áreas: sistemas a eventos discretos, redes de Petri e álgebra de dióides.

A figura abaixo mostra uma classificação geral de sistemas segundo Cassandras e Lafortune (1999). A fronteira tracejada define um *Sistema a Eventos Discretos* (SED) ou “Discrete Event System” (DES). Esses sistemas ocorrem tipicamente em processos de manufatura e em aplicações de tráfego, com compartilhamento de recursos e/ou tarefas sujeitas à sincronização de eventos. Os termos em **negrito** caracterizam o sistema a ser considerado: um sistema **dinâmico**, **invariante no tempo**, **não linear**, **a estado discreto**, **dirigido a evento**, **determinístico** e **a tempo discreto**.

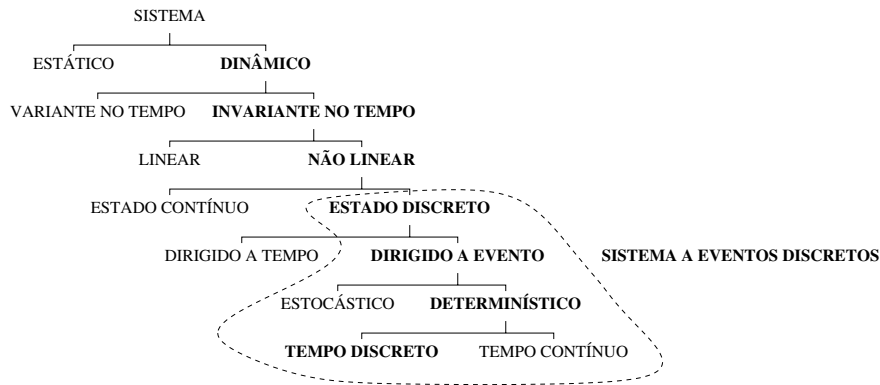


Figura 1: Classificação geral de sistemas.

Adotando a mesma nomenclatura usada em Ho (1989), Cassandras e Lafortune (1999), o termo *sistema contínuo* é usado aqui para designar “Continuous-Variable Dynamic System” ou CVDS. Pertencem a essa classe os sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais (tempo contínuo) ou a diferenças (tempo discreto) da teoria usual de sistemas. Comparando-se sistemas contínuos com sistemas a eventos discretos, as seguintes propriedades podem ser destacadas:

**sistema contínuo:**

- os estados são variáveis *contínuas*;
- o mecanismo de transição de estado é dirigido por tempo ou *time-driven*.

**sistema a eventos discretos:**

- os estados são variáveis *discretas*;
- o mecanismo de transição de estado é dirigido por eventos ou *event-driven*.

Um grafo a eventos é uma rede de Petri onde cada lugar tem exatamente uma transição de chegada e uma transição de partida. Assim, grafos a eventos são redes de Petri que não modelam concorrência, restringindo-se apenas à *sincronização* de eventos. Para uma definição formal, propriedades e dinâmica de redes de Petri em geral pode-se consultar Peterson (1981). Uma boa visão geral sobre o assunto com várias aplicações é encontrada em Murata (1989).

Quando existe um tempo de espera associado a cada lugar, o grafo é denominado grafo a eventos temporizado. Assim, uma ficha ao entrar num lugar deve cumprir o tempo de espera a ele associado antes que possa contribuir para a habilitação da transição de partida desse lugar. A figura abaixo representa um GET, onde os lugares são representados por círculos e as transições por linhas verticais conectadas por arcos direccionados. As fichas ou “tokens” são representadas dentro dos lugares por pontos e os tempos de espera (em unidades de tempo) por barras verticais.

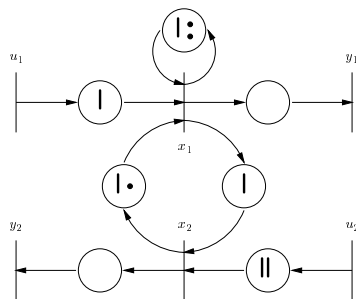


Figura 2: Grafo a eventos temporizado.

Nessa figura,  $u_1$  e  $u_2$  são as transições de entrada,  $y_1$  e  $y_2$  as transições de saída e  $x_1$ ,  $x_2$  são as transições internas ou estados do sistema. Se a variável  $x(k)$  associada à transição  $x$  corresponde ao instante de tempo no qual ocorre o evento de número  $k$  dessa transição, então as seguintes equações

são derivadas:

$$\begin{aligned}x_1(k) &= \max\{1 + x_1(k-2), 1 + x_2(k-1), 1 + u_1(k)\} \\x_2(k) &= \max\{1 + x_1(k), 2 + u_2(k)\} \\y_1(k) &= x_1(k) \\y_2(k) &= x_2(k)\end{aligned}$$

Essas equações são recursivas em  $k$ , cuja solução é tratada no capítulo 2. A operação de maximização é uma consequência direta da sincronização. Uma transição  $x_i$  dispara no tempo máximo entre os instantes de tempo de disparo das transições  $x_j$  conectadas a  $x_i$  somados ao respectivo tempo de permanência do lugar que conecta  $x_j$  a  $x_i$ . A marcação inicial apenas introduz um deslocamento na numeração dos eventos de cada transição. Assim, a numeração dos eventos em  $x_1$  está adiantada de uma unidade em relação à numeração dos eventos em  $x_2$  devido à ficha inicial no lugar que conecta  $x_2$  a  $x_1$ .

Essas equações são não lineares quando escritas na álgebra convencional. Entretanto, definindo-se as operações de maximização e soma usual como as operações  $\oplus$  e  $\otimes$ , respectivamente, obtêm-se as seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned}x_1(k) &= 1 \otimes x_1(k-2) \oplus 1 \otimes x_2(k-1) \oplus 1 \otimes u_1(k) \\x_2(k) &= 1 \otimes x_1(k) \oplus 2 \otimes u_2(k) \\y_1(k) &= x_1(k) \\y_2(k) &= x_2(k)\end{aligned}$$

Essas equações são *lineares* numa álgebra não convencional genericamente denominada álgebra de *dióides*, cuja propriedade a ser destacada é a *idempotência* da operação de adição ( $a \oplus a = a$ ). Essa propriedade tem como consequência a inexistência da operação inversa da adição, sendo motivo de vários artigos sobre o assunto (Gunawardena, 1998).

Um pequeno histórico sobre o estabelecimento dessas estruturas algébricas e suas aplicações na descrição de SEDs pode ser encontrado em Gaubert e Max-Plus (1997). Entre os marcos importantes estão o trabalho de Cuninghame-Green (1979) e posteriormente Cohen *et al.* (1989). Este último, revisado e ampliado em Baccelli *et al.* (1992), deu um tratamento de teoria de sistemas ao assunto, tornando-se referência obrigatória na descrição de SEDs que apresentam apenas fenômenos de sincronização de eventos. Exemplos de aplicações podem ser encontrados em Cohen *et al.* (1985) e Cuninghame-Green (1991). Uma visão recente da área com perspectivas futuras é encontrada em Cohen *et al.* (1999).

De maneira geral, qualquer GET pode ser descrito pelas seguintes equações algébricas no espaço

de estado (capítulo 2):

$$X = AX \oplus BU$$

$$Y = CX$$

Os vetores  $U$ ,  $X$  e  $Y$  de dimensões  $m$ ,  $n$  e  $p$  correspondem às variáveis associadas às  $m$  transições de entrada,  $n$  transições internas e  $p$  transições de saída do sistema, respectivamente. As matrizes  $A^{n \times n}$ ,  $B^{n \times m}$ ,  $C^{p \times n}$  possuem descrições apropriadas. Essa representação possui uma forte analogia com as equações de estado contínuo da teoria convencional de sistemas. Além disso, uma relação entrada-saída pode ser obtida (função de transferência).

O problema de controle de GETs possui diversos enfoques, resumidos no capítulo 3. Nessa tese, adota-se uma abordagem por modelo de referência, onde o controlador é obtido de forma que a função de transferência do sistema controlado satisfaça uma determinada especificação. A estrutura de controle proposta introduz uma nova entrada de controle  $X_c = FX$  que usa informação dos estados para atuar diretamente sobre eles, ou seja:

$$X = (A \oplus F)X \oplus BU$$

$$Y = CX$$

Essa lei de controle, onde  $F$  é o controlador a ser obtido, corresponde à realimentação de estado na sua forma mais geral, quando se tem acesso completo aos estados, e a uma realimentação de estado restrita, quando o acesso aos estados é parcial.

A tese está organizada da seguinte forma. Os capítulos 1 e 2 contêm apenas material encontrado na bibliografia, particularmente em Baccelli *et al.* (1992). Os leitores familiarizados com conceitos de matemática discreta tais como conjuntos, relações de ordem e estruturas algébricas abstratas não encontrarão dificuldades. Além disso, um conhecimento básico sobre redes de Petri é desejável.

Os leitores habituados com a bibliografia sobre redes de Petri encontrarão, ao longo desta tese, conceitos e abordagens pouco comuns, mas amplamente consolidados na bibliografia sobre modelagem de GETs em dióides. Assim, poderão surgir alguns conflitos conceituais que esta tese não é capaz de minimizar, devido basicamente aos diferentes enfoques adotados por cada comunidade.

O capítulo 1 introduz de maneira geral a teoria algébrica utilizada nesta tese para modelar e controlar um GET: a álgebra de dióides. Como dióides compartilham propriedades de reticulados, resultados da teoria de reticulados que se aplicam a dióides são tratados nesse capítulo. Nesse caso, a ênfase é dada em mapeamentos entre reticulados, abordando a teoria da residuação e equações de ponto fixo. Por fim, alguns dióides particulares são formalmente definidos.

O capítulo 2 estabelece modelos de GETs descritos em dióides. Define o modelo do sistema a ser usado nessa tese e sua respectiva função de transferência. Discute ainda propriedades como racionalidade, realizabilidade e periodicidade desses sistemas denominados racionais.

O capítulo 3 é um levantamento bibliográfico sobre abordagens de controle de GETs que utilizam uma descrição baseada em dióides. Num primeiro momento sua leitura pode ser omitida, não comprometendo a compreensão geral da tese, embora seja útil para situá-la em relação a outras abordagens de controle. Porém, nesse capítulo são apresentados os principais resultados da abordagem de controle utilizada em Cottenceau *et al.* (2001), com a qual essa tese está relacionada.

As contribuições da tese encontram-se nos capítulos 4, 5 e 6. No capítulo 4 é proposta uma estrutura de controle por realimentação de estado com acesso completo aos estados do sistema. Nesse caso, o controle é obtido a partir da representação de estado do sistema segundo a especificação de um modelo de referência a ser atendido pelo sistema controlado. Essa abordagem foi denominada controle multivariável por analogia à estrutura de controle multivariável da teoria de sistemas contínuos, embora com outro objetivo. O capítulo 5, com desenvolvimento semelhante ao anterior, considera acesso parcial aos estados. Por isso, foi denominado controle multivariável restrito. Os resultados desses capítulos estabelecem condições para as quais o controlador pode ser analiticamente obtido. O capítulo 6 organiza então esses resultados e estabelece uma metodologia de projeto do controlador para diversas condições. Através de alguns exemplos ilustrativos, a metodologia proposta pode ser verificada. Por fim, a conclusão da tese ressalta as principais contribuições desse trabalho e avalia criticamente os resultados, propondo novas perspectivas de pesquisa.



# Capítulo 1

## Base Algébrica

### 1.1 Introdução

O estudo de estruturas algébricas abstratas pode ser encontrado na literatura de matemática discreta (Ross e Wright, 1985; Rosen, 1998) ou álgebra moderna (Durbin, 1992). Essas estruturas são caracterizadas por duas operações binárias <sup>1</sup>. Esse capítulo reúne os principais resultados sobre estruturas algébricas genericamente denominadas *dióides* que constituem a base algébrica da tese. A definição de dióides não difere muito da definição de estruturas algébricas bem conhecidas como o anel (compare as definições e os exemplos 1.1 e 1.2 a seguir).

Um anel ou “ring” é um conjunto  $S$  fechado sob duas operações binárias  $+$  e  $\times$  tal que:

1.  $(S, +)$  é um grupo comutativo;
2.  $(S, \times)$  é um semigrupo;
3.  $\times$  é distributiva à direita e à esquerda em relação a  $+$ .

**Exemplo 1.1.** *O conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$  com as operações usuais de soma e adição de matrizes é um anel.*

Um dióide é um conjunto  $S$  fechado sob duas operações binárias  $\oplus$  e  $\otimes$  tal que:

1.  $(S, \oplus)$  é um monóide comutativo idempotente ( $\forall a \in S, a \oplus a = a$ );
2.  $(S, \otimes)$  é um monóide;
3.  $\otimes$  é distributiva à direita e à esquerda em relação a  $\oplus$ .

---

<sup>1</sup>Um conjunto  $S$  com uma operação binária associativa  $\square$  é um semigrupo sob  $\square$ . Um semigrupo com uma identidade é chamado um monóide ( $a \square e = e \square a = a$ ) e um monóide onde qualquer elemento possui inversa é um grupo ( $a \square a^{-1} = e = a^{-1} \square a$ ). Um grupo é comutativo quando  $\square$  é comutativa.

**Exemplo 1.2.** O conjunto  $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  associado às operações de maximização como adição e adição usual como multiplicação é um dióide denotado  $\mathbb{Z}_{\max}$ .

Claramente, a origem da denominação dióide vem do fato de que essa estrutura algébrica é formada por dois monóides. Devido à semelhança entre as definições, espera-se que dióides compartilhem grande parte das propriedades da álgebra convencional. De fato isso ocorre, mas a definição de uma operação de adição idempotente introduz uma relação de ordem parcial e faz com que a operação inversa da adição inexista.

Dióides são portanto estruturas que se situam entre a álgebra convencional e os conjuntos parcialmente ordenados dotados de uma operação interna geralmente denominada multiplicação.

Dessa forma, muitos dos resultados obtidos em dióides têm sua origem na teoria dos conjuntos ordenados. Para facilitar a separação desses resultados, esse capítulo é organizado de forma que a teoria de conjuntos ordenados, ou mais especificamente de reticulados, seja apresentada na seção 1.2 de forma totalmente independente da teoria de dióides na seção 1.3.

Após algumas noções gerais sobre reticulados em 1.2.1, a ênfase da seção 1.2 reside nas aplicações definidas sobre reticulados. Na seção 1.2.2 discute-se a solução da equação  $f(x) = b$  segundo a teoria da residuação, que está relacionada ao conceito de ‘inversão’ de uma aplicação. Já na seção 1.2.3 discute-se a solução de equações de ponto fixo  $f(x) = x$ .

A seção 1.3 fornece uma definição axiomática de dióides e estabelece os principais resultados dessa teoria. Nessa seção, os resultados da seção 1.2 obtidos para reticulados são aplicados no contexto de dióides. Finalmente, dois dióides particulares são definidos: o dióide das matrizes na seção 1.3.1 e o dióide dos polinômios na seção 1.3.2. Esses dióides serão utilizados nos capítulos seguintes para modelar e controlar GETs. As provas dos teoremas desse capítulo podem ser encontradas em Baccelli *et al.* (1992), exceto quando houver uma referência explícita a outra fonte.

## 1.2 Reticulados

Um reticulado é um conjunto sobre o qual é definida uma relação de ordem parcial entre seus elementos. Esses conjuntos apresentam como principal característica a possibilidade de existência de elementos não comparáveis, ou seja, um elemento pode não ser igual, nem maior e nem menor do que outro. Esse conceito, apesar de pouco estudado, é frequentemente encontrado na Engenharia. Por exemplo, o conjunto dos números complexos é um conjunto parcialmente ordenado. Pode-se dizer que um número complexo  $z_1$  qualquer tem módulo maior ou menor do que outro  $z_2$ . Mais ainda, pode-se dizer que se o módulo de  $z_1$  não é maior do que o módulo de  $z_2$ , então com certeza é menor ou igual. Essa relação de ordem entre módulos de números complexos é total, mas não se pode atribuir uma relação de ordem para quaisquer dois números complexos vistos como dois *objetos*



a serem comparados. Em Davey e Priestley (1990), Birkhoff (1967) encontra-se vasto material sobre a teoria de reticulados. Uma boa introdução relacionada com sistemas a eventos discretos pode ser encontrada em Kumar e Garg (1995).

### 1.2.1 Noções básicas

**Definição 1.3 (Relação de ordem).** *Uma relação binária reflexiva, transitiva e anti-simétrica é uma relação de ordem, denotada  $\preceq$ .*

Uma relação binária  $R$  sobre um conjunto  $D$  é um sub-conjunto de  $D \times D$ . Dados  $a, b, c \in D$ ,  $R$  é reflexiva se  $(a, a) \in R$ ; transitiva se  $(a, b) \in R$  e  $(b, c) \in R$ , então  $(a, c) \in R$ ; anti-simétrica se  $(a, b) \in R$  e  $(b, a) \in R$ , então  $a = b$ . Portanto, numa relação de ordem, se dois elementos  $a$  e  $b$  são comparáveis (pertencem a  $R$ ), então  $a \preceq b$  ou  $b \preceq a$ . Entretanto, existe a possibilidade de dois elementos  $a$  e  $b$  serem não comparáveis, ou seja, não pertencerem a  $R$ . Nesse caso, não se pode afirmar que  $a \preceq b$  nem que  $b \preceq a$ , pois não existe relação de ordem entre  $a$  e  $b$ .

**Nota 1.4.** *O símbolo  $\preceq$  é usado para diferenciá-lo da relação de ordem numérica  $\leq$ . Por exemplo, numa relação de ordem parcial de continência, dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $A \preceq B$  se e somente se  $A \subseteq B$ . Como usual,  $a \preceq b$  e  $b \succeq a$  são equivalentes.*

**Definição 1.5 (Conjunto parcialmente ordenado).** *O par  $(D, \preceq)$ , onde  $D$  é um conjunto e  $\preceq$  é uma relação de ordem sobre  $D$ , é chamado conjunto parcialmente ordenado, denotado  $\mathcal{D}$ .*

Conjuntos parcialmente ordenados podem ser graficamente representados por diagramas de Hasse. Esse diagrama é um grafo cujos vértices são elementos do conjunto  $D$  e arcos conectam elementos comparáveis (o maior elemento acima do menor no diagrama). O número mínimo de arcos é representado de forma que outras possíveis comparações são derivadas por transitividade.

A Fig. 3 mostra dois exemplos desses conjuntos, a partir da qual se pode afirmar que:

- $e \preceq d \preceq b \preceq a$  e  $f \preceq d \preceq c \preceq a$ ;  
 $a' \preceq b' \preceq d' \preceq e'$  e  $a' \preceq c' \preceq d' \preceq f'$ ;
- $(b, c)$ ,  $(e, f)$ ,  $(b', c')$  e  $(e', f')$  são não comparáveis;
- $U = \{a, b, c, d\}$  é o conjunto dos majorantes ou “upper-bounds” de  $X$ , ou seja, o conjunto dos elementos maiores que qualquer elemento de  $X$ . O elemento  $d$  é o supremo ou “least upper bound” de  $X$ . Note que  $d$  é o elemento mínimo de  $U$  e caso pertença a  $X$ , então  $d$  é o máximo de  $X$ ;

- $L = \{a', b', c', d'\}$  é o conjunto dos minorantes ou “lower-bounds” de  $X$  (definição análoga) e  $d'$  é o ínfimo ou “greatest lower bound” de  $X$ . Note que  $d'$  é o elemento máximo de  $L$  e caso pertença a  $X$ , então  $d'$  é o mínimo de  $X$ .

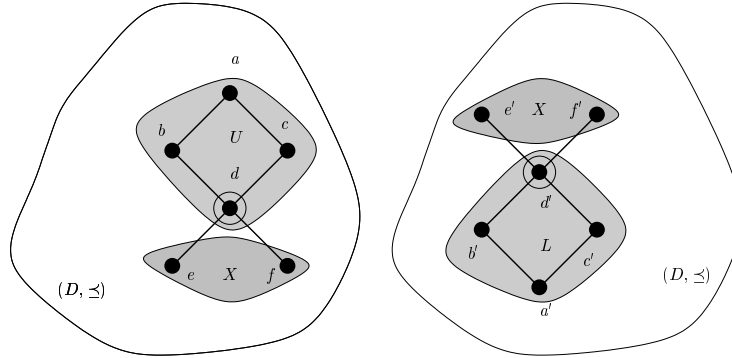


Figura 3: Conjuntos parcialmente ordenados.

**Nota 1.6.** A nomenclatura utilizada em reticulados pode diferir. Na literatura, onde se encontra o termo majorante para “upper-bound”, o termo “upper-bound” é usado como “least upper-bound”.

Quando todos os elementos são comparáveis, o ordenamento é total e o diagrama de Hasse é uma reta.

**Notação 1.7 (Supremo).** Dados dois elementos  $a$  e  $b$  de um conjunto ordenado  $\mathcal{D}$ , o supremo de  $\{a, b\}$  é denotado  $\sup\{a, b\}$  ou  $a \vee b$ .

**Notação 1.8 (Ínfimo).** Dados dois elementos  $a$  e  $b$  de um conjunto ordenado  $\mathcal{D}$ , o ínfimo de  $\{a, b\}$  é denotado  $\inf\{a, b\}$  ou  $a \wedge b$ .

**Definição 1.9 (Semireticulado superior).** Um conjunto ordenado  $\mathcal{D}$  é um semireticulado superior quando existe o supremo de qualquer sub-conjunto finito de  $\mathcal{D}$ .

Esse é o caso do conjunto à esquerda na Fig. 3. Definição análoga existe para semireticulado inferior, que é o caso do conjunto à direita na Fig. 3.

**Definição 1.10 (Reticulado).** Um conjunto ordenado  $\mathcal{D}$  onde existe um supremo e um ínfimo para qualquer sub-conjunto finito de  $\mathcal{D}$  é chamado reticulado ou “lattice”.

Quando os sub-conjuntos considerados podem ser infinitos, têm-se as definições de semireticulados superior e inferior completos, assim como a de reticulado completo.

**Definição 1.11 (Topo e fundo).** O supremo de um conjunto ordenado, quando existe, é denominado topo ou “top” e denotado  $\top$ . Analogamente, o ínfimo de um conjunto ordenado, quando existe, é denominado fundo ou “bottom” e denotado  $\epsilon$ .

### 1.2.2 Elementos de teoria da residuação

Nessa seção consideram-se mapeamentos entre reticulados completos nos quais a relação de ordem entre elementos do domínio é preservada na imagem. O interesse no estudo desses mapeamentos está na ‘solução’ de equações do tipo  $f(x) = b$ . A solução dessa equação requer algum tipo de ‘inversão’ que é tratada pela teoria da residuação (Blyth e Janowitz, 1972).

Por exemplo, se  $f$  for não-sobrejetora, essa equação não terá solução para alguns valores de  $b$  e se  $f$  for não-injetora poderá ter várias soluções. Uma alternativa é considerar o conjunto das chamadas subsoluções, ou seja, os valores de  $x$  que satisfazem a desigualdade  $f(x) \preceq b$  e tomar o máximo desse conjunto, caso exista. Outra possibilidade é considerar o conjunto das chamadas supersoluções, ou seja, os valores de  $x$  que satisfazem a desigualdade  $f(x) \succeq b$  e tomar o mínimo desse conjunto, caso exista.

De maneira geral, dada uma aplicação  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$  são reticulados completos, deseja-se responder às seguintes questões. Para todo  $b \in \mathcal{C}$ :

- existe solução máxima para  $f(x) \preceq b$ ?
- existe solução mínima para  $f(x) \succeq b$ ?

As respostas às questões acima estão baseadas em propriedades de continuidade do mapeamento  $f$ . Isso é discutido a seguir.

**Definição 1.12 (Mapeamento isotônico e antitônico).** *Um mapeamento  $f$  de um conjunto ordenado  $\mathcal{D}$  em um conjunto ordenado  $\mathcal{C}$  é isotônico (antitônico) se  $\forall a, b \in \mathcal{D}$  então  $a \succeq b \Rightarrow f(a) \succeq f(b)$  ( $f(a) \preceq f(b)$ ).*

Um mapeamento isotônico preserva a ordem entre elementos do domínio e da imagem da aplicação, enquanto um antitônico inverte a ordem.

**Definição 1.13 (Semicontinuidade inferior).** *Um mapeamento  $f$  de um reticulado completo  $\mathcal{D}$  em um reticulado completo  $\mathcal{C}$  é semicontínuo inferior ou “lower-semicontinuous” se, para qualquer subconjunto  $X$  (finito ou infinito) de  $\mathcal{D}$ ,*

$$f\left(\bigvee_{x \in X} x\right) = \bigvee_{x \in X} f(x)$$

Aparentemente, semicontinuidade inferior decorre de isotonia, mas isso não é verdade. A Fig. 4 mostra um mapeamento isotônico, mas não-semicontínuo inferior. Nessa figura,  $X = \{x \mid f(x) \preceq b\}$  e  $Y$  é a imagem de  $X$  em  $\mathcal{C}$ . Nesse caso, o supremo de  $X$  não é solução de  $f(x) \preceq b$  e portanto, não pertence a  $X$ . Logo, não existe solução máxima para o problema.

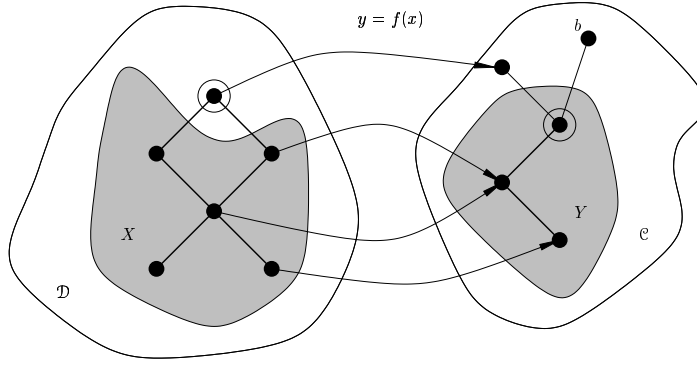


Figura 4: Isotonia.

Já na Fig. 5, a propriedade de semicontinuidade inferior garante que o supremo de  $X$  é solução de  $f(x) \preceq b$  e portanto, pertence a  $X$ . Logo, o supremo de  $X$  é a solução máxima do problema e sua imagem é o elemento máximo de  $Y$ .

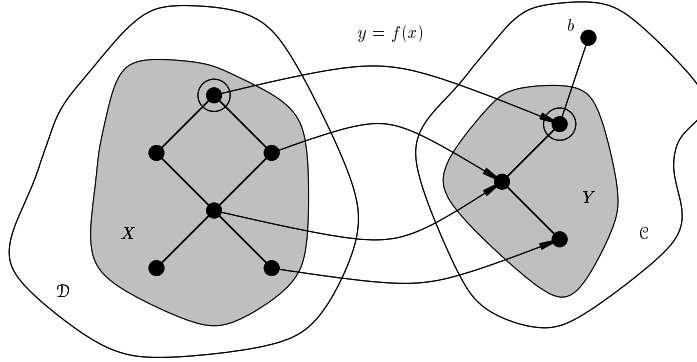


Figura 5: Semicontinuidade inferior.

**Teorema 1.14 (Mapeamento residuado).** *Seja  $f$  um mapeamento isotônico de um reticulado completo  $\mathcal{D}$  em um reticulado completo  $\mathcal{C}$ . Existe uma subsolução máxima  $x_{\max} = f^\sharp(b)$  para a equação  $f(x) = b$  se e somente se  $f(\epsilon) = \epsilon$  e  $f$  é semicontínuo inferior. O mapeamento  $f$  é dito ser residuado e  $f^\sharp$  é seu resíduo.*

O teorema 1.14 é fundamental na definição do resíduo do produto em dióides, que corresponde à operação de divisão, introduzida pela notação 1.36. Por sua vez, o resíduo do produto é extensamente utilizado nos capítulos 3, 4, 5 e 6 sobre controle de GETs.

Ao considerar a solução da equação  $f(x) = b$ , pode-se também modificar o problema de forma a obter o conjunto das supersoluções, ou seja, valores de  $x$  que satisfazem a desigualdade  $f(x) \succeq b$  e tomar o mínimo desse conjunto caso exista. Dessa forma, considerações análogas podem ser feitas e a condição de semicontinuidade inferior é substituída pela de semicontinuidade superior.

**Definição 1.15 (Semicontinuidade superior).** Um mapeamento  $f$  de um reticulado completo  $\mathcal{D}$  em um reticulado completo  $\mathcal{C}$  é *semitínico superior* ou “upper-semicontinuous” se, para qualquer subconjunto  $X$  (finito ou infinito) de  $\mathcal{D}$ ,

$$f\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} f(x)$$

**Teorema 1.16 (Mapeamento dualmente residuado).** Seja  $f$  um mapeamento isotônico de um dióide completo  $\mathcal{D}$  em um dióide completo  $\mathcal{C}$ . Existe uma supersolução mínima  $x_{\min} = f^{\flat}(b)$  para a equação  $f(x) = b$  se e somente se  $f(\top) = \top$  e  $f$  é semitínico superior. O mapeamento  $f$  é dito ser *dualmente residuado* e  $f^{\flat}$  é seu *resíduo dual*.

Embora desnecessário para o desenvolvimento da tese, o teorema 1.16 é enunciado aqui apenas como um resultado dual do teorema 1.14.

**Nota 1.17 (Continuidade).** Um mapeamento é *contínuo* se for tanto semitínico inferior quanto semitínico superior. Nesse caso, o resíduo e o resíduo dual existem, assim como a melhor aproximação de  $b$  por  $f(x)$  tanto inferiormente quanto superiormente.

As seguintes propriedades se verificam para o resíduo e o resíduo dual de um mapeamento  $f$ :

$$x_{\max} = f^{\sharp}(b) \text{ e } x_{\min} = f^{\flat}(b), \text{ quando existem, são únicos} \quad (1.1a)$$

$$f(x_{\max}) \preceq b \text{ e } f(x_{\min}) \succeq b \quad (1.1b)$$

$$f(f^{\sharp}(x)) \preceq x \text{ e } f(f^{\flat}(x)) \succeq x \quad (1.1c)$$

$$f^{\sharp}(f(x)) \succeq x \text{ e } f^{\flat}(f(x)) \preceq x \quad (1.1d)$$

$$f^{\sharp}(f(x)) = x \Leftrightarrow f \text{ injetora} \Leftrightarrow f^{\sharp} \text{ sobrejetora (o mesmo para } f^{\flat}) \quad (1.1e)$$

$$f(f^{\sharp}(x)) = x \Leftrightarrow f^{\sharp} \text{ injetora} \Leftrightarrow f \text{ sobrejetora (o mesmo para } f^{\flat}) \quad (1.1f)$$

As propriedades (1.1a)-(1.1d) decorrem imediatamente das definições de resíduo e resíduo dual. A propriedade (1.1e) estabelece que  $x_{\max} = b$  é a solução máxima de  $f(x) \preceq f(b)$  e a propriedade (1.1f) estabelece que a solução máxima de  $f(x) \preceq b$  é solução (máxima) da igualdade  $f(x) = b$  (analogamente para solução mínima de  $f(x) \succeq b$ ).

### 1.2.3 Equações de ponto fixo

Na seção 1.2.2, discutiu-se a ‘solução’ da equação  $f(x) = b$  através da definição dos conjuntos de subsoluções e supersoluções. Nesta seção, discute-se a solução da equação  $f(x) = x$  denominada equação de ponto fixo ou “fixed-point equation”.

Os principais resultados desta seção são:

- isotonia é uma condição suficiente para existência de pontos fixos de  $f$ ;
- se  $f$  for semicontínua inferior ou superior, então é possível obter soluções extremas de  $f(x) = x$  (máxima ou mínima).

Para isso, considere os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{D}_f^{\natural} = \{x \mid f(x) = x\} \quad \mathcal{D}_f^{\flat} = \{x \mid f(x) \preceq x\} \quad \mathcal{D}_f^{\sharp} = \{x \mid f(x) \succeq x\}$$

Obviamente,  $\mathcal{D}_f^{\natural} = \mathcal{D}_f^{\flat} \cap \mathcal{D}_f^{\sharp}$ . O teorema 1.18 abaixo garante a existência de pontos fixos para um mapeamento isotônico (Tarski, 1955).

**Teorema 1.18 (Teorema de ponto-fixo de Tarski).** *Se  $f$  é isotônica, então  $\mathcal{D}_f^{\natural}$  é não-vazio. Logo,  $\mathcal{D}_f^{\flat}$  e  $\mathcal{D}_f^{\sharp}$  são não-vazios.*

**Definição 1.19 (Mapeamento de fecho e fecho dual).** *Seja  $\mathcal{D}$  um conjunto ordenado e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  um mapeamento isotônico tal que  $f(x) = f(f(x)) \succeq x$ . Então,  $f$  é chamado um mapeamento fechamento ou “closure mapping”. Se  $f(x) = f(f(x)) \preceq x$ , então  $f$  é um mapeamento fechamento dual ou “dual closure mapping”.*

**Lema 1.20.** *Seja  $f$  um mapeamento de um reticulado completo  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{D}$ . Se  $f$  é semicontínua inferior, então  $f^*$  é o menor mapeamento fechamento maior do que  $f$ . Se  $f$  é semicontínuo superior, então  $f_*$  é o maior mapeamento fechamento dual menor do que  $f$ , onde*

$$f^* = \bigvee_{k=0}^{+\infty} f^k \quad f_* = \bigwedge_{k=0}^{+\infty} f^k$$

$$f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ vezes}} \text{ e } f^0(x) = x.$$

Finalmente, os teoremas 1.21 e 1.22 a seguir estabelecem as soluções extremas de  $f(x) = x$ .

**Teorema 1.21.** *Se  $f$  é semicontínuo inferior, então  $\mathcal{D}_f^{\flat} = f^*(\mathcal{D})$ . O elemento mínimo é  $f^*(\epsilon)$ , que pertence também a  $\mathcal{D}_f^{\natural}$  e, portanto, é o elemento mínimo desse subconjunto.*

**Teorema 1.22.** *Se  $f$  é semicontínuo superior, então  $\mathcal{D}_f^{\sharp} = f_*(\mathcal{D})$ . O elemento máximo é  $f_*(\top)$ , que pertence também a  $\mathcal{D}_f^{\natural}$  e, portanto, é o elemento máximo desse subconjunto.*

Estes teoremas são necessários para a demonstração dos teoremas 1.40 e 1.41 da seção 1.3, os quais estão entre os principais resultados da teoria de dióides.

## 1.3 Dióides

O conceito de dióide foi introduzido na seção 1.1 pela definição das operações binárias  $\oplus$  (soma ou adição) e  $\otimes$  (produto ou multiplicação). Essas estruturas algébricas são caracterizadas pela idempotência da operação de adição. Isso permite definir uma relação de ordem parcial em dióides. Portanto, dióides compartilham tanto aspectos da álgebra convencional como dos conjuntos parcialmente ordenados.

Essas estruturas são também denominadas *semianéis idempotentes*, uma vez que a operação de adição define um semigrupo comutativo idempotente, ou *lattice-ordered semigroups*, na teoria de reticulados.

Essa seção fornece uma definição axiomática de dióides segundo Baccelli *et al.* (1992) e estabelece os principais resultados dessa teoria. Muitos deles já foram desenvolvidos na seção anterior, sendo agora aplicados no contexto de dióides.

**Definição 1.23 (Dióide).** *Um dióide é um conjunto  $\mathcal{D}$  dotado das operações  $\oplus$  (soma ou adição) e  $\otimes$  (produto ou multiplicação) que satisfaz os seguintes axiomas:*

**Axioma 1.24 (Associatividade da adição).**

$$\forall a, b, c \in \mathcal{D} \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

**Axioma 1.25 (Comutatividade da adição).**

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad a \oplus b = b \oplus a$$

**Axioma 1.26 (Associatividade da multiplicação).**

$$\forall a, b, c \in \mathcal{D} \quad (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

**Axioma 1.27 (Distributividade da multiplicação em relação à adição).**

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathcal{D} \quad (a \oplus b) \otimes c &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \\ c \otimes (a \oplus b) &= (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) \end{aligned}$$

**Axioma 1.28 (Elemento neutro).**

$$\exists \epsilon \in \mathcal{D} : \forall a \in \mathcal{D} \quad a \oplus \epsilon = a$$

**Axioma 1.29 (Absorção pelo elemento nulo).**

$$\forall a \in \mathcal{D} \quad a \otimes \epsilon = \epsilon \otimes a = \epsilon$$

**Axioma 1.30 (Elemento identidade).**

$$\exists e \in \mathcal{D} : \forall a \in \mathcal{D} \quad a \otimes e = e \otimes a = a$$

**Axioma 1.31 (Idempotência da adição).**

$$\forall a \in \mathcal{D} \quad a \oplus a = a$$

**Nota 1.32.** Como usual, o símbolo de multiplicação  $\otimes$  é frequentemente omitido. Assim,  $ab = a \otimes b$ .

O teorema 1.33 abaixo estabelece formalmente a relação entre dióides e conjuntos parcialmente ordenados.

**Teorema 1.33 (Relação de ordem em dióides).** *Em um dióide  $\mathcal{D}$ , tem-se a seguinte equivalência:*

$$\forall a, b : a = a \oplus b \Leftrightarrow \exists c : a = b \oplus c$$

*Essas afirmativas definem uma relação de ordem (parcial) denotada  $\preceq$  como:*

$$b \preceq a \Leftrightarrow a = a \oplus b$$

*Essa relação de ordem é compatível com a adição,*

$$b \preceq a \Rightarrow \{\forall c, b \oplus c \preceq a \oplus c\}$$

*e com a multiplicação,*

$$b \preceq a \Rightarrow \{\forall c, bc \preceq ac\}$$

*(o mesmo para o produto à esquerda). Dois elementos  $a$  e  $b$  em  $\mathcal{D}$  sempre têm um supremo, dado por  $a \oplus b$ , sendo  $\epsilon$  o elemento de fundo de  $\mathcal{D}$ .*

Associando-se o supremo à operação de adição em dióides, define-se uma estrutura de semireticulado superior. Além disso, o elemento neutro da adição  $\epsilon$  em dióides garante a existência do elemento de fundo. Como um semireticulado superior com um elemento de fundo é um reticulado (Baccelli *et al.*, 1992, Teo. 4.27), dióides são portanto reticulados.

**Definição 1.34 (Subdióide).** *Um subconjunto  $\mathcal{C}$  de um dióide  $\mathcal{D}$  é denominado um subdióide de  $\mathcal{D}$  se  $\{e, \epsilon\} \in \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}$  é fechado para as operações  $\oplus$  e  $\otimes$ .*

**Definição 1.35 (Dióide completo).** *Um dióide é completo se for fechado para somas infinitas e se a distributividade da multiplicação se estender para somas infinitas.*



Num dióide completo, o elemento de topo do dióide existe e é igual à soma de todos os seus elementos. Um dióide completo é um reticulado completo cujos elementos de topo e de fundo são denotados  $\top$  e  $\epsilon$ , respectivamente.

A seguir, a operação de divisão é definida como o resíduo do produto. Pode-se mostrar que  $L_a(x) = a \otimes x$  e  $R_a(x) = x \otimes a$  são aplicações semicontínuas inferiores devido à distributividade da multiplicação em relação à adição. Segundo a definição 1.13, a condição de semicontinuidade inferior em dióides é obtida pela substituição do supremo pela soma:

$$f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) = \bigoplus_{x \in X} f(x) \quad (1.2)$$

Como  $L_a(\epsilon) = R_a(\epsilon) = \epsilon$ , devido ao teorema 1.14, essas aplicações são ambas residuadas e a seguinte notação se aplica.

**Notação 1.36 (Divisão).** *Sejam  $L_a(x) = a \otimes x$  e  $R_a(x) = x \otimes a$  mapeamentos semicontínuos inferiores. Esses mapeamentos são ambos residuados e seus resíduos são denotados:*

$$\begin{aligned} L_a^\sharp(x) &= a \backslash x = \frac{x}{a} && \text{('divisão à esquerda' por } a\text{)} \\ R_a^\sharp(x) &= x / a = \frac{x}{a} && \text{('divisão à direita' por } a\text{)} \end{aligned}$$

A notação  $c = a \backslash b$  definida num dióide  $\mathcal{D}$  possui o seguinte significado:  $c$  é o maior elemento de  $\mathcal{D}$  que multiplicado por  $a$  à esquerda é menor do que  $b$ . Em outras palavras,  $x_{\max} = c$  é a solução máxima de  $ax \preceq b$ . Analogamente para a divisão à direita. A partir da notação 1.36 acima, várias relações envolvendo divisão podem ser derivadas. Algumas delas estão reunidas no apêndice A.

**Definição 1.37 (Estrela de “Kleene”).** *Dado  $a$  num dióide  $\mathcal{D}$  qualquer, define-se a operação  $*$  ou “Kleene star” como  $a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$ , onde  $a^k = a \otimes a \otimes \dots \otimes a$  ( $k$  vezes).*

A partir dessa operação, define-se a aplicação estrela de “Kleene” como  $K_s(x) = x^*$ . Embora essa aplicação não seja em geral residuada, como discutido em Cottenceau (1999), existe solução máxima para  $K_s(x) \preceq b$  quando se restringe  $b$  à imagem de  $K_s$ , conforme o lema 1.38 a seguir.

**Lema 1.38.** *(Cottenceau et al., 2001, Cor. 16) A inequação  $x^* \preceq b^*$  tem solução máxima  $x_{\max} = b^*$ . Além disso,  $x_{\max}$  satisfaz a igualdade.*

Uma maneira simples de verificar se  $a = a^*$  é dada pelo lema 1.39 a seguir.

**Lema 1.39.** *Dado  $a$  num dióide  $\mathcal{D}$  qualquer,  $a^* = a$  se e somente se  $a^2 = a \succeq e$ .*

*Demonstração.*  $\Rightarrow$  Se  $a^* = a$ , então  $e \preceq a$  pois  $e \preceq a^*$  e, portanto,  $a \preceq a^2$  devido à isotonia do produto. Porém,  $a^2 \preceq a$  pois  $a^2 \preceq a^*$ . Logo,  $a \preceq a^2 \preceq a$  e portanto,  $a^2 = a$ .  $\Leftarrow$  Se  $a^2 = a \succeq e$ , então  $a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^2.a \oplus \dots = e \oplus a \oplus a \oplus \dots = a$ .  $\square$

Os teoremas 1.40 e 1.41 a seguir estabelecem as soluções mínimas e máximas das equações de ponto fixo  $x = ax \oplus b$  e  $x = a \dot{x} x \wedge b$ , respectivamente, definidas num dióide completo.

**Teorema 1.40.** *Dados  $a$  e  $b$  num dióide completo  $\mathcal{D}$  e  $f(x) = ax \oplus b$ , então*

1.  $a^*b$  é a menor solução de  $f(x) \preceq x$  e  $f(x) = x$ .
2. qualquer solução de  $f(x) \preceq x$  e  $f(x) = x$  satisfaz  $x = a^*x$ .

A demonstração do teorema 1.40 acima usa o teorema 1.21. Para  $f(x) = ax \oplus b$ , pode-se mostrar que  $f^*(x) = a^*(x \oplus b)$ . Logo,  $f^*(\epsilon) = a^*b$  é a solução mínima de  $x \succeq ax \oplus b$ . Essa solução é também solução da igualdade  $x = ax \oplus b$ . Esta equação ocorre no modelo linear de um GET, conforme será discutido no capítulo 2.

**Teorema 1.41.** *Dados  $a$  e  $b$  num dióide completo  $\mathcal{D}$  e  $f(x) = a \dot{x} x \wedge b$ , então*

1.  $a^* \dot{x} b$  é a maior solução de  $f(x) \succeq x$  e  $f(x) = x$ .
2. qualquer solução de  $f(x) \succeq x$  e  $f(x) = x$  satisfaz  $x = a^* \dot{x} x$ .

A demonstração desse teorema usa o teorema 1.22. Para  $f(x) = a \dot{x} x \wedge b$ , pode-se mostrar que  $f_*(x) = a^* \dot{x} (x \wedge b)$ . Logo,  $f_*(\top) = a^* \dot{x} b$  é a solução máxima de  $x \preceq a \dot{x} x \wedge b$ . Essa solução é também solução da igualdade  $x = a \dot{x} x \wedge b$ . Embora este teorema não seja utilizado na tese, juntamente com o teorema 1.40, está entre os principais resultados da teoria de dióides.

### 1.3.1 Matrizes

A partir de um dióide  $\mathcal{D}$  qualquer, pode-se definir o conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$  com elementos em  $\mathcal{D}$ . Sobre esse conjunto, as seguintes operações são definidas.

**Definição 1.42 (Soma de matrizes).** *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes quadradas de ordem  $n$  com elementos em  $\mathcal{D}$ . A soma de  $A$  e  $B$  é definida por:*

$$A \oplus B = [a_{ij} \oplus b_{ij}]$$

**Definição 1.43 (Produto de matrizes).** *Sejam  $A$  e  $B$  duas matrizes quadradas de ordem  $n$  com elementos em  $\mathcal{D}$ . O produto de  $A$  por  $B$  é definido por:*

$$A \otimes B = \left[ \bigoplus_{k=1}^n (a_{ik} \otimes b_{kj}) \right]$$

Note que a soma e o produto de matrizes são definidos da maneira convencional, substituindo-se as operações usuais de soma e multiplicação de escalares pela adição  $\oplus$  e multiplicação  $\otimes$  de escalares em dióides.

**Lema 1.44 (Dióide de matrizes).** *O conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$  com elementos num dióide  $\mathcal{D}$  qualquer, dotado das operações de soma e multiplicação dadas pelas definições 1.42 e 1.43 é um dióide denotado  $\mathcal{D}^{n \times n}$ . O elemento identidade de  $\mathcal{D}^{n \times n}$  é denotado simplesmente  $e$ , correspondendo à matriz identidade formada por elementos  $e$  na diagonal e  $\epsilon$  fora da diagonal. O elemento nulo é denotado  $\epsilon$ , correspondendo à matriz nula formada somente por elementos  $\epsilon$ .*

Note que o produto de matrizes quadradas é uma matriz quadrada e portanto, a multiplicação permanece uma operação interna. Isso dá a  $\mathcal{D}^{n \times n}$  uma estrutura de dióide. Problemas com matrizes não-quadradas podem ser reduzidos ao caso quadrado, completando linhas e colunas com  $\epsilon$  de forma a torná-las quadradas.

**Definição 1.45 (Relação de ordem em matrizes).** *Dados  $A$  e  $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$  tem-se*

$$A \preceq B \Leftrightarrow a_{ij} \preceq b_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

**Lema 1.46 (Divisão de matrizes).** *Dadas duas matrizes  $A \in \mathcal{D}^{m \times n}$  e  $B \in \mathcal{D}^{m \times p}$ , a divisão à esquerda de  $B$  por  $A$  é uma matriz  $n \times p$  dada por:*

$$A \backslash B = \left[ \bigwedge_{k=1}^m (a_{ki} \backslash b_{kj}) \right]$$

*A divisão à direita é definida analogamente.*

Note que a divisão à esquerda corresponde a uma espécie de *produto* à esquerda de  $B$  pela *transposta* de  $A$ , onde a multiplicação de escalares é substituída pela divisão à esquerda e a adição pelo ínfimo. Definição análoga pode ser obtida para a divisão à direita.

**Nota 1.47.** *Isso não significa que a divisão possa ser obtida pela multiplicação de uma matriz à esquerda (ou à direita), pois nesse caso ter-se-ia a matriz inversa.*

Finalmente, para se obter  $A^*$  a partir de uma matriz  $A$  dada, o seguinte lema é usado.

**Lema 1.48.** *Seja  $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  uma matriz particionada em quatro blocos, ou seja,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

*Nesse caso,*

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Séries de potência e polinômios

A partir de um dióide completo  $\mathcal{D}$ , pode-se definir o conjunto das séries de potência em  $m$  variáveis com coeficientes em  $\mathcal{D}$ .

**Definição 1.49 (Série de potência).** *Uma série formal de potência  $a$  em  $m$  variáveis comutativas  $x_i$  ( $i = 1 \dots m$ ) com coeficientes  $a_k$  em  $\mathcal{D}$ ,  $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ , é definida por:*

$$a = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^m} a_k x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$$

*Notação:*  $a = (a_k)$ .

**Definição 1.50 (Soma de séries de potência).** *Sejam  $a$  e  $b$  duas séries de potência. A soma de  $a$  e  $b$  é definida por:*

$$a \oplus b = (a_k \oplus b_k)$$

**Definição 1.51 (Produto de séries de potência).** *Sejam  $a$  e  $b$  duas séries de potência. O produto de  $a$  por  $b$  é definido por:*

$$a \otimes b = \left( \bigoplus_{i+j=k} a_i \otimes b_j \right)$$

**Lema 1.52 (Dióide das séries de potência).** *O conjunto das séries de potência em  $m$  variáveis com coeficientes num dióide completo  $\mathcal{D}$ , dotado das operações de soma e multiplicação definidas em 1.50 e 1.51 é um dióide denotado  $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_m]]$ . O elemento identidade de  $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_m]]$  é denotado simplesmente  $e$ , correspondendo à série com coeficientes  $a_0 = e$ ,  $a_k = \epsilon$  para  $k \neq 0$ . O elemento nulo é denotado  $\epsilon$ , correspondendo à série com coeficientes iguais a  $\epsilon$ .*

**Definição 1.53 (Relação de ordem em séries).** *Dados  $a$  e  $b \in \mathcal{D}[[x_1, \dots, x_m]]$  tem-se*

$$a \preceq b \Leftrightarrow a_k \preceq b_k \quad \forall k$$

**Lema 1.54 (Divisão de séries de potência).** *Dadas duas séries de potência  $a$  e  $b$ , a divisão à esquerda de  $b$  por  $a$  é uma série de potência dada por:*

$$a \backslash b = \left( \bigwedge_{i-j=k} a_j \backslash b_i \right)$$

*A divisão à direita é definida analogamente.*

**Definição 1.55 (Suporte, grau e valoração).** *Dado  $a \in \mathcal{D}[[x_1, \dots, x_m]]$  define-se*

1. *suporte:*  $\text{supo}(a) = \{k \in \mathbb{Z}^m \mid a_k \neq \epsilon\}$

2. grau:  $\text{grau}(a) = \sup\{\text{supo}(a)\}$

3. valoração:  $\text{val}(a) = \inf\{\text{supo}(a)\}$

**Exemplo 1.56.**  $a = a_1x^2y^5 \oplus a_2x^4y$  é um polinômio em duas variáveis  $(x, y)$  com coeficientes  $a_1$  e  $a_2$ ,  $\text{supo}(a) = \{(2, 5), (4, 1)\}$ ,  $\text{grau}(a) = (4, 5)$  e  $\text{val}(a) = (2, 1)$ .

**Definição 1.57 (Polinômio).** Um polinômio é uma série de potência finita com expoentes em  $\mathbb{N}$ .

Portanto, polinômios possuem suporte finito. Quando reduzido a um único elemento é denominado monômio. Pode-se mostrar que o conjunto dos polinômios é um subdióide de  $\mathcal{D}[[x_1, \dots, x_m]]$  denotado  $\mathcal{D}[x_1, \dots, x_m]$ .

**Nota 1.58.** A divisão de séries de potência pode gerar coeficientes negativos. Nesse caso, têm-se as chamadas séries de Laurent. Dados dois polinômios  $a$  e  $b$ , tem-se que  $\bigwedge_{i-j=k} a_j \backslash b_i = \epsilon$  para  $k$  negativo se os expoentes estão restritos a  $\mathbb{N}$ , caso contrário a divisão de polinômios não produz um polinômio.

Essa observação pode ser feita para outros subconjuntos das séries de potência. Por exemplo, a divisão de séries ditas racionais, extensamente utilizada a partir do capítulo 4, pode resultar numa série não-racional. Isso é discutido na seção 2.5.2.

## 1.4 Conclusão

Os principais resultados deste capítulo são resumidos a seguir. Um dióide é um conjunto dotado de duas operações  $\oplus$  (soma ou adição) e  $\otimes$  (produto ou multiplicação), associativas e com elementos neutros  $\epsilon$  e  $e$  respectivamente, tais que:  $\oplus$  é comutativa e idempotente ( $a \oplus a = a$ ),  $\otimes$  é distributiva em relação a  $\oplus$  e  $\epsilon$  é o elemento nulo da multiplicação ( $a \otimes \epsilon = \epsilon \otimes a = \epsilon$ ). A idempotência da adição define uma relação de ordem parcial que confere aos dióides propriedades de conjuntos parcialmente ordenados.

No estudo dos mapeamentos sobre dióides, a propriedade de semicontinuidade (superior ou inferior) permite obter diversos resultados. Notadamente, a obtenção do resíduo do produto (à esquerda e à direita) define a operação de divisão (à esquerda e à direita). Assim,  $c = a \backslash b$  é o maior elemento que multiplicado por  $a$  à esquerda é menor do que  $b$  e  $c = b / a$  é o maior elemento que multiplicado por  $a$  à direita é menor do que  $b$ .

Outro resultado importante é dado pelo teorema 1.40. Dados  $a$  e  $b$  num dióide completo e  $f(x) = ax \oplus b$ , então  $a^*b$  é a solução mínima de  $f(x) \preceq x$  e  $f(x) = x$ . Como será visto no capítulo 2, um GET pode ser descrito pela seguinte equação de estado:

$$X = AX \oplus BU$$

Pelo teorema 1.40, essa equação tem solução mínima  $X = (A^*B)U$ . No capítulo 2 mostra-se que esse modelo pode ser descrito no dióide das séries de potência em uma ou duas variáveis.

## Capítulo 2

# Modelos Lineares de GETs em Dióides

### 2.1 Introdução

Um sistema a eventos discretos ou SED ocorre, por exemplo, em processos de manufatura, onde existem recursos a serem compartilhados e/ou tarefas sujeitas à sincronização de eventos. Um grafo a eventos temporizado ou GET é uma classe particular de redes de Petri capaz de modelar um SED que apresenta apenas aspectos de sincronização de eventos.

O equacionamento da dinâmica de um GET baseado na operação de maximização conduz a modelos não-lineares na álgebra convencional. Neste capítulo, mostra-se que modelos lineares desses sistemas podem ser obtidos na álgebra de dióides, formalmente introduzida no capítulo 1.

O modelo obtido neste capítulo corresponde a um modelo no espaço de estado análogo ao obtido na teoria de sistemas lineares. Neste caso, obtém-se uma representação entrada-saída do sistema denominada função de transferência.

A ênfase deste capítulo se dá na modelagem de GETs através de estruturas algébricas similares às transformadas na teoria convencional de sistemas. Entretanto, a definição formal dessas estruturas requer uma fundamentação algébrica que recorre a isomorfismos, quocientes de dióides por congruências e teoria da residuação. Isso contribui pouco para a compreensão geral da tese, motivo pelo qual se optou por uma apresentação mais operacional do que formal do assunto. Em Baccelli *et al.* (1992) encontra-se material detalhado sobre o assunto, incluindo as definições formais das estruturas algébricas utilizadas nessa tese.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A seção 2.2 define um grafo a eventos temporizado e estabelece as regras de disparo das transições que determinam sua dinâmica. Nessa seção são introduzidas as variáveis utilizadas no equacionamento desses sistemas: datadores e contadores - seções 2.2.2 e 2.2.3, respectivamente. A partir dessas seções, o modelo linear de um GET é obtido para diversas estruturas algébricas que conduzem de maneira gradual à representação no dióide

bidimensional da seção 2.3. Essa representação corresponde ao modelo linear no espaço de estado que será utilizado no restante da tese para projetar o controle de um GET. Esse modelo dá origem na seção 2.4 à função de transferência do sistema, cujas propriedades são estudadas na seção 2.5.

## 2.2 Grafo a eventos temporizado (GET)

**Definição 2.1 (GET).** *Uma rede de Petri é denominada um grafo a eventos se cada lugar tem exatamente uma transição de chegada e uma transição de partida. Um grafo a eventos é dito temporizado (GET) se existe um tempo de espera associado a cada lugar do grafo.*

Nesse caso, uma ficha ao entrar num lugar deve cumprir o tempo de espera associado a este lugar antes que possa contribuir para a habilitação da transição de partida desse lugar. Em Ramamoorthy e Ho (1980), diversas propriedades de GETs são demonstradas.

**Nota 2.2.** *A temporização de um GET pode estar associada ao tempo de disparo das transições. Entretanto, nesta tese considera-se que o disparo de uma transição é instantâneo, ou seja, o tempo decorrido entre o início e a conclusão do disparo é nulo. Essa escolha porém, não representa perda de generalidade (Baccelli et al., 1992).*

A Fig. 6 abaixo representa um GET, onde os lugares são representados por círculos e as transições por linhas verticais conectadas por arcos direcionados. Como numa rede de Petri qualquer, transições se conectam apenas a lugares e vice-versa. As fichas ou “tokens” são representadas dentro dos lugares por pontos e os tempos de espera (em unidades de tempo) por barras verticais.

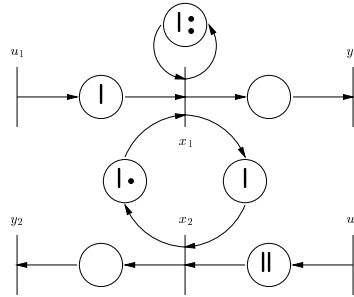


Figura 6: Exemplo de um GET.

**Nota 2.3.** *Embora a modelagem de GETs na álgebra de dióides permita tempos de espera pertencentes ao conjunto dos números reais e possivelmente variantes no tempo (Baccelli et al., 1992), os GETs considerados nesta tese apresentam apenas tempos de espera constantes, inteiros e positivos.*

Cada transição recebe um nome, marcado ao lado da transição. Transições de entrada possuem apenas lugares de partida e transições de saída apenas lugares de chegada. As demais transições são



denominadas internas. No GET da Fig. 6,  $u_1$  e  $u_2$  são as transições de entrada,  $y_1$  e  $y_2$  as transições de saída e  $x_1$ ,  $x_2$  são as transições internas ou estados do sistema.

### 2.2.1 Dinâmica

A dinâmica de um GET é dada pelas mesmas regras de habilitação e disparo de uma rede de Petri, acrescida da regra de temporização das fichas. Um mecanismo de temporização global possui valor inicial  $t = 0$  e a numeração dos disparos de cada transição atribui valor  $k = 0$  ao primeiro disparo da transição que ocorre em  $t \geq 0$ , por convenção. Assume-se que as fichas da marcação inicial já cumpriram seu tempo de espera (estando disponíveis desde  $t = -\infty$ ) e que as transições internas e de saída disparam assim que habilitadas (solução mínima). Em Baccelli *et al.* (1992), encontra-se uma discussão completa sobre essas condições “canônicas”.

Um exemplo da dinâmica do GET da Fig. 6 é mostrado na Fig. 7. Suponha que em  $t = 0$  ocorre um disparo em cada transição de entrada. Instantaneamente uma ficha é depositada no lugar de partida de cada transição. Nesse caso, o disparo da transição  $x_1$ , que deveria ocorrer numa rede de Petri convencional, não ocorre devido à temporização do lugar de partida de  $u_1$ . O mesmo ocorre com  $x_2$ . O disparo de  $x_1$  se dará apenas em  $t = 1$ , quando a ficha proveniente de  $u_1$  terá cumprido seu tempo de espera de uma unidade de tempo. Logo, a transição  $x_1$  se torna habilitada em  $t = 1$  e dispara, removendo uma ficha de seus lugares de chegada e depositando uma ficha em cada um de seus lugares de partida. A transição  $x_2$  será habilitada apenas em  $t = 2$ .

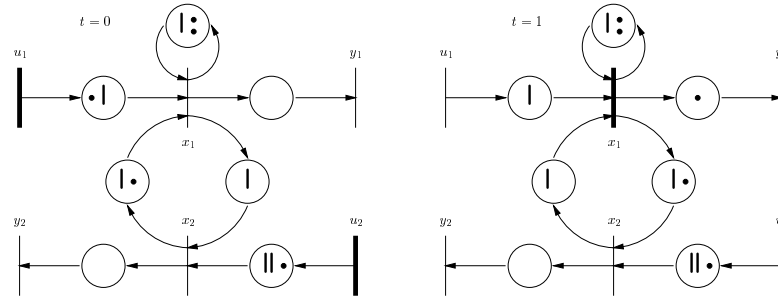


Figura 7: Dinâmica de um GET.

### 2.2.2 Datadores

Nesta seção equaciona-se a dinâmica de um GET de forma que se possa descrever a sequência temporal de disparo das diversas transições para uma dada sequência temporal de disparo da entrada. Assume-se que a sequência de disparo da entrada é livre e deve ser fornecida externamente.

As variáveis consideradas nesta seção são do tipo datadores ou “daters”.

**Definição 2.4 (Datadores).** *Um datador é uma variável  $x(k)$  associada a uma transição que corresponde ao instante de tempo no qual ocorre o evento de número  $k$  dessa transição.*

Uma definição formal e precisa é dada em Baccelli *et al.* (1992, Def. 5.5), onde datadores são definidos como mapeamentos não-decrescentes. Entretanto, a definição 2.4 é suficiente para a compreensão da maioria dos conceitos apresentados nesse capítulo.

**Nota 2.5.** *Datadores são sequências temporais não-decrescentes, pois os eventos se sucedem um após o outro no tempo e aos quais são atribuídos números de sequência em ordem crescente de ocorrência. No entanto, vários eventos podem ocorrer na mesma data.*

Assim, para o sistema da Fig. 6, podem-se escrever as seguintes equações:

$$x_1(k) = \max\{1 + x_1(k-2), 1 + x_2(k-1), 1 + u_1(k)\} \quad (2.1a)$$

$$x_2(k) = \max\{1 + x_1(k), 2 + u_2(k)\} \quad (2.1b)$$

$$y_1(k) = x_1(k) \quad (2.1c)$$

$$y_2(k) = x_2(k) \quad (2.1d)$$

A operação de maximização é uma consequência direta da sincronização. Uma transição  $x_i$  dispara no tempo máximo entre os instantes de tempo de disparo das transições  $x_j$  conectadas a  $x_i$  somados ao respectivo tempo de permanência do lugar que conecta  $x_j$  a  $x_i$ . A marcação inicial apenas introduz um deslocamento na numeração dos eventos de cada transição. Isso está representado nas equações (2.1) acima.

Conforme o exemplo da Fig. 7, o primeiro evento ( $k = 0$ ) de cada transição de entrada ocorre em  $t = 0$ . Logo,  $u_1(0) = u_2(0) = 0$  e o primeiro evento de  $x_1$  e  $y_1$  ocorre em  $t = 1$  assim como o de  $x_2$  e  $y_2$  em  $t = 2$ , segundo as equações:

$$x_1(0) = \max\{1 + x_1(-2), 1 + x_2(-1), 1 + u_1(0)\} = 1 \quad \text{pois } x_1(-2) = x_2(-1) = -\infty \quad (2.2a)$$

$$x_2(0) = \max\{1 + x_1(0), 2 + u_2(0)\} = 2 \quad (2.2b)$$

$$y_1(0) = x_1(0) = 1 \quad (2.2c)$$

$$y_2(0) = x_2(0) = 2 \quad (2.2d)$$

Estas equações são não-lineares quando escritas na álgebra convencional. Entretanto, definindo-se as operações de maximização e soma usual como as operações  $\oplus$  e  $\otimes$ , respectivamente, de um dióide apropriado, obtêm-se equações lineares.

**Definição 2.6 (Álgebra Max-plus).** *O conjunto  $\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$  dotado das operações  $\max$  como  $\oplus$  e adição usual como  $\otimes$  com elementos  $e$  e  $\epsilon$  correspondendo a zero e  $-\infty$ , respectivamente, é denominado álgebra Max-plus, também denotada  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ . O elemento  $+\infty$  é o elemento de topo do conjunto denotado  $\top$ .*

Esta álgebra é apropriada para representar um GET descrito por meio de datadores. Nesse caso, as equações (2.1) podem ser escritas como:

$$x_1(k) = 1 \otimes x_1(k-2) \oplus 1 \otimes x_2(k-1) \oplus 1 \otimes u_1(k) \quad (2.3a)$$

$$x_2(k) = 1 \otimes x_1(k) \oplus 2 \otimes u_2(k) \quad (2.3b)$$

$$y_1(k) = x_1(k) \quad (2.3c)$$

$$y_2(k) = x_2(k) \quad (2.3d)$$

Para se obter equações recursivas em apenas uma variável de estado, substitui-se  $x_2(k)$  na equação de  $x_1(k)$ . Logo,

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1x_1(k-2) \oplus 1x_2(k-1) \oplus 1u_1(k) \\ &= 1x_1(k-2) \oplus 1[1x_1(k-1) \oplus 2u_2(k-1)] \oplus 1u_1(k) \\ &= 2x_1(k-1) \oplus 1x_1(k-2) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \\ &= (2 \oplus 1)x_1(k-1) \oplus 1x_1(k-2) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \\ &= 2x_1(k-1) \oplus 1x_1(k-1) \oplus 1x_1(k-2) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \\ &= 2x_1(k-1) \oplus 1[x_1(k-1) \oplus x_1(k-2)] \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \\ &= 2x_1(k-1) \oplus 1x_1(k-1) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \\ &= (2 \oplus 1)x_1(k-1) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \\ &= 2x_1(k-1) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nas equações acima foram usadas duas regras de simplificação. A primeira é óbvia, pois  $2 = 2 \oplus 1$  no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ . Já a segunda, dada por  $x_1(k-1) = x_1(k-1) \oplus x_1(k-2)$ , é válida pois  $x_1(k-1) \succeq x_1(k-2)$ . Isto ocorre porque  $x_1(k)$  é um datador, e portanto uma função não-decrescente de  $k$ .

Analogamente, substituindo-se  $x_1(k)$  na equação em  $x_2(k)$  tem-se

$$\begin{aligned} x_2(k) &= 1x_1(k) \oplus 2u_2(k) \\ &= 1[2x_1(k-1) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1)] \oplus 2u_2(k) \\ &= 3x_1(k-1) \oplus 4u_2(k-1) \oplus 2u_1(k) \oplus 2u_2(k) \\ &= 2[1x_1(k-1) \oplus 2u_2(k-1)] \oplus 2u_1(k) \oplus 2u_2(k) \\ &= 2x_2(k-1) \oplus 2u_1(k) \oplus 2u_2(k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Como  $y_1(k) = x_1(k)$  e  $y_2(k) = x_2(k)$ , obtém-se uma relação entrada-saída de primeira ordem para o sistema, conforme as equações (2.6) abaixo.

$$y_1(k) = 2y_1(k-1) \oplus 1u_1(k) \oplus 3u_2(k-1) \quad (2.6a)$$

$$y_2(k) = 2y_2(k-1) \oplus 2u_1(k) \oplus 2u_2(k) \quad (2.6b)$$

De forma semelhante à transformada  $z$  na teoria de sistemas, onde  $z^{-1}$  pode ser interpretado como o operador atraso, define-se o operador atraso em contagem  $\gamma$  como  $\gamma x(k) = x(k-1)$ .

Logo, as equações (2.6) podem ser escritas em termos deste operador como:

$$y_1 = (2\gamma)y_1 \oplus 1u_1 \oplus (3\gamma)u_2 \quad (2.7)$$

$$y_2 = (2\gamma)y_2 \oplus 2u_1 \oplus 2u_2 \quad (2.8)$$

Pelo teorema 1.40, as equações acima têm solução mínima

$$y_1 = 1(2\gamma)^*u_1 \oplus 3\gamma(2\gamma)^*u_2 \quad (2.9a)$$

$$y_2 = 2(2\gamma)^*u_1 \oplus 2(2\gamma)^*u_2 \quad (2.9b)$$

Na forma matricial para  $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}'$  e  $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}'$ , tem-se:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 3\gamma \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (2\gamma)^*U \quad (2.10)$$

A equação acima é facilmente reconhecida como uma relação entrada-saída na forma  $Y = HU$ , onde  $H$  é a função de transferência em  $\gamma$  do sistema. Essa representação é denominada transformada  $\gamma$ .

Uma interpretação física pode ser dada aos elementos de  $H$  a partir do grafo da Fig. 6. O caminho simples entre  $u_1$  e  $y_1$  introduz um atraso de 1 unidade de tempo ( $h_{11}$ ) e entre  $u_2$  e  $y_1$  de 3 unidades de tempo e 1 ficha ( $h_{12}$ ). Já os caminhos simples entre  $u_1$  e  $y_2$  ( $h_{21}$ ) e  $u_2$  e  $y_2$  ( $h_{22}$ ) introduzem um atraso de 2 unidades de tempo cada um. O termo  $(2\gamma)^*$  introduz uma periodicidade no sistema de um evento a cada 2 unidades de tempo, como será visto na seção 2.5.2.

Os resultados acima mostram que é possível obter um modelo linear para um GET tanto na forma de equações recursivas (2.9), quanto na forma de equações algébricas (2.10).

Aplicando-se agora o operador  $\gamma$  diretamente nas equações (2.3) tem-se:

$$x_1 = (1\gamma^2)x_1 \oplus (1\gamma)x_2 \oplus 1u_1 \quad (2.11a)$$

$$x_2 = 1x_1 \oplus 2u_2 \quad (2.11b)$$

Substituindo-se  $x_2$  em  $x_1$  e  $y_1 = x_1$  na equação (2.11a) acima obtém-se

$$\begin{aligned} y_1 &= (1\gamma^2)y_1 \oplus (1\gamma)[1y_1 \oplus 2u_2] \oplus 1u_1 \\ &= (2\gamma \oplus 1\gamma^2)y_1 \oplus 1u_1 \oplus (3\gamma)u_2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pelo teorema 1.40, a equação (2.12) têm solução mínima

$$y_1 = 1(2\gamma \oplus 1\gamma^2)^*u_1 \oplus 3\gamma(2\gamma)^*u_2 \quad (2.13)$$

Comparando-se as equações (2.9a) e (2.13) nota-se uma equivalência entre  $2\gamma$  e  $(2\gamma \oplus 1\gamma^2)$ . De fato, esses elementos são iguais na álgebra da transformada  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} 2\gamma \oplus 1\gamma^2 &= (2 \oplus 1)\gamma \oplus 1\gamma^2 = 2\gamma \oplus 1\gamma \oplus 1\gamma^2 \\ &= 2\gamma \oplus 1(\gamma \oplus \gamma^2) \\ &= 2\gamma \oplus 1\gamma = (2 \oplus 1)\gamma = 2\gamma \end{aligned} \quad (2.14)$$

A simplificação  $\gamma = (\gamma \oplus \gamma^2)$  pode ser descrita como:

$$t\gamma^l \oplus t\gamma^m = t\gamma^{\min(l,m)} \quad (2.15)$$

Essa simplificação é possível devido à consideração de trajetórias não-decrescentes. Portanto, a álgebra que envolve a transformada  $\gamma$  deve ser definida de forma a considerar a regra de simplificação (2.15). Essa discussão entretanto, será adiada até a seção 2.3, quando se estabelece a representação de um GET no dióide bidimensional que será utilizado na tese. Por enquanto, formalizam-se os resultados mostrados acima.

De maneira geral, qualquer GET pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^M (A_i x(k-i) \oplus B_i u(k-i)) \quad (2.16a)$$

$$y(k) = \bigoplus_{i=0}^M C_i x(k-i) \quad (2.16b)$$

Nas equações acima,  $u$ ,  $x$  e  $y$  são vetores de datadores cujas dimensões são iguais ao número de transições de entrada, de transições internas e de saída do sistema, respectivamente. As matrizes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  possuem dimensões apropriadas com elementos em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  e  $M$  é o número máximo de fichas existentes na marcação inicial de cada lugar.

A forma canônica da equação (2.16) acima é obtida quando aparece somente  $x(k-1)$  no lado direito das equações. Para obtê-la é necessário resolver a parte implícita  $A_0 x(k)$ , caso exista.

Pelo teorema 1.40, a solução mínima  $x_{\min}$  da equação implícita  $x = ax \oplus b$  é  $x_{\min} = a^*b$  sempre que  $a^*$  puder ser definida. Pode-se mostrar que se um GET é vivo (não-bloqueado), então  $A_0^*$  é finita (Baccelli *et al.*, 1992, Teo. 2.66) e  $x(k)$  pode ser escrito como:

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^M (A_0^* A_i x(k-i) \oplus A_0^* B_i u(k-i)) \quad (2.17)$$

O próximo passo é clássico na teoria de sistemas e consiste em aumentar a dimensão do vetor de estado, incorporando versões atrasadas das variáveis  $x$  e  $u$ . Como consequência, qualquer GET

pode ser descrito pelas seguintes equações canônicas:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (2.18a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.18b)$$

Nessas equações, as transições disparam assim que habilitadas e  $x(k) = \epsilon$  para  $k < 0$ , ou seja, as fichas da marcação inicial estão disponíveis desde  $t = -\infty$ .

Aplicando-se então o operador  $\gamma$  nas equações (2.18), obtém-se:

$$X = (\gamma A)X \oplus BU \quad (2.19a)$$

$$Y = CX \quad (2.19b)$$

A solução mínima das equações (2.19) é dada pelo teorema 1.40. Logo,  $Y = C(\gamma A)^*BU$  e a função de transferência do sistema é por definição  $H = C(\gamma A)^*B$ .

Para o exemplo dado, obtém-se as equações na forma (2.16) diretamente a partir das equações (2.3) escritas na forma matricial, ou seja,

$$x(k) = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} x(k-2) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 2 \end{pmatrix} u(k) \quad (2.20a)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} e & \epsilon \\ \epsilon & e \end{pmatrix} x(k) \quad (2.20b)$$

Nestas equações,  $x = (x_1 \ x_2)'$ ,  $y = (y_1 \ y_2)'$  e  $u = (u_1 \ u_2)'$ .

Após as manipulações dadas pela equação (2.17) e a introdução de um novo estado  $x_3(k) = x_1(k-1)$  obtém-se a seguinte forma canônica:

$$x(k) = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 & 1 \\ \epsilon & 2 & 2 \\ 1 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 2 \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} u(k) \quad (2.21a)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \end{pmatrix} x(k) \quad (2.21b)$$

Logo, a função de transferência do sistema  $H = C(\gamma A)^*B$  é dada por:

$$H = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & 1\gamma & 1\gamma \\ \epsilon & 2\gamma & 2\gamma \\ 1\gamma & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 2 & 2 \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\gamma \\ 2 & 2 \end{pmatrix} (2\gamma)^* \quad (2.22)$$

A equação (2.22) acima é obtida com o auxílio do lema 1.48 de forma semelhante à mostrada no apêndice B para a equação (2.44). Essa função de transferência é a mesma dada pela equação (2.10). Isso sugere que existem diferentes realizações para uma mesma função de transferência.

Para exemplificar a resposta temporal do GET descrito pela equação (2.22), suponha que em  $t = 0$  ocorrem infinitos disparos das transições  $u_1$  e  $u_2$  de entrada. Essa abstração corresponde a obter a saída do sistema sem impor restrição alguma sobre as entradas. Logo, esta resposta é devida apenas à estrutura e temporizações internas do GET e corresponde à sua resposta impulsiva, como será visto na seção 2.4. As contribuições das duas entradas sobre as duas saídas podem ser visualizadas separadamente na Fig. 8. Estas contribuições correspondem aos elementos da matriz  $H$ . Assim, tomando-se a relação  $u_1 \rightarrow y_1$ , tem-se que o primeiro disparo ( $k = 0$ ) de  $u_1$  contribui para o disparo de  $y_1$  apenas após decorrido uma unidade de tempo. Posteriormente, esta contribuição atinge um comportamento em regime a uma taxa de um evento a cada duas unidades de tempo. Analogamente para a contribuição de  $u_2$  sobre  $y_1$ . A sequência de disparo da saída  $y_1$  é então dada pela maximização (soma no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ) destas duas contribuições e analogamente para a saída  $y_2$ .

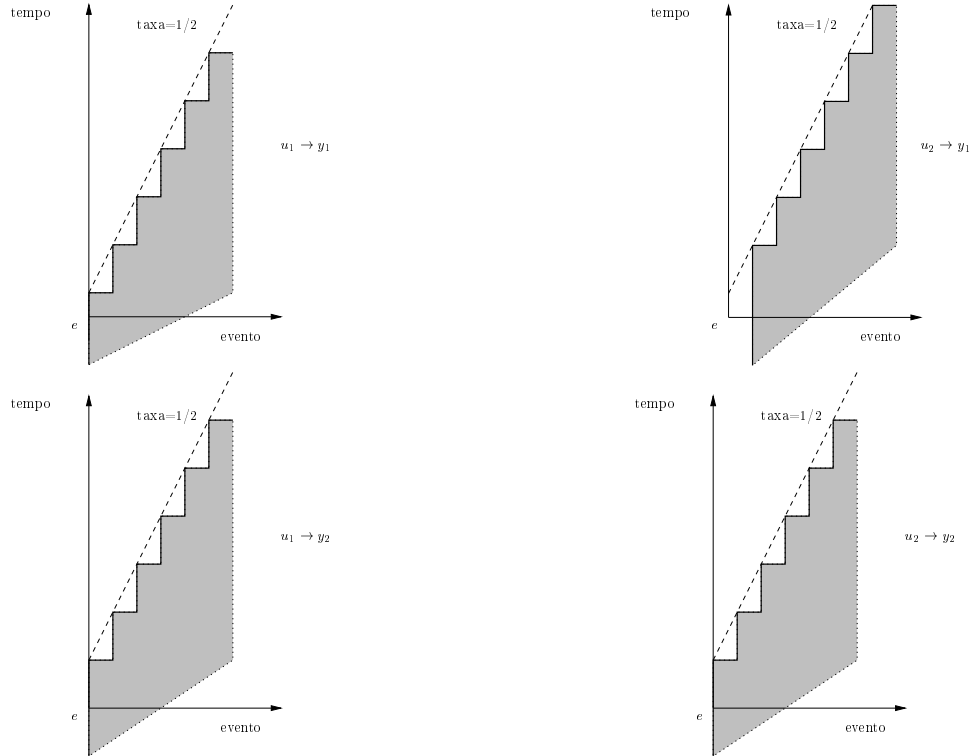


Figura 8: Resposta temporal de um GET.

### 2.2.3 Contadores

Na seção 2.2.2 foram usadas variáveis do tipo datadores para descrever a dinâmica de um GET. Nesta seção, uma descrição do sistema é obtida para variáveis do tipo contadores ou “counters”. Como

o desenvolvimento é análogo ao da seção anterior, muitas passagens foram omitidas, destacando-se apenas os resultados principais.

**Definição 2.7 (Contadores).** *Um contador é uma variável  $x(t)$  associada a uma transição, que corresponde ao número do último evento ocorrido antes do ou no instante  $t$ .*

**Nota 2.8.** *Da mesma forma que datadores, contadores são sequências não-decrescentes.*

O sistema da Fig. 6 pode ser descrito em termos de contadores como:

$$x_1(t) = \min\{2 + x_1(t-1), 1 + x_2(t-1), 1 + u_1(t)\} \quad (2.23a)$$

$$x_2(t) = \min\{x_1(t-1), u_2(t-2)\} \quad (2.23b)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \quad (2.23c)$$

$$y_2(t) = x_2(t) \quad (2.23d)$$

O número de disparos de uma transição  $x_i$  até um instante de tempo  $t$  corresponde ao mínimo dos números de disparo das transições  $x_j$  conectadas a  $x_i$  somados ao respectivo número de fichas da marcação inicial do lugar que conecta  $x_j$  a  $x_i$ . A temporização dos lugares apenas introduz um deslocamento temporal na ocorrência dos eventos de cada transição. Isso está representado nas equações (2.23) acima.

Definindo-se as operações de minimização e soma usual como as operações  $\oplus$  e  $\otimes$ , respectivamente, de um dióide apropriado, obtêm-se equações lineares.

**Definição 2.9 (Álgebra Min-plus).** *O conjunto  $\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$  dotado das operações  $\min$  como  $\oplus$  e adição usual como  $\otimes$ , com elementos  $e$  e  $\epsilon$  correspondendo a zero e  $+\infty$ , respectivamente, é denominado álgebra Min-plus, também denotada  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ . O elemento  $-\infty$  é o elemento de topo do conjunto denotado  $\top$ .*

Essa álgebra é adequada para representar um GET descrito por meio de contadores. Nesse caso, as equações (2.23) podem ser escritas como:

$$x_1(t) = 2 \otimes x_1(t-1) \oplus 1 \otimes x_2(t-1) \oplus u_1(t-1) \quad (2.24a)$$

$$x_2(t) = x_1(t-1) \oplus u_2(t-2) \quad (2.24b)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \quad (2.24c)$$

$$y_2(t) = x_2(t) \quad (2.24d)$$



Para se obter equações recursivas em apenas uma variável, substitui-se  $x_2(t)$  na equação de  $x_1(t)$ .

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2x_1(t-1) \oplus 1x_2(t-1) \oplus u_1(t-1) \\
&= 2x_1(t-1) \oplus 1[x_1(t-2) \oplus u_2(t-3)] \oplus u_1(t-1) \\
&= 2x_1(t-1) \oplus 1x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \\
&= 2x_1(t-1) \oplus (2 \oplus 1)x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \\
&= 2x_1(t-1) \oplus 2x_1(t-2) \oplus 1x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \\
&= 2[x_1(t-1) \oplus x_1(t-2)] \oplus 1x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \\
&= 2x_1(t-2) \oplus 1x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \\
&= (2 \oplus 1)x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \\
&= 1x_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Nesse caso,  $1 = 2 \oplus 1$  no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  e  $x_1(t-2) = x_1(t-1) \oplus x_1(t-2)$  pois  $x_1(t-2) \succeq x_1(t-1)$ . Note que a relação de ordem no dióide  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  é invertida em relação à usual, pois  $1 \succeq 2$ .

Após algumas manipulações, a relação entrada-saída para o sistema é dada por:

$$y_1(t) = 1y_1(t-2) \oplus u_1(t-1) \oplus 1u_2(t-3) \tag{2.26a}$$

$$y_2(t) = 1y_2(t-2) \oplus u_1(t-2) \oplus u_2(t-2) \tag{2.26b}$$

Definindo-se o operador atraso em datação  $\delta$  como  $\delta x(t) = x(t-1)$ , tem-se

$$y_1 = (1\delta^2)y_1 \oplus \delta u_1 \oplus (1\delta^3)u_2 \tag{2.27a}$$

$$y_2 = (1\delta^2)y_2 \oplus \delta^2 u_1 \oplus \delta^2 u_2 \tag{2.27b}$$

Na forma matricial obtém-se:

$$Y = \begin{pmatrix} \delta & 1\delta^3 \\ \delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix} (1\delta^2)^* U \tag{2.28}$$

Neste caso  $Y = HU$ , e  $H$  é a função de transferência em  $\delta$  do sistema. Essa representação é denominada transformada  $\delta$ .

Os resultados acima mostram que também para contadores é possível obter um modelo linear para um GET, tanto na forma de equações recursivas (2.26), quanto na forma de equações algébricas (2.28).

Aplicando-se agora o operador  $\delta$  diretamente nas equações (2.24) tem-se:

$$x_1 = (2\delta)x_1 \oplus (1\delta)x_2 \oplus \delta u_1 \tag{2.29}$$

$$x_2 = \delta x_1 \oplus \delta^2 u_2 \tag{2.30}$$

A relação entrada-saída para  $y_1$  fica

$$y_1 = \delta(1\delta^2 \oplus 2\delta)^* u_1 \oplus 1\delta^3(1\delta^2)^* u_2 \quad (2.31)$$

Comparando-se as equações (2.27a) e (2.31) nota-se uma equivalência entre  $1\delta^2$  e  $(1\delta^2 \oplus 2\delta^1)$ . De fato, esses elementos são iguais na álgebra da transformada  $\delta$ :

$$\begin{aligned} 1\delta^2 \oplus 2\delta^1 &= (1 \oplus 2)\delta^2 \oplus 2\delta^1 = 1\delta^2 \oplus 2\delta^2 \oplus 2\delta^1 \\ &= 1\delta^2 \oplus 2(\delta^2 \oplus \delta^1) \\ &= 1\delta^2 \oplus 2\delta^2 = (1 \oplus 2)\delta^2 = 1\delta^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

A simplificação  $\delta^2 = \delta^2 \oplus \delta^1$  pode ser descrita como:

$$k\delta^\tau \oplus k\delta^\theta = t\gamma^{\max(\tau, \theta)} \quad (2.33)$$

Essa simplificação é possível devido à consideração de trajetórias não-decrescentes. Logo, a álgebra que envolve a transformada  $\delta$  deve ser definida de forma a considerar a regra de simplificação (2.15). Isso é discutido na seção 2.3. Por enquanto, formalizam-se os resultados anteriores.

De maneira geral, todo GET pode ser descrito pelas seguintes equações canônicas em termos de contadores:

$$x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t) \quad (2.34a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.34b)$$

Nessas equações as transições disparam assim que habilitadas e  $x(t) = \top$  para  $t < 0$ . Aplicando-se o operador  $\delta$  nas equações (2.34), obtém-se:

$$X = (\delta A)X \oplus BU \quad (2.35a)$$

$$Y = CX \quad (2.35b)$$

Nesse caso, a função de transferência é dada por  $H = C(\delta A)^* B$ .

**Nota 2.10.** *Os resultados obtidos para contadores podem ser diretamente obtidos de datadores, bastando para isso trocar coeficientes de datadores por argumentos de contadores associados a uma mesma transição (e vice-versa). Nas representações transformadas, coeficientes em  $\gamma$  passam a expoentes em  $\delta$  e vice-versa.*

## 2.3 Descrição no dióide bidimensional

As seções anteriores estabeleceram modelos lineares algébricos para GETs. Na seção 2.2.2, o modelo algébrico obtido é representado pela transformada  $\gamma$ , através da introdução do operador atraso

em contagem  $\gamma x(k) = x(k-1)$ . A álgebra dessa transformada utiliza a álgebra das séries de potência (seção 1.3.2) em uma variável  $\gamma$  com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ , acrescida da regra de simplificação (2.15).

Analogamente, na seção 2.2.3 obtém-se um modelo algébrico representado pela transformada  $\delta$ , através da introdução do operador atraso em datação  $\delta x(t) = x(t-1)$ . A álgebra dessa transformada utiliza a álgebra das séries de potência em uma variável  $\delta$  com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ , acrescida da regra de simplificação (2.33).

As regras de simplificação (2.15) e (2.33) ocorrem tanto em datadores quanto em contadores com o objetivo de restringir as variáveis utilizadas a trajetórias não-decrescentes.

Além disso, uma representação pode ser derivada da outra, pois coeficientes das séries em  $\gamma$  se tornam expoentes das séries em  $\delta$  e vice-versa. Grosso modo, isso ocorre porque em  $\gamma(\delta)$ , coeficientes (expoentes) estão relacionados a atrasos e expoentes (coeficientes) a fichas.

Esses fatos sugerem uma estrutura algébrica única a partir da qual datadores e contadores possam ser derivados. Essa estrutura é o dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ , formado pelo dióide  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  das séries de potência em duas variáveis  $(\gamma, \delta)$  com coeficientes (booleanos) em  $\{\epsilon, e\}$  e expoentes em  $\mathbb{Z}$  (seção 1.3.2), acrescido das seguintes regras de simplificação:

$$\gamma^k \delta^t \oplus \gamma^l \delta^t = \gamma^{\min(k,l)} \delta^t \quad (2.36a)$$

$$\gamma^k \delta^t \oplus \gamma^k \delta^l = \gamma^k \delta^{\max(t,l)} \quad (2.36b)$$

De certa forma, esse dióide combina as propriedades das representações em  $\gamma$  e em  $\delta$ . A manipulação algébrica de séries de potência em  $(\gamma, \delta)$  usando as regras de simplificação (2.36) pode ser interpretada em termos da manipulação de informação sobre eventos. Assim, cada lugar entre duas transições transmite informação da transição de chegada nesse lugar para a transição de partida desse lugar. Contudo, essa informação é deslocada pelo número de “barras” em termos de tempo e pelo número de “pontos” em termos de numeração. Algebricamente, esse deslocamento é obtido pela multiplicação da série correspondente (informação de entrada) pelo monômio associado ao lugar. As regras de simplificação podem ser interpretadas a partir do grafo associado, como informações que dominam ou contêm outras, como mostra a Fig. 9 abaixo.

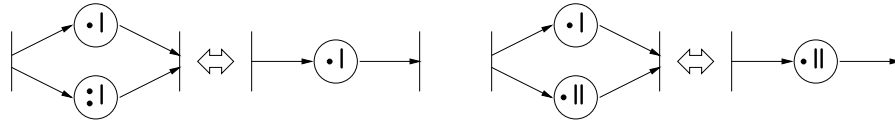


Figura 9: Regras de simplificação.

A representação de um sistema no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$  é frequentemente denominada descrição bidimensional devido à sua representação no plano  $\mathbb{Z}^2$ . Sua notação é derivada da notação de séries de potência e sugere o uso tanto da operação de maximização quanto de minimização nas operações.

Os elementos de  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma, \delta]\!]$  são de fato classes de equivalência. Dados dois elementos  $a$  e  $b$  em  $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ , define-se a seguinte relação de equivalência:

$$a \equiv b \Leftrightarrow (\gamma \oplus \delta^{-1})^* a = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* b \quad (2.37)$$

Isso significa que um monômio  $a = \gamma^k \delta^t$  representa todo o cone a sudeste do ponto  $(k, t)$  no plano  $\mathbb{Z}^2$ , conforme ilustrado na Fig. 10.

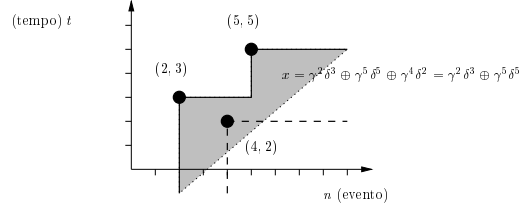


Figura 10: Elemento do dióide bidimensional.

Por definição,  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma, \delta]\!]$  é o quociente de  $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$  pela relação de equivalência (2.37), ou seja

$$\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma, \delta]\!] = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!] \quad (2.38)$$

A soma de monômios neste dióide corresponde à união dos respectivos cones a sudeste, dando origem às regras de simplificação (2.36). O produto neste dióide corresponde ao produto de séries de potência, conforme definido na seção 1.3.2.

A partir das considerações acima e daquelas feitas nas seções 2.2.2 e 2.2.3, pode-se enunciar o seguinte resultado geral. Qualquer GET pode ser modelado pelas seguintes equações algébricas lineares:

$$X = AX \oplus BU \quad (2.39a)$$

$$Y = CX \quad (2.39b)$$

Os vetores  $U$ ,  $X$  e  $Y$  de dimensões  $m$ ,  $n$  e  $p$  correspondem às variáveis associadas às  $m$  transições de entrada,  $n$  transições internas e  $p$  transições de saída do sistema, respectivamente. As matrizes  $A^{n \times n}$ ,  $B^{n \times m}$ ,  $C^{p \times n}$  são descritas no dióide apropriado.

A forma matemática de  $X$ ,  $U$ ,  $Y$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  depende da descrição adotada. Assim,  $X$ ,  $U$  e  $Y$  podem ser:

- séries de potência em  $\gamma$  com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\text{max}}$ ;
- séries de potência em  $\delta$  com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\text{min}}$ ;
- séries de potência em  $(\gamma, \delta)$  com coeficientes em  $\{\epsilon, e\}$ .

As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  possuem elementos polinomiais de mesma natureza das séries de potência  $X$ ,  $U$  e  $Y$ , porém com expoentes apenas não-negativos, uma vez que fichas da marcação inicial e tempos de espera introduzem deslocamentos não-negativos.

**Nota 2.11.** *A partir desse ponto, quando não explicitamente mencionado no texto, qualquer referência ao modelo de um GET segundo a equação (2.39) assume descrição no dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .*

A forma das equações (2.39) sugere a representação dada pela Fig. 11.

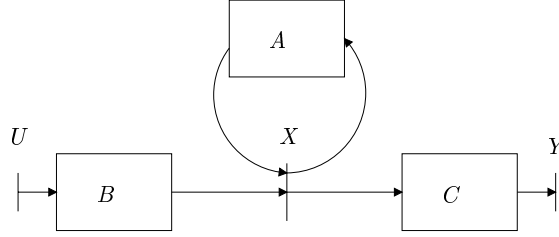


Figura 11: Representação multivariável de um GET.

Na Fig. 11, arcos e transições correspondem a múltiplos arcos e múltiplas transições conectando os vetores  $X$ ,  $U$  e  $Y$ . Essa figura explicita a função da matriz  $B$  como uma transformação de entradas que podem ser especificadas externamente atuando sobre os estados; a função da matriz  $A$  como descritora da dinâmica do sistema e a função da matriz  $C$  como uma transformação dos estados em saídas que podem ser acessadas externamente. Nos capítulos 4 e 5, essa figura é usada como base para a estrutura de controle proposta.

Para o exemplo dado na seção 2.2 (Fig. 6), a descrição no dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  pode ser obtida diretamente do grafo como

$$x_1 = (\gamma^2\delta)x_1 \oplus (\gamma\delta)x_2 \oplus \delta u_1 \quad (2.40a)$$

$$x_2 = \delta x_1 \oplus \delta^2 u_2 \quad (2.40b)$$

$$y_1 = x_1 \quad (2.40c)$$

$$y_2 = x_2 \quad (2.40d)$$

Na forma matricial tem-se:

$$X = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta & \gamma\delta \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} \delta & \epsilon \\ \epsilon & \delta^2 \end{pmatrix} U \quad (2.41a)$$

$$Y = X \quad (2.41b)$$

As equações (2.41) acima já estão na forma da equação (2.39), com:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta & \gamma\delta \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \delta & \epsilon \\ \epsilon & \delta^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} e & \epsilon \\ \epsilon & e \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

## 2.4 Função de transferência

Pelo teorema 1.40, a equação (2.39a) tem solução mínima  $X = (A^*B)U$  e consequentemente  $Y = (CA^*B)U$ . Logo, a função de transferência do sistema é por definição dada por:

$$H = CA^*B \quad (2.43)$$

Para  $A$ ,  $B$  e  $C$  dadas pelas equações (2.42), tem-se (veja apêndice B):

$$H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta & \gamma\delta^3 \\ \delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* \quad (2.44)$$

Note que se  $U = e$ , então  $Y = CA^*B$ . Ou seja, a função de transferência representa a saída do sistema para uma entrada igual a  $e = \delta^0(\gamma^0 \oplus \gamma^1 \oplus \gamma^2 \oplus \dots)$ . Isso corresponde a fornecer uma quantidade infinita de fichas nas entradas do sistema em  $t = 0$  ou equivalentemente a disparar as transições de entrada infinitas vezes em  $t = 0$ . Essa interpretação é análoga à resposta impulsiva na teoria convencional de sistemas e portanto a função de transferência pode ser vista como a resposta impulsiva de um GET.

## 2.5 Racionalidade, realizabilidade e periodicidade

As seções anteriores mostraram que é possível representar um GET por um modelo algébrico linear segundo as equações (2.39), que fornecem uma representação entrada-saída  $H$  dada pela equação (2.43). Esta seção estuda as propriedades desse modelo e estabelece um dos principais resultados da teoria de modelagem de GETs em dióides: a equivalência entre a realizabilidade, a racionalidade e a periodicidade de  $H$ , enunciada pelo teorema 2.16.

**Definição 2.12 (Racionalidade).** *Um elemento de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  é racional se pertence ao fechamento racional do subconjunto  $\{\epsilon, e, \gamma, \delta\}$ . Um vetor ou matriz é racional se seus elementos são todos racionais.*

**Definição 2.13 (Realizabilidade).** *Uma matriz  $H \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times m}$  é realizável se pode ser escrita como*

$$H = C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^* B \quad (2.45)$$

onde  $A_1$  e  $A_2$  são matrizes  $n \times n$ , sendo  $n$  um inteiro arbitrário, porém finito (dependente de  $H$ ),  $B$  e  $C$  são matrizes  $n \times m$  e  $p \times n$  respectivamente e cada elemento dessas matrizes é igual a  $\epsilon$  ou  $e$ .

**Definição 2.14 (Periodicidade).** *Um elemento  $h$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  é periódico se existem dois polinômios  $p$  e  $q$  e um monômio  $m$  (todos causais) tais que*

$$h = p \oplus qm^* \quad (2.46)$$

*Uma matriz  $H$  é periódica se seus elementos são todos periódicos.*

**Definição 2.15 (Causalidade).** *Um elemento  $h$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  é causal se  $h = \epsilon$  ou se  $val(h) \geq 0$  e  $h \succeq \gamma^{val(h)}$ .*

**Teorema 2.16.** *Para  $H \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times m}$ , as três seguintes afirmações são equivalentes:*

- *$H$  é realizável;*
- *$H$  é racional;*
- *$H$  é periódica.*

As seções seguintes discutem cada uma dessas propriedades separadamente e as inserem no contexto da tese.

### 2.5.1 Representações racionais e realizabilidade

A definição 2.12 envolve o conceito de fechamento racional.

**Definição 2.17 (Fechamento racional).** *O fechamento racional de um subconjunto  $\mathcal{T}$  de um dióide completo  $\mathcal{D}$ , denotado  $\mathcal{T}^*$ , é o mínimo sub-dióide de  $\mathcal{D}$  contendo  $\mathcal{T}$  e todas as somas, produtos e operações-estrela finitas de seus elementos.*

Portanto, pela definição 2.12, os elementos racionais do dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  são formados por somas, produtos e operações-estrela finitas de  $\{\epsilon, e, \gamma, \delta\}$ . O teorema 2.16 estabelece que se  $H$  pertence ao conjunto dos elementos racionais de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , então existe um GET que a realiza. Em outras palavras, existe um GET cuja função de transferência é  $H$ .

Realizabilidade está relacionada com a propriedade de um modelo ser realizável, ou seja, poder ser fisicamente construído. Portanto, é importante reconhecer dentre os elementos de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  aqueles realizáveis, ou seja, que podem ser representados por um GET. O teorema 2.16 estabelece que se  $H$  pertence ao conjunto dos elementos realizáveis de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , então  $H$  é racional. Em outras palavras, a função de transferência de um GET pode ser descrita usando-se apenas somas, produtos e operações-estrela finitas de  $\{\epsilon, e, \gamma, \delta\}$ .

Resumindo, qualquer GET possui um modelo entrada-saída que pode ser descrito usando-se apenas somas, produtos e operações-estrela finitas de  $\{\epsilon, e, \gamma, \delta\}$ . Além disso, qualquer representação

desse tipo corresponde a um GET. Portanto, GETs correspondem a uma classe de sistemas que podem ser modelados no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  denominados sistemas racionais.

Existem diferentes representações para um mesmo sistema racional. Todas descrevem as mesmas relações entrada-saída do sistema e portanto, expressam a mesma função de transferência. Em Baccelli *et al.* (1992), várias delas são discutidas, mas o problema de representação mínima, ou seja, do número mínimo de estados necessários para representar uma função de transferência racional ainda permanece em aberto.

Além disso, sempre é possível obter uma realização com matrizes  $B$  e  $C$  booleanas, nas quais cada entrada atua sobre um único estado e cada saída é obtida a partir de um único estado. Entretanto, isso é conseguido com o possível aumento do número de estados, como mostrado através do exemplo da Fig. 12. No capítulo 6, isso é usado para justificar parte da metodologia de projeto do controlador.

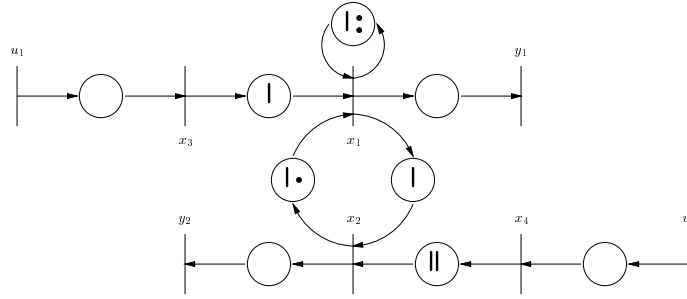


Figura 12: Exemplo com estado aumentado.

Modelando o sistema da Fig. 12 no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  tem-se:

$$x_1 = (\gamma^2 \delta) x_1 \oplus (\gamma \delta) x_2 \quad (2.47a)$$

$$x_2 = \delta x_1 \oplus \delta^2 x_4 \quad (2.47b)$$

$$x_3 = u_1 \quad (2.47c)$$

$$x_4 = u_2 \quad (2.47d)$$

$$y_1 = x_1 \quad (2.47e)$$

$$y_2 = x_2 \quad (2.47f)$$

Uma realização desse sistema é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta & \gamma \delta & \delta & \epsilon \\ \delta & \epsilon & \epsilon & \delta^2 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \quad (2.48)$$



Aplicando-se o lema 1.48 para a matriz  $A$ , obtém-se:

$$A^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \gamma\delta(\gamma\delta^2)^* & \delta(\gamma\delta^2)^* & \gamma\delta^3(\gamma\delta^2)^* \\ \delta(\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^2)^* & \delta^2(\gamma\delta^2)^* & \delta^2(\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon & \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & e \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

A função de transferência do sistema é a mesma dada pela equação (2.44), uma vez que são diferentes realizações do mesmo sistema, ou seja:

$$H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta & \gamma\delta^3 \\ \delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* \quad (2.50)$$

### 2.5.2 Séries periódicas

Existem elementos em  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ , denominados séries periódicas, que permitem representar um comportamento infinito através de uma expressão finita  $p \oplus qm^*$ . Nessa representação finita podem ser reconhecidas duas parcelas. A primeira parcela  $p$  representa um comportamento transitório de dimensão finita ao fim do qual se inicia um comportamento periódico. Esse comportamento periódico é caracterizado por uma inclinação dada pelo monômio  $m$  e um padrão finito dado pelo polinômio  $q$ , que se repete indefinidamente.

Pelo teorema 2.16, qualquer GET apresenta uma função de transferência  $H$  com esse comportamento. Portanto, a resposta impulsiva de um GET apresenta um transitório inicial para depois atingir um regime periódico no qual a inclinação da série fornece a taxa média de eventos produzidos na saída do sistema por unidade de tempo. A Fig. 13 mostra a resposta típica de um sistema racional.

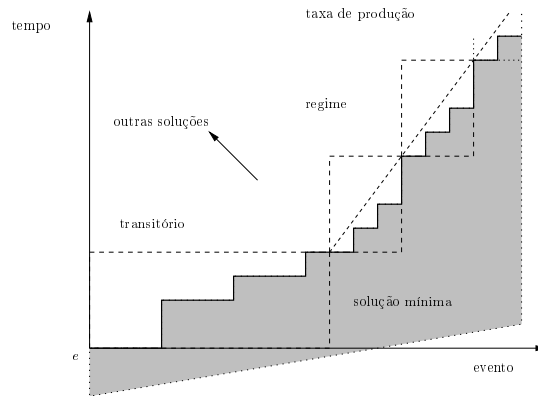


Figura 13: Resposta típica de um sistema racional.

Para o exemplo da Fig. 6, a contribuição da entrada  $u_1$  na saída  $y_1$  é de  $\delta(\gamma\delta^2)^*u_1$ . Portanto, em regime,  $u_1$  contribui com um evento a cada duas unidades de tempo, sendo que o primeiro evento

não ocorre antes de decorrido um instante de tempo. Note que esse sistema é fortemente conectado<sup>1</sup> e portanto todas as transições estão sujeitas à mesma taxa de produção em regime.

A álgebra de séries periódicas é extensivamente discutida em Cottenceau (1999) e Gaubert (1992). Dentre os resultados estabelecidos, tem-se que a soma, o produto e a divisão (formalmente definida pela residuação) de séries periódicas resulta em uma série periódica. Entretanto, a divisão de séries periódicas causais pode fornecer uma série periódica não-causal. Como essa operação é muito utilizada nesta tese, um exemplo de cálculo é mostrado no apêndice B através da divisão  $[e \oplus \gamma\delta^3(\gamma\delta^2)^*] \backslash [e \oplus \gamma\delta^3(\gamma\delta^2)^*] = (\gamma\delta^2)^*$ . Atualmente, programas de computador de manipulação simbólica podem auxiliar em alguns desses cálculos. Esses programas se encontram na forma de bibliotecas de funções em C++, Scilab ou Maple (Cottenceau *et al.*, 2000; Gaubert, 1992).

## 2.6 Conclusão

Resumindo os principais resultados deste capítulo, um grafo a eventos é uma classe particular de rede de Petri na qual cada lugar tem exatamente uma transição de chegada e uma transição de partida. Dessa forma, é possível modelar apenas sistemas que apresentam aspectos de sincronização, sem concorrência ou compartilhamento de recursos. Um grafo a eventos é dito temporizado (GET) se existe um tempo de espera associado a cada lugar do grafo. Nesse caso, uma ficha ao entrar num lugar deve cumprir o tempo de espera associado ao lugar antes que possa contribuir para a habilitação da transição de partida deste lugar.

Diversas estruturas algébricas genericamente denominadas dióides podem representar um GET, obtendo-se o seguinte modelo linear:

$$X = AX \oplus BU$$

$$Y = CX$$

Com  $U$ ,  $X$  e  $Y$  vetores de dimensões  $m$ ,  $n$  e  $p$ , respectivamente, correspondendo às variáveis associadas às  $m$  transições de entrada,  $n$  transições internas e  $p$  transições de saída do sistema e matrizes  $A^{n \times n}$ ,  $B^{n \times m}$ ,  $C^{p \times n}$  apropriadas.

A forma matemática de  $X$ ,  $U$ ,  $Y$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  depende da descrição adotada. Assim,  $X$ ,  $U$  e  $Y$  podem ser:

- séries de potência em  $\gamma$  com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ;
- séries de potência em  $\delta$  com coeficientes em  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ ;
- séries de potência em  $(\gamma, \delta)$  com coeficientes em  $\{\epsilon, e\}$ .

---

<sup>1</sup>Um grafo é fortemente conexo se existe um caminho ou “path” entre duas transições quaisquer.

As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  possuem elementos polinomiais de mesma natureza das séries de potência  $X$ ,  $U$  e  $Y$ , porém com expoentes apenas não-negativos, uma vez que fichas da marcação inicial e tempos de espera introduzem deslocamentos não-negativos.

Esse modelo fornece uma função de transferência dada por

$$H = CA^*B$$

Os GETs considerados nesta tese são descritos no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  que é formado pelas séries de potência em duas variáveis  $(\gamma, \delta)$  com coeficientes em  $\{\epsilon, e\}$  (booleanos) e expoentes em  $\mathbb{Z}$ , acrescido das seguintes regras de simplificação:

$$\begin{aligned}\gamma^k \delta^t \oplus \gamma^l \delta^t &= \gamma^{\min(k,l)} \delta^t \\ \gamma^k \delta^t \oplus \gamma^k \delta^l &= \gamma^k \delta^{\max(k,l)}\end{aligned}$$

Finalmente, o teorema fundamental 2.16 caracteriza completamente um sistema racional. Sua função de transferência é um elemento racional do dióide utilizado, realizável na forma de representação de estado  $(A, B, C)$  e cujo comportamento pode ser caracterizado por uma série periódica, na qual um comportamento em regime se estabelece após um transitório inicial. No capítulo 6, a álgebra de séries periódicas é muito utilizada para o cálculo dos controladores, com destaque para a operação de divisão, que não é fechada para o conjunto das séries causais.



## Capítulo 3

# Controle de GETs em Dióides

### 3.1 Introdução

Este capítulo deve ser considerado como uma unidade à parte, complementar para a compreensão da tese. Diante do vasto material sobre controle de SEDs em geral, optou-se por um capítulo bibliográfico dando uma visão geral das principais abordagens de controle atualmente encontradas na literatura de GETs. Dessa forma, o leitor que se interesse por outras abordagens encontrará material suficiente para iniciar uma pesquisa mais aprofundada, assim como poderá situar a tese em relação a outras abordagens correlatas. Neste capítulo, estão reunidas apenas as abordagens que se utilizam de dióides para a descrição do sistema.

Além disso, como o tema central da tese é o controle por modelo de referência, a seção 3.5 introduz o assunto reunindo os principais resultados da literatura. Particularmente, os resultados de Cottenceau (1999) estão fortemente relacionados com esta tese. De fato, pode-se dizer que esses resultados, obtidos através da formulação do problema de controle por modelo de referência usando apenas relações entrada-saída, são reproduzidos e generalizados nesta tese usando uma formulação no espaço de estado.

Em relação à organização do capítulo, as abordagens de controle apresentadas podem ser divididas em duas classes, segundo a especificação a ser atendida. Assim, nos controles ótimo, supervisório e preditivo das seções 3.2, 3.3 e 3.4 respectivamente, são especificadas trajetórias a serem seguidas. Já no controle por modelo de referência da seção 3.5, a função de transferência do sistema controlado deve igualar uma função de transferência especificada. Finalmente, a seção 3.6 discute aspectos sobre a estabilidade de GETs.

### 3.2 Controle ótimo

Uma das primeiras propostas de controle de GETs é encontrada em Cohen *et al.* (1989) como um problema de “tracking” de trajetória. Como visto no capítulo 2, a relação entrada-saída de um GET pode ser descrita por  $Y = HU$ , sendo  $H$  a função de transferência do sistema.

Nesse problema de controle, deseja-se obter o controle  $U$  tal que a saída do sistema controlado  $Y$  siga uma trajetória de referência  $Z$  dada, ou seja,  $Y = Z$ . A “solução” dessa equação é uma aplicação direta da teoria da residuação (seção 1.2.2), e particularmente do resíduo do produto à esquerda, dado pela definição 1.36. Assim, a máxima entrada  $U_{\max}$  que satisfaz  $Y = HU \preceq Z$  é dada por  $U_{\max} = H \backslash Z$ .

Esse controle é conhecido na literatura como controle ótimo, devido à melhor aproximação da referência pela saída do sistema com a maior entrada possível. Isso corresponde a atrasar o máximo possível a entrada sem violar uma especificação de saída dada.

Note que, para um problema no qual existe apenas sincronização de eventos, como é o caso de GETs, para uma especificação de saída dada, existe uma solução mínima que corresponde a disparar as transições assim que habilitadas e uma solução máxima que corresponde a atrasar o máximo possível o disparo das transições sem alterar o resultado da saída. No contexto de um processo de manufatura, o controle ótimo corresponde a iniciar a produção de um item o mais tarde possível para atender uma demanda dada, reduzindo estoques. Isso corresponde a uma política de produção “just-in-time”.

Para compreender esse cenário, suponha que uma entrada  $U_{\min}$  é aplicada ao sistema obtendo-se uma saída  $Y_{ref} = HU_{\min}$ . Essa saída corresponde à solução mínima discutida no capítulo 2. Agora, para obter a máxima entrada  $U_{\max}$  que fornece a mesma saída  $Y_{ref}$  tem-se pelo controle ótimo que  $U_{\max} = H \backslash Y_{ref}$ . Nesse caso,  $U_{\max} = H \backslash (HU_{\min}) \succeq U_{\min}$  devido a (A.2).

Em Cohen *et al.* (1989) e Baccelli *et al.* (1992), o problema de controle ótimo é formulado na álgebra de dióides usando uma descrição no espaço de estado. Como resultado, obtêm-se equações com uma forte analogia com as equações de estado adjunto (ou co-estado) da teoria de controle ótimo. Já em Lüders e Santos-Mendes (2001b) é discutido o cálculo do controle ótimo a partir da relação entrada-saída do sistema na forma recursiva. Tanto na forma de equações de co-estado quanto na de relação entrada-saída do sistema, essas equações são antecipativas. A trajetória a ser seguida é especificada num horizonte de tempo finito e o cálculo do controle ótimo é feito recursivamente do futuro para o presente na forma de “backward equations”. Assim, esse controle é típico para aplicações “off-line” ou “batch” sobre um horizonte de planejamento finito.

Entretanto, algumas abordagens procuram tratar variações na trajetória especificada ao longo da operação do sistema. Em Lüders e Santos-Mendes (2001a) propõe-se uma estratégia denominada controle ótimo incremental que ao invés de usar todo o horizonte de tempo para o cálculo do controle,

usa uma janela de tempo menor que desliza sobre esse horizonte, incorporando novas informações da referência a ser seguida. Já em Menguy *et al.* (2000b) modifica-se o problema de controle ótimo de forma a incorporar variações na referência e entradas não-controláveis. Neste caso, o conceito de “melhor aproximação” da referência pelo sistema controlado é substituído pelo de “tão próxima quanto possível”. Entretanto, tanto em Lüders e Santos-Mendes (2001a) quanto em Menguy *et al.* (2000b) a especificação eventualmente será violada.

Além disso, o controle ótimo é um controle de trajetória em pré-compensação (malha aberta), no qual nenhuma informação da saída do sistema é usada para o cálculo do controle, que é obtido apenas a partir da referência a ser seguida e dos parâmetros do sistema. Pode-se dizer que o controle ótimo é obtido por um tipo de “inversão” da função de transferência do sistema. Na teoria de controle de sistemas contínuos é bem conhecido que o uso de estratégias de controle baseadas na simples inversão do modelo do sistema é muito sensível a erros de modelagem. Alguns trabalhos propõem alternativas no uso do controle ótimo para minimizar o efeito de erros de modelagem recorrendo à analogia com sistemas contínuos. Entretanto, pelo nosso conhecimento, nenhum trabalho completo foi publicado sobre esse assunto no contexto de SEDs.

Assim, em Boimond e Ferrier (1996) é proposta uma estrutura IMC (“Internal Model Control”), onde um termo de correção obtido a partir da diferença entre a saída do sistema e a do modelo é introduzido na equação de controle. Nesse caso, a dificuldade no uso da equação antecipativa do controle ótimo é contornada usando-se uma previsão da saída futura do sistema. Já em Menguy *et al.* (2000a), uma estratégia incipiente de controle adaptativo indireto é proposta, na qual uma identificação simples do modelo é usada no cálculo do controle. Nesse caso, resultados de Menguy *et al.* (2000b) são usados para permitir que o algoritmo de controle incorpore variações na referência.

### 3.3 Controle supervisorio

No modelo lógico de um SED cujo universo de eventos é  $\Sigma$ , a linguagem  $L \subseteq \Sigma^*$  do sistema é o conjunto de todas as sequências de eventos geradas pelo sistema. O controle supervisorio segundo a abordagem de Ramadge e Wonham (1989) está baseado na restrição dessas sequências a sequências aceitáveis, especificadas por uma linguagem que representa o objetivo de controle a ser atendido. Assim, dada uma linguagem  $K$ , um supervisor pode inibir a ocorrência de eventos denominados controláveis, evitando comportamentos indesejáveis que não pertencem à linguagem  $K$ . Entretanto, existem eventos não-controláveis que podem gerar comportamentos que violam a especificação. Portanto, diz-se que uma linguagem  $K$  é controlável para um sistema se a linguagem gerada pelo sistema controlado sob a ação dos eventos não-controláveis é um subconjunto de  $K$ . Formalmente, uma linguagem  $K$  é denominada controlável em relação à linguagem  $L$  do sistema e aos eventos

não-controláveis  $\Sigma_u$  se  $\text{pr}(K).\Sigma_u \cap L \subseteq \text{pr}(K)$ , onde  $\text{pr}(K)$  é o prefixo fechamento de  $K$ .

Em Cofer e Garg (1996) mostra-se que o “framework” usado no controle de sistemas não-temporizados pode ser estendido para sistemas temporizados. Nesse caso, o sistema a ser controlado é um GET descrito na transformada  $\gamma$  por datadores segundo a equação  $X = AX \oplus V$ , onde  $X$  é a sequência de ocorrência dos eventos associados às transições e  $V$  um limitante inferior dessa sequência. A matriz  $A$  é composta pelos atrasos dos lugares no grafo.

Suponha que algumas transições são controláveis externamente através de uma entrada  $U$  cujos tempos de disparo  $u_i$  são fornecidos por um supervisor a partir de uma especificação  $z_i$ . Assim,  $u_i = z_i$  se a transição  $i$  é controlável, caso contrário  $u_i = \epsilon$ . Numa representação matricial, define-se uma matriz diagonal  $I_c$  cujo elemento  $i$  da diagonal é nulo caso a transição  $i$  seja não controlável e igual ao elemento identidade caso contrário. Nesse caso,  $U = I_c Z$ . Logo, o sistema sob ação de controle é descrito pela equação  $X = AX \oplus I_c Z \oplus V$ , cuja solução mínima é  $X = A^*(I_c Z \oplus V)$ . Essa equação define o conjunto de sequências geradas pelo sistema sob a ação de  $Z$  e dos eventos não-controláveis, dando origem à seguinte definição de controlabilidade.

**Definição 3.1.** (Cofer e Garg, 1996, Def. 2) Um conjunto de sequências  $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{S}$  é controlável em relação a  $A$ ,  $V$  e  $I_c$  se para todo  $Z \in \mathcal{Z}$

$$\{X \in \mathcal{S} \mid X = A^*(I_c Z \oplus V)\} \subseteq \mathcal{Z}$$

Intuitivamente, isso significa que a habilitação de eventos controláveis em qualquer instante de tempo permitido pela especificação  $\mathcal{Z}$  resulta num comportamento dentro de  $\mathcal{Z}$  para todos os eventos gerados pelo sistema.

Logo, um conjunto  $\mathcal{Z} = \{X \in \mathcal{S} \mid X \leq Z\}$  de sequências aceitáveis é controlável se e somente se  $A^*(I_c Z \oplus V) \leq Z$  (Cofer e Garg, 1996, Teo. 2). Essa equação é uma equação de ponto fixo.

Nesse caso, as sequências controláveis são soluções da equação de ponto fixo  $A^*(I_c X \oplus V) \leq X$  com  $X \leq Z$ . Se  $Z$  é controlável, então  $Z$  é a máxima solução. Porém, se  $Z$  é não-controlável, é possível obter a máxima solução que satisfaz a especificação usando resultados sobre soluções de equações de ponto fixo em reticulados.

De forma análoga, outras especificações podem ser fornecidas tais como: instantes de tempo mínimo ou máximo de ocorrência de eventos ou limites no intervalo de ocorrência entre eventos (Cofer e Garg, 1995).



### 3.4 Controle preditivo

O controle preditivo é aplicado sobre uma planta multivariável modelada pelas seguintes equações a diferença na álgebra convencional:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Esse controle está baseado na minimização de um critério de custo  $J$  composto pelo erro de “tracking”  $J_{\text{out}}$  e pelo esforço ponderado de controle  $\lambda J_{\text{in}}$ . Formalmente,

$$J = J_{\text{out}} + \lambda J_{\text{in}} = \sum_{j=1}^{N_p} \|\hat{y}(k+j | k) - r(k+j)\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_p} \|u(k+j-1)\|^2$$

Nesse critério,  $\hat{y}(k+j | k)$  é a previsão da saída  $j$  passos à frente dadas as informações disponíveis até o instante  $k$ ,  $r$  é um sinal de referência fornecido externamente,  $\lambda$  é um escalar não negativo e  $N_p$  é o horizonte de previsão.

O problema de controle preditivo consiste em encontrar a sequência  $u(k), \dots, u(k+N_c-1)$  de entrada que minimiza  $J$ , onde  $N_c \leq N_p$  é o horizonte de controle e  $u(k+j) = u(k+N_c-1)$  para  $j = N_c, \dots, N_p-1$ . Apesar de se calcular o valor presente e futuro da entrada, apenas  $u(k)$  é aplicada ao sistema. Em  $k+1$  uma nova otimização é feita com as novas informações adquiridas, calculando-se  $u(k+1)$ , num princípio de horizonte deslizante. Os parâmetros  $N_p$ ,  $N_c$  e  $\lambda$  do controlador possuem regras de ajuste bem definidas.

Esse algoritmo básico é acrescido de um conjunto de restrições lineares sobre a entrada e sobre a saída do sistema, caracterizando um problema de programação quadrática convexa.

O controle preditivo é bem aceito na indústria como estratégia de controle avançado, devido principalmente à facilidade de ajuste e à possibilidade de incluir restrições tanto na entrada quanto na saída do sistema.

Como visto no capítulo 2, um GET pode ser modelado por datadores segundo as equações (2.18) reescritas a seguir.

$$\begin{aligned}x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Apesar de descritos em diferentes álgebras, a semelhança entre os modelos de sistemas contínuos e GETs sugere a possibilidade de adaptação do controle preditivo para uso no controle de GETs. De fato, em Schutter e Boom (2001b) tem-se uma formulação de controle preditivo para GETs descritos na álgebra max-plus. A principal dificuldade reside na definição do critério de custo a ser usado e

nos algoritmos utilizados para resolver o problema de otimização. Em geral, tem-se um problema de otimização não-linear e não-convexo.

Recentemente, tem-se encontrado na literatura trabalhos que aplicam o controle preditivo em SEDs que não são GETs. Por exemplo, em sistemas descritos a partir de operações de maximização, minimização e soma - “max-min-plus systems” (Schutter e Boom, 2000) ou em sistemas que, além destas operações, incluem uma operação de produto por escalar - “max-min-plus-scaling systems” (Schutter e Boom, 2001a). Pode-se mostrar (Heemels *et al.*, 2001) que esta última classe de sistemas equivale aos sistemas dinâmicos que incorporam descrições lógicas ou “mixed-logic dynamic systems”, propostos por Bemporad e Morari (1999).

### 3.5 Controle por modelo de referência

O controle por modelo de referência ou “model matching” consiste em obter um controlador  $F$  tal que a função de transferência do sistema com controlador  $G_{mf}(F)$  se iguale a uma função de transferência especificada externamente  $G_{ref}$ . Como a igualdade nem sempre pode ser obtida, abordagens de “model matching” costumam se utilizar de uma “melhor aproximação” de  $G_{ref}$ . No contexto de dióides, a “solução” de uma equação é tratada pela teoria da residuação (seção 1.2.2). Nesse caso, a equação toma a forma de uma inequação e busca-se a solução máxima, caso exista. Em outras palavras, dada uma função de transferência  $G_{ref}$  (modelo de referência) e um sistema com um controlador  $F$  cuja função de transferência (sistema+controlador) é dada por  $G_{mf}(F)$ , existe um controlador máximo  $F_{\max}$  tal que  $G_{mf}(F_{\max}) \preceq G_{ref}$ ?

Um dos primeiros trabalhos em modelo de referência é encontrado em Libeaut e Loiseau (1996) sob a denominação de “weak model matching”. Essa denominação é usada pois em vez de um “matching” entre funções de transferência, é proposto um “matching” entre as saídas do sistema e do modelo de referência para uma entrada qualquer. Nesse caso, tem-se  $Y_c = G_{mf}(F)V \preceq G_{ref}V = Y_r$  para uma entrada  $V$  qualquer.

Note que isso é uma condição mais fraca do que o “model matching”  $G_{mf}(F) \preceq G_{ref}$ , pois pela isotonia do produto  $G_{mf}(F)V \preceq G_{ref}V \Rightarrow Y_c \preceq Y_r$ . Logo, “model matching” implica em “weak model matching”, mas não o contrário.

Em Libeaut e Loiseau (1996), o sistema a ser controlado é representado na transformada  $\delta$  pelo seu comportamento autônomo e forçado. Assim,  $Y = P \oplus TU$  representa a relação entrada-saída do sistema, onde  $P = C(A\delta)^*x_0$  representa o comportamento livre ou autônomo do sistema e  $T = C(A\delta)^*B$  o comportamento forçado pela entrada  $U$ . A condição inicial  $x_0$  pertence a um conjunto de condições iniciais admissíveis para que apenas trajetórias não-decrescentes sejam obtidas (Libeaut e Loiseau, 1995). Nesse caso, o problema de “weak model matching” pode ser assim enunciado.

**Definição 3.2 (“Weak model matching”).** Dada uma saída de referência  $Y_r = P_r \oplus T_r V$ , onde  $V$  é uma entrada de referência qualquer, e um sistema cuja saída é dada por  $Y = P \oplus T U$  para uma entrada  $U$  qualquer, deseja-se obter um controle  $U = P_c \oplus T_c V$  tal que a saída do sistema controlado  $Y_c = P \oplus T(P_c \oplus T_c V)$  seja tal que  $Y_c \preceq Y_r$ .

Reagrupando os termos de  $Y_c$  obtém-se a equação de “weak model matching”  $Y_c \preceq Y_r$  nas variáveis  $P_c$  e  $T_c$ , ou seja

$$(P \oplus T P_c) \oplus T T_c V \preceq P_r \oplus T_r V$$

Garantindo certas condições sobre  $P_r$  e  $T_r$ , o controlador máximo é obtido para  $P_c = T \setminus P_r$  e  $T_c = (\delta T) \setminus \tilde{T}_r$ , com  $\tilde{T}_r = P_r(e \dots e) \oplus \delta T_r$ .

Note que o controlador é obtido a partir do modelo de referência especificado e dos parâmetros do sistema. Assim, essa é também uma estrutura de controle em pré-compensação (malha aberta), uma vez que nenhuma medida da saída do sistema é usada no cálculo do controle. Em Lüders e Santos-Mendes (2000), discutem-se alguns aspectos do efeito da realimentação de saída sobre o comportamento do sistema, segundo um esquema de controle com estrutura fixa e parâmetros a serem ajustados.

O problema de “model matching” propriamente dito é tratado em Cottenceau *et al.* (2001), Cottenceau *et al.* (1999) e Cottenceau (1999). Considerando inicialmente o problema de “model matching” em pré-compensação, ou seja  $G_{mf}(F) = HF$  segundo a Fig. 14, o controlador máximo é obtido diretamente do resíduo do produto à esquerda. Assim, a solução máxima de  $HF \preceq G_{ref}$  é dada por  $F_{\max} = H \setminus G_{ref}$  para qualquer modelo de referência  $G_{ref}$  especificado. Note que o controle em pré-compensação é um controle em “malha aberta”.

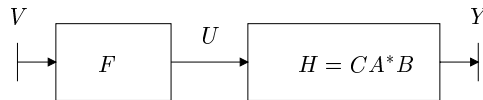


Figura 14: Pré-compensação.

**Nota 3.3.** A realizabilidade (ou racionalidade) do controlador é uma questão importante. No dióide  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , o resíduo de séries racionais (seção 2.5.2) pode não ser racional. Entretanto, em Cottenceau (1999) é mostrado que sempre é possível obter um controlador máximo realizável eliminando-se a parte não-causal do resultado obtido.

Em pré-compensação, o controlador máximo sempre existe, uma vez que  $L_a(x) = a \otimes x$  é uma aplicação residuada. Entretanto, para configurações de controle em realimentação conforme as Figs. 15, 16 e 17, a solução máxima de  $G_{mf}(F) \preceq G_{ref}$  é obtida apenas para  $G_{ref}$  particulares.

Para realimentação de saída conforme a Fig. 15,  $G_{mf}(F) = (HF)^*H$  e o resultado geral é dado pela proposição 3.4.

**Proposição 3.4.** (*Cottenceau et al., 2001, Prop. 29*) Se  $G_{ref} = D^*H$  ou  $G_{ref} = HD^*$ , com  $D$  matriz racional de dimensões apropriadas, então existe um controlador máximo  $F_{\max} = H \setminus G_{ref} \not\downarrow H$  solução de  $(HF)^*H \preceq G_{ref}$ .

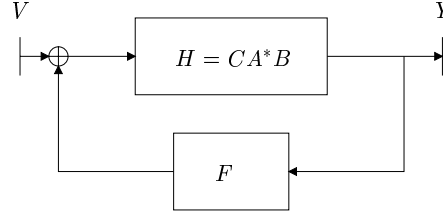


Figura 15: Realimentação de saída.

Particularmente, se  $G_{ref} = (HD)^*H$ , então o controlador máximo promove um “matching” perfeito, ou seja,  $G_{mf}(F) = G_{ref}$ . Pode ser mostrado que  $G_{ref}$  desse tipo corresponde a realimentar o sistema com um controlador igual a  $D$ . A proposição 3.5 formaliza esse resultado.

**Proposição 3.5.** (*Cottenceau, 1999, Prop. 3.12*) Seja  $H$  a função de transferência de um GET. Para  $G_{ref} = (HD)^*H$ , com  $D$  matriz racional de dimensões apropriadas, existe um controlador máximo  $F_{\max} = H \setminus G_{ref} \not\downarrow H$  solução de  $(HF)^*H = G_{ref}$ .

Para  $D = \epsilon$ ,  $G_{ref} = (H\epsilon)^*H = H$ . Ou seja, existe um controlador máximo que mantém inalterada a função de transferência do sistema sem controlador. Esse é o resultado do corolário 3.6.

**Corolário 3.6.** (*Cottenceau et al., 1999, Cor. 1*) Seja  $H$  a função de transferência de um GET. Existe um controlador máximo  $F_{\max} = H \setminus H \not\downarrow H$  solução de  $(HF)^*H = H$ , ou seja, um controlador máximo que mantém a função de transferência do sistema inalterada.

Para realimentação de estado sobre a entrada conforme a Fig. 16,  $G_{mf}(F) = H(FA^*B)^*$  e o controlador máximo é dado pela proposição 3.7.

**Proposição 3.7.** (*Cottenceau et al., 2001, Prop. 31*) Se  $G_{ref} = D^*H$ , com  $D$  matriz racional de dimensões apropriadas, então existe um controlador máximo  $F_{\max} = H \setminus G_{ref} \not\downarrow (A^*B)$  solução de  $H(FA^*B)^* \preceq G_{ref}$ .

Para realimentação de saída sobre o estado conforme a Fig. 17,  $G_{mf}(F) = (CA^*F)^*H$  e o controlador máximo é dado pela proposição 3.8.

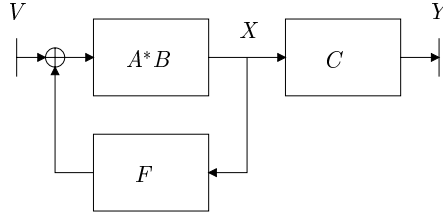


Figura 16: Realimentação de estado sobre a entrada.

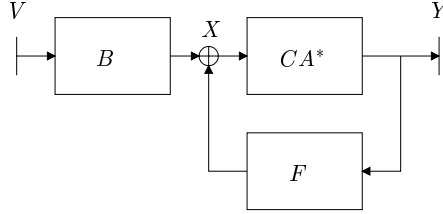


Figura 17: Realimentação de saída sobre o estado.

**Proposição 3.8.** (*Cottenceau et al., 2001, Prop. 32*) Se  $G_{ref} = HD^*$ , com  $D$  matriz racional de dimensões apropriadas, então existe um controlador máximo  $F_{max} = (CA^*) \setminus G_{ref} \setminus H$  solução de  $(CA^*F)^*H \preceq G_{ref}$ .

Note que os resultados acima são obtidos a partir da descrição do sistema em termos de sua função de transferência. A proposta desta tese é a de formular o problema de “model matching” no espaço de estado. Assim, os resultados das proposições 3.4, 3.5, 3.7 e 3.8 serão usados para comparação nos capítulos seguintes.

### 3.6 Estabilidade

Na teoria de sistemas contínuos, estabilidade é um conceito fundamental tanto na análise quanto no controle de sistemas. Portanto, esta seção aborda alguns aspectos sobre estabilidade de GETs.

O conceito de estabilidade na literatura de GETs normalmente se refere à explosão do número de fichas em um ou mais lugares do grafo. Esse conceito está relacionado à propriedade de “boundedness” na teoria geral de redes de Petri.

Esse assunto foi tratado em Max-Plus (1991) e Baccelli *et al.* (1992), estabelecendo o principal resultado sobre estabilização de GETs.

**Proposição 3.9 (Estabilização por realimentação de saída).** (*Baccelli et al., 1992, Teo. 6.53*) Um grafo a eventos estruturalmente controlável e observável pode ser internamente estável por realimentação de saída.

Internamente estável se refere à condição de estabilidade para qualquer entrada. A prova dessa proposição faz uso de um resultado clássico de grafos a eventos: um grafo a eventos fortemente conexo é limitado ou “bounded”.

Portanto, a proposição 3.9 apenas estabelece condições suficientes para se obter um grafo fortemente conexo. Controlabilidade (observabilidade) estrutural ocorre quando existe um caminho de pelo menos uma transição de entrada para qualquer transição interna (respectivamente, de qualquer transição interna para pelo menos uma de saída).

Recentemente em Commault (1998), resultados precisos sobre estabilidade e estabilização são obtidos com ênfase nas propriedades de grafos a eventos (temporizados ou não). Conceitos como estruturalmente estável (que não depende da marcação inicial) e vivamente estabilizável (que podem ser estabilizados sem bloqueio) são introduzidos. Em conformidade com a proposição 3.9, a relação entre estabilidade e sistema fortemente conexo é fundamental, mas não é necessária.

Intuitivamente, o acúmulo de fichas num lugar pode ser quantificado pela diferença entre o número de disparos da transição  $x_i$  que entra nesse lugar e o número de disparos da transição  $x_j$  que parte desse lugar. Essa diferença é sempre positiva ou nula e pode ser mostrado que é limitada pela correlação entre os contadores associados a  $x_i$  e  $x_j$  na álgebra min-plus. Detalhes desses resultados são encontrados em Max-Plus (1991) e Baccelli *et al.* (1992), onde a correlação é definida como o resíduo de um produto de convolução. Isso sugere o desenvolvimento de uma teoria de segunda ordem para GETs. Se essa diferença é limitada para todo lugar do grafo, então o sistema é estável. Raciocínio semelhante pode ser feito para o tempo de permanência das fichas nos lugares usando datadores na álgebra max-plus. Se o tempo de permanência das fichas nos lugares é limitado para todo lugar do grafo, então o sistema é estável.

Resumindo, uma condição suficiente para obter estabilidade é o uso de um controlador em realimentação de saída. Entretanto, essa condição pode levar a desempenhos insatisfatórios, como será visto adiante. Além disso, nas abordagens de controle apresentadas neste capítulo, a estabilidade do sistema controlado não é uma restrição de projeto, mas uma propriedade a ser verificada posteriormente. Isso se deve basicamente à dificuldade em determinar a estabilidade do sistema apenas através de sua função de transferência.

### 3.7 Conclusão

Como resumo dos principais tópicos abordados neste capítulo, tem-se o seguinte. O controle ótimo e o preditivo de GETs utilizam uma descrição multivariável do sistema, mas admitem apenas especificações de controle do tipo entrada-saída na forma de trajetórias a serem seguidas. Já o controle supervísório usa uma descrição multivariável do sistema, mas admite especificações de controle

também multivariáveis, ou seja, é possível especificar o comportamento das transições internas do sistema. Finalmente, o controle por modelo de referência usa somente a representação entrada-saída do sistema e portanto, admite apenas especificações desse tipo.

A proposta desta tese é um meio termo entre o controle por modelo de referência e o controle supervísório, pois o objetivo de controle é um “matching” entre representações do tipo entrada-saída, atuando-se sobre a representação multivariável do sistema. Além disso, a estrutura de controle utilizada é de realimentação de estado, mais geral do que as estruturas propostas no modelo de referência e diferente da estrutura em “malha aberta” do controle supervísório apresentado neste capítulo. Por esse motivo essa estratégia é denominada genericamente de controle multivariável. Isso é discutido nos capítulos 4, 5 e 6 a seguir.





## Capítulo 4

# Controle Multivariável

### 4.1 Introdução

No capítulo 3 foram apresentadas diversas abordagens de controle de GETs. Essas abordagens têm em comum o uso da álgebra de dióides para a descrição do sistema a ser controlado e se distinguem pelos diferentes objetivos de controle a serem atendidos. Assim, nos controles ótimo, supervisório e preditivo são especificadas trajetórias a serem seguidas. Já no controle por modelo de referência, a função de transferência do sistema controlado deve se igualar a uma função de transferência especificada.

Este capítulo e o seguinte, como tema central da tese, propõem um controle por modelo de referência usando uma formulação no espaço de estado. Assim, o objetivo de controle é aproximar a função de transferência do sistema controlado por uma função de transferência especificada, atuando sobre as transições internas do sistema, conforme ilustrado na Fig. 18. Assim, os resultados de Cottenceau (1999) obtidos através de relações entrada-saída são generalizados (Lüders e Santos-Mendes, 2002).

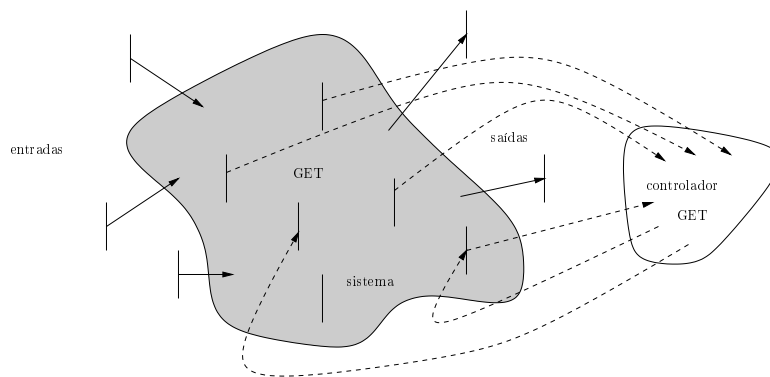


Figura 18: Estrutura geral de controle.

O problema de controle por modelo de referência obtém, através de um controlador  $F$ , um “matching” entre a função de transferência do sistema com controlador  $G_{mf}(F)$  e uma função de transferência especificada externamente  $G_{ref}$ . Como a igualdade nem sempre pode ser obtida, abordagens de “model matching” costumam se utilizar de uma ‘melhor aproximação’ de  $G_{ref}$ . No contexto de dióides, a solução de uma equação é tratada pela teoria da residuação (seção 1.2.2). Nesse caso, a equação toma a forma de uma inequação e busca-se a solução máxima, caso exista. Formalmente, tem-se:

**Definição 4.1 (“Model matching”).** *Dada uma função de transferência  $G_{ref}$  (modelo de referência) e um sistema com um controlador  $F$ , cuja função de transferência (sistema+controlador) é dada por  $G_{mf}(F)$ , o problema de “model matching” consiste em encontrar o máximo controlador  $F_{\max}$  tal que  $G_{mf}(F_{\max}) \preceq G_{ref}$ .*

A estrutura de controle utilizada define a função de transferência  $G_{mf}(F)$  obtida com o controlador. Neste capítulo, utiliza-se uma estrutura em realimentação de estado, na qual o controlador  $F$  tem completo acesso aos estados internos do sistema, tanto para observação quanto para controle. Nesta tese, os conceitos de observabilidade e controlabilidade de uma transição correspondem à capacidade de conhecer os instantes de disparo da transição e à capacidade de retardar ou inibir seu disparo, respectivamente. Portanto, assume-se que qualquer transição interna do sistema é observável e controlável.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. A seção 4.2 formula o problema de “model matching” no espaço de estado, que corresponde a encontrar a solução máxima da inequação  $G_{mf}(F) = C(A \oplus F)^*B \preceq G_{ref}$ , na qual  $(A, B, C)$  é uma realização no espaço de estado do sistema a ser controlado. O principal resultado dessa seção é o teorema 4.7, que estabelece uma equivalência entre a solução máxima dessa inequação e a solução máxima de  $F^* \preceq K$ , onde  $K$  pode ser calculado a partir do modelo do sistema e da especificação. Esta inequação restringe o espaço de busca e suas propriedades podem ser mais facilmente estudadas do que com a inequação original. Notadamente, o corolário 4.8 desse teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que  $K$  seja o controlador máximo procurado, fornecendo uma equação analítica para o seu cálculo. Caso essa condição não se verifique, na seção 4.3, dois controladores sub-ótimos são fornecidos numa forma analítica fechada. Todos esses resultados são originais.

## 4.2 Realimentação de estado

A estrutura de controle proposta nessa tese introduz uma nova entrada de controle que utiliza informação dos estados para atuar diretamente sobre estes. Assim,  $X = AX \oplus X_c \oplus BU$ , sendo  $X_c = FX$  a saída do controlador  $F$ . Nesse caso, a seguinte representação no espaço de estado é

obtida:

$$X = (A \oplus F)X \oplus BU \quad (4.1a)$$

$$Y = CX \quad (4.1b)$$

Essa configuração é mostrada na Fig. 19, na qual  $(A, B, C)$  é uma realização do sistema com matrizes de dimensões apropriadas no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\gamma, \delta]$ . As transições de entrada e de saída são representadas pelo vetores  $U$  e  $Y$ , respectivamente, enquanto as transições internas ou estados do sistema são representadas pelo vetor  $X$ .

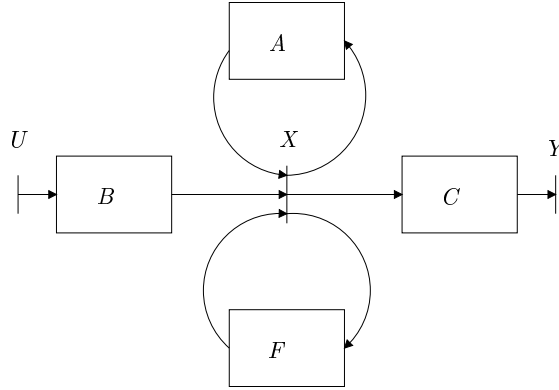


Figura 19: Estrutura em realimentação de estado.

Pelo teorema 1.40, a equação (4.1a) implícita em  $X$  tem como solução mínima  $X = (A \oplus F)^*BU$ . Logo,  $Y = C(A \oplus F)^*BU$  e a função de transferência do sistema em malha fechada  $G_{mf}$  é por definição:

$$G_{mf} = C(A \oplus F)^*B \quad (4.2)$$

O problema de “model matching” consiste em obter um controlador  $F$  máximo tal que o comportamento do sistema em malha fechada se aproxime inferiormente da especificação, ou seja,  $G_{mf}(F) \preceq G_{ref}$ . Logo, esse problema formulado no espaço de estados consiste em se obter a solução máxima da seguinte inequação em  $F$ :

$$C(A \oplus F)^*B \preceq G_{ref} \quad (4.3)$$

Em outras palavras, deseja-se encontrar o maior controlador  $F$  tal que o comportamento do sistema em malha fechada  $G_{mf}$  seja igual ou inferior ao comportamento especificado por  $G_{ref}$ . A aplicação direta da teoria da residuação na inequação (4.3), considerando os produtos à esquerda e à direita por  $C$  e  $B$ , respectivamente, resulta em:

$$(A \oplus F)^* \preceq C \backslash G_{ref} / B \quad (4.4)$$

Definindo-se  $A_{ref} = C \setminus G_{ref} \not\leq B$ , a inequação (4.4) pode ser reescrita como:

$$(A \oplus F)^* \preceq A_{ref} \quad (4.5)$$

A equação (4.5) acima tem a forma  $x^* \preceq b$ , cuja solução máxima existe para  $b = b^*$ , conforme o lema 1.38. Equação semelhante é obtida nas proposições 3.4, 3.7 e 3.8 extraídas de Cottenceau *et al.* (2001), nas quais restrições sobre  $b$  garantem a existência de solução máxima para o problema de “model matching”. Note que restringir  $b$  corresponde a restringir os modelos de referência que podem ser especificados.

A estratégia adotada nessa tese é ligeiramente diferente. Ao invés de procurar restrições para o lado direito da inequação (4.5), procuram-se condições que se verificadas para um modelo de referência qualquer, conduzem a uma solução máxima conhecida. Isso é discutido a seguir.

**Lema 4.2.** *A inequação  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  tem solução se e somente se  $A^* \preceq A_{ref}$ .*

*Demonstração.*  $\Rightarrow$  Suponha que existe  $F_1$  solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ .

$$\begin{array}{ll} A \preceq A \oplus F_1 & \text{por definição} \\ A^2 \preceq (A \oplus F_1)^2 & \text{devido à isotonia do produto} \\ A^3 \preceq (A \oplus F_1)^3 & \text{idem} \\ \vdots & \\ e \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \preceq e \oplus (A \oplus F_1) \oplus (A \oplus F_1)^2 \oplus \dots & \text{soma membro a membro} \\ A^* \preceq (A \oplus F_1)^* \preceq A_{ref} & \text{pois } F_1 \text{ é solução} \end{array}$$

$\Leftarrow$  Se  $A^* \preceq A_{ref}$ , então  $F = \epsilon$  é solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ . De fato,  $(A \oplus \epsilon)^* = A^* \preceq A_{ref}$ .  $\square$

**Corolário 4.3.** *A inequação  $C(A \oplus F)^*B \preceq G_{ref}$  tem solução se e somente se  $H \preceq G_{ref}$ , sendo  $H = CA^*B$  a função de transferência do sistema sem controlador.*

*Demonstração.* Imediata pela isotonia do produto à esquerda e à direita. Assim, pelo lema 4.2,  $C(A \oplus F)^*B \preceq CA_{ref}B \Leftrightarrow CA^*B \preceq CA_{ref}B$ . Entretanto,  $CA_{ref}B = C(C \setminus G_{ref} \not\leq B)B \preceq G_{ref}$  devido a (A.1). Logo,  $C(A \oplus F)^*B \preceq G_{ref} \Leftrightarrow CA^*B \preceq G_{ref}$ .  $\square$

O corolário 4.3 acima estabelece que só existe solução para o problema de controle se for especificada uma função de transferência maior (segundo a relação de ordem do dióide usado para modelar o sistema) do que a função de transferência original do sistema. Em outras palavras, a adição de um controlador pode apenas atrasar a resposta do sistema. Isso é um reflexo do fato de que o disparo de uma transição num GET pode ser inibida, mas nunca antecipada pelo controlador. Num contexto de produção, uma aplicação imediata é a possibilidade de atrasar o máximo possível

o início de produção de um item sem violar uma demanda a ser atendida num prazo especificado. Essa é uma política de produção “just-in-time”. Um caso importante a ser tratado é o de atrasar o máximo possível a entrada sem alterar a resposta do sistema. Isso corresponde a encontrar o máximo controlador que mantém inalterada a função de transferência do sistema. Nesse caso,  $G_{ref} = H$ .

Para  $A^* \preceq A_{ref}$ , pode-se mostrar que  $\{\epsilon, A, A^*\}$  são algumas soluções da inequação (4.5). Entretanto, essas soluções não apresentam interesse algum para o problema de controle. De fato,  $F = \epsilon$  corresponde a um controlador nulo, ou seja, corresponde a abrir a malha de controle. Por outro lado,  $F = A$  ou  $F = A^*$  determinam um comportamento já cumprido pelo sistema, ou seja, são redundantes. Nesses casos, nenhum controlador é requerido. Portanto, as soluções que possuem algum interesse para controle são maiores do que  $A^*$ , quando existem. Esse resultado é formalizado no lema 4.5 abaixo. Os lemas 4.4 a 4.5 a seguir caracterizam de maneira geral o conjunto de soluções da inequação (4.5). Esses lemas são resultados intermediários necessários para a demonstração do teorema 4.7 e respectivo corolário 4.8 que estabelece uma solução para o problema de controle.

**Lema 4.4.** *Se  $F_1$  é solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , então  $(A \oplus F_1)^*$  também é solução e  $F_1^* \preceq K$ , onde  $K = A^* \setminus A_{ref} \setminus A^*$ .*

*Demonstração.*

$$\begin{array}{ll}
 A \preceq A \oplus F_1 & \text{por definição} \\
 A^* \preceq (A \oplus F_1)^* & \text{isotonia do produto} \\
 A \oplus (A \oplus F_1)^* = (A \oplus F_1)^* & \text{pois } A \preceq A^* \\
 (A \oplus (A \oplus F_1)^*)^* = ((A \oplus F_1)^*)^* & \text{isotonia do produto} \\
 (A \oplus (A \oplus F_1)^*)^* = (A \oplus F_1)^* & \text{devido a (A.24)} \\
 (A \oplus (A \oplus F_1)^*)^* \preceq A_{ref} & \text{pois } F_1 \text{ é solução}
 \end{array}$$

Logo,  $(A \oplus F_1)^*$  também é solução. Além disso,

$$\begin{array}{ll}
 (A \oplus F_1)^* = (A \oplus F_1^*)^* & \text{devido a (A.33)} \\
 (A \oplus F_1^*)^* = (A^* F_1^*)^* A^* & \text{devido a (A.27)} \\
 (A^* F_1^*)^* A^* \preceq A_{ref} & \text{pois } F_1 \text{ é solução} \\
 (A^* F_1^*)^* \preceq A_{ref} \setminus A^* & \text{resíduo do produto à direita} \\
 A^* F_1^* \preceq A_{ref} \setminus A^* & \text{pois } A^* F_1^* \preceq (A^* F_1^*)^* \\
 F_1^* \preceq A^* \setminus A_{ref} \setminus A^* & \text{resíduo do produto à esquerda}
 \end{array}$$

□

**Lema 4.5.** *Se  $F_{\max}$  é solução máxima de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , então  $A^* \preceq F_{\max} = F_{\max}^*$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $F_{\max}$  é solução máxima.

$$\begin{aligned} F_{\max} &\preceq A \oplus F_{\max} && \text{por definição} \\ F_{\max}^* &\preceq (A \oplus F_{\max})^* && \text{isotonia do produto} \\ F_{\max} &\preceq (A \oplus F_{\max})^* && \text{pois } F_{\max} \preceq F_{\max}^* \end{aligned}$$

Mas  $(A \oplus F_{\max})^*$  também é solução devido ao lema 4.4, e o resultado acima contraria o fato de que  $F_{\max}$  é máxima. Portanto,

$$\begin{aligned} F_{\max} &= (A \oplus F_{\max})^* \\ F_{\max}^* &= ((A \oplus F_{\max})^*)^* && \text{isotonia do produto} \\ F_{\max}^* &= (A \oplus F_{\max})^* && \text{devido a (A.24)} \\ F_{\max}^* &= F_{\max} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A &\preceq A \oplus F_{\max} && \text{por definição} \\ A^* &\preceq (A \oplus F_{\max})^* && \text{isotonia do produto} \\ A^* &\preceq F_{\max} && \text{pois } F_{\max} = (A \oplus F_{\max})^* \end{aligned}$$

Finalmente, segue do lema 4.4 que  $F_{\max}^* \preceq K$ . □

Logo, a solução máxima, quando existe, é um elemento-estrela do dióide tal que  $A^* \preceq F_{\max} \preceq K$ . Esse resultado permite restringir o espaço de busca da solução máxima.

**Lema 4.6.** *Se  $A^* \preceq A_{ref}$ , então  $A^* \preceq K \preceq A_{ref}$ , onde  $K = A^* \setminus A_{ref} \setminus A^*$ .*

*Demonstração.* Dado que  $A^* \preceq A_{ref}$ ,

$$\begin{aligned} A^* \setminus A^* &\preceq A^* \setminus A_{ref} && f(x) = a \setminus x \text{ isotônica} \\ A^* &\preceq A^* \setminus A_{ref} && \text{devido a (A.21)} \\ A^* \setminus A^* &\preceq A^* \setminus A_{ref} \setminus A^* && f(x) = x \setminus a \text{ isotônica} \\ A^* &\preceq A^* \setminus A_{ref} \setminus A^* && \text{devido a (A.21)} \end{aligned}$$

Como  $A^* \succeq e$ ,

$$\begin{array}{ll}
 A^* \setminus A_{ref} \preceq e \setminus A_{ref} & f(x) = x \setminus a \text{ antitônica} \\
 A^* \setminus A_{ref} \not\preceq A^* \preceq A_{ref} \not\preceq A^* & \text{pois } e \setminus A_{ref} = A_{ref} \text{ e } f(x) = x \setminus a \text{ isotônica} \\
 A_{ref} \not\preceq A^* \preceq A_{ref} \not\preceq e & f(x) = a \setminus x \text{ antitônica} \\
 A^* \setminus A_{ref} \not\preceq A^* \preceq A_{ref} & \text{pois } A_{ref} \not\preceq e = A_{ref}
 \end{array}$$

□

**Teorema 4.7.** *Se  $A^* \preceq A_{ref}$ , então  $F_{\max}$  é solução máxima de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  se e somente se  $F_{\max}$  é solução máxima de  $F^* \preceq K$ , onde  $K = A^* \setminus A_{ref} \not\preceq A^*$ .*

*Demonstração.*  $\Rightarrow$  Se  $F_{\max}$  é solução máxima de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , então  $A^* \preceq F_{\max}$  pelo lema 4.5. Logo,

$$\begin{array}{ll}
 F_{\max} = A \oplus F_{\max} & \text{pois } A \preceq A^* \\
 F_{\max}^* = (A \oplus F_{\max})^* & \text{isotonia do produto}
 \end{array}$$

Portanto,  $F_{\max}^* = (A \oplus F_{\max})^* \preceq A_{ref}$ . Ou seja,  $F_{\max}$  pode ser tão grande quanto  $F_{\max}^* \preceq A_{ref}$  permitir. Logo,  $F_{\max}$  é solução máxima de  $F^* \preceq A_{ref}$ . Entretanto,  $F_{\max}^* \preceq K$  pelo lema 4.4 e  $K \preceq A_{ref}$  pelo lema 4.6. Portanto,  $F_{\max}$  pode ser tão grande quanto  $F_{\max}^* \preceq K$  permitir, ou seja,  $F_{\max}$  é solução máxima de  $F^* \preceq K$ .

$\Leftarrow$  Se  $F_{\max}$  é solução máxima de  $F^* \preceq K$ , então basta mostrar que  $F_{\max}$  é solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , pois nesse caso, devido ao lema 4.4, qualquer solução  $F_1$  de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  é tal que  $F_1 \preceq F_{\max}$ . Como  $A^* \preceq K$  pelo lema 4.6,  $F = A^*$  é solução de  $F^* \preceq K$  e portanto  $A^* \preceq F_{\max}$ . Logo,

$$\begin{array}{ll}
 A \oplus F_{\max} = F_{\max} & \text{pois } A \preceq A^* \preceq F_{\max} \\
 (A \oplus F_{\max})^* = F_{\max}^* & \text{isotonia do produto} \\
 (A \oplus F_{\max})^* \preceq K & \text{pois } F_{\max}^* \preceq K \\
 (A \oplus F_{\max})^* \preceq A_{ref} & \text{pois } K \preceq A_{ref} \text{ devido ao lema 4.6}
 \end{array}$$

□

O teorema 4.7 acima é o principal resultado deste capítulo. A partir do teorema 4.7, obter o resíduo da inequação (4.5) corresponde a obter o resíduo da seguinte inequação:

$$F^* \preceq K \tag{4.6}$$

Com  $K = A^* \setminus A_{ref} \not\preceq A^*$ .

**Corolário 4.8.**  $F_{\max} = K$  é solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  e é máxima se e somente se  $K^* = K$ , onde  $K = A^* \setminus A_{ref} \not\leq A^*$ .

*Demonstração.*  $\Rightarrow$  Se  $F_{\max} = K$  é solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , então  $K^* \preceq K$  pelo lema 4.4. Logo,  $K^* = K$  pois  $K \preceq K^* \preceq K$ . Nesse caso,  $F_{\max} = K$  é solução máxima de  $F^* \preceq K$  pois  $F_{\max}^* = K^* = K$  e qualquer solução  $F_1$  de  $F^* \preceq K$  é tal que  $F_1 \preceq F_1^* \preceq K = F_{\max}$ .  
 $\Leftarrow$  Se  $K^* = K$ , então  $F_{\max} = K$  é solução máxima de  $F^* \preceq K$  pelos argumentos anteriores.  $\square$

O corolário 4.8 acima permite calcular o máximo controlador para um sistema e especificação que satisfazem  $K^* = K$ . Esta condição pode ser facilmente verificada com o auxílio do lema 1.39 que reduz o teste a uma simples operação de multiplicação de matrizes. Como  $A^* \preceq A_{ref}$  pelo lema 4.2, tem-se que  $A^* \preceq K$  pelo lema 4.6. Portanto,  $e \preceq K$  e  $K^* = K$  se e somente se  $K^2 = K$  devido ao lema 1.39.

Caso essa condição não se verifique, não significa que a solução máxima não existe. Entretanto, pelo nosso conhecimento, não existe uma abordagem geral para o resíduo de  $x^* \preceq b$ , exceto para o caso em que  $b = b^*$ . Como alternativa, a seção 4.3 a seguir fornece duas soluções sub-ótimas.

### 4.3 Controladores sub-ótimos

Pelo corolário 4.8, se  $K^* \neq K$ , então  $F = K$  não é solução da inequação (4.6). Entretanto, nada se pode afirmar sobre a solução máxima. Ainda assim, duas soluções sub-ótimas podem ser obtidas, as quais interessam ao problema de controle, pois são maiores que  $A^*$ . Isso é estabelecido pelos lemas 4.9 e 4.10 a seguir.

**Lema 4.9.** Sejam  $F_a = K \setminus K$  e  $F_b = K \not\leq K$ . Se  $A^* \preceq A_{ref}$ , então  $A^* \preceq F_a = F_a^* \preceq K$  e  $A^* \preceq F_b = F_b^* \preceq K$ , onde  $K = A^* \setminus A_{ref} \not\leq A^*$ .

*Demonstração.*

$$KA^* = (A^* \setminus A_{ref} \not\leq A^*)A^* = K \quad \text{devido a (A.22)}$$

$$F_a = K \setminus K = K \setminus (KA^*) \succeq A^* \quad \text{devido a (A.2)}$$

$$e \preceq K \quad \text{pois } e \preceq A^* \text{ e } A^* \preceq K \text{ pelo lema 4.6}$$

$$e(K \setminus K) \preceq K(K \setminus K) \quad \text{isotonia do produto}$$

$$F_a \preceq K \quad \text{pois } K(K \setminus K) = K \text{ devido a (A.3)}$$

$$F_a = F_a^* \preceq K \quad \text{pois } (K \setminus K)^* = K \setminus K \text{ devido a (A.18)}$$



Analogamente,

$$\begin{aligned}
A^*K &= A^*(A^*\backslash A_{ref}\not\!/\!A^*) = K && \text{devido a (A.22)} \\
F_b &= K\not\!/\!K = (A^*K)\not\!/\!K \succeq A^* && \text{devido a (A.2)} \\
(K\not\!/\!K)e &\preceq (K\not\!/\!K)K && \text{isotonia do produto} \\
F_b &\preceq K && \text{pois } (K\not\!/\!K)K = K \text{ devido a (A.3)} \\
F_b &= F_b^* \preceq K && \text{pois } (K\not\!/\!K)^* = K\not\!/\!K \text{ devido a (A.18)}
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.10.** *Se  $A^* \preceq A_{ref}$ , então  $F_a = K\backslash K$  e  $F_b = K\not\!/\!K$  são soluções de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , onde  $K = A^*\backslash A_{ref}\not\!/\!A^*$ .*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
A \oplus F_a &= F_a && \text{pois } A \preceq A^* \text{ e } A^* \preceq F_a \text{ pelo lema 4.9} \\
(A \oplus F_a)^* &= F_a^* && \text{isotonia do produto} \\
(A \oplus F_a)^* &\preceq K && \text{pois } F_a^* \preceq K \text{ devido ao lema 4.9} \\
(A \oplus F_a)^* &\preceq A_{ref} && \text{pois } K \preceq A_{ref} \text{ devido ao lema 4.6}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
A \oplus F_b &= F_b && \text{pois } A \preceq A^* \text{ e } A^* \preceq F_b \text{ pelo lema 4.9} \\
(A \oplus F_b)^* &= F_b^* && \text{isotonia do produto} \\
(A \oplus F_b)^* &\preceq K && \text{pois } F_b^* \preceq K \text{ devido ao lema 4.9} \\
(A \oplus F_b)^* &\preceq A_{ref} && \text{pois } K \preceq A_{ref} \text{ devido ao lema 4.6}
\end{aligned}$$

□

Note que os controladores  $F_a$  e  $F_b$  definidos acima são elementos-estrela do dióide e são tais que  $A^* \preceq F_a \preceq K$  e  $A^* \preceq F_b \preceq K$ . Ou seja, estes controladores sub-ótimos pertencem ao espaço de busca da solução máxima, conforme estabelecido pelo lema 4.5.

## 4.4 Conclusão

O controle multivariável de GETs apresentado nesse capítulo utiliza uma estrutura em realimentação de estado, cujo objetivo de controle é aproximar a função de transferência do sistema controlado de uma função de transferência especificada. A solução deste problema corresponde a

solucionar a equação  $G_{mf}(F) = G_{ref}$  para um controlador  $F$ , na qual a estrutura de controle utilizada define a função de transferência  $G_{mf}(F)$  do sistema controlado e  $G_{ref}$  a função de transferência especificada (modelo de referência). Este problema é genericamente conhecido como controle por modelo de referência. Em termos da teoria da residuação, pode ser assim formulado: dada uma função de transferência  $G_{ref}$  (modelo de referência) e um sistema com um controlador  $F$  cuja função de transferência (sistema+controlador) é dada por  $G_{mf}(F)$ , existe um controlador máximo  $F_{\max}$  tal que  $G_{mf}(F_{\max}) \preceq G_{ref}$ ?

A estrutura de controle proposta introduz uma nova entrada de controle  $X_c = FX$ , sendo  $F$  o controlador a ser obtido. Esta entrada atua diretamente sobre o estado do sistema a partir de informações do próprio estado, ou seja:

$$\begin{aligned} X &= (A \oplus F)X \oplus BU \\ Y &= CX \end{aligned}$$

Nessa estrutura em realimentação de estado, assume-se que os estados internos do sistema são completamente observáveis e controláveis. Nesse caso, observabilidade e controlabilidade de um estado ou transição correspondem à capacidade de conhecer os instantes de disparo da transição e à capacidade de retardar ou inibir seu disparo, respectivamente.

O problema de controle por modelo de referência definido no espaço de estado corresponde a encontrar o resíduo da inequação (4.5) de “matching”. O principal resultado desse capítulo é o teorema 4.7 que estabelece a equivalência entre esse resíduo e o resíduo da inequação (4.6), reescrita abaixo.

$$F^* \preceq K$$

Com  $K = A^* \backslash A_{ref} \not\backslash A^*$ ,  $A_{ref} = C \backslash G_{ref} \not\backslash B$  e  $H = CA^*B$  é a função de transferência do sistema sem controlador.

Como consequência, o corolário 4.8 estabelece uma condição necessária e suficiente para que  $F_{\max} = K$  seja o controlador máximo procurado, fornecendo uma expressão analítica para o seu cálculo. Caso essa condição não se verifique, nada se pode afirmar sobre a solução máxima. Entretanto, outro resultado importante é a obtenção de dois controladores sub-ótimos numa forma analítica fechada.

## Capítulo 5

# Controle Multivariável Restrito

### 5.1 Introdução

O controle de GETs apresentado no capítulo 4 supõe acesso completo aos estados. Nesse caso, a sequência temporal de disparo de qualquer transição do sistema (seja esta interna, de entrada ou de saída) pode ser diretamente observada e controlada.

Entretanto, esse cenário nem sempre é realista. Muitas vezes tem-se acesso a algumas transições apenas para observação e a outras apenas para controle. Algumas ainda podem ser completamente inacessíveis. Esse caso, frequentemente encontrado na prática, representa acesso parcial ou restrito às transições do sistema a ser controlado. Nesse caso, existe o controlador máximo?

Para representar acesso parcial aos estados, duas matrizes  $P$  e  $Q$  são introduzidas na malha de controle. A matriz  $P$  representa o meio de conexão entre as saídas do controlador e os estados controlados e a matriz  $Q$  o meio de conexão entre os estados observados e as entradas do controlador. Em relação aos resultados anteriores, a introdução de  $P$  e  $Q$  no problema restringe o espaço de soluções da inequação  $G_{mf}(F) \preceq G_{ref}$ , dada no capítulo 4. Essa restrição corresponde a considerar apenas controladores  $F$  que podem ser escritos na forma  $F = PLQ$ , com  $L$  passando a ser a variável do problema.

A organização do capítulo é muito semelhante à do capítulo 4. A seção 5.2 formula o problema de “model matching” com restrição de acesso aos estados. Isso corresponde a encontrar a solução máxima da inequação  $G_{mf}(L) = C(A \oplus PLQ)^*B \preceq G_{ref}$ . O principal resultado original dessa seção é o lema 5.4 e o correspondente corolário 5.5 que fornecem o procedimento para se obter o controlador máximo (caso exista) para  $P$  e  $Q$  particulares. A seção 5.3 discute três casos particulares de  $P$  e  $Q$ , que são equivalentes aos casos tratados em Cottenceau *et al.* (2001), obtendo-se os mesmos resultados das proposições 3.4, 3.7 e 3.8. Esses casos podem ser relacionados a configurações de controle exhaustivamente estudadas na teoria de controle de sistemas contínuos: realimentação de saída e

realimentação de estado (sobre a entrada). O terceiro caso, que corresponde à capacidade de se atuar diretamente nos estados, embora incomum no contexto do controle tradicional, é perfeitamente possível no caso de GETs.

## 5.2 Realimentação de estado restrita

A realimentação de estado restrita atua sobre os estados através da matriz  $P$  e os observa através da matriz  $Q$ . Assim,  $X = AX \oplus PX_c \oplus BU$ , onde  $X_c = LX_o$  é a saída do controlador  $L$  e  $X_o = QX$  são os estados observados. Nesse caso, a seguinte representação no espaço de estado é obtida:

$$X = (A \oplus PLQ)X \oplus BU \quad (5.1a)$$

$$Y = CX \quad (5.1b)$$

Essa configuração é mostrada na Fig. 19, na qual  $(A, B, C)$  é uma realização do sistema com matrizes de dimensões apropriadas no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$ . As transições de entrada e de saída são representadas pelos vetores  $U$  e  $Y$ , respectivamente, enquanto as transições internas ou estados do sistema são representadas pelo vetor  $X$ .

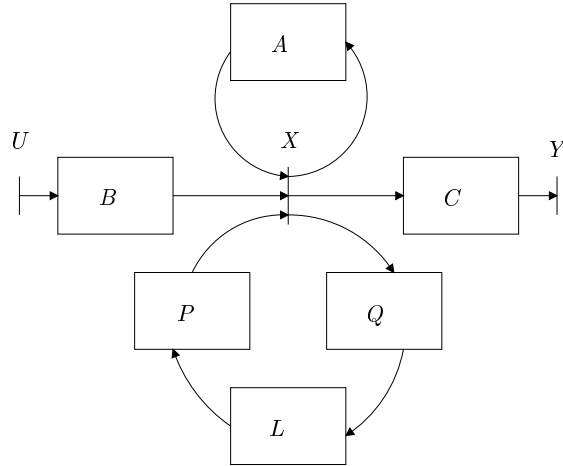


Figura 20: Estrutura em realimentação de estado restrita.

Pelo teorema 1.40, a equação (5.1a) implícita em  $X$  tem como solução mínima  $X = (A \oplus PLQ)^*BU$ . Logo,  $Y = C(A \oplus PLQ)^*BU$  e a função de transferência do sistema em malha fechada  $G_{mf}$  é por definição:

$$G_{mf} = C(A \oplus PLQ)^*B \quad (5.2)$$

Logo, o problema de controle para essa estrutura consiste em obter a solução máxima da seguinte

inequação em  $L$ :

$$C(A \oplus PLQ)^* B \preceq G_{ref} \quad (5.3)$$

A aplicação direta da teoria da residuação na inequação (5.3), considerando os produtos à esquerda e à direita por  $C$  e  $B$ , respectivamente, resulta em:

$$(A \oplus PLQ)^* \preceq C \backslash G_{ref} / B \quad (5.4)$$

Conforme definido no capítulo 4,  $A_{ref} = C \backslash G_{ref} / B$  e a inequação (5.4) pode ser reescrita como:

$$(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref} \quad (5.5)$$

Como consequência do lema 4.2, o lema 5.1 abaixo estabelece as condições para que a equação (5.5) acima tenha solução para  $P$  e  $Q$  quaisquer.

**Lema 5.1.** *A inequação  $(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$  tem solução se e somente se  $A^* \preceq A_{ref}$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 4.2,  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  tem solução se e somente se  $A^* \preceq A_{ref}$ . Entretanto, para qualquer  $F_1$  solução de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  existe  $L_1 = P \backslash F_1 / Q$  solução de  $(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$ , pois  $PL_1Q = P(P \backslash F_1 / Q)Q \preceq F_1$  devido a (A.1).  $\square$

O lema 5.2 abaixo é uma consequência imediata dos resultados do capítulo 4. Se o problema irrestrito tem solução máxima, então o problema restrito tem solução máxima para quaisquer  $P$  e  $Q$ .

**Lema 5.2.** *Se  $F_{\max}$  é solução máxima de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ , então  $L_{\max} = P \backslash F_{\max} / Q$  é solução máxima de  $(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$ .*

*Demonstração.* Para qualquer  $L$  solução de  $(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$  tem-se que  $PLQ \preceq F_{\max}$  e portanto,  $L \preceq L_{\max} = P \backslash F_{\max} / Q$  pelo resíduo do produto à esquerda e à direita.  $\square$

**Corolário 5.3.** *Se  $K^* = K$ , então  $L_{\max} = P \backslash K / Q$  é solução máxima de  $(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$ , onde  $K = A^* \backslash A_{ref} / A^*$ .*

*Demonstração.* Pelo lema 4.8,  $F_{\max} = K$  é solução máxima de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$ .  $\square$

Os resultados acima valem para quaisquer  $P$  e  $Q$ , mas dependem da existência da solução máxima para o problema irrestrito. Entretanto, para  $P$  e  $Q$  particulares, o espaço de soluções é reduzido. De fato, para toda solução  $F_1$  de  $(A \oplus F)^* \preceq A_{ref}$  existe  $L_1 = P \backslash F_1 / Q$  solução de  $(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$ , uma vez que os produtos à esquerda e à direita são residuados, resultando  $PL_1Q \preceq F_1$ . Em alguns casos, a solução máxima pode ser encontrada, conforme o resultado do lema 5.4 abaixo.

**Lema 5.4.** *Se  $L_1$  é solução de  $(A \oplus PL_1Q)^* \preceq A_{ref}$ , então  $L_1 \preceq P \setminus K \setminus Q$ , com  $K = A^* \setminus A_{ref} \setminus A^*$ .*

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
(A \oplus PL_1Q)^* &= (A \oplus (PL_1Q)^*)^* && \text{devido a (A.33)} \\
(A \oplus (PL_1Q)^*)^* &= (A^*(PL_1Q)^*)^* A^* && \text{devido a (A.27)} \\
(A^*(PL_1Q)^*)^* A^* &\preceq A_{ref} && \text{pois } L_1 \text{ é solução} \\
(A^*(PL_1Q)^*)^* &\preceq A_{ref} \setminus A^* && \text{resíduo do produto à direita} \\
A^*(PL_1Q)^* &\preceq A_{ref} \setminus A^* && \text{pois } A^*(PL_1Q)^* \preceq (A^*(PL_1Q)^*)^* \\
(PL_1Q)^* &\preceq A^* \setminus A_{ref} \setminus A^* && \text{resíduo do produto à esquerda} \\
PL_1Q &\preceq A^* \setminus A_{ref} \setminus A^* && \text{pois } PL_1Q \preceq (PL_1Q)^* \\
L_1 &\preceq P \setminus (A^* \setminus A_{ref} \setminus A^*) \setminus Q && \text{resíduo do produto à esquerda e à direita}
\end{aligned}$$

□

**Corolário 5.5.** *Se  $L_{\max} = P \setminus K \setminus Q$  é solução de  $(A \oplus PL_1Q)^* \preceq A_{ref}$ , então  $L_{\max}$  é a solução máxima, onde  $K = A^* \setminus A_{ref} \setminus A^*$ .*

*Demonstração.*  $L_{\max} = P \setminus K \setminus Q$  é um majorante do conjunto das soluções que pertence ao conjunto.

□

### 5.3 Casos particulares

Na seção 5.2 o problema de controle com acesso parcial aos estados foi estabelecido de maneira geral. Porém, existem algumas escolhas particulares de  $P$  e  $Q$  que resultam em estruturas de controle bem conhecidas.

Esse é o caso de se fazer  $P = B$  e  $Q = C$ , que corresponde a controlar apenas as transições de entrada e observar apenas as transições de saída. Tem-se nesse caso uma configuração de controle em realimentação de saída (seção 5.3.1).

Outra configuração comum de controle é obtida quando se faz  $P = B$  e  $Q = e$ . Nesse caso, os estados podem ser completamente observados, mas apenas as transições de entrada podem ser controladas. Essa configuração é discutida na seção 5.3.2.

Finalmente, uma configuração não tão comum é obtida quando se faz  $P = e$  e  $Q = C$ , ou seja, os estados podem ser completamente controlados, mas apenas as transições de saída podem ser observadas. Esse é o assunto da seção 5.3.3.

O objetivo principal dessa seção é o de mostrar que a formulação da seção 5.2 é geral o suficiente para conter esses casos particulares. Além disso, mostra-se que são obtidos os mesmos resultados de Cottenceau *et al.* (2001) e que alguns deles podem ser generalizados.

### 5.3.1 Realimentação de saída

Quando se faz  $P = B$  e  $Q = C$  obtém-se a configuração dada pela Fig. 21 abaixo.

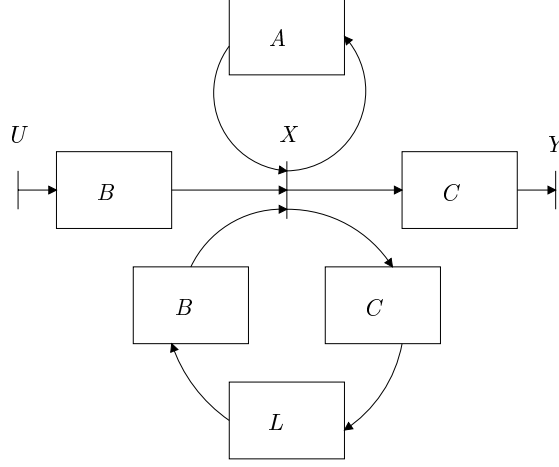


Figura 21: Estrutura em realimentação de estado com  $P = B$  e  $Q = C$ .

Essa configuração pode ser reduzida à estrutura da Fig. 22, onde a realimentação de saída torna-se evidente. Note que é necessária a introdução de uma nova entrada livre  $V$  quando se utiliza a entrada do sistema na realimentação. Nesse caso, a saída do controlador é  $X_c = LX_o = LY$  e  $U = V \oplus LY$ .

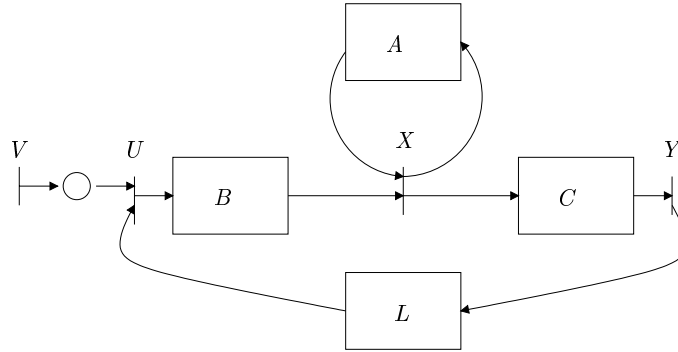


Figura 22: Estrutura em realimentação de saída.

Fazendo-se  $P = B$  e  $Q = C$  na equação (5.3) tem-se:

$$C(A \oplus BLC)^*B \preceq G_{ref} \quad (5.6)$$

A proposição 3.4 estabelece que se  $G_{ref} = HD^*$  ou  $G_{ref} = D^*H$ , então existe um controlador máximo em realimentação de saída dado por  $L_{\max} = H \setminus G_{ref} \not\setminus H$ , com  $H = CA^*B$  a função de transferência do sistema sem controlador. Esse mesmo resultado pode ser obtido da equação (5.6) acima.

De fato, para  $G_{ref} = HD^*$  tem-se:

$$\begin{aligned}
C(A \oplus BLC)^*B &= CA^*(BLCA^*)^*B && \text{devido a (A.27)} \\
CA^*(BLCA^*)^*B &= (CA^*BL)^*CA^*B && \text{devido a (A.26)} \\
(CA^*BL)^*CA^*B &\preceq CA^*BD^* = HD^* \\
(CA^*BL)^* &\preceq (CA^*BD^*)\phi(CA^*B) && \text{resíduo do produto à direita} \\
((CA^*B)D^*)\phi(CA^*B) &= (CA^*BD^*)\phi(CA^*BD^*) && \text{devido a (A.19)} \\
CA^*BL &\preceq (CA^*BD^*)\phi(CA^*BD^*) && \text{resíduo de } x^* \preceq b^* \\
L_{\max} &= (CA^*B)\backslash(CA^*BD^*)\phi(CA^*BD^*) && \text{resíduo do produto à esquerda} \\
L_{\max} &= (CA^*B)\backslash(CA^*BD^*)\phi(CA^*B) \\
L_{\max} &= H\backslash G_{ref}\phi H
\end{aligned}$$

Por outro lado, para  $G_{ref} = D^*H$  tem-se:

$$\begin{aligned}
C(A \oplus BLC)^*B &= C(A^*BLC)^*A^*B && \text{devido a (A.27)} \\
C(A^*BLC)^*A^*B &= CA^*B(LCA^*B)^* && \text{devido a (A.26)} \\
CA^*B(LCA^*B)^* &\preceq D^*CA^*B = D^*H \\
(LCA^*B)^* &\preceq (CA^*B)\backslash(D^*CA^*B) && \text{resíduo do produto à esquerda} \\
(CA^*B)\backslash(D^*(CA^*B)) &= (D^*CA^*B)\backslash(D^*CA^*B) && \text{devido a (A.19)} \\
LCA^*B &\preceq (D^*CA^*B)\backslash(D^*CA^*B) && \text{resíduo de } x^* \preceq b^* \\
L_{\max} &= (D^*CA^*B)\backslash(D^*CA^*B)\phi(CA^*B) && \text{resíduo do produto à direita} \\
L_{\max} &= (CA^*B)\backslash(D^*CA^*B)\phi(CA^*B) \\
L_{\max} &= H\backslash G_{ref}\phi H
\end{aligned}$$

Os resultados acima são demonstrados em Cottenceau *et al.* (2001) a partir de  $(HL)^*H \preceq G_{ref}$ .

Em ambos os casos tem-se:

$$\begin{aligned}
L_{\max} &= (CA^*B)\backslash G_{ref}\phi(CA^*B) \\
L_{\max} &= (A^*B)\backslash(C\backslash G_{ref}\phi B)\phi(CA^*) && \text{devido a (A.15)} \\
L_{\max} &= (A^*B)\backslash A_{ref}\phi(CA^*) \\
L_{\max} &= B\backslash(A^*\backslash A_{ref}\phi A^*)\phi C && \text{devido a (A.15)} \\
L_{\max} &= B\backslash K\phi C
\end{aligned}$$

Note que o resultado acima é o mesmo dado pelo corolário 5.5 para  $P = B$  e  $Q = C$ .



Para  $D = HL_r$  ou  $D = L_rH$  tem-se que  $D^*H = HD^*$  devido a (A.26). Nesse caso, especificando-se  $G_{ref} = (HL_r)^*H = H(L_rH)^*$  tem-se:

$$\begin{aligned} G_{ref} &= CA^*B(L_rCA^*B)^* \\ &= CA^*(BL_rCA^*)^*B && \text{devido a (A.26)} \\ &= C(A \oplus BL_rC)^*B && \text{devido a (A.27)} \end{aligned}$$

A inequação (5.6) fica então  $C(A \oplus BLC)^*B \preceq C(A \oplus BL_rC)^*B$ . Ou seja,  $G_{ref}$  pertence à imagem de  $G_{mf}(L)$  e portanto, o máximo controlador  $L_{\max}$  em realimentação de saída é tal que  $G_{mf}(L_{\max}) = G_{ref}$ . Esse resultado está demonstrado em Cottenceau *et al.* (1999), porém sem referência à forma de  $G_{ref}$  em relação às matrizes  $(A, B, C)$  do sistema. Pelo resultado acima, existe um controlador máximo em realimentação de saída que iguala a especificação de uma função de transferência que pode ser realizada com as mesmas matrizes  $B$  e  $C$  do sistema a ser controlado e com uma matriz  $A_r = (A \oplus BL_rC)$ .

### 5.3.2 Realimentação de estado sobre a entrada

Quando se faz  $P = B$  e  $Q = e$  obtém-se a configuração dada pela Fig. 23 abaixo.

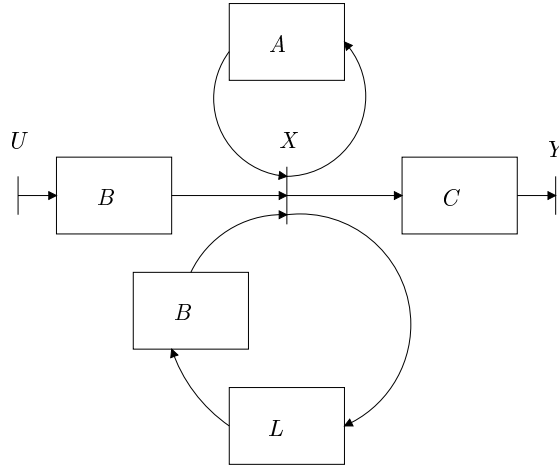


Figura 23: Estrutura em realimentação de estado com  $P = B$  e  $Q = e$ .

Essa configuração é equivalente à mostrada na Fig. 24, correspondendo à realimentação de estado sobre a entrada. Nesse caso, a saída do controlador é  $X_c = LX_o = LX$  e  $U = V \oplus LX$ .

A proposição 3.7 estabelece que se  $G_{ref} = D^*H$ , então existe um controlador máximo para essa configuração dado por  $L_{\max} = H \setminus G_{ref} \setminus (A^*B)$ , onde  $H = CA^*B$  é a função de transferência do sistema sem controlador. Novamente, esse resultado pode ser obtido da equação (5.3) fazendo-se  $P = B$  e  $Q = e$ .

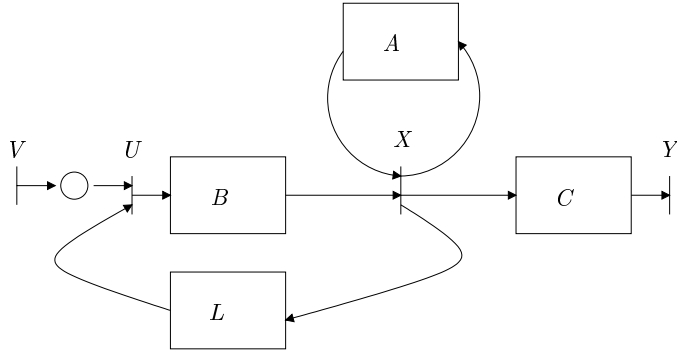


Figura 24: Estrutura em realimentação de estado sobre a entrada.

Entretanto, para demonstrar que esse resultado é ainda mais geral, pois vale para  $Q$  qualquer, substitui-se apenas  $P = B$  na equação (5.3). Logo,

$$C(A \oplus BLQ)^*B \preceq G_{ref} \quad (5.7)$$

De fato, para  $G_{ref} = D^*H$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 C(A \oplus BLQ)^*B &= C(A^*BLQ)^*A^*B && \text{devido a (A.27)} \\
 C(A^*BLQ)^*A^*B &= CA^*B(LQA^*B)^* && \text{devido a (A.26)} \\
 CA^*B(LQA^*B)^* &\preceq D^*CA^*B = D^*H \\
 (LCA^*B)^* &\preceq (CA^*B) \backslash (D^*CA^*B) && \text{resíduo do produto à esquerda} \\
 (CA^*B) \backslash (D^*(CA^*B)) &= (D^*CA^*B) \backslash (D^*CA^*B) && \text{devido a (A.19)} \\
 LQA^*B &\preceq (D^*CA^*B) \backslash (D^*CA^*B) && \text{resíduo de } x^* \preceq b^* \\
 L_{\max} &= (D^*CA^*B) \backslash (D^*CA^*B) \not\prec (QA^*B) && \text{resíduo do produto à direita} \\
 L_{\max} &= (CA^*B) \backslash D^*(CA^*B) \not\prec (QA^*B) \\
 L_{\max} &= H \backslash G_{ref} \not\prec (QA^*B)
 \end{aligned}$$

Nesse caso tem-se:

$$\begin{aligned}
 L_{\max} &= (CA^*B) \backslash G_{ref} \not\prec (QA^*B) \\
 L_{\max} &= (A^*B) \backslash (C \backslash G_{ref} \not\prec B) \not\prec (QA^*) && \text{devido a (A.15)} \\
 L_{\max} &= (A^*B) \backslash A_{ref} \not\prec (QA^*) \\
 L_{\max} &= B \backslash (A^* \backslash A_{ref} \not\prec A^*) \not\prec Q && \text{devido a (A.15)} \\
 L_{\max} &= B \backslash K \not\prec Q
 \end{aligned}$$

O resultado acima é o mesmo dado pelo corolário 5.5 para  $P = B$  e  $Q$  qualquer. Para  $Q = e$  tem-se  $L_{\max} = H \backslash G_{ref} \not\prec (A^*B)$ , que é o resultado demonstrado em Cottenceau *et al.* (2001) a partir

de  $H(LA^*B)^* \preceq G_{ref}$ . Portanto o resultado acima é mais geral, uma vez que se  $G_{ref} = D^*H$ , então existe um controlador máximo para  $P = B$  e  $Q$  qualquer.

Entretanto para  $D = HL_r$ , o lema 5.6 a seguir estabelece que o máximo controlador em realimentação de estado sobre a entrada iguala a especificação.

**Lema 5.6.** *Se  $G_{ref} = (HL_r)^*H$ , então o máximo controlador  $L_{\max} = B \setminus K$  em realimentação de estado sobre a entrada é tal que  $G_{mf}(L_{\max}) = G_{ref}$ .*

*Demonstração.* A inequação (5.7) fica  $C(A \oplus BL)^*B \preceq C(A \oplus BL_rC)^*B$ , pois  $Q = e$  e  $(HL_r)^*H = C(A \oplus BL_rC)^*B$ . Logo,  $G_{ref}$  pertence à imagem de  $G_{mf}(L)$ .  $\square$

### 5.3.3 Realimentação de saída sobre o estado

A estrutura de controle da Fig. 25 abaixo é obtida quando se faz  $P = e$  e  $Q = C$ . Embora esta estrutura seja incomum na teoria de controle de sistemas contínuos, pois normalmente não se pode atuar diretamente sobre os estados, a estrutura é perfeitamente possível no caso de um grafo a eventos.

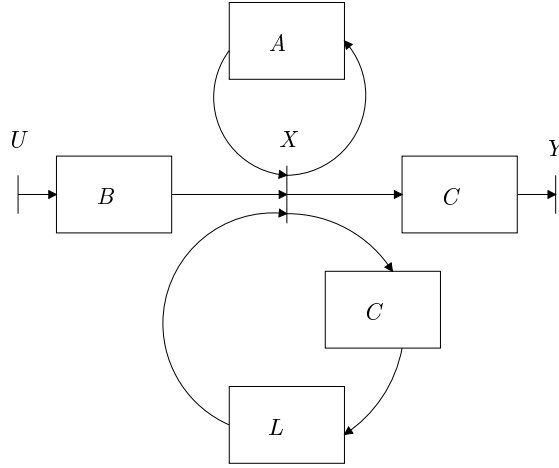


Figura 25: Estrutura em realimentação de estado com  $P = e$  e  $Q = C$ .

Em Cottenceau *et al.* (2001) essa estrutura é denominada realimentação de saída sobre o estado, cuja representação equivalente é mostrada na Fig. 26 abaixo.

A proposição 3.8 estabelece que se  $G_{ref} = HD^*$ , então existe um controlador máximo para essa configuração dado por  $L_{\max} = (CA^*) \setminus G_{ref} \setminus H$ , onde  $H = CA^*B$  é a função de transferência do sistema sem controlador. Esse resultado pode ser obtido da equação (5.3) fazendo-se  $P = e$  e  $Q = C$ .

Para demonstrar que também nesse caso é possível obter um resultado mais geral válido para  $P$

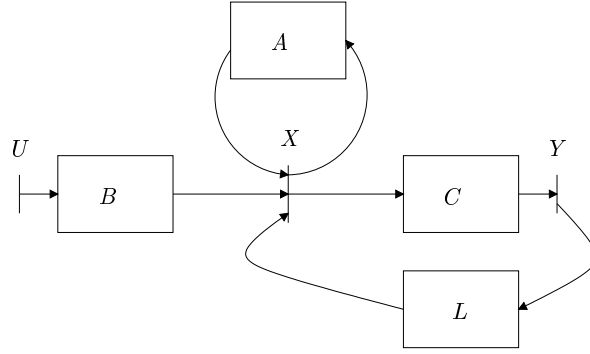


Figura 26: Estrutura em realimentação de saída sobre o estado.

qualquer, substitui-se apenas  $Q = C$  na equação (5.3). Logo,

$$C(A \oplus PLC)^*B \preceq G_{ref} \quad (5.8)$$

Para  $G_{ref} = HD^*$  tem-se:

$$\begin{aligned}
 C(A \oplus PLC)^*B &= CA^*(BLCA^*)^*B && \text{devido a (A.27)} \\
 CA^*(BLCA^*)^*B &= (CA^*PL)^*CA^*B && \text{devido a (A.26)} \\
 (CA^*PL)^*CA^*B &\preceq CA^*BD^* = HD^* \\
 (CA^*PL)^* &\preceq (CA^*BD^*)\not\downarrow(CA^*B) && \text{resíduo do produto à direita} \\
 ((CA^*P)D^*)\not\downarrow(CA^*B) &= (CA^*BD^*)\not\downarrow(CA^*BD^*) && \text{devido a (A.19)} \\
 CA^*PL &\preceq (CA^*BD^*)\not\downarrow(CA^*BD^*) && \text{resíduo de } x^* \preceq b^* \\
 L_{\max} &= (CA^*P)\not\downarrow(CA^*BD^*)\not\downarrow(CA^*BD^*) && \text{resíduo do produto à esquerda} \\
 L_{\max} &= (CA^*P)\not\downarrow(CA^*B)D^*\not\downarrow(CA^*B) \\
 L_{\max} &= (CA^*P)\not\downarrow G_{ref}\not\downarrow H
 \end{aligned}$$

Nesse caso tem-se:

$$\begin{aligned}
 L_{\max} &= (CA^*P)\not\downarrow G_{ref}\not\downarrow(CA^*B) \\
 L_{\max} &= (A^*P)\not\downarrow(C\not\downarrow G_{ref}\not\downarrow B)\not\downarrow(CA^*) && \text{devido a (A.15)} \\
 L_{\max} &= (A^*P)\not\downarrow A_{ref}\not\downarrow(CA) \\
 L_{\max} &= P\not\downarrow(A^*\not\downarrow A_{ref}\not\downarrow A^*)\not\downarrow C && \text{devido a (A.15)} \\
 L_{\max} &= P\not\downarrow K\not\downarrow C
 \end{aligned}$$

O resultado acima é o mesmo dado pelo corolário 5.5 para  $Q = C$  e  $P$  qualquer. Para  $P = e$  tem-se  $L_{\max} = (CA^*)\not\downarrow G_{ref}\not\downarrow H$ , que é o resultado demonstrado em Cottenceau *et al.* (2001) a partir

de  $(CA^*L)^*H \preceq G_{ref}$ . Portanto o resultado acima é mais geral, uma vez que se  $G_{ref} = HD^*$ , então existe um controlador máximo para  $Q = C$  e  $P$  qualquer.

Entretanto para  $D = L_rH$ , o lema 5.6 a seguir estabelece que o máximo controlador em realimentação de estado sobre a entrada iguala a especificação.

**Lema 5.7.** *Se  $G_{ref} = H(L_rH)^*$ , então o máximo controlador  $L_{\max} = K \nmid C$  em realimentação de saída sobre o estado é tal que  $G_{mf}(L_{\max}) = G_{ref}$ .*

*Demonstração.* A inequação (5.7) fica  $C(A \oplus LC)^*B \preceq C(A \oplus BL_rC)^*B$ , pois  $P = e$  e  $H(L_rH)^* = C(A \oplus BL_rC)^*B$ . Logo,  $G_{ref}$  pertence à imagem de  $G_{mf}(L)$ .  $\square$

## 5.4 Conclusão

O controle de GETs apresentado neste capítulo considera que nem todas as transições do sistema são acessíveis. Algumas delas podem ser observadas, outras controladas e outras ainda não possuem qualquer tipo de acesso externo. Esse caso, frequentemente encontrado na prática, representa acesso parcial ou restrito às transições do sistema a ser controlado.

A realimentação de estado restrita atua sobre os estados através da matriz  $P$  e os observa através da matriz  $Q$ . Assim, a saída do controlador  $L$  é  $X_c = LX_o$ , onde  $X_o = QX$  são os estados observados. Nesse caso, tem-se:

$$\begin{aligned} X &= (A \oplus PLQ)X \oplus BU \\ Y &= CX \end{aligned}$$

O problema de controle restrito por modelo de referência corresponde a encontrar o máximo controlador  $L$  que satisfaz a inequação (5.5), reescrita abaixo:

$$(A \oplus PLQ)^* \preceq A_{ref}$$

Sendo  $A_{ref} = C \nmid G_{ref} \nmid B$  e  $H = CA^*B$  a função de transferência do sistema sem controlador.

Dentre os resultados obtidos, o lema 5.2 garante a existência do controlador máximo para o caso restrito quando o controlador máximo para o caso geral existe. Entretanto pelo lema 5.4 e respectivo corolário 5.5, mesmo que a solução máxima do caso geral não possa ser encontrada (se existir), o controlador máximo pode ser obtido para algum  $P$  e  $Q$  particular. A partir daí, os mesmos resultados de Cottenceau *et al.* (1999) e Cottenceau *et al.* (2001) podem ser obtidos, assim como as seguintes generalizações:

- se  $G_{ref} = C(A \oplus BL_rC)^*B$ , então o controlador máximo existe e iguala a especificação em todas as três configurações;

- se  $G_{ref} = D^*H$ , então o controlador máximo existe para  $P = B$  e  $Q$  qualquer;
- se  $G_{ref} = HD^*$ , então o controlador máximo existe para  $P$  qualquer e  $Q = C$ ;
- em todos os casos anteriores, o controlador máximo é dado por  $L_{\max} = P \backslash K \backslash Q$ , sendo  $K = A^* \backslash A_{ref} \backslash A^*$  e as matrizes  $P$  e  $Q$  assumem valores adequados para cada configuração.

Assim, demonstra-se que a formulação do problema restrito na forma da inequação (5.5) é geral o suficiente para tratar os casos particulares de realimentação de saída, realimentação de estado sobre a entrada e realimentação de saída sobre o estado já estabelecidos na literatura.

## Capítulo 6

# Projeto do controlador

### 6.1 Introdução

Os resultados dos capítulos 4 e 5 são usados neste capítulo para definir uma metodologia de projeto do controlador. No capítulo 4, o projeto do controlador se resume a verificar se o controlador  $F = K$  é o controlador máximo. Entretanto, dois controladores sub-ótimos  $F_a = K \setminus K$  e  $F_b = K \not\setminus K$  sempre podem ser obtidos.

No capítulo 5, o resultado do corolário 5.5 sugere uma forma de se obter o controlador ótimo para o problema restrito: a partir de um conjunto de pares de matrizes  $(P_i, Q_i)$  que definem o grau de acesso aos estados, pode-se obter um conjunto de controladores ótimos  $L_i$  para cada par  $(P_i, Q_i)$  que satisfazem  $(A \oplus P_i L_i Q_i)^* \preceq A_{ref}$ . Na verdade, essa estratégia explora as possibilidades de controle obtidas por diferentes graus de acesso aos estados do sistema. O controlador ótimo a ser usado pode então ser escolhido dentre esses  $L_i$  que satisfazem algum critério adicional de desempenho ou dimensão do controlador.

A seção 6.2 formaliza o procedimento acima e estabelece um algoritmo de projeto do controlador. Na seção 6.3 vários exemplos são apresentados para ilustrar a metodologia de projeto proposta e analisar alguns resultados. Na seção 6.4, discutem-se aspectos de implementação dos controladores obtidos.

### 6.2 Metodologia de projeto

A realimentação de estado restrita atua sobre os estados através da matriz  $P$  e os observa através da matriz  $Q$ . Conforme a seção 5.2,  $X = AX \oplus PX_c \oplus BU$ , sendo  $X_c = LX_o$  a saída do controlador  $L$  e  $X_o = QX$  os estados observados. No caso em que se pode escolher o conjunto de estados observáveis e controláveis, as matrizes  $P$  e  $Q$  são parâmetros de projeto do controlador. Por outro

lado, quando existe uma instalação de atuadores e medidores do sistema, as matrizes  $P$  e  $Q$  agem como restrições de projeto do controlador.

No primeiro caso, assume-se que  $P$  e  $Q$  são matrizes booleanas nas quais cada entrada de controle atua sobre um único estado e cada saída de observação é obtida a partir de um único estado, pois deseja-se representar a situação de se ter ou não acesso a um determinado estado. Essa escolha é justificada pelo fato de que qualquer sistema pode ser realizado com matrizes  $B$  e  $C$  booleanas, conforme discutido na seção 2.5.1. Assim, o uso de outras matrizes  $P$  e  $Q$  pode ser reduzido ao caso booleano, com o possível aumento do número de estados. De fato, o problema reside na definição da fronteira do sistema, ou seja, na definição de quais são as transições internas e quais são os acessos a estas transições.

Para um sistema com  $n$  estados tem-se:  $P^{n \times r}$ ,  $Q^{s \times n}$  e  $L^{r \times s}$ . Nesse caso, as dimensões  $r$  e  $s$  são parâmetros de projeto do controlador. Assim, tem-se um problema com matrizes que podem assumir diferentes dimensões. Entretanto, o mesmo problema pode ser reformulado de forma a usar matrizes  $P$  e  $Q$  booleanas diagonais de dimensão igual ao número de estados, conforme é discutido a seguir.

O exemplo da Fig. 27 mostra um sistema acrescido de entradas e saídas (em pontilhado) para o mundo externo, de forma que os estados internos do sistema possam ser observados e controlados.

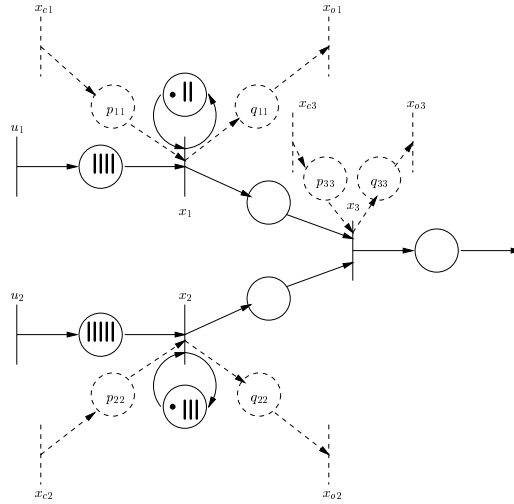


Figura 27: Exemplo instrumentado para observação e controle.

Note que cada entrada de controle  $x_{ci}$  atua sobre um único estado  $x_i$  e portanto, a matriz  $P$  é diagonal de dimensão igual ao número de estados. Além disso, assume-se que os elementos  $p_{ii}$  assumem valores  $e$  ou  $\epsilon$  e portanto, a matriz  $P$  é booleana diagonal. Assim, se o estado  $x_i$  é acessível para controle, o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de  $P$  é igual a  $e$ . Caso contrário, se  $x_i$  é inacessível, esse elemento é igual a  $\epsilon$ . Raciocínio análogo pode ser aplicado aos elementos de  $Q$  no que se refere



à observação de um estado. Note que um estado  $x_i$  pode ser tanto observável quanto controlável, bastando que o  $i$ -ésimo elemento da diagonal tanto de  $P$  quanto de  $Q$  seja igual a  $e$ . Um caso extremo ocorre quando  $P = \epsilon$  e/ou  $Q = \epsilon$ , no qual a malha de controle encontra-se aberta e portanto, o controlador não exerce ação alguma sobre o sistema. No caso em que  $P = Q = e$ , tem-se acesso completo aos estados, que é a configuração utilizada no capítulo 4.

Assim, com essa estrutura geral, pode-se tratar o caso de matrizes  $P$  e  $Q$  booleanas não quadradas com matrizes booleanas diagonais, bastando para isso representar corretamente os acessos existentes e não existentes através de elementos  $e$  e  $\epsilon$  em suas diagonais.

Propõe-se então a seguinte metodologia de projeto do controlador:

Dado  $G_{ref}$  qualquer calcula-se  $K = A^* \setminus A_{ref} \setminus A^*$ , com  $A_{ref} = C \setminus G_{ref} \setminus B$ ;

**Se**  $K^2 = K$ , **então**

$F_{\max} = K$  é o controlador ótimo para acesso completo aos estados.

**ou**

$L_{\max} = P \setminus K \setminus Q$  é o controlador ótimo para acesso parcial aos estados.

**Caso contrário**

$F_a = K \setminus K$  e  $F_b = K \setminus K$  são controladores sub-ótimos para acesso completo aos estados.

**ou**

se  $L_{\max} = P \setminus K \setminus Q$  é tal que  $(A \oplus PL_{\max}Q)^* \preceq A_{ref}$ , então  $L_{\max}$  é o controlador ótimo para acesso parcial aos estados.

**ou**

se existe liberdade na escolha do acesso aos estados através da escolha de  $P$  e  $Q$ , o controlador ótimo é obtido pelo seguinte procedimento:

1. definem-se matrizes  $P_i$  e  $Q_i$  booleanas diagonais de mesma dimensão igual ao número de estados;
2. para todo par  $(P_i, Q_i)$  calcula-se  $L_i = P_i \setminus K \setminus Q_i$ ;
3. se  $(A \oplus P_i L_i Q_i)^* \preceq A_{ref}$ , então  $L_i$  é o máximo controlador cujo acesso aos estados é dado por  $P_i$  e  $Q_i$ ;
4. escolhe-se dentre as triplas  $(P_i, Q_i, L_i)$  uma através de algum critério adicional de desempenho ou dimensão do controlador.

O procedimento de projeto do controlador consiste de uma busca exaustiva de controladores  $L_i$  para todos os pares de matrizes  $(P_i, Q_i)$  booleanas diagonais de ordem  $n$  que satisfazem  $(A \oplus$

$P_i L_i Q_i)^* \preceq A_{ref}$ . Nesse caso, tem-se  $(2^n - 2)$  matrizes  $P_i$ , pois os  $n$  elementos da diagonal podem assumir dois valores, excluindo os casos  $P = e$ , tratado no capítulo 4, e  $P = \epsilon$ , no qual inexistência de controle. O mesmo ocorre para a matriz  $Q$ . Logo, o número total de configurações a serem verificadas é de  $(2^n - 2)^2$ . Caso exista mais de uma configuração  $(P_i, Q_i)$  com controlador máximo  $L_i$ , outros critérios como dimensão do controlador ou “matching” em relação à referência podem ser usados para escolha do controlador a ser utilizado.

**Nota 6.1.** *O uso de  $P$ ,  $Q$  e  $L$  quadradas de ordem  $n$  tem por objetivo transformar o problema com matrizes de dimensões variáveis num problema de dimensões fixas. Entretanto, o controle é implementado apenas pelos elementos com conexão aos estados.*

A metodologia apresentada trata do controle multivariável com acesso completo aos estados (exemplificado na seção 6.3.1), além de dois problemas distintos para o caso de controle multivariável restrito. O primeiro problema se refere a uma planta que possui restrições físicas impostas pela instrumentação e/ou pelos atuadores do sistema representadas por matrizes  $P$  e  $Q$  fixas. Esse caso é ilustrado na seção 6.3.2. No outro, deseja-se explorar diversos acessos aos estados do sistema e escolher, dentre aqueles que fornecem um controlador ótimo, o controlador a ser usado. Isso é discutido na seção 6.3.3.

### 6.3 Exemplos

O exemplo adotado nessa seção corresponde à etapa final de embalagem de um produto, conforme mostrado na Fig. 28. Esse produto é formado por dois componentes (“software” e “hardware”) que chegam a essa etapa por diferentes vias de transporte e devem ser embalados separadamente. A embalagem utilizada em cada componente precisa ser montada pelo operador antes que possa ser utilizada. Os tempos necessários em cada operação aparecem entre parênteses na figura. Note que tempo zero para a colocação da etiqueta simplesmente significa que esse tempo é desprezível em relação aos outros.

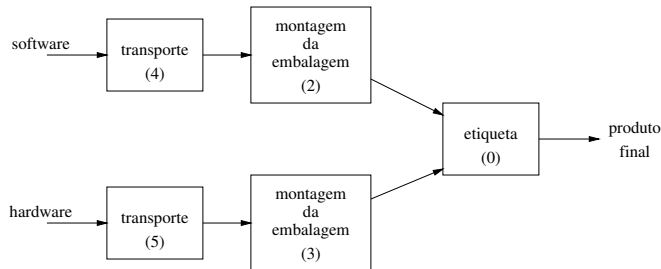


Figura 28: Embalagem final de um produto.

O grafo a eventos temporizado correspondente a esse cenário é mostrado na Fig. 29.

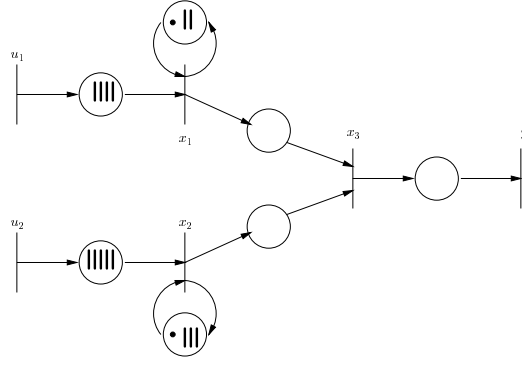


Figura 29: Grafo correspondente ao sistema de embalagem.

Este sistema possui duas ciclicidades diferentes, dadas pelos diferentes tempos de montagem de cada embalagem, e não é estável, pois pode ocorrer um acúmulo de componentes de “software” embalados. Nesse caso, a interpretação física do controle é a de atrasar o máximo possível uma operação sem violar a especificação de capacidade de produção da planta. Modelando então o sistema da Fig. 29 no dióide  $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[[\gamma, \delta]]$  tem-se:

$$x_1 = (\gamma\delta^2)x_1 \oplus \delta^4 u_1 \quad (6.1a)$$

$$x_2 = (\gamma\delta^3)x_2 \oplus \delta^5 u_2 \quad (6.1b)$$

$$x_3 = x_1 \oplus x_2 \quad (6.1c)$$

$$y = x_3 \quad (6.1d)$$

Uma realização  $(A, B, C)$  desse sistema é dada pelas matrizes abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma\delta^2 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \gamma\delta^3 & \epsilon \\ e & e & \epsilon \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \delta^4 & \epsilon \\ \epsilon & \delta^5 \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & e \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Aplicando-se o lema 1.48 para a matriz  $A$ , obtém-se:

$$A^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & e \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

A matriz de transferência do sistema é então dada por:

$$H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

A resposta impulsiva do GET descrito pela equação (6.4) é mostrada na Fig. 30, na qual as contribuições das duas entradas sobre a saída podem ser visualizadas separadamente.

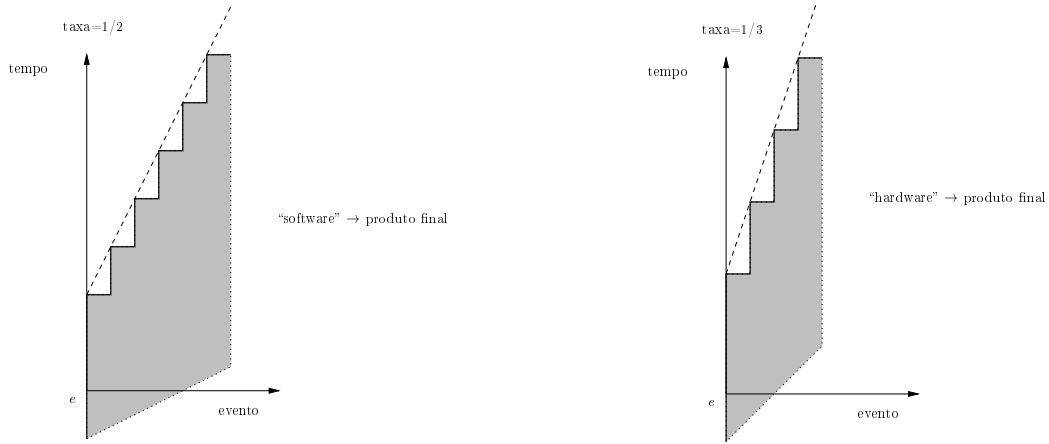


Figura 30: Resposta impulsiva do sistema de embalagem.

Assim, o primeiro componente de “software” embalado ocorre após quatro unidades de tempo do início de seu fornecimento, atingindo um comportamento em regime de um componente embalado a cada duas unidades de tempo. Já o primeiro componente de “hardware” embalado ocorre após cinco unidades de tempo do início de seu fornecimento, e atinge um comportamento em regime de um componente embalado a cada três unidades de tempo.

### 6.3.1 Controle multivariável

Os exemplos dessa seção ilustram o projeto do controlador quando se tem acesso completo aos estados.

**Exemplo 6.2.** *Suponha que se deseja encontrar o maior controlador  $F$  em realimentação de estado que mantém inalterada a função de transferência do sistema. Nesse caso,*

$$G_{ref} = H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}$$

Note que  $H \preceq G_{ref}$  e pelo corolário 4.3 esse problema tem solução. Nesse caso tem-se (veja apêndice B):

$$A_{ref} = C \setminus G_{ref} \setminus B = \begin{pmatrix} \top & \top & \top \\ \top & \top & \top \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & \top \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Logo,

$$K = A^* \setminus A_{ref} \setminus A^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

A partir de  $K$  dado pela equação (6.6) acima, pode-se verificar que  $K^2 = K$ . Logo, o máximo controlador que mantém a função de transferência do sistema inalterada é dado por:

$$F_{\max} = K = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

De fato, conforme a equação (4.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(F_{\max}) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} = H = G_{ref} \quad (6.8)$$

**Nota 6.3.** Para  $G_{ref} = H$ , o controlador  $F_1 = \epsilon$  (malha aberta) é solução. Portanto, para qualquer  $F_1 \preceq F_{\max}$  tem-se  $G_{mf}(F_1) = H$ , ou seja, qualquer controlador menor que o máximo iguala a especificação.

A implementação do sistema com esse controlador é mostrada na Fig. 33, discutida na seção 6.4 seguinte.

**Exemplo 6.4.** Realimentação de estado com  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$

O significado prático dessa especificação é uma diminuição da taxa de embalagem do produto final de forma que um componente de “software” seja embalado a cada quatro unidades de tempo e um componente de “hardware” a cada cinco unidades de tempo. A ocorrência dos primeiros componentes permanece inalterada. Isso é mostrado na Fig. 31.

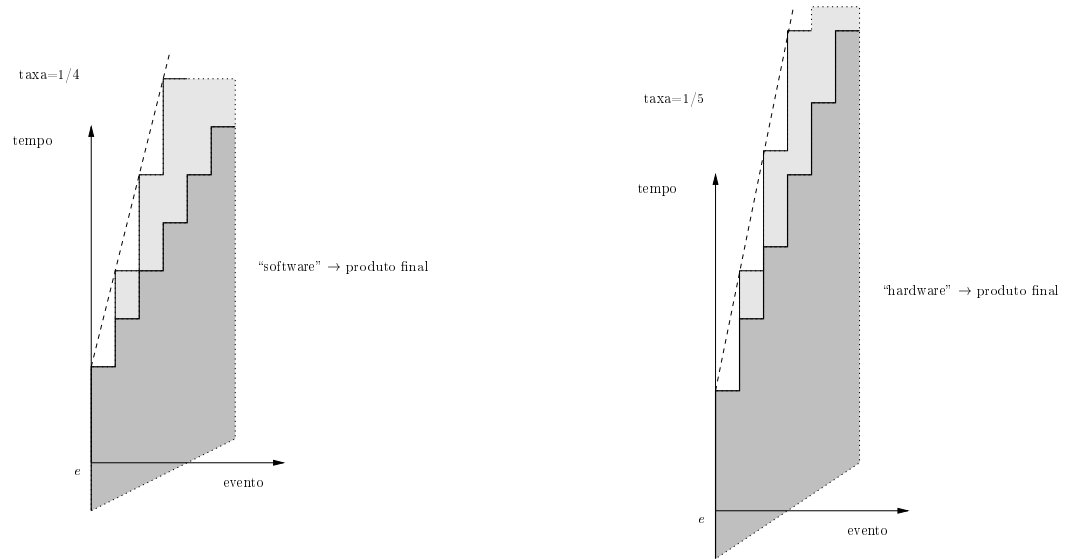


Figura 31: Modificação da resposta do sistema de embalagem.

Nesse caso, qualquer controlador que altere a resposta do sistema para a região mais clara dos gráficos é solução do problema de controle. Entretanto, o interesse está no controlador máximo.

Seguindo o mesmo procedimento anterior, tem-se:

$$A_{ref} = C \backslash G_{ref} \not\phi B = \begin{pmatrix} \top & \top & \top \\ \top & \top & \top \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & \top \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Logo,

$$K = A^* \backslash A_{ref} \not\phi A^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

A partir de  $K$  dado pela equação (6.10) acima, pode-se verificar que  $K^2 \succeq K$  e, portanto,  $F = K$  não satisfaz a especificação. De fato, segundo a equação (4.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(K) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^5)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} \succeq G_{ref} \quad (6.11)$$

Nesse caso, os seguintes controladores sub-ótimos podem ser usados:

$$F_a = K \backslash K = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ \epsilon & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

$$F_b = K \not\phi K = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

**Nota 6.5.** Nesse caso em particular pode-se concluir que o controlador máximo não existe, pois considerando que  $F_{\max}$  existe, então  $F_a \preceq F_{\max}$  e  $F_b \preceq F_{\max}$ . Logo,  $F_a \oplus F_b \preceq F_{\max}$ . Mas,  $F_a \oplus F_b = K$  e portanto,  $K \preceq F_{\max}$ . Isso contraria o fato de que  $F_{\max}$  é solução, pois  $K$  não é solução e portanto, não existe solução máxima. Em conclusão, sempre que  $F_a \oplus F_b$  não for solução, o controlador máximo não existe.

Pela equação (4.2), esses controladores fornecem as seguintes funções de transferência para o sistema controlado:

$$G_{mf}(F_a) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} = G_{ref} \quad (6.14)$$

$$G_{mf}(F_b) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \preceq G_{ref} \quad (6.15)$$

O sistema com esses controladores são mostradas nas Figs. 34 e 35, respectivamente, cujas implementações são discutidas na seção 6.4 seguinte. Alguns fatos importantes sobre essas duas soluções sub-ótimas são discutidos na conclusão da tese.

### 6.3.2 Realimentação de saída

Os exemplos desta seção ilustram o projeto do controlador quando se tem acesso parcial aos estados devido a uma restrição física de atuadores e medidores do sistema. Essa restrição é representada aqui por matrizes  $P = B$  e  $Q = C$  que correspondem a uma estrutura em realimentação de saída.

**Exemplo 6.6.** *Suponha que se deseja encontrar o maior controlador  $L$  em realimentação de saída que mantém inalterada a função de transferência do sistema. Nesse caso,*

$$G_{ref} = H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}$$

Essa especificação é a mesma usada no exemplo 6.2 e portanto,  $K^2 = K$ . A configuração em realimentação de saída é um caso particular de acesso restrito aos estados, com  $P = B$  e  $Q = C$ . Logo,  $L_{\max} = B \setminus K \not\! / C$  é o máximo controlador em realimentação de saída que mantém a função de transferência do sistema inalterada, ou seja,

$$L_{\max} = B \setminus K \not\! / C = \begin{pmatrix} \delta^{-4}(\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

De fato, conforme a equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_{\max}) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} = H \quad (6.17)$$

**Nota 6.7.** *Para  $G_{ref} = H$ , o controlador  $L_1 = \epsilon$  (malha aberta) é solução. Portanto, para qualquer  $L_1 \preceq L_{\max}$  tem-se  $G_{mf}(L_1) = H$ , ou seja, qualquer controlador menor que o máximo iguala a especificação.*

A implementação do sistema com esse controlador é mostrada na Fig. 36, discutida na seção 6.4 seguinte.

**Exemplo 6.8.** *Realimentação de saída com  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$ .*

Essa especificação é a mesma usada no exemplo 6.4 e portanto,  $K^2 \succeq K$ . Como  $P = B$  e  $Q = C$ , resta então verificar se  $(A \oplus BL_{\max}C)^* \preceq A_{ref}$ , onde  $L_{\max} = B \setminus K \not\! / C$ . De fato,

$$(A \oplus BL_{\max}C)^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \preceq A_{ref} \quad (6.18)$$

Portanto,  $L_{\max}$  é o máximo controlador em realimentação de saída dado por:

$$L_{\max} = B \setminus K \not\! / C = \begin{pmatrix} \delta^{-4}(\gamma\delta^4)^* \\ \delta^{-5}(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Conforme a equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_{\max}) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \preceq G_{ref} \quad (6.20)$$

A respectiva implementação é mostrada na Fig. 37 e discutida na seção 6.4 seguinte.

**Exemplo 6.9.** *Realimentação de saída com  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^5(\gamma\delta^3)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}$ .*

Como anteriormente, tem-se:

$$A_{ref} = C \backslash G_{ref} \not\! / B = \begin{pmatrix} \top & \top & \top \\ \top & \top & \top \\ \delta(\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & \top \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Logo,

$$K = A^* \backslash A_{ref} \not\! / A^* = \begin{pmatrix} \delta(\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \\ \delta(\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \\ \delta(\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

A partir de  $K$  dado pela equação (6.22) acima, pode-se verificar que  $K^2 \succeq K$ . Como  $P = B$  e  $Q = C$ , resta então verificar se  $(A \oplus BL_{\max}C)^* \preceq A_{ref}$ , com  $L_{\max} = B \backslash K \not\! / C$ . De fato,

$$(A \oplus BL_{\max}C)^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \\ (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \\ (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} \preceq A_{ref} \quad (6.23)$$

Portanto,  $L_{\max}$  é o máximo controlador em realimentação de saída dado por:

$$L_{\max} = B \backslash K \not\! / C = \begin{pmatrix} \delta^{-4}(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^{-5}(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Conforme a equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_{\max}) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^3)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} \preceq G_{ref} \quad (6.25)$$

A implementação do sistema com esse controlador é mostrada na Fig. 38, discutida na seção 6.4 seguinte.

### 6.3.3 Controle multivariável restrito

Os exemplos desta seção ilustram o projeto do controlador quando se pode escolher o conjunto de estados observáveis e controláveis. Nesse caso, as matrizes  $P$  e  $Q$  são parâmetros de projeto do controlador, conforme mostrado na seção 6.2.



Usando a mesma especificação do exemplo 6.4,  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$  e  $K^2 \succeq K$ . Os exemplos abaixo exemplificam o procedimento para se obter o controlador máximo a ser usado, variando-se o acesso aos estados através de diferentes matrizes  $P$  e  $Q$  booleanas e diagonais.

**Exemplo 6.10.**  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$ ;  $x_1, x_2$  controláveis e observáveis.

$$P_1 = Q_1 = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = P_1 \setminus K / Q_1 = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & \top \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & \top \\ \top & \top & \top \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Nesse caso,

$$(A \oplus P_1 L_1 Q_1)^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^5)^* & e \end{pmatrix} \succeq A_{ref} \quad (6.27)$$

Portanto, o controlador  $L_1$  correspondente ao par  $(P_1, Q_1)$  não satisfaz a especificação. Pela equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_1) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^5)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} \succeq G_{ref} \quad (6.28)$$

**Exemplo 6.11.**  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$ ;  $x_1, x_2$  controláveis e  $x_2$  observável.

$$P_2 = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = P_2 \setminus K / Q_2 = \begin{pmatrix} \top & (\gamma\delta^5)^* & \top \\ \top & (\gamma\delta^5)^* & \top \\ \top & \top & \top \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Nesse caso,

$$(A \oplus P_2 L_2 Q_2)^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ \epsilon & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^5)^* & e \end{pmatrix} \preceq A_{ref} \quad (6.30)$$

Logo, o controlador  $L_2$  satisfaz a especificação e portanto, é o controlador máximo para o par  $(P_2, Q_2)$ . Nesse caso, pela equação (5.2) a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_2) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} \preceq G_{ref} \quad (6.31)$$

**Exemplo 6.12.**  $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}$ ;  $x_1$  controlável e  $x_1, x_2$  observáveis.

$$P_3 = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} Q_3 = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \Rightarrow L_3 = P_3 \setminus K / Q_3 = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & \top \\ \top & \top & \top \\ \top & \top & \top \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

Nesse caso,

$$(A \oplus P_3 L_3 Q_3)^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & e \end{pmatrix} \preceq A_{ref} \quad (6.33)$$

O controlador  $L_3$  satisfaz a especificação e portanto, ele é o controlador máximo para o par  $(P_3, Q_3)$ . Pela equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_3) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} = G_{ref} \quad (6.34)$$

Esse procedimento de alterar as matrizes  $P$  e  $Q$  continua até que todas as combinações de estados observáveis e controláveis sejam visitadas e os controladores máximos para cada configuração sejam obtidos. O controlador ótimo a ser usado pode então ser escolhido dentre esses controladores que satisfazem algum critério adicional de desempenho ou dimensão do controlador.

Por exemplo, considerando as triplas  $(P_2, Q_2, L_2)$  e  $(P_3, Q_3, L_3)$  e um critério de melhor “matching” em relação à especificação, o controlador  $L_3$  é escolhido para ser implementado, uma vez que  $G_{mf}(L_2) \preceq G_{mf}(L_3)$ . Mais ainda, para esse caso em particular  $G_{mf}(L_3) = G_{ref}$ , ou seja, a especificação é satisfeita pela igualdade.

Conforme a nota 6.1, o controle é implementado apenas com os elementos que possuem conexão com os estados. Assim,  $n = 3$  (estados),  $r = 1$  (um estado controlado:  $x_1$ ) e  $s = 2$  (dois estados observados:  $x_1$  e  $x_2$ ). Logo, as matrizes  $P$  e  $Q$  usadas são dadas por:

$$P = P_+ = \begin{pmatrix} e \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad Q = Q_+ = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \end{pmatrix} \quad (6.35)$$

Portanto, o máximo controlador para  $P = P_+$  e  $Q = Q_+$  é dado por:

$$L_{\max} = P_+ \setminus K \setminus Q_+ = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

Pela equação (6.34), a função de transferência do sistema controlado é  $G_{mf}(L_{\max}) = G_{ref}$ . A implementação do sistema com esse controlador é mostrada na Fig. 38, discutida na seção 6.4 seguinte.

## 6.4 Implementação

Os controladores obtidos na seção 6.3 anterior, fornecem de fato as funções de transferência entre as diversas transições do sistema controlado. Portanto, é preciso encontrar uma realização que permita obter o grafo a eventos correspondente.

Naturalmente, a primeira questão a ser considerada diz respeito à realizabilidade dos controladores obtidos. Como visto na seção 2.5.2, a divisão de séries causais pode resultar numa série não-causal e portanto, num controlador não-realizável. Nesse caso, implementa-se o maior controlador realizável, discutido na implementação do exemplo 6.6.

A segunda questão é mais geral e está relacionada com a realização mínima do controlador obtido. Isso pode ser visto como uma maneira de se evitar redundância na implementação do controlador. Como os controladores estão limitados inferiormente pela matriz  $A^*$ , conforme demonstrado nos capítulos 4 e 5, isso pode ser feito inspecionando-se os elementos introduzidos pelo controlador com os existentes na matriz  $A^*$ . Alternativamente, pode-se implementar o controlador para posteriormente eliminar as redundâncias do grafo obtido.

A terceira questão decorre de uma constatação feita a partir dos exemplos fornecidos: um controlador realizável pode bloquear o sistema, inviabilizando-o. Essa condição pode ser verificada detectando-se laços (circuitos fechados) no grafo que não possuem fichas em nenhum de seus lugares. Nesse caso, adota-se uma solução semelhante à da não realizabilidade, substituindo-se o elemento do controlador que causa o bloqueio pelo maior elemento que não o causa. Entretanto, isso não leva necessariamente ao maior controlador, como é discutido na implementação do exemplo 6.2.

O controlador implementado deve então ser realizável e satisfazer as seguintes condições:

1. acrescentar apenas lugares e transições inexistentes no sistema original;
2. não bloquear o sistema controlado;

**Nota 6.13.** *Essas condições devem ser vistas como um primeiro passo para se obter uma realização mínima do controlador, embora o problema de realização mínima de um GET qualquer ainda permaneça em aberto. Portanto, as implementações dessa seção ainda podem conter redundâncias.*

### Exemplo 6.2

Tendo em vista essas considerações, a implementação do controlador do exemplo 6.2, dado pela equação (6.7), é mostrada na Fig. 32. Nessa figura, as transições e conexões acrescentadas pelo controlador aparecem em pontilhado.

Entretanto, o GET da Fig. 32 está bloqueado devido ao laço criado pelo controlador envolvendo as transições  $x_1$  e  $x_3$ , pois  $x_1 = (\gamma\delta^2)^*x_1 \oplus (\gamma\delta^3)^*x_2 \oplus (\gamma\delta^2)^*x_3 \oplus \delta^4u_1$ . Mas  $(\gamma\delta^2)^* = e \oplus \gamma\delta^2(\gamma\delta^2)^*$  e o maior elemento que não causa bloqueio é  $\gamma\delta^2(\gamma\delta^2)^*$ . Logo, o controlador realizável a ser implementado é dado por:

$$F_+ = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & \gamma\delta^2(\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \preceq F_{\max} \quad (6.37)$$

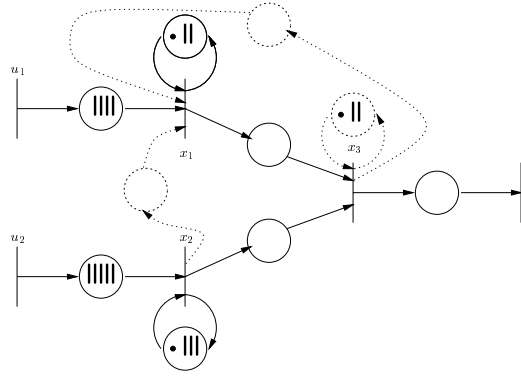


Figura 32: Exemplo 6.2 - sistema controlado bloqueado.

De acordo com a nota 6.3, a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(F_+) = H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} = G_{mf}(F_{\max}) = G_{ref} \quad (6.38)$$

O GET do sistema controlado sem bloqueio é então dado pela Fig. 33.

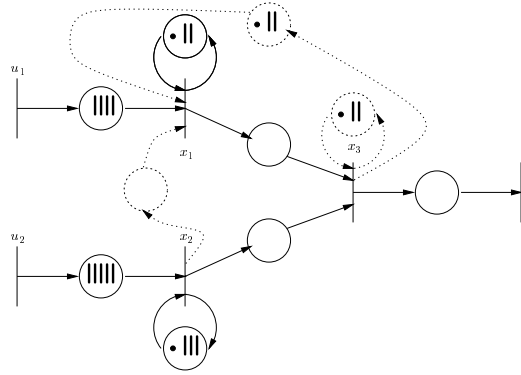


Figura 33: Exemplo 6.2 - controlador em realimentação de estado.

### Exemplo 6.4

Procedimento semelhante é aplicado para os controladores  $F_a$  e  $F_b$  do exemplo 6.4, dados pelas equações (6.12) e (6.13), pois os sistemas obtidos com esses controladores estão bloqueados. Nesse caso, obtém-se:

$$F_{a+} = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & \gamma\delta^4(\gamma\delta^4)^* \\ \epsilon & (\gamma\delta^5)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^5)^* & (\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \preceq F_a \quad (6.39)$$

$$F_{b+} = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^4)^* & \gamma\delta^4(\gamma\delta^4)^* & \gamma\delta^4(\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & \gamma\delta^4(\gamma\delta^4)^* \\ (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* & (\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \preceq F_b \quad (6.40)$$

Pela equação (4.2), esses controladores fornecem as seguintes funções de transferência para o sistema controlado:

$$G_{mf}(F_{a+}) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} = G_{mf}(F_a) = G_{ref} \quad (6.41)$$

$$G_{mf}(F_{b+}) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} = G_{mf}(F_b) \preceq G_{ref} \quad (6.42)$$

As Figs. 34 e 35 mostram o sistema com os controladores implementados. Nessas figuras, as transições e conexões acrescentadas pelos controladores aparecem em pontilhado.

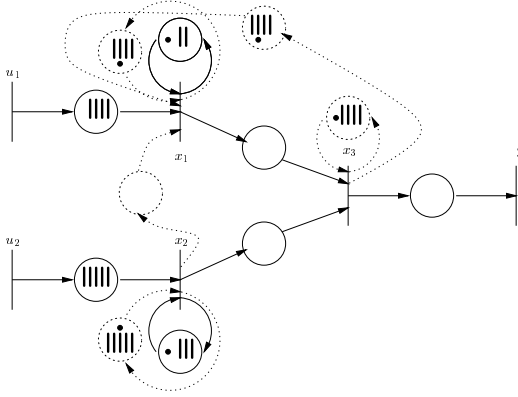


Figura 34: Exemplo 6.4 - sistema com  $F_{a+}$ .

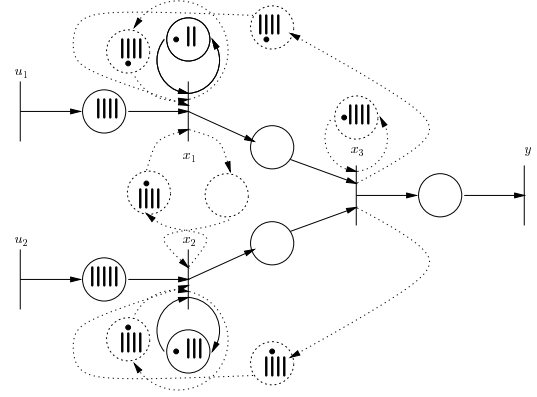


Figura 35: Exemplo 6.4 - sistema com  $F_{b+}$ .

### Exemplo 6.6

Para o exemplo 6.6, o controlador dado pela equação (6.16) é não realizável. Entretanto,  $\delta^{-4}(\gamma\delta^2)^* = \delta^{-4} \oplus \gamma\delta^{-2} \oplus \gamma^2(\gamma\delta^2)^*$  e o maior elemento realizável é  $\gamma^2(\gamma\delta^2)^*$ . Logo, o máximo controlador realizável em realimentação de saída é dado por:

$$L_+ = \begin{pmatrix} \gamma^2(\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon \end{pmatrix} \preceq L_{\max} \quad (6.43)$$

**Nota 6.14.** A obtenção do máximo controlador realizável é formalmente definida em Cottenceau (1999) como a projeção de uma série não-racional no espaço das séries racionais.

De acordo com a nota 6.7, a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_+) = H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} = G_{mf}(L_{\max}) \quad (6.44)$$

De acordo com a seção 5.3.1, a saída do controlador é então  $X_c = L_+ Y$ , ou seja:

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2(\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon \end{pmatrix} y \quad (6.45)$$

A Fig. 36 mostra o sistema com o controlador implementado. Nessa figura, as transições e conexões acrescentadas pelo controlador aparecem em pontilhado.

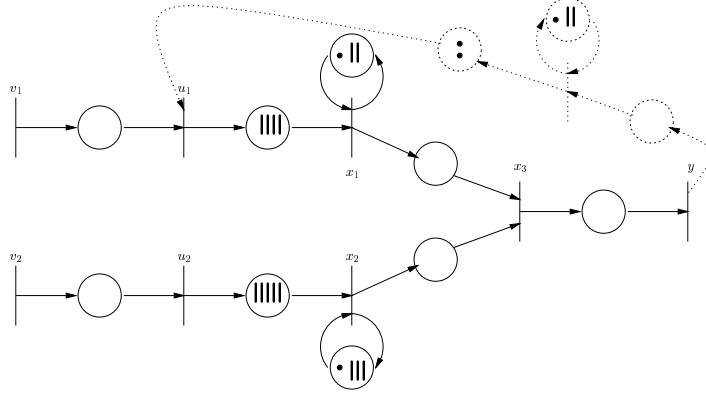


Figura 36: Exemplo 6.6 - controlador ótimo em realimentação de saída.

### Exemplo 6.8

De maneira análoga, para o exemplo 6.8 cujo controlador é dado pela equação (6.19), o máximo controlador realizável em realimentação de saída é dado por:

$$L_+ = \begin{pmatrix} \gamma(\gamma\delta^4)^* \\ \gamma^2\delta^3(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} \preceq L_{\max} \quad (6.46)$$

Pela equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_+) = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^4)^* & \delta^5(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} = G_{mf}(L_{\max}) \preceq G_{ref} \quad (6.47)$$

Nesse caso, a saída do controlador  $X_c = L_+ Y$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\gamma\delta^4)^* \\ \gamma^2\delta^3(\gamma\delta^4)^* \end{pmatrix} y \quad (6.48)$$

A Fig. 37 mostra o sistema com o controlador implementado. Nessa figura, as transições e conexões acrescentadas pelo controlador aparecem em pontilhado.

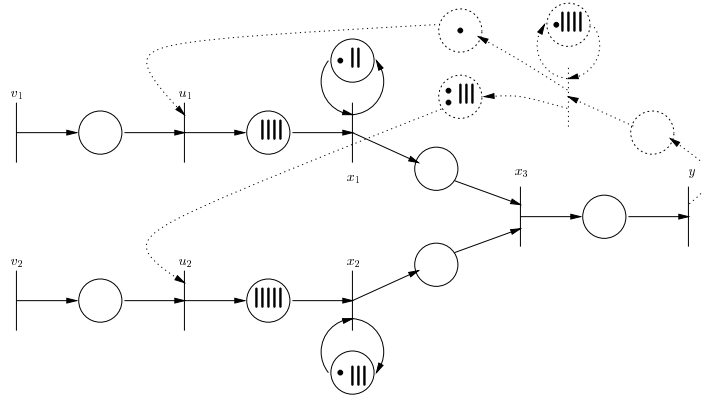


Figura 37: Exemplo 6.8 - controlador ótimo em realimentação de saída.

**Exemplo 6.9**

Para o exemplo 6.9, no qual o controlador é dado pela equação (6.24), o máximo controlador realizável em realimentação de saída é dado por:

$$L_+ = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^2 (\gamma \delta^3)^* \\ \gamma^2 \delta (\gamma \delta^3)^* \end{pmatrix} \preceq L_{\max} \quad (6.49)$$

Pela equação (5.2), a função de transferência do sistema controlado é dada por:

$$G_{mf}(L_+) = \begin{pmatrix} \delta^4 [e \oplus \gamma \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^6 (\gamma \delta^3)^*] & \delta^5 (\gamma \delta^3)^* \end{pmatrix} \preceq G_{mf}(L_{\max}) \preceq G_{ref} \quad (6.50)$$

Nesse caso, a saída do controlador  $X_c = L_+ Y$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^2 (\gamma \delta^3)^* \\ \gamma^2 \delta (\gamma \delta^3)^* \end{pmatrix} y \quad (6.51)$$

A Fig. 38 mostra o sistema com o controlador implementado. Nessa figura, as transições e conexões acrescentadas pelo controlador aparecem em pontilhado.

**Exemplo 6.12**

Para o exemplo 6.12, o controlador dado pela equação (6.36) é realizável e não bloqueia o sistema. Portanto, o máximo controlador realizável para  $P = P_+$  e  $Q = Q_+$  é dado por:

$$L_+ = L_{\max} = \begin{pmatrix} (\gamma \delta^4)^* & (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

Logo, a função de transferência do sistema controlado é  $G_{mf}(L_+) = G_{mf}(L_{\max}) = G_{ref}$ . A saída do controlador é dada por  $X_c = L_+ X_o$ , onde  $X_o = Q_+ X$ . Nesse caso, tem-se:

$$x_{c1} = \begin{pmatrix} (\gamma \delta^4)^* & (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (6.53)$$

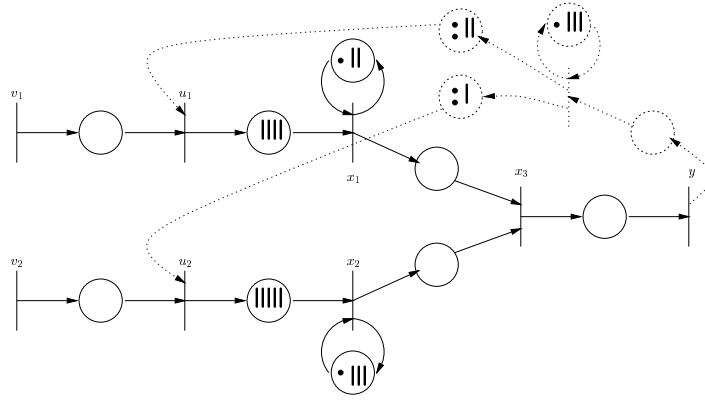


Figura 38: Exemplo 6.9 - controlador ótimo em realimentação de saída.

A Fig. 39 mostra o sistema com o controlador implementado, onde as transições e conexões acrescentadas pelo controlador aparecem em pontilhado.

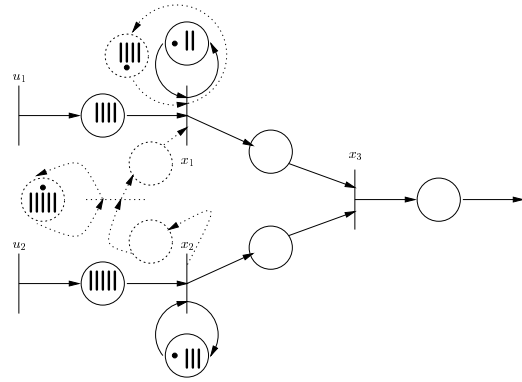


Figura 39: Exemplo 6.12 - controlador ótimo em realimentação de estado restrito.

## 6.5 Conclusão

Este capítulo utiliza os resultados formais dos capítulos 4 e 5 para propor uma metodologia de projeto do controlador. Os casos considerados envolvem acesso total e parcial aos estados obtendo-se o controle multivariável e multivariável restrito, respectivamente. No controle multivariável restrito distinguem-se dois casos: um no qual a restrição de acesso aos estados é imposta por uma restrição física da planta e outro no qual o acesso aos estados pode ser variado, fazendo parte do projeto do controlador. Neste último, diferentes acessos aos estados podem ser avaliados e o controlador ótimo pode ser escolhido dentre diversas configurações. Nesse caso, o critério de escolha do controlador a ser utilizado pode ser o desempenho do sistema controlado em relação à especificação ou à complexidade do controlador (número de estados observados e controlados).



Tanto o controlador ótimo multivariável quanto o controlador ótimo multivariável restrito existem e podem ser calculados analiticamente quando  $K^2 = K$ . Além disso, no caso restrito, o controlador ótimo pode ser obtido para qualquer restrição de acesso aos estados. Entretanto, mesmo que essa condição não se verifique, dois controladores sub-ótimos multivariáveis podem ser obtidos, assim como os controladores ótimos multivariáveis restritos que satisfazem as condições do corolário 5.5.

As especificações dos exemplos apresentados nesse capítulo, exceto a do exemplo 6.9, satisfazem as condições estabelecidas em Cottenceau (1999), ou seja,  $G_{ref} = D^*H$  ou  $G_{ref} = HD^*$ . Portanto, como resultado já estabelecido, existem os controladores ótimos em realimentação de saída, de estado sobre a entrada e de saída sobre o estado. Entretanto, o controlador ótimo existe também para outras configurações mais gerais de controle, conforme demonstrado ao longo deste trabalho e ilustrado pelos exemplos deste capítulo, e pode ser obtido a partir de um procedimento unificado.

Além disso, o exemplo 6.9 mostra que, pelo procedimento proposto, o controlador ótimo pode ser obtido para uma especificação que não satisfaz as condições estabelecidas em Cottenceau (1999). Isso já era esperado, pois essas condições são apenas suficientes, mas de fato são muito restritivas.

De maneira geral, pode-se concluir que o acesso a um maior número de estados (transições) do sistema pode levar a um melhor “matching” da função de transferência do sistema controlado com a especificação. Isso é mais perceptível quando se tem acesso apenas às transições de entrada para controle e às transições de saída para observação (realimentação de saída). Comparando-se as funções de transferência do sistema controlado para os diversos casos, verifica-se que em realimentação de saída a função de transferência do sistema controlado em geral não iguala a especificação. Isso pode ser explicado pelo fato de que, nessa configuração, o sistema controlado torna-se fortemente conexo e portanto, restrito a uma única ciclicidade.

Finalmente, alguns aspectos de implementação dos controladores são discutidos, obtendo-se um controlador realizável que não bloqueia o sistema e cuja realização seja mínima.



# Conclusão

Sistemas a eventos discretos ocorrem, por exemplo, em processos de manufatura e em aplicações de tráfego, com compartilhamento de recursos e/ou tarefas sujeitas à sincronização de eventos. Os sistemas considerados nesta tese são grafos a eventos temporizados que correspondem a uma classe de redes de Petri que modelam apenas sincronização de eventos. Embora não-lineares na álgebra convencional, esses sistemas podem ser descritos por modelos lineares numa estrutura algébrica genericamente denominada dióide. Esses modelos possuem representação tanto no espaço de estado quanto na forma de função de transferência. Como objetivo de controle, utiliza-se uma abordagem por modelo de referência, ou seja, o controlador é obtido de forma que a função de transferência do sistema controlado satisfaça uma determinada especificação. Em termos da teoria da residuação isso pode ser assim formulado: dada uma função de transferência  $G_{ref}$  (modelo de referência) e um sistema com um controlador  $F$  cuja função de transferência (sistema+controlador) é dada por  $G_{mf}(F)$ , deseja-se obter o máximo controlador  $F_{max}$  tal que  $G_{mf}(F_{max}) \preceq G_{ref}$ . Intuitivamente, o máximo controlador atrasa o máximo possível o disparo da transição controlada sem violar a especificação. A lei de controle proposta é  $X = FX$ , onde o controlador  $F$  é um GET. Isso corresponde à realimentação de estado na sua forma mais geral, quando se tem acesso completo aos estados, e a uma realimentação de estado restrita quando o acesso aos estados é parcial. Quando o acesso aos estados é total, assume-se que os estados internos do sistema são completamente observáveis e controláveis. Nesse caso, observabilidade e controlabilidade de um estado ou transição correspondem à capacidade de conhecer os instantes de disparo da transição e à capacidade de retardar ou inibir seu disparo, respectivamente. Muitas vezes tem-se acesso a algumas transições apenas para observação e a outras apenas para controle, enquanto outras podem ser completamente inacessíveis. Esse caso, frequentemente encontrado na prática, representa acesso parcial ou restrito às transições do sistema a ser controlado.

Dentre as principais contribuições dessa tese podem-se destacar:

- a formulação do problema de controle por modelo de referência no espaço de estado:

$$X = (A \oplus F)X \oplus BU \quad (\text{controle multivariável})$$

$$X = (A \oplus PLQ)X \oplus BU \quad (\text{controle multivariável restrito})$$

- o teorema 4.7, que estabelece a equivalência entre o resíduo da equação de “matching” para acesso completo aos estados e o resíduo de  $F^* \preceq K$ , onde  $K = A^* \setminus A_{ref} A^*$ , o que permite calcular o controlador ótimo quando  $K^2 = K$ ;
- o lema 4.10, que permite calcular dois controladores sub-ótimos para acesso completo aos estados;
- os lemas 5.2 e 5.4, que permitem calcular o controlador ótimo quando se impõem restrições de acesso aos estados, tanto para observação quanto para controle;
- as generalizações dos resultados da literatura, conforme mostrado no capítulo 5. Esses resultados são reproduzidos aqui a partir da metodologia proposta nesta tese, que é capaz ainda de obter o controlador ótimo no caso em que a abordagem de Cottenceau (1999) não é capaz de fazê-lo (exemplo 6.9);
- o desenvolvimento de uma metodologia unificada de projeto do controlador.

A partir dos resultados desta tese, várias questões podem ser abordadas em trabalhos futuros. Por exemplo, os controladores sub-ótimos  $F_a$  e  $F_b$  do capítulo 4 talvez contenham toda a informação necessária para se obter os controladores que satisfazem a especificação (com acesso total ou parcial aos estados). Para tanto, é preciso demonstrar as conjecturas:

1. *o controlador máximo, quando existe, é dado por:*

$$L_{\max} = \begin{cases} L_a & \text{se } L_a \succeq L_b \\ L_b & \text{se } L_b \succeq L_a \end{cases} \quad \text{com } L_a = P \setminus F_a \setminus Q, L_b = P \setminus F_b \setminus Q, P \text{ e } Q \text{ quaisquer};$$

2. *esses controladores podem ser comparáveis apenas para alguns valores de  $P$  e  $Q$ , para os quais o controlador máximo existe;*
3. *se  $L_a$  e  $L_b$  não são comparáveis, então o controlador máximo não existe. Entretanto,  $L_a$  e  $L_b$  são tais que nenhum outro controlador é maior do que eles.*

Todos os exemplos do capítulo 6 verificam essa conjectura. Além disso, os controladores  $F_a$  e  $F_b$  parecem estar relacionados com as duas alternativas possíveis para o comportamento do sistema

controlado. Nos casos analisados, o controlador  $F_a$  produz um sistema controlado que apresenta duas ciclicidades diferentes, enquanto o controlador  $F_b$  reduz o sistema controlado a um grafo fortemente conexo, cuja ciclicidade única corresponde à taxa de produção mais rápida da especificação. Nesse caso, as funções de transferência  $G_{mf}(F_a)$  e  $G_{mf}(F_b)$  são o melhor “matching” que se pode obter em relação à especificação pela variação do grau de acesso aos estados.

Como mencionado anteriormente, a condição  $K^2 = K$  é muito forte, mas ocorre em certos casos. Da mesma forma, as especificações  $G_{ref} = D^*H$  e  $G_{ref} = HD^*$  de Cottenceau (1999) são condições suficientes para a existência de controladores ótimos. Entretanto, existe alguma relação entre elas, conforme sugerido na Fig. 40? Nesta figura, cada região indica o conjunto de problemas que satisfazem a uma dada condição. Além disso, essas condições são meramente operacionais para a existência da solução ótima na álgebra de dióides ou existe um significado físico envolvido?

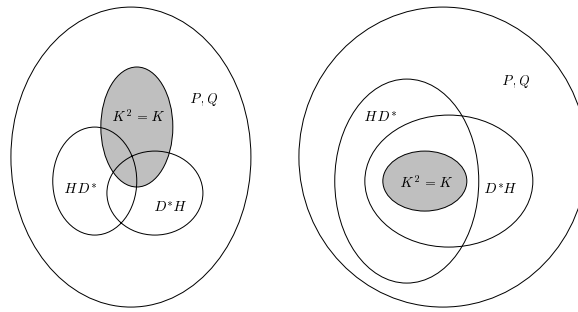


Figura 40: Possíveis relações entre especificações.

Embora fortemente relacionada com esta tese, a questão da realizabilidade dos controladores obtidos não foi definitivamente tratada, constituindo-se num importante aspecto a ser investigado. O capítulo 6 discute alguns aspectos sobre a implementação dos controladores, embora essa pareça ser uma boa formalização do problema: uma vez obtido o controlador máximo  $F_{\max}$ , a realização mínima desse controlador é dada pelo resíduo dual de  $F^* \succeq F_{\max}$ . Ou seja, o mínimo controlador  $F_+$  tal que  $F_+^* = F_{\max}$ . Nesse caso,  $F_+$  é o controlador a ser implementado.

Finalmente, já que o mesmo resultado pode ser obtido por pré-compensação (capítulo 3), qual a vantagem em usar realimentação? A resposta a essa pergunta frequentemente faz referência à estabilidade do sistema controlado em realimentação, pois um grafo a eventos fortemente conectado é estável. O mesmo não se pode afirmar em relação à pré-compensação. Entretanto, pode-se estabelecer uma conjectura de maior robustez para o controlador em realimentação baseada nas respectivas funções de transferência do sistema controlado, ou seja:

$$G_{mf}(F) = HF \quad (\text{pré-compensação})$$

$$G_{mf}(F) = C(A \oplus F)^*B \quad (\text{realimentação})$$

Nota-se claramente que, em pré-compensação, a função de transferência do sistema controlado envolve o produto dos parâmetros da planta e do controlador, enquanto em realimentação tem-se a soma desses parâmetros. Assim, embora intuitivo, é preciso demonstrar uma menor sensibilidade da função de transferência do sistema controlado em relação aos parâmetros do controlador, quando esta é obtida pela soma ao invés do produto na álgebra de dióides.

# Bibliografia

- Baccelli, F. L., G. Cohen, G. J. Olsder e J.-P. Quadrat (1992). *Synchronization and Linearity: an algebra for discrete event systems*. John Wiley. New York.
- Bemporad, A. e M. Morari (1999). Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica* **35**(3), 407–427.
- Birkhoff, G. (1967). Lattice theory. In: *AMS Colloquium Publications*. 3rd ed.. Vol. XXV. American Mathematical Society. Providence.
- Blyth, T. S. e M. F. Janowitz (1972). *Residuation Theory*. Pergamon Press. Oxford.
- Boimond, J.-L. e J.-L. Ferrier (1996). Internal model control and max-algebra: controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3), 457–461.
- Cassandras, C. G. e S. Lafortune (1999). *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer. Boston.
- Cofer, D. D. e V. K. Garg (1995). Control of event separation times in discrete event systems. In: *Conference on Decision and Control*. New Orleans. pp. 2005–2010.
- Cofer, D. D. e V. K. Garg (1996). Supervisory control of real-time discrete-event systems using lattice theory. *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(2), 199–209.
- Cohen, G., D. Dubois, J.-P. Quadrat e M. Viot (1985). A linear-system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**(3), 210–220.
- Cohen, G., P. Moller, J.-P. Quadrat e M. Viot (1989). Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE* **77**(1), 39–58.
- Cohen, G., S. Gaubert e J.-P. Quadrat (1999). Max-plus algebra and system theory: where we are and where to go now. *Annual Reviews in Control* **23**, 207–219.

- Commault, C. (1998). Feedback stabilization of some event graph models. *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(10), 1419–1423.
- Cottenceau, B. (1999). Contribution à la Commande de Systèmes à Événements Discrets: Synthèse de Correcteurs pour les Graphes d'Événements Temporisés dans les Dioïdes. Thèse. Université d'Angers.
- Cottenceau, B., L. Hardouin, J.-L. Boimond e J.-L. Ferrier (1999). Synthesis of greatest linear feedback for timed-event graphs in dioid. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(6), 1258–1262.
- Cottenceau, B., L. Hardouin, J.-L. Boimond e J.-L. Ferrier (2001). Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica* **37**(9), 1451–1458.
- Cottenceau, B., M. Lhommeau, L. Hardouin e J.-L. Boimond (2000). Data processing tool for calculation in dioid. In: *Discrete Event Systems: analysis and control* (R. Boel and G. Stremersch, Eds.). Vol. 569 of *International Series in Engineering and Computer Science*. Kluwer. Boston. WODES 2000 Proceedings.
- Cuninghame-Green, R. A. (1979). *Minimax Algebra*. number 166 In: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Cuninghame-Green, R. A. (1991). Minimax algebra and applications. *Fuzzy Sets and Systems* **41**, 251–267.
- Davey, B. A. e H. A. Priestley (1990). *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press. Cambridge. (2nd edition in December 2001).
- Durbin, J. R. (1992). *Modern Algebra*. 3rd ed.. John Wiley. New York.
- Gaubert, S. (1992). Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes. Thèse. Ecole des Mines de Paris.
- Gaubert, S. e Max-Plus (1997). Methods and applications of  $(\max, +)$  linear algebra. *Lecture Notes in Computer Science* (1200), 261–282. STACS'97 Proceedings.
- Gunawardena, J. (1998). *Idempotency*. number 11 In: *Publications of the Newton Institute*. Cambridge University Press. Cambridge.
- Heemels, W. P. M. H., B. de Schutter e A. Bemporad (2001). Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica* **37**(7), 1085–1091.



- Ho, Y.-C. (1989). Dynamics of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE* **77**(1), 3–6. Preface to the special issue on discrete event systems.
- Kumar, R. e V. K. Garg (1995). *Modeling and Control of Logical Discrete Event Systems*. Kluwer. Boston.
- Libeaut, L. e J.-J. Loiseau (1995). Admissible initial conditions and control of timed event graphs. In: *Conference on Decision and Control*. New Orleans. pp. 2011–2016.
- Libeaut, L. e J.-J. Loiseau (1996). On the control of timed event graphs. In: *Workshop on Discrete Event Systems*. Edinburgh. pp. 159–164.
- Lüders, R. e R. Santos-Mendes (2000). Aspectos de controle por realimentação de saída de grafos a eventos temporizados. In: *XIII Congresso Brasileiro de Automática*. Florianópolis. pp. 1359–1364.
- Lüders, R. e R. Santos-Mendes (2001a). Incremental optimal control of min-plus linear systems. In: *American Control Conference*. Arlington. pp. 2972–2973.
- Lüders, R. e R. Santos-Mendes (2001b). On the calculation of optimal control for  $(\min, +)$  and  $(\max, +)$  linear systems. In: *European Control Conference*. Porto. pp. 1013–1018.
- Lüders, R. e R. Santos-Mendes (2002). Multivariable control of discrete event systems in dioids. In: *IFAC World Congress on Automatic Control*. Barcelona. (submetido).
- Max-Plus (1991). Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. In: *Conference on Decision and Control*. Brighton. pp. 1511–1516.
- Menguy, E., J.-L. Boimond, L. Hardouin e J.-L. Ferrier (2000a). A first step towards adaptive control for linear systems in max algebra. *Discrete Event Dynamic Systems: theory and applications* **10**, 347–367.
- Menguy, E., J.-L. Boimond, L. Hardouin e J.-L. Ferrier (2000b). Just-in-time control of timed event graphs: update of reference input, presence of uncontrollable input. *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(9), 2155–2159.
- Murata, T. (1989). Petri nets: properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE* **77**(4), 541–580.
- Peterson, J. L. (1981). *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs.

- Ramadge, P. J. e W. M. Wonham (1989). The control of discrete event systems. *Proceedings of the IEEE* **77**(1), 81–98.
- Ramamoorthy, C. V. e G. S. Ho (1980). Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using petri nets. *IEEE Transactions on Software Engineering* **6**(5), 440–449.
- Rosen, K. H. (1998). *Discrete Mathematics and its Applications*. 4th ed.. MacGraw-Hill.
- Ross, K. A. e C. R. B. Wright (1985). *Discrete Mathematics*. Prentice-Hall. New Jersey.
- Schutter, B. de e T. van den Boom (2000). Model predictive control for max-min-plus systems. In: *Discrete Event Systems: analysis and control* (R. Boel and G. Stremersch, Eds.). Vol. 569 of *International Series in Engineering and Computer Science*. pp. 201–208. Kluwer. Boston. WODES 2000 Proceedings.
- Schutter, B. de e T. van den Boom (2001a). Model predictive control for max-min-plus-scaling systems. In: *American Control Conference*. Arlington. pp. 319–324.
- Schutter, B. de e T. van den Boom (2001b). Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems. *Automatica* **37**(7), 1049–1056.
- Tarski, A. (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific Journal of Mathematics* (5), 285–309.

# Apêndice A

## Fórmulas

Nas fórmulas abaixo,  $a$ ,  $b$  e  $x$  são elementos de um dióide qualquer, exceto quando explicitamente mencionado. Suas demonstrações podem ser encontradas em (Baccelli *et al.*, 1992; Cottenceau, 1999; Max-Plus, 1991).

$$\frac{x}{a} \preceq x \quad (A.1)$$

$$\frac{ax}{a} \succeq x \quad (A.2)$$

$$a \frac{ax}{a} = ax \quad (A.3)$$

$$\frac{a(a \not\downarrow x)}{a} = \frac{x}{a} \quad (A.4)$$

$$e \not\downarrow a = a \quad (A.5)$$

$$a \not\downarrow a \succeq e \quad (A.6)$$

$$\epsilon \not\downarrow a = \top \quad (A.7)$$

$$a \not\downarrow \epsilon = \epsilon \quad (a \neq \epsilon) \quad (A.8)$$

$$a \not\downarrow \top = \top \quad (A.9)$$

$$\top \not\downarrow a = \epsilon \quad (a \neq \top) \quad (A.10)$$

$$a \backslash (x \wedge y) = (a \backslash x) \wedge (a \backslash y) \quad (x \wedge y) \not\! / a = (x \not\! / a) \wedge (y \not\! / a) \quad (\text{A.11})$$

$$(a \oplus b) \backslash x = (a \backslash x) \wedge (b \backslash x) \quad x \not\! / (a \oplus b) = (x \not\! / a) \wedge (x \not\! / b) \quad (\text{A.12})$$

$$a \backslash (x \oplus y) \succeq (a \backslash x) \oplus (a \backslash y) \quad (x \oplus y) \not\! / a \succeq (x \not\! / a) \oplus (y \not\! / a) \quad (\text{A.13})$$

$$(a \wedge b) \backslash x \succeq (a \backslash x) \oplus (b \backslash x) \quad x \not\! / (a \wedge b) \succeq (x \not\! / a) \oplus (x \not\! / b) \quad (\text{A.14})$$

$$(ab) \backslash x = b \backslash (a \backslash x) \quad x \not\! / (ba) = (x \not\! / a) \not\! / b \quad (\text{A.15})$$

$$(a \backslash x) \not\! / b = a \backslash (x \not\! / b) \quad b \backslash (x \not\! / a) = (b \backslash x) \not\! / a \quad (\text{A.16})$$

$$(a \backslash x) b \preceq a \backslash (xb) \quad b(x \not\! / a) \preceq (bx) \not\! / a \quad (\text{A.17})$$

$$(a \backslash a)^* = a \backslash a \quad (a \not\! / a)^* = a \not\! / a \quad (\text{A.18})$$

$$a \backslash (b^* a) = (b^* a) \backslash (b^* a) \quad (ab^*) \not\! / a = (ab^*) \not\! / (ab^*) \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{x}{a^*} = \frac{a^* \backslash x}{a^*} \quad \frac{x}{a^*} = \frac{x \not\! / a^*}{a^*} \quad (\text{A.20})$$

$$a^* x = \frac{a^* x}{a^*} \quad xa^* = \frac{xa^*}{a^*} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{x}{a^*} = a^* \frac{x}{a^*} \quad \frac{x}{a^*} = \frac{x}{a^*} a^* \quad (\text{A.22})$$

$$a^+ \preceq a^* = e \oplus a^+ \quad (\text{A.23})$$

$$(a^*)^* = a^* \quad (\text{A.24})$$

$$(a^+)^* = a^* \quad (\text{A.25})$$

$$a(ba)^* = (ab)^* a \quad (\text{A.26})$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* b)^* a^* = a^* (ba^*)^* = b^* (ab^*)^* = (b^* a)^* b^* \quad (\text{A.27})$$

$$a^* a^* = a^* \quad (\text{A.28})$$

$$(a^*)^+ = a^* \quad (\text{A.29})$$

$$(a^+)^+ = a^+ \quad (\text{A.30})$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \quad (\text{A.31})$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (\text{A.32})$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \quad (\text{A.33})$$

$$(a \oplus b)^* = a^* b^* \quad (\text{somente dióide comutativo}) \quad (\text{A.34})$$

## Apêndice B

### Exemplos de cálculo

#### Função de transferência (seção 2.4)

$$H = \begin{pmatrix} e & \epsilon \\ \epsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta & \gamma \delta \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \delta & \epsilon \\ \epsilon & \delta^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta & \gamma \delta \\ \delta & \epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Aplicando-se o lema 1.48 para a matriz  $A$  tem-se:

$$\begin{aligned} a^* &= (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* = (\delta(\gamma^2\delta)^*\gamma\delta \oplus \epsilon)^* \\ &= (\gamma\delta^2(\gamma^2\delta)^*)^* = e \oplus \gamma\delta^2(\gamma\delta^2 \oplus \gamma^2\delta)^* && \text{devido a (A.32)} \\ &= e \oplus \gamma\delta^2(\gamma\delta^2)^* = (\gamma\delta^2)^* && \text{por definição} \\ b &= a_{11}^*a_{12}a^* = (\gamma^2\delta)^*\gamma\delta(\gamma\delta^2)^* = \gamma\delta(\gamma^2\delta \oplus \gamma\delta^2)^* = \gamma\delta(\gamma\delta^2)^* && \text{devido a (A.34)} \\ c &= a^*a_{21}a_{11}^* = (\gamma\delta^2)^*\delta(\gamma^2\delta)^* = \delta(\gamma\delta^2)^* && \text{idem} \\ a_{11}^* \oplus bc &= (\gamma^2\delta)^* \oplus \gamma\delta(\gamma\delta^2)^*\delta(\gamma\delta^2)^* = (\gamma^2\delta)^* \oplus \gamma\delta^2(\gamma\delta^2)^* = (\gamma\delta^2)^* && \text{devido a (A.28)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A^* = \begin{pmatrix} e & \gamma\delta \\ \delta & e \end{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* \Rightarrow H = \begin{pmatrix} \delta & \gamma\delta^3 \\ \delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix} (\gamma\delta^2)^*$$



$$\begin{aligned}
A^* \backslash A_{ref} / A^* &= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & e \end{pmatrix} \backslash \begin{pmatrix} \top & \top & \top \\ \top & \top & \top \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & \top \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & \top \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \top \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & \top \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \\ \epsilon & (\gamma\delta^3)^* & \epsilon \\ (\gamma\delta^2)^* & (\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix}
\end{aligned}$$