

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Distribuições e Estatísticas de Ordem Superior para o Canal Sem Fio

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Autor: Gustavo Fraidenraich

Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Engenharia de Telecomunicações**.

Banca Examinadora

César Kyn D'Ávila, Ph.D.	CEDET
Dalton Arantes Soares, Ph.D.	DECOM/FEEC/UNICAMP
Jaime Portugheis, Ph.D.	DECOM/FEEC/UNICAMP
Marcelo Sampaio de Alencar, Ph.D.	DEE//UFCEG
Michel Daoud Yacoub, Ph.D.	DECOM/FEEC/UNICAMP
Paul Jean Etienne Jeszensky, Ph.D.	LCS/EPUSP
Paulo Cardieri, Ph.D.	DECOM/FEEC/UNICAMP

Campinas, SP

Fevereiro/2006

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F842d Fraidenraich, Gustavo
Distribuições e Estatísticas de Ordem Superior para o Canal
Sem Fio/ Gustavo Fraidenraich. – Campinas, SP: [s.n.],
2006.

Orientador: Michel Daoud Yacoub.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Variáveis aleatórias. 2. Probabilidades. 3. Sistemas
de telecomunicações. 4. Sistema de comunicação sem fio.
5. Distribuição (Probabilidades). I. Yacoub, Michel Daoud.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Distributions and higher-order statistics for wireless channels

Palavras-chave em Inglês: Level crossing rates, Average fade durations, probability
density functions, Phase distribution, Fading, Diversity,
Rayleigh, Nakagami, Rice, Hoyt, Weibull

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: César Kyn D'Ávila, Dalton Arantes Soares, Jaime Portugheis,
Marcelo Sampaio de Alencar, Paul Jean Etienne Jeszensky e Paulo
Cardieri

Data da defesa: 07/02/2006

Resumo

Neste trabalho, uma nova distribuição de probabilidade amplamente geral, a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, é proposta. Esta distribuição contempla como casos particulares várias outras distribuições conhecidas na literatura, tais como Rayleigh, Rice, Nakagami- m , Hoyt, Weibull, $\alpha - \mu$ (Gamma Generalizada) $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$. Por conta de sua generalidade, todos os mais importantes ambientes de desvanecimento de curto prazo são modelados por esta distribuição. Além de prover a função densidade de probabilidade para o modelo $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, os momentos e a função cumulativa de probabilidade também são encontrados. Este modelo geral é então especializado para quatro casos particulares, para os quais distribuições mais simples, mas ainda gerais, são encontradas: a $\alpha - \eta - \mu$, $\alpha - \kappa - \mu$, $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica. Para esses casos, estimadores práticos baseados nos momentos são deduzidos. A aplicabilidade destes estimadores é verificada utilizando medidas de campo realizadas na Unicamp com um equipamento construído no laboratório Wisstek para este fim.

Em seguida, estatísticas de ordem superior, em particular a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento, são encontradas de forma exata para os ambientes Hoyt e Weibull em sistemas de diversidade com M ramos desbalanceados, não idênticos e independentes utilizando os combinadores por ganho igual e por razão máxima. Neste trabalho, o resultado geral é validado através de simulações e redução das expressões gerais para casos em que os resultados já são conhecidos. Além disso, para alguns destes casos particulares, as expressões gerais são simplificadas e reduzidas a fórmulas fechadas.

Estendendo esse último campo de investigação e seguindo um pioneiro trabalho da literatura, o qual abordou o caso Rayleigh, a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento são obtidas para ambientes Hoyt com dois ramos correlacionados. Nesta investigação, reformula-se a metodologia da literatura e obtém-se um procedimento geral para a análise da taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento em ambientes com apenas um *cluster*, com aplicação direta aos canais Rice, Weibull, $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica.

Finalmente, este trabalho propõe, de forma precursora, uma distribuição para a fase do canal

Nakagami- m . Ao contrário do que, convencionalmente e por simplicidade, se postulava, a distribuição de fase é não uniforme e dependente de m , o que torna o modelo compatível com aqueles aproximados por Nakagami- m , nomeadamente Hoyt e Rice.

Palavras-chave: Taxa de cruzamento de nível, duração média de desvanecimento, distribuições de probabilidade, distribuição da fase, desvanecimento, diversidade, Rayleigh, Nakagami, Rice, Hoyt e Weibull.

Abstract

In this work, a new, very general probability density function, the $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ distribution, is proposed. This distribution comprises, as particular cases, several other well known distributions such as Rayleigh, Rice, Nakagami- m , Hoyt, Weibull, $\alpha - \mu$ (Generalized Gamma) $\eta - \mu$, and $\kappa - \mu$. Due to its generality, all of the most important short fading environments can be modeled by this distribution. Besides providing the probability density function for the $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ model, the moments and the cumulative distribution function are also found. This general model is then specialized into four particular cases, for which new simpler, though still general, distributions, are found: the $\alpha - \eta - \mu$, $\alpha - \kappa - \mu$, Symmetrical $\eta - \kappa$, and Asymmetrical $\eta - \kappa$. For these cases, practical moment-based estimators are derived. The applicability of these estimators is verified using field measurements obtained through an experiment conducted at the University of Campinas (Unicamp) with an equipment specially built for this end in the Wisstek laboratory.

Higher order statistics, more specifically the level crossing rates and average fade durations, are then obtained in an exact form for the Hoyt and Weibull fading environments. The results are applicable to M unbalanced, non-identical, and independent channels using equal gain and maximal ratio combining techniques. The general results are thoroughly validated by means of simulation and also by reducing the general solution to some particular cases for which the solutions are known.

Moreover, new closed form expressions are also achieved for some of these particular cases.

Extending this field of investigation and following a pioneering work in the literature, which approached the Rayleigh case, the level crossing rate and average fade duration are obtained considering two correlated, unbalanced, and non-identical branches in a Hoyt fading environment. In this investigation, the methodology found in the literature is reformulated and generalized so as to comprise several other cases. The general procedure developed for this analysis can now be applied to other fading environment for which one cluster of mutipaths exists, *i.e.*, Rice, Weibull, Symmetrical $\eta - \kappa$, and Asymmetrical $\eta - \kappa$.

Finally, this work proposes, in a pioneering way, the phase distribution for the Nakagami- m channel. Contrary to what conventionally, and for simplicity, was usually postulated, the phase distribution is non-uniform and dependent on m , rendering this model compatible with those approximated by Nakagami- m , namely Hoyt and Rice.

Keywords: Level crossing rates, average fade durations, probability density functions, phase distribution, fading, diversity, Rayleigh, Nakagami, Rice, Hoyt, and Weibull.

*Aos meus pais, Naum e Maria Ines,
e à minha esposa, Lelma.*

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub, sou grato por sua excelente orientação e por ter tido a oportunidade de trabalhar junto a ele. O Prof. Michel Daoud Yacoub foi também um amigo, um exemplo de pessoa e um companheiro durante toda a tese, incentivando, colaborando e auxiliando em tudo aquilo que pôde.

Aos amigos do laboratório, Álvaro, Cândido, Daniel, Fábio, Hermano, José Ricardo, Ugo e Yusef, os quais tive uma prazerosa convivência e a possibilidade de poder aprender ao longo destes últimos anos.

Aos amigos que me acompanharam e apoiaram no dia a dia da vida em Campinas, André, Divanilson e Fabrício. Agradeço pelas suas amizades.

À minha querida irmã, Verônica, pelo amor e carinho.

Ao Prof. Max Costa, pela amizade e incentivo a prosseguir na carreira acadêmica.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
Glossário	xxi
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xxv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos e Contribuições do Trabalho	3
1.2 Estrutura da Tese	3
I Distribuições	5
2 A Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$	7
2.1 Introdução	7
2.2 A Função Densidade de Probabilidade $\alpha - \eta - \kappa - \mu$	9
2.3 Modelo Físico da Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$	10
2.4 O Processo de Obtenção da Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$	12
2.5 A FDP na Forma Integral Usando a Transformada de Fourier Inversa	15
2.6 A Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ e as Outras Distribuições	15
2.7 Casos Limites	16

2.8	Momentos e Estimadores para Alguns Casos Particulares	19
2.9	Equipamento para Medição e Validação das Distribuições	20
2.10	Conclusões	21
2.11	Apêndice A - Função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$	22
2.11.1	A Transformada de Laplace da Função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$	22
2.12	Apêndice B	23
3	As Distribuições $\alpha - \eta - \mu$ e $\alpha - \kappa - \mu$	25
3.1	Introdução	25
3.2	A Distribuição $\alpha - \eta - \mu$	25
3.2.1	Estimadores para os Parâmetros α, η e μ	26
3.2.2	A Distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e as Outras Distribuições	27
3.3	A Distribuição $\alpha - \kappa - \mu$	27
3.3.1	Estimadores para os Parâmetros α, κ e μ	28
3.3.2	A Distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ e as Outras Distribuições	28
3.4	A Distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e a Distribuição $\alpha - \kappa - \mu$	29
3.5	Validação das Distribuições Com Medidas de Campo	29
3.6	Conclusões	30
4	As Distribuições $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica	33
4.1	A Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica	34
4.1.1	Obtenção da Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica	37
4.1.2	Estimadores para os Parâmetros η e κ	40
4.1.3	A Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e as Outras Distribuições	41
4.1.4	Aplicação da Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica	42
4.1.5	Validação da Distribuição Por Meio de Medidas de Campo	43
4.2	A Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica	46
4.2.1	Obtenção da Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica	48

4.2.2	Estimadores para os Parâmetros η e κ	50
4.2.3	A Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica e as Outras Distribuições	52
4.2.4	Aplicação da Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica	53
4.2.5	Validação da $\eta - \kappa$ Assimétrica Por Meio de Medidas de Campo	54
4.3	Conclusões	55
4.4	Apêndice	56
II	Estatísticas de Segunda Ordem	57
5	Estatísticas de Segunda Ordem em Sistemas de Diversidade em Canais Hoyt e Weibull	
	Independentes	59
5.1	Canais Hoyt	60
5.1.1	Estatísticas dos Ramos	60
5.1.2	Combinador por Ganho Igual	62
5.1.3	Combinador por Razão Máxima	64
5.1.4	Gráficos da TCN e da DMD para o CGI e CRM	65
5.2	Canais Weibull	66
5.2.1	Combinador por Ganho Igual	68
5.2.2	Combinador por Razão Máxima	69
5.2.3	Casos Especiais	70
5.2.4	Gráficos da TCN e da DMD para o CGI e CRM	71
5.3	Conclusões	73
6	Estatísticas de Segunda Ordem em Sistemas com Dois Ramos Correlacionados em Ambientes Hoyt	75
6.1	A FDP Conjunta da Envoltória e Fase para a Distribuição Hoyt	75
6.1.1	Sistemas com Diversidade	77

6.2	Estatísticas Condicionais de \dot{R}	79
6.2.1	Preliminares	79
6.2.2	Média e Variância dos $\dot{R}_i s$	83
6.2.3	Casos Especiais	84
6.3	Resultados Numéricos	85
6.4	Conclusões	86
III	Distribuição de Fase	91
7	A FDP Conjunta para a Envoltória e Fase da Distribuição Nakagami-m	93
7.1	Introdução	93
7.2	A Distribuição Conjunta Fase-Envoltória para Nakagami- m	94
7.3	Obtenção da FDP Conjunta	95
7.4	Discussão dos Resultados	97
7.5	Conclusões	97
8	Conclusões e Trabalhos Futuros	101
8.1	Trabalhos Futuros	102
	Referências bibliográficas	103

Lista de Figuras

2.1	<i>Clusters</i> de Multipercurso.	11
2.2	Carrinho de medição.	21
3.1	As distribuições $\alpha - \mu$, $\alpha - \eta - \mu$ e a $\alpha - \kappa - \mu$	30
3.2	As distribuições $\alpha - \mu$, $\alpha - \eta - \mu$ e a $\alpha - \kappa - \mu$	31
3.3	A FCP da distribuição $\alpha - \eta - \mu$ ajustada às medidas <i>indoor</i> realizadas em 1.8 GHz na Unicamp.	32
3.4	A FCP da distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ ajustada às medidas <i>indoor</i> realizadas em 1.8 GHz na Unicamp.	32
4.1	A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para um η fixo ($\eta = 0$).	37
4.2	A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para um η fixo ($\eta = 0.5$).	38
4.3	A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para um κ fixo ($\kappa = 1$).	39
4.4	Possíveis valores de η e κ para um determinado valor de m	44
4.5	A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para o mesmo parâmetro de Nakagami m ($m=1.25$). O par (η, κ) assume os seguintes valores [(0.0001, 3.435), (0.001, 3.426), (0.01, 3.336), (0.03, 3.148), (0.06, 2.892), (0.1, 2.592), (0.5, 1.123), (1, 0.809)].	45
4.6	A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para o mesmo parâmetro m ($m=1.25$). O par (η, κ) assume os seguintes valores [(0, 3.436), (0.0001, 3.435), (0.001, 3.426), (0.002, 3.416), (0.005, 3.386), (0.007, 3.366), (0.1, 2.592), (0.2, 2.011), (0.4, 1.321), (0.99, 0.809)].	46

4.7	A FCP da η - κ Simétrica ajustada aos dados de medidas <i>indoor</i> realizadas na frequência de 1.8 GHz na Unicamp.	47
4.8	A FCP da η - κ Simétrica ajustada aos dados de medidas <i>indoor</i> na frequência de 10 GHz, como relatado em [AE00].	48
4.9	A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para η fixo ($\eta = 0$).	49
4.10	A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para η fixo ($\eta = 0.5$).	50
4.11	A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para κ fixo ($\kappa = 1$).	51
4.12	A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para o mesmo parâmetro de Nakagami m ($m=1.25$). . . .	54
4.13	A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica ajustada aos dados das medidas <i>indoor</i> feitas na Unicamp em 1.8 GHz.	55
5.1	A TCN e a DMD para o CGI em canais Hoyt idênticos ($M = 1, 2, 4$ e $b_i = 0, 0.9, 0.999$).	66
5.2	A TCN e a DMD para o CRM em canais Hoyt idênticos ($M = 1, 2, 4$ e $b_i = 0, 0.9, 0.999$).	67
5.3	A TCN e a DMD do CGI para ramos com potências idênticas em canais Weibull desvanecidos ($M = 1, 2, 4$ e $\alpha_i = 2, 3, 4$).	72
5.4	A TCN e a DMD do CRM para ramos com potências idênticas em canais Weibull desvanecidos ($M = 1, 2, 4$ e $\alpha_i = 2, 3, 4$).	72
6.1	A TCN e a DMD normalizadas para $d/\lambda = 0.06$, $\xi = 0^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$	87
6.2	A TCN e a DMD normalizadas para $d/\lambda = 0.06$, $\xi = 90^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$	88
6.3	A TCN e a DMD normalizadas para $r/\sqrt{\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}} = -20\text{dB}$, $\xi = 0^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$	89
6.4	A TCN e a DMD normalizadas para $r/\sqrt{\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}} = -20\text{dB}$, $\xi = 90^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$	90

7.1	Distribuição de fase de Nakagami- m	98
7.2	Distribuição da fase de Rice e Hoyt.	99
7.3	Distribuição da fase de Nakagami- m em coordenadas polares.	99

Lista de Tabelas

2.1	A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ e as outras distribuições.	16
2.2	A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ e as outras distribuições.	16
3.1	A distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e as outras distribuições.	27
3.2	A distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ e as outras distribuições.	28
3.3	Erro médio para as Figs. 3.3 e 3.4.	31
4.1	A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e as outras distribuições.	42
4.2	Erro médio para as Figs. 4.7 e 4.8.	45
4.3	A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica e as outras distribuições.	53
4.4	Erro médio para a Fig. 4.13.	55

Glossário

α Parâmetro de não linearidade

$\arg(\cdot)$ Argumento de um número complexo

b Parâmetro de desvanecimento de Hoyt

CGI Combinador por ganho igual

CRM Combinador por razão máxima

CS Combinador por seleção

DMD Duração média de desvanecimento

$E(\cdot)$ Operador valor esperado

ϵ Erro Médio

$\text{erf}(\cdot)$ Função erro gaussiana

$f_{R_i}(\cdot)$ Função densidade de probabilidade da envoltória do sinal no i -ésimo ramo

$f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ Função densidade conjunta de X e Y

${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ Função Hipergeométrica confluyente de Kummer

FCP Função cumulativa de probabilidade

FDP Função densidade de probabilidade

f_m Desvio Doppler máximo

FM Frequência modulada

${}_2F_1(.,.;.;.)$ Função Hipergeométrica de Gauss

η Razão da onda espalhada em fase e da onda espalhada em quadratura

$I_\nu(\cdot)$ Função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem arbitrária ν

i.e. Abreviatura do Latin *id est* – isto é

iid Idênticas e igualmente distribuídas

κ_X Razão da componente direta em fase e da onda espalhada em fase

κ_Y Razão da componente direta em quadratura e da onda espalhada em quadratura

k Parâmetro de desvanecimento de Rice

M Número máximo de ramos

μ Número real de *clusters*

m Parâmetro de desvanecimento de Nakagami

$n_R(\cdot)$ Taxa de cruzamento de nível

Ω Potência média do sinal

P Envoltória normalizada do sinal

Θ Fase do sinal

R Envoltória do sinal

R_i Envoltória do sinal no i -ésimo ramo

\hat{r} Valor eficaz de R

σ_X^2 Variância da variável aleatória X

TCN Taxa de Cruzamento de Nível

$T_R(\cdot)$ Duração média de desvanecimento

Var(\cdot) Variância

VA Variável aleatória

X_i Componente em fase do sinal no i -ésimo ramo

\dot{X} Derivada temporal do processo aleatório X

Y_i Componente em quadratura do sinal no i -ésimo ramo

Trabalhos Publicados Pelo Autor

Revistas

1. Gustavo Fraidenraich , Michel Daoud Yacoub e José Cândido S. Santos Filho. "Second-Order Statistics of Maximal-Ratio and Equal-Gain Combining in Hoyt Fading" - *IEEE Commun. Lett.* , 9(1), pp. 19-21, Jan. 2005.
2. Gustavo Fraidenraich , Michel Daoud Yacoub e José Cândido S. Santos Filho. "Second-Order Statistics of Maximal-Ratio e Equal-Gain Combining in Weibull Fading" - *IEEE Commun. Lett.* , 9(6), pp. 499-501, Jun. 2005.
3. Gustavo Fraidenraich, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes e José Cândido S. Santos Filho. "Second-Order Statistics for Diversity Combining of Non-identical Correlated Hoyt signals." - submetido para *IEEE Trans. Commun.*, Jul. 2005.
4. Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich, Hermano B. Tercius e Fabio C. Martins, "The Symmetrical $\eta - \kappa$ distribution" - *IEEE Trans. on Broadcasting*, 45(2), pp. 499-511, Dez. 2005.
5. Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich e José Cândido S. Santos Filho. "Nakagami- m phase-envelope joint distribution" - *Elect. Lett.*, 41(5), pp. 259-261, Mar. 2005.
6. José Cândido S. Santos Filho, Gustavo Fraidenraich e Michel Daoud Yacoub. "Exact Crossing Rates of Dual diversity over unbalanced correlated Rayleigh channels" - *IEEE Commun. Lett.*, 18(1), pp. 37-39, Jan. 2006.
7. José Cândido S. Santos Filho, Gustavo Fraidenraich e Michel Daoud Yacoub. "New paradigm on Nakagami simulation" - submetido para a *IEEE Commun. Lett.*, Dez. 2005.
8. José Ricardo Mendes, Michel Daoud Yacoub e Gustavo Fraidenraich - "Power Correlation Coefficient for Hoyt Signals" - *IEEE Commun. Lett.*, 10(2), pp. 94-96, Fev. 2006.
9. Michel Daoud Yacoub, Daniel Benevides, Ugo Dias e Gustavo Fraidenraich . "Joint Statistics for Two Correlated Weibull Variates" - *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, (4), pp. 129-132, Mai. 2005.

10. Daniel Benevides, Michel Daoud Yacoub, José Cândido S. Santos Filho, Gustavo Fraidenraich e José Ricardo Mendes. "Generalized Nakagami- m phase crossing rates" - *IEEE Commun. Lett.*, 18(1), pp. 13-15, Jan. 2006.
11. José Cândido S. Santos Filho, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes e Gustavo Fraidenraich - "General Exact Level Crossing Rates and Average Fade Durations of Dual Diversity Combiners over Non-Identical Correlated Ricean Channels" - submetido para *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Dez. 2005.
12. Ugo Dias, Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich, Daniel Benevides da Costa, e José Cândido S. Santos Filho, "On the Weibull Autocorrelation and Power Spectrum Functions: Field Trials and Validation", submetido para a *IEEE Commun. Lett.*, Set. 2005.
13. Daniel Benevides da Costa, Michel Daoud Yacoub e Gustavo Fraidenraich , "Crossing Rates and Fade Durations for Diversity-Combining Schemes of the $\alpha - \mu$ (Generalized Gamma or Stacy) Fading Channels ", submetido para a *IEEE Trans. Wireless Commun.* , Dez. 2005.
14. Daniel Benevides da Costa, Michel Daoud Yacoub e Gustavo Fraidenraich , "General Exact Level Crossing Rate and Average Fade Duration for Diversity-Combining of Non-Identical, Unbalanced, Correlated Weibull Signals", submetido para a *IEEE Trans. Veh. Technol.* , Dez. 2005.
15. Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich, Hermano B. Tercius e Fabio C. Martins, "The Assymmetrical $\eta - \kappa$ distribution" - aceito para a *IEEE Journal of Communication and Information Systems*.

Trabalhos em Eventos

1. Gustavo Fraidenraich e Michel Daoud Yacoub. "The $\lambda - \mu$ General fading distribution". IMOC (International Microwave and Optoelectronics Conference)-vol. 1- pp. 49-54 - IEEE 2003 - Foz de Iguaçu - Brasil, Set. 2003.
2. Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich, Hermano B. Tercius e Fabio C. Martins, "The Symmetrical $\eta - \kappa$ distribution" - vol. 4, pp. 2426-2430 - IEEE - PIMRC 2004 (Personal Indoor and Mobile Communications)-Barcelona - Espanha, Set. 2004.

3. Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich, Hermano B. Tercius e Fabio C. Martins, "The Assymmetrical $\eta - \kappa$ distribution" -IEEE - IWT 2004 (International Workshop on Telecommunications)-Santa Rita do Sapucaí - Brasil, pp.. 89-93, Ago. 2004.
4. Gustavo Fraidenraich, Michel Daoud Yacoub e José Cândido S. Santos Filho, "Second-Order Statistics of Maximal-Ratio and Equal-Gain Combining in Hoyt Fading" - SBRT2004 (Simpósio Brasileiro de Telecomunicações) - Belém -Brasil, Set. 2004.
5. José Cândido S. Santos Filho, Michel Daoud Yacoub e Gustavo Fraidenraich, "The General Solution for Crossing Rates and Fade Durations of Selection Combining" - SBRT2004 (Simpósio Brasileiro de Telecomunicações) - Belém -Brasil, Set. 2004.
6. Daniel Benevides da Cunha, Michel Daoud Yacoub e Gustavo Fraidenraich, "Second-Order Statistics for Diversity-Combining of non-identical, Unbalanced, Correlated Weibull Signals", IEEE - IMOC (International Microwave and Optoelectronics Conference)- Brasília - Brasil, Jul. 2005.
7. Daniel B. da Costa, Michel Daoud Yacoub e Gustavo Fraidenraich, "Generalized Phase Crossing Rate and Random FM Noise for Weibull Fading Channels", IEEE - IMOC (International Microwave and Optoelectronics Conference)- Brasília - Brasil, Jul. 2005.
8. Ugo S. Dias, Gustavo Fraidenraich, Michel Daoud Yacoub e Daniel B. da Costa, "On the Weibull Auto-correlation: Field Trials and Validation", IEEE - IMOC (International Microwave and Optoelectronics Conference)- Brasília - Brasil, Jul. 2005.
9. José Cândido S. Santos filho, Gustavo Fraidenraich, Ugo S. Dias e Michel Daoud Yacoub, "On the Nakagami- m Crosscorrelation function", IEEE - IMOC (International Microwave and Optoelectronics Conference)- Brasília - Brasil, Jul. 2005.
10. Ugo Dias, Michel Daoud Yacoub, Gustavo Fraidenraich, José Cândido S. Santos filho e Daniel Benevides da Costa, "On the Weibull Autocorrelation and Power Spectrum Functions: Field Trials and Validation" SBRT2005 (Simpósio Brasileiro de Telecomunicações) - Campinas, Set. 2005.

11. Gustavo Fraidenraich, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes e José Cândido S. Santos Filho. "Level Crossing Rates and Average Fade Durations for Diversity-Combining of Non-identical Correlated Hoyt signals" SBRT2005 (Simpósio Brasileiro de Telecomunicações) - Campinas, Set. 2005.
12. José Cândido S. Santos Filho, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes e Gustavo Fraidenraich - "General Exact Level Crossing Rates and Average Fade Durations of Dual Diversity Combiners over Non-Identical Correlated Ricean Channels" SBRT2005 (Simpósio Brasileiro de Telecomunicações) - Campinas, Set. 2005.
13. Daniel Benevides, Michel Daoud Yacoub, José Cândido S. Santos Filho, Gustavo Fraidenraich e José Ricardo Mendes. "Generalized Nakagami- m phase crossing rates" SBRT2005 (Simpósio Brasileiro de Telecomunicações) - Campinas, Set. 2005.
14. José Cândido S. Santos Filho, Michel Daoud Yacoub, José Ricardo Mendes e Gustavo Fraidenraich - "General Exact Level Crossing Rates and Average Fade Durations of Dual Diversity Combiners over Non-Identical Correlated Ricean Channels" - aceito no ICC2006 (International Communications Conference), Istambul, Turquia, Jul. 2006.

Capítulo 1

Introdução

O canal sem fio é influenciado por uma gama variada de fenômenos físicos. Caracterizá-lo de forma determinística constitui uma tarefa árdua e, de certa forma, frustrante, uma vez que um esforço computacional muito grande é requerido. Assim, lançar mão da modelagem estatística tem sido uma prática usada ao longo de muitas décadas. Um primeiro passo nesse sentido é obter distribuições de probabilidade para a envoltória do sinal propagado. Muitas distribuições têm sido utilizadas no ambiente sem fio. A modelagem de fenômenos físicos por meio de distribuições de probabilidade tem merecido a atenção de pesquisadores já há algum tempo.

Em 1880, o pesquisador ganhador do prêmio Nobel de física, Lord Rayleigh [W.S80], propõe sua famosa distribuição a ser utilizada na área de eletromagnetismo. Usando essa distribuição, Pawsey [L.35], em 1935, introduz pela primeira vez a distribuição Rayleigh para modelar dados de medidas de potência do sinal de rádio. Em 1928, Fisher e Tippett [RL28] propõem uma distribuição relacionada à teoria dos valores extremos. Em 1939, Waloddi Weibull [Wei39] apresenta a mesma distribuição para calcular o tempo médio de vida útil em máquinas industriais, que foi posteriormente utilizada para modelar o canal sem fio em 1977 por Shepherd [She77]. Rice [Ric44], em 1944, apresenta um trabalho pioneiro propondo uma nova distribuição mais geral, que incluía a distribuição Rayleigh como caso específico, para modelar o efeito do ruído em sistemas FM e também criando diversas métricas e novas estatísticas como ferramentas de análise do sinal de rádio. Em 1947, Hoyt publica

seu trabalho [Hoy47] e propõe uma nova distribuição mais geral para o módulo de uma variável aleatória Gaussiana. Minoru Nakagami, em 1960 [Nak60], obtém sua famosa distribuição Nakagami- m de forma experimental para modelar o fenômeno do desvanecimento de curto prazo. Essa também incluía a distribuição Rayleigh como caso particular. Desde então, a busca por novas distribuições que consigam ajustar de forma mais exata medidas experimentais tem sido o alvo de interesse de vários pesquisadores. Mais recentemente, propõem-se três novas distribuições nos seguintes trabalhos [Yac00], [Yac01] e [Yac02]. Através destas três distribuições é possível encontrar qualquer uma das distribuições mais conhecidas como casos particulares.

O avanço na utilização da probabilidade e estatística auxiliando na caracterização do canal sem fio não se deteve simplesmente às estatísticas de primeira ordem (função densidade de probabilidade e função cumulativa de probabilidade), mas também prosseguiu por Rice através de estatísticas de segunda ordem com métricas como a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento. Essas estatísticas começaram a ser importantes por sua aplicação em sistemas práticos. Por exemplo, a taxa de cruzamento de nível pode ser utilizada para estimar a velocidade de um veículo [PHK03] ou para avaliar o desempenho de algoritmos de *handoff* [VH93], enquanto que a duração média de desvanecimento pode auxiliar na escolha de códigos corretores de erro indicando, tipicamente, qual percentual de bits transmitidos necessitam ser corrigidos naquele determinado canal.

Ao mesmo tempo em que a análise teórica tornou-se cada vez mais eficaz no que se refere à capacidade de prever o comportamento do canal sem fio, um aumento dos requisitos por mais serviços e por mais rapidez nas comunicações também foi observado nesta última década. Como exemplo, basta considerar a TV digital e os sistemas sem fio de geração superior, nos quais é possível a transmissão de vídeos em tempo real. Em vista disso, os pesquisadores da área de comunicação sem fio continuam na busca de novas técnicas para aumentar a taxa e a confiabilidade da transmissão/recepção. Esse objetivo é particularmente desafiador em sistemas com limitações de potência, largura de banda e complexidade. Uma das alternativas para o problema tem sido o uso da diversidade, ou seja, o uso de vários canais trafegando, de forma redundante, a mesma informação entre o transmissor e o receptor.

Vários trabalhos foram publicados recentemente unindo o estudo das variações dinâmicas, como a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento, com o uso da diversidade em canais sem fio. Pode-se citar as referências [AFP88] e [YdSB01] como sendo as precursoras desta conjunção de temas. A grande quantidade de trabalhos reflete o interesse e importância do assunto para a comunidade científica.

1.1 Objetivos e Contribuições do Trabalho

Esta tese tem como objetivo o aprimoramento da caracterização do canal sem fio. Nesse sentido as seguintes contribuições são propostas:

- Obtenção de uma distribuição generalizada de probabilidade, a $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, para a modelagem do desvanecimento de curto prazo;
- Obtenção de distribuições particulares a partir da $\alpha - \eta - \kappa - \mu$;
- Obtenção dos estimadores e comparação com resultados experimentais para as distribuições $\alpha - \eta - \mu$, $\alpha - \kappa - \mu$, $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica;
- Cálculo da taxa de cruzamento de nível e da duração média de desvanecimento em canais independentes com diversidade em M ramos em ambientes Hoyt e Weibull;
- Cálculo da taxa de cruzamento de nível e da duração média de desvanecimento em canais com dois ramos correlacionados em ambientes Hoyt;
- Proposta de uma nova distribuição de probabilidade para a fase de Nakagami- m ;

1.2 Estrutura da Tese

Este trabalho de tese é organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2 – deduz-se uma nova distribuição de probabilidade, a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, englobando todas as outras distribuições para modelar o desvanecimento de curto prazo;
- Capítulo 3 – particulariza-se a distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e $\alpha - \kappa - \mu$, calculando os estimadores e aplicando-os às medidas de campo;
- Capítulo 4 – particulariza-se a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e a $\eta - \kappa$ Assimétrica calculando os estimadores e aplicando-os às medidas de campo;
- Capítulo 5 – a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento em sistemas com M ramos em canais Hoyt e Weibull independentes são apresentadas;
- Capítulo 6 – a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento para sistemas com dois ramos correlacionados também em ambiente Hoyt são deduzidas;
- Capítulo 7 – a função densidade de probabilidade conjunta da fase e envoltória para a distribuição Nakagami- m é apresentada;
- Capítulo 8 – conclusões e trabalhos futuros são discutidos.

Parte I

Distribuições

Capítulo 2

A Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$

Este capítulo apresenta uma distribuição para o desvanecimento de curto prazo que engloba todas as mais conhecidas distribuições para o desvanecimento, tais como Rayleigh, Hoyt, Rice, Weibull, Nakagami- m , $\eta - \mu$, $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$. A FDP (função densidade de probabilidade) e a FCP (função cumulativa de probabilidade) são apresentadas na formas de série e integral. Além disso, os momentos de ordem t também são obtidos.

2.1 Introdução

A propagação no ambiente rádio móvel é caracterizada por ondas incidentes interagindo com as irregularidades da superfície dos obstáculos via difração, espalhamento, reflexão e absorção. A interação da onda com as estruturas físicas gera, de forma contínua, uma grande quantidade de ondas [BD91] e cada uma destas apresenta amplitude e fase variando de acordo com as propriedades físicas da superfície. O sinal propagado alcança o receptor através de múltiplos caminhos e o resultado é uma combinação de sinais que se compõem no receptor, caracterizando o desvanecimento rápido. Existem várias distribuições de probabilidade que descrevem bem as estatísticas do sinal rádio móvel. As variações de longo prazo são bem caracterizadas pela distribuição lognormal, entretanto as variações de curto prazo são descritas por várias outras distribuições, tais como Rayleigh [Jak74],

Rice [Ric44], Nakagami- m [Nak60], Hoyt [Hoy47] e Weibull [Wei39]. Dentre essas, a distribuição Nakagami- m tem recebido atenção especial por sua facilidade de manipulação e variada gama de aplicações [Suz77]. Embora a distribuição Nakagami- m ajuste-se muito bem à maioria das situações, ocorrem casos em que outras distribuições, tais como Rice e Weibull, produzem resultados melhores [Par00, Ste87]. Também existem casos em que nenhuma dessas distribuições consegue ajustar-se aos dados experimentais. Apesar da grande utilização da distribuição Nakagami- m , alguns pesquisadores [Ste87] ainda questionam o seu uso para o desvanecimento. Tal questionamento é oriundo do fato de sua cauda (pequenos valores da envoltória) não conseguir ajustar-se bem aos dados experimentais. Um melhor ajuste observa-se em torno da média ou mediana dessa distribuição.

As distribuições mais conhecidas têm sido obtidas considerando um sinal recebido de forma homogênea, que ocorre por conta da distribuição aleatória dos pontos espalhadores. Com essas considerações, o teorema central do limite leva a um processo gaussiano. No entanto, a consideração de meio homogêneo é uma aproximação porque as superfícies são certamente correlacionadas, o que caracteriza um meio não homogêneo [BD91]. Recentemente [Yac00, Yac01, Yac02], três novas distribuições de probabilidade foram propostas incluindo ou aproximando muito bem as distribuições de probabilidade para desvanecimento mais comuns. A distribuição $\eta - \mu$ [Yac00] inclui a distribuição Hoyt e Nakagami- m como casos especiais. A distribuição $\kappa - \mu$ [Yac01] inclui a distribuição Rice e Nakagami- m como casos especiais. A distribuição $\alpha - \mu$ [Yac02] inclui as distribuições Weibull e Nakagami- m como casos especiais.

Neste capítulo, uma nova e abrangente distribuição de probabilidade é proposta: a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$. Esta inclui as distribuições Rice, Hoyt, Weibull, Rice Generalizada (Beckmann – Nakagami)[Bec67, Eq. 4.6-28] e [Nak60, Eq.93], $\eta - \mu$ [Yac00], $\kappa - \mu$ [Yac01], $\alpha - \mu$ [Yac02] e Nakagami- m , como casos especiais. Portanto, as distribuições gaussiana unilateral, Rayleigh e exponencial negativa também constituem casos especiais da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$.

2.2 A Função Densidade de Probabilidade $\alpha - \eta - \kappa - \mu$

A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ é geral e pode ser usada para representar as variações de curto prazo de um sinal desvanecido. Para um sinal com envoltória R e envoltória normalizada $P = R/\hat{r}$, $\hat{r} = E(R^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ sendo a raiz α -ésima do α -ésimo momento de R , em que $E(\cdot)$ é a média, a FDP $f_P(\rho)$ da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ pode ser escrita da seguinte forma

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha e^{-\frac{(1+\eta)(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)\mu\rho^\alpha}{4\eta}} \eta^{-\frac{\mu}{2}} \mu^\mu \rho^{-1+\alpha\mu}}{2^\mu e^{\left(\frac{\kappa_X+\kappa_Y}{2}\right)\mu} (1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)^{-\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2i-4j-4k} (\eta-1)^{-i+2j+k} \eta^{i-2(j+k)}}{(k-i)! i! j! \Gamma(k+\frac{\mu}{2})} \\ \times \frac{\Gamma(j+k+\frac{\mu}{2}) (1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)^{-i+2(j+k)} (\kappa_X+\eta\kappa_Y)^k \mu^{-i+2j+3k} \rho^{\alpha(-i+2(j+k))} (\cos(2\phi))^{-i+k}}{\Gamma(-i+2(j+k)+\mu)} \quad (2.1)$$

ou na forma integral como

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha\mu(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)\eta^{\frac{\mu}{2}-1}\rho^{\alpha-1}}{2\pi} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu((\eta-1)(\kappa_X-\eta\kappa_Y)+4\mathfrak{i}\Omega(\eta\kappa_X+\kappa_Y)-8(\kappa_X+\kappa_Y)\Omega^2+(\eta-1)(\kappa_X+\eta\kappa_Y)\cos(2\phi))}{4(1+2\mathfrak{i}\Omega)(\eta+2\mathfrak{i}\Omega)}} + \mathfrak{i}\Omega\rho^\alpha\left(\frac{\mu(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)}{\eta}\right)}{((1+2\mathfrak{i}\Omega)(\eta+2\mathfrak{i}\Omega))^{\frac{\mu}{2}}} d\Omega \quad (2.2)$$

em que $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$, $\kappa_X \geq 0$ é a razão da componente direta em fase e da onda espalhada em fase, $\kappa_Y \geq 0$ é razão da componente direta em quadratura e da onda espalhada em quadratura, $\eta \geq 0$ é a razão da onda espalhada em fase e da onda espalhada em quadratura, $\alpha > 0$ é um parâmetro arbitrário, $\mu \geq 0$ é o inverso da variância normalizada de R^α , *i.e.*, $\mu = \frac{1}{\text{Var}(P^\alpha)}$, em que $\text{Var}(\cdot)$ define a variância, e ϕ é dado por

$$\phi = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\eta\kappa_Y}{\kappa_X}} \right) \quad (2.3)$$

A FCP $F_P(\rho)$ é dada por

$$F_P(\rho) = \frac{2^\mu \eta^{\frac{\mu}{2}}}{e^{\frac{(\kappa_X + \kappa_Y)\mu}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^k (\eta - 1)^{-i+2j+k} (1 + \eta)^{i-2(j+k)-\mu} (\kappa_X + \eta \kappa_Y)^k \mu^k}{i! j! (k-i)! \Gamma(k + \frac{\mu}{2}) 2^k \Gamma(-i+2(j+k+\frac{\mu}{2}))} \\ \times (\cos(2\phi))^{-i+k} \Gamma\left(j+k+\frac{\mu}{2}\right) \\ \times \left[\Gamma(-i+2(j+k)+\mu) - \Gamma\left(2\left(j+k+\frac{\mu}{2}\right) - i, \frac{\rho^\alpha (1+\eta)(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)\mu}{4\eta}\right) \right] \quad (2.4)$$

em que $\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função Gamma incompleta. A FCP também pode ser dada na forma integral como

$$F_P(\rho) = \frac{\eta^{\frac{\mu}{2}}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu((\eta-1)(\kappa_X-\eta\kappa_Y)+4i(\eta\kappa_X+\kappa_Y)\Omega-8(\kappa_X+\kappa_Y)\Omega^2-(\eta-1)(\kappa_X+\eta\kappa_Y)\cos(2\phi))}{4(1+2i\Omega)(\eta+2i\Omega)}}}{\Omega((1+2i\Omega)(\eta+2i\Omega))^{\frac{\mu}{2}}} \\ \times \left(e^{\frac{i\rho^\alpha(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)\mu\Omega}{\eta}} - 1 \right) d\Omega \quad (2.5)$$

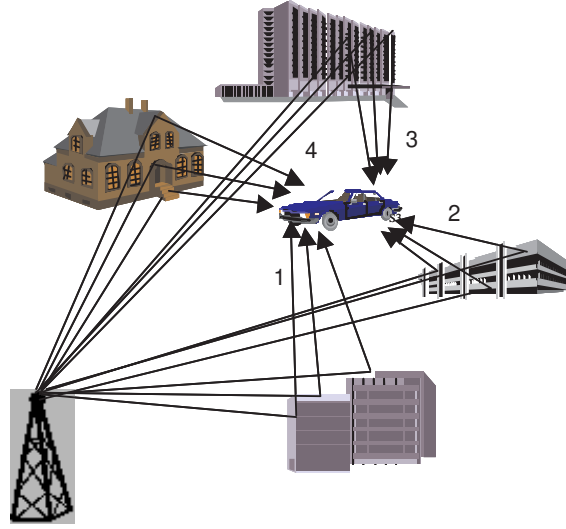
O t -ésimo momento $E(P^t)$ de P pode ser obtido na forma de série como

$$E(P^t) = \frac{2^{\frac{2t}{\alpha}+\mu} \eta^{\frac{t}{\alpha}+\frac{\mu}{2}} ((1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)\mu)^{-\frac{t}{\alpha}}}{e^{\frac{(\kappa_X+\kappa_Y)\mu}{2}} (1+\eta)^{\frac{t}{\alpha}+\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\eta-1)^{-i+2j+k} (\eta+1)^{i-2(j+k)}}{i! j! (k-i)! \Gamma(k+\frac{\mu}{2})} \\ \times \frac{(\kappa_X + \eta \kappa_Y)^k \mu^k (\cos(2\phi))^{-i+k} \Gamma(j+k+\frac{\mu}{2}) \Gamma(\frac{t}{\alpha}+2(j+k)+\mu-i)}{\Gamma(2(j+k)+\mu-i)} \quad (2.6)$$

2.3 Modelo Físico da Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$

O modelo físico para a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ considera um sinal composto de n clusters de multipercursos propagando-se em ambiente não homogêneo. Para ilustrar melhor o conceito de clusters, a Fig. 2.1 mostra um veículo recebendo o sinal de determinada estação transmissora com quatro clusters de multipercurso.

Além disso, no modelo considerado na distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, o ambiente de propagação

Fig. 2.1: *Clusters* de Multipercurso.

é tal que o sinal resultante é observado como uma função não linear do módulo da soma dessas componentes. Essa não linearidade aparece na forma de potência, tal que a envoltória resultante é observada como o módulo da soma das componentes de multipercurso elevado à potência $2/\alpha$. Dentro de cada *cluster*, as fases das ondas espalhadas são aleatórias e os sinais têm atrasos similares. O tempo de atraso de um *cluster* para outro é considerado suficientemente grande para que não haja interferência entres eles. As médias e variâncias das componentes em fase e em quadratura podem assumir valores arbitrários.

Desta forma, a envoltória R , para a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, pode ser escrita em função dos elementos em fase e em quadratura, tal que

$$R^\alpha = \sum_{i=1}^n R_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + Y_i^2 \quad (2.7)$$

em que X_i e Y_i são processos gaussianos (estacionários no sentido amplo) independentes representando as componentes em fase e em quadratura, respectivamente. Considere que $E(X_i) = \mu_X$, $E(Y_i) = \mu_Y$, $\text{Var}(X_i) = \sigma_X^2$ e $\text{Var}(Y_i) = \sigma_Y^2$. A seguir delinea-se a obtenção da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$.

2.4 O Processo de Obtenção da Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$

A distribuição conjunta de duas gaussianas independentes $f_{X_i, Y_i}(x_i, y_i)$ de X_i e Y_i é dada por [Pap02]

$$f_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) = \frac{\exp\left(-\frac{(x_i - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(y_i - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \quad (2.8)$$

A envoltória R_i pode ser escrita em termos das componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido como $R_i^2 = X_i^2 + Y_i^2$ com $X_i = R_i \cos(\Theta)$, $Y_i = R_i \sin(\Theta)$ e $\Theta = \arg(Y_i/X_i)$ (a função $\arg(\cdot)$ define o argumento de um número complexo). Portanto, a densidade conjunta $f_{R_i, \Theta}(r_i, \theta)$ de R_i e Θ é dada por

$$f_{R_i, \Theta}(r_i, \theta) = |J| f_{X_i, Y_i}(r_i \cos(\theta), r_i \sin(\theta)) \quad (2.9)$$

em que $|J| = r_i$ é o Jacobiano da transformação. Dado o modelo físico da distribuição, as seguintes razões são definidas em termos dos parâmetros físicos da distribuição

$$\eta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \quad (2.10)$$

$$\kappa_X = \frac{\mu_X^2}{\sigma_X^2} \quad (2.11)$$

$$\kappa_Y = \frac{\mu_Y^2}{\sigma_Y^2} \quad (2.12)$$

Note que $0 \leq \eta \leq 1$ define a seguinte região $\sigma_X^2 \leq \sigma_Y^2$, entretanto $0 \leq \eta^{-1} \leq 1$ define a região $\sigma_Y^2 \leq \sigma_X^2$. Com as definições acima, tem-se que

$$f_{R_i, \Theta}(r_i, \theta) = \frac{r_i \sqrt{\eta} e^{-\frac{r_i^2(1+\eta)}{4\sigma_X^2} - \frac{r_i^2(1-\eta)\cos(2\theta)}{4\sigma_X^2} + \frac{r_i\sqrt{\kappa_X + \eta\kappa_Y}\cos(\theta-\phi)}{\sigma_X}}}{2\pi\sigma_X^2 \exp\left(\frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}\right)} \quad (2.13)$$

em que ϕ é dado em (2.3), e $f_{R_i}(r_i)$ pode ser obtido através da fórmula $f_{R_i}(r_i) = \int_0^{2\pi} f_{R_i, \Theta_i}(r_i, \theta_i) d\theta_i$, o que leva a

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{r_i \sqrt{\eta} e^{-\frac{r_i^2(1+\eta)}{4\sigma_X^2}}}{\sigma_X^2 \exp\left(\frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}\right)} M(u, v, \phi) \quad (2.14)$$

em que $u = \frac{r_i \sqrt{\kappa_X + \eta \kappa_Y}}{\sigma_X}$, $v = \frac{r_i^2(\eta-1)}{4\sigma_X^2}$ e

$$M(u, v, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{u \cos(\theta-\phi) + v \cos(2\theta)} d\theta \quad (2.15)$$

A função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ foi definida pela primeira vez em [YFTM04]. Ela aparece em diversas situações e apresenta algumas propriedades interessantes. O Apêndice A descreve essa função.

Fazendo as seguintes transformações de variáveis $W = R^\alpha$ e $W_i = R_i^2$, segue-se que $W = \sum_{i=1}^n W_i$ e $f_{W_i}(w_i) = \frac{1}{2\sqrt{w_i}} f_{R_i}(\sqrt{w_i})$. Com as considerações feitas, a seguinte equação pode ser escrita

$$f_{W_i}(w_i) = \frac{\sqrt{\eta} e^{-\frac{w_i(1+\eta)}{4\sigma_X^2}}}{2\sigma_X^2 \exp\left(\frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}\right)} M(u, v, \phi) \quad (2.16)$$

em que $u = \frac{\sqrt{w_i(\kappa_X + \eta \kappa_Y)}}{\sigma_X}$, $v = \frac{w_i(\eta-1)}{4\sigma_X^2}$ e a função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ dada em (2.15). Aplicando a transformada de Laplace $\mathcal{L}[f_{W_i}(w_i)]$ (veja Apêndice A), o seguinte resultado é obtido

$$\mathcal{L}[f_{W_i}(w_i)] = \frac{e^{\frac{k_1^2(s-k_3+k_2 \cos(2\phi))}{4((s-k_3)^2-k_2^2)}} k_4}{\sqrt{(s-k_3)^2 - (k_2)^2}} \quad (2.17)$$

com

$$k_1 = \frac{\sqrt{\kappa_X + \eta \kappa_Y}}{\sigma_X} \quad (2.18)$$

$$k_2 = \frac{(\eta-1)}{4\sigma_X^2} \quad (2.19)$$

$$k_3 = -\frac{(1+\eta)}{4\sigma_X^2} \quad (2.20)$$

$$k_4 = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sigma_X^2 \exp\left(\frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}\right)} \quad (2.21)$$

em que s é a frequência complexa (variável de Laplace). Sabendo que as variáveis $W_i, i = 1, 2, \dots, n$ são mutuamente independentes, a transformada de Laplace, *i.e.* $\mathcal{L}[f_W(w)]$, é obtida multiplicando n vezes a transformada $\mathcal{L}[f_{W_i}(w_i)]$. Portanto

$$F(s) = \mathcal{L}[f_W(w)] = \frac{e^{\frac{k_1^2 n (s-k_3+k_2 \cos(2\phi))}{4((s-k_3)^2-k_2^2)}} k_4^n}{((s-k_3)^2-(k_2)^2)^{\frac{n}{2}}} \quad (2.22)$$

e a sua transformada inversa é dada por (ver Apêndice B)

$$f_W(w) = k_4^n e^{w k_3} w^{-1+n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^k w^{-i+2j+2k} (\cos(2\phi))^{-i+k} \Gamma(j+k+\frac{n}{2}) k_2^{-i+2j+k} k_1^{2k}}{4^k j!(k-i)!i! \Gamma(2j+2k+n-i) \Gamma(k+\frac{n}{2})} \quad (2.23)$$

Pode ser mostrado que

$$\hat{r}^\alpha = E(R^\alpha) = \frac{n(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)\sigma_X^2}{\eta} \quad (2.24)$$

e

$$E(R^{2\alpha}) = \frac{n(2(1+\eta^2(1+2\kappa_X)+2\kappa_Y)+(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)^2n)\sigma_X^4}{\eta^2} \quad (2.25)$$

Portanto, o inverso da variância normalizada de R^α , é obtido como

$$\frac{E(R^\alpha)}{\text{Var}(R^\alpha)} = \frac{(1+\eta+\eta\kappa_X+\kappa_Y)^2 n}{2(1+\eta^2(1+2\kappa_X)+2\kappa_Y)} \quad (2.26)$$

Note, através de (2.26), que o parâmetro n pode ser totalmente expresso em termos dos parâmetros físicos tais como a média da potência $E(W) = E(R^\alpha)$, variância da potência e os parâmetros κ_X, κ_Y e η . Note também que apesar desses parâmetros serem de natureza contínua, n é de natureza discreta. Portanto é certo que se esses parâmetros forem obtidos via medidas de campo, valores não inteiros de n ocorrerão. Várias razões existem para isso. Uma delas, provavelmente a mais importante, é que embora o modelo proposto aqui seja geral, o que se detém é de fato uma solução aproximada para o conhecido problema de soma de sinais com fases aleatórias [Ric44]. Essas mesmas aproximações se aplicam a todas as outras distribuições conhecidas. A limitação do modelo pode ser feita menos

restritiva definindo $\mu = n$ como sendo a extensão *real* de n ($\mu > 0$). Valores não inteiros do parâmetro μ ocorrem por vários fatores, dentre os quais se destacam

- correlação não nula entre os *clusters*;
- correlação não nula entre as componentes em fase e em quadratura dentro de cada *cluster*;
- não gaussianidade das componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido.

Aplicando agora a transformação inversa $R = P\hat{r} = W^{1/\alpha}$, e portanto

$$f_P(\rho) = \hat{r}^\alpha \alpha \rho^{\alpha-1} f_W(\rho^\alpha \hat{r}^\alpha) \quad (2.27)$$

substituindo as constantes k_1, k_2, k_3, k_4 , dadas em (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21), respectivamente, e realizando as devidas simplificações, a expressão para a FDP de P , dada em (2.1), pode ser obtida.

2.5 A FDP na Forma Integral Usando a Transformada de Fourier Inversa

Usando (2.22), com $s = \mathbf{i}\Omega$, a FDP $f_W(w)$ pode ser obtida pela transformada de Fourier inversa como

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{i}\Omega) e^{\mathbf{i}\Omega w} d\Omega \quad (2.28)$$

A expressão para a FDP de P , dada em (2.2), pode ser obtida substituindo as constantes k_1, k_2, k_3, k_4 e usando a transformação de variáveis dada em (2.27).

2.6 A Distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ e as Outras Distribuições

A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ é geral e inclui as distribuições Rayleigh, Rice, Hoyt, Weibull, Nakagami- q , Nakagami- m , $\eta - \mu$, $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$ e portanto também as distribuições gaussianas

	Rayleigh	Hoyt (Nakagami- q)	Rice	Weibull	Nakagami- m	Rice Generalizada	$\eta - \mu$	$\kappa - \mu$	$\alpha - \mu$
α	2	2	2	α	2	2	2	2	α
η	1	$\frac{1+b}{1-b}$	1	1	1	η	η	1	1
κ_X	0	0	$2k$ 0	0	0	κ_X	0	$\kappa = \frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}$	0
κ_Y	0	0	0 $2k$	0	0	κ_Y	0	$\kappa = \frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}$	0
μ	1	1	1	1	m	1	2μ	μ	μ

Tab. 2.1: A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ e as outras distribuições.

	$\eta - \kappa$ Simétrica	$\eta - \kappa$ Assimétrica
α	2	2
η	η	η
κ_X	κ	κ ou 0
κ_Y	κ	0 ou κ
μ	1	1

Tab. 2.2: A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ e as outras distribuições.

unilateral e exponencial negativa como casos especiais. As Tabs. 2.1 e 2.2 indicam como essas distribuições podem ser obtidas a partir da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$. Nessas tabelas, os símbolos m , b e k são os parâmetros de Nakagami, Hoyt e Rice, respectivamente.

2.7 Casos Limites

A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, torna-se mais simples para alguns casos limites dos parâmetros α , η , κ_X , κ_Y e μ . Estes casos podem ser deduzidos por simplificações de (2.1) ou no caso 4, apresentado a seguir, por integração de (2.2). Os outros casos podem ser obtidos usando a mesma metodologia descrita na Sec. 2.4.

Caso 1 $\eta = 1$ e $\kappa = \frac{\kappa_X + \kappa_Y}{2}$

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha \kappa^{\frac{1-\mu}{2}} (1 + \kappa)^{\frac{1+\mu}{2}} \mu \rho^{\frac{-2+\alpha+\alpha\mu}{2}}}{e^{\mu(\kappa+(1+\kappa)\rho^\alpha)}} I_{\mu-1} \left(2 \sqrt{\kappa(1+\kappa)} \mu \rho^{\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (2.29)$$

em que $I_\nu(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem arbitrária ν (ν real).

Através de (2.29) e usando a Tab. 2.1 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh,

Rice, Weibull, Nakagami- m , $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$.

Caso 2 $\eta = \frac{\kappa_X}{\kappa_Y} \Rightarrow \phi = \pi/4$

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha \mu^\mu (\kappa_Y + \kappa_X (1 + \kappa_X) + \kappa_Y^2)^\mu \rho^{-1+\mu\alpha}}{2^\mu \kappa_X^{\frac{\mu}{2}} \kappa_Y^{\frac{\mu}{2}} e^{\frac{\mu(\kappa_X + \kappa_Y)(2\kappa_X \kappa_Y + (\kappa_X + \kappa_X^2 + \kappa_Y + \kappa_Y^2)\rho^\alpha)}{4\kappa_X \kappa_Y}}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-4j-k} \mu^{2(j+k)} \kappa_X^{-2j}}{\Gamma(1+j) \Gamma(1+k)} \\ \times \frac{\kappa_Y^{-2j} (\kappa_Y + \kappa_X (1 + \kappa_X) + \kappa_Y^2)^{2j+k} \rho^{(2j+k)\alpha} \Gamma(j+k+\frac{\mu}{2}) (\kappa_X - \kappa_Y)^{2j}}{\Gamma(2j+k+\mu) \Gamma(k+\frac{\mu}{2})} \quad (2.30)$$

Usando (2.30) e a Tab. 2.1 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Rice, Weibull, Nakagami- m , $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$.

Caso 3 $\kappa_X = \kappa_Y = 0$

$$f_P(\rho) = \frac{2^{-\frac{1+\mu}{2}} \sqrt{\pi} \alpha (\eta - 1)^{\frac{1-\mu}{2}} (\eta + 1)^{\frac{1+\mu}{2}} \mu^{\frac{1+\mu}{2}} \rho^{\frac{-2+\alpha+\mu}{2}}}{e^{\frac{(1+\eta)^2 \mu \rho^\alpha}{4\eta}} \sqrt{\eta} \Gamma(\frac{\mu}{2})} I_{\frac{\mu-1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu \rho^\alpha}{4\eta} \right) \quad (2.31)$$

Usando (2.31) e a Tab. 2.1 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Hoyt, Weibull, Nakagami- m , $\eta - \mu$ e $\alpha - \mu$.

Caso 4 $\kappa_X = \kappa_Y = 0$ e $\eta = 1$

(usando (2.31) e a aproximação $I_{v-1}(z) \simeq (z/2)^{v-1} / \Gamma(v)$, a qual é válida para pequenos argumentos da função de Bessel)

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha \mu^\mu \rho^{-1+\alpha\mu}}{e^{\mu \rho^\alpha} \Gamma(\mu)} \quad (2.32)$$

Usando (2.32) e a Tab. 2.1 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Weibull, Nakagami- m e $\alpha - \mu$.

Caso 5 $\lim_{\substack{\kappa_X \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \eta \kappa_X = c$ em que $c \geq 0$

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha \mu^{\frac{\mu}{2}} \rho^{-1 + \frac{\mu \alpha}{2}}}{2^{\frac{\mu}{2}} (1 + c + \kappa_Y)^{-\frac{\mu}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{i-j-k} (-1)^{j+k} c^i \mu^{-i+j+k} \rho^{-i \alpha + j \alpha} \Gamma(j + k + \frac{\mu}{2})}{i! j! (k - i)! (1 + c + \kappa_Y)^{i-j} \Gamma(k + \frac{\mu}{2})} \times \frac{(c + \kappa_Y)^{k-i}}{\Gamma(-i + j + \frac{\mu}{2})} \quad (2.33)$$

Usando (2.33) e as Tabs. 2.1 e 2.2 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Rice, Weibull, Nakagami- m , $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$.

Caso 6 $\lim_{\substack{\kappa_X \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \eta \kappa_X = 0$

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha \kappa_Y^{\frac{2-\mu}{4}} (1 + \kappa_Y)^{\frac{2+\mu}{4}} \mu \rho^{-1 + \frac{\alpha(2+\mu)}{4}} I_{\frac{\mu-2}{2}} \sqrt{\kappa_Y (1 + \kappa_Y)} \mu \rho^{\frac{\alpha}{2}}}{2 e^{\frac{\mu(\kappa_Y + (1+\kappa_Y)\rho^\alpha)}{2}}} \quad (2.34)$$

Usando (2.34) e a Tab. 2.1 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Rice, Weibull, Nakagami- m , $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$.

Caso 7 $\lim_{\substack{\kappa_X \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0}} \eta \kappa_X = 0$ e $\kappa_Y = 0$

(usando (2.34) e usando a aproximação $I_{v-1}(z) \simeq (z/2)^{v-1} / \Gamma(v)$, a qual é válida para pequenos argumentos da função de Bessel)

$$f_P(\rho) = \frac{\mu^{\frac{\mu}{2}} \alpha \rho^{\frac{\mu \alpha}{2} - 1}}{2^{\frac{\mu}{2}} e^{\frac{\mu \rho^\alpha}{2}} \Gamma(\frac{\mu}{2})} \quad (2.35)$$

Usando (2.35) e a Tab. 2.1 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Weibull, Nakagami- m e $\alpha - \mu$.

Caso 8 $\mu = 1$

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha z \rho^{\alpha-1}}{2\sqrt{\eta} e^{\frac{2\eta(\kappa_X + \kappa_Y) + (1+\eta)z\rho^\alpha}{4\eta}}} M(u, v, \phi) \quad (2.36)$$

em que $z = (1 + \eta + \eta \kappa_X + \kappa_Y)$, $u = \sqrt{\frac{z}{\eta} (\kappa_X + \eta \kappa_Y)} \rho^{\frac{\alpha}{2}}$ e $v = \frac{(-1+\eta)z\rho^\alpha}{4\eta}$ e a função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ está descrita no Apêndice A.

Usando (2.36) e as Tabs. 2.1 e 2.2 apropriadamente, pode-se obter as distribuições Rayleigh, Hoyt, Rice, Weibull e Rice Generalizada.

2.8 Momentos e Estimadores para Alguns Casos Particulares

Para alguns dos casos particulares, enumerados na seção anterior, é possível encontrar os momentos de forma fechada.

Para os casos das distribuições com três parâmetros, como será visto a seguir, os momentos podem ser obtidos utilizando a função Hipergeométrica confluyente de Kummer, *i.e.* ${}_1F_1(\cdot)$, e a função Hipergeométrica de Gauss, *i.e.* ${}_2F_1(\cdot)$. Infelizmente, através dessas duas funções não é possível obter estimadores com equações polinomiais. Para resolver esse problema, pode-se definir ${}_\beta\mu$ como

$${}_\beta\mu = \frac{E^2(P^\beta)}{E(P^{2\beta}) - E^2(P^\beta)} \quad (2.37)$$

e portanto seguir o procedimento: 1) Escolhe-se três valores arbitrários para β , ou seja, β_1, β_2 e β_3 ; 2) a partir desses valores, estima-se ${}_{\beta_1}\mu, {}_{\beta_2}\mu$ e ${}_{\beta_3}\mu$ usando os dados experimentais; 3) usando estes três valores, obtém-se um sistema de três equações e três incógnitas; 4) através de métodos numéricos, pode-se estimar os valores dos parâmetros.

Para os casos especiais com apenas dois parâmetros (caso 4 e 7), segue-se o mesmo procedimento, no entanto considera-se apenas dois valores para β , ou seja, β_1 e β_2 .

- Caso 1 - Os momentos e estimadores para este caso serão apresentados no Cap. 3.
- Caso 3 - Os momentos e estimadores para este caso serão apresentados no Cap. 3.
- Caso 4

$$E(P^t) = \frac{\mu^{-\frac{t}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{t}{\alpha} + \mu\right)}{\Gamma(\mu)} \quad (2.38)$$

$$\beta\mu = \left(\frac{\Gamma(\mu) \Gamma\left(\frac{2\beta}{\alpha} + \mu\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha} + \mu\right)^2} - 1 \right)^{-1} \quad (2.39)$$

- Caso 6

$$E(P^t) = \frac{2^{-1+\frac{t}{\alpha}} \mu^{1-\frac{t}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{t}{\alpha} + \frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{t}{\alpha} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\kappa\mu}{2}\right)}{e^{\frac{\kappa\mu}{2}} (1+\kappa)^{\frac{t}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)} \quad (2.40)$$

$$\beta\mu = \left(\frac{2 e^{\frac{\kappa\mu}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\mu}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\kappa\mu}{2}\right)}{\mu \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\mu}{2}\right)^2 {}_1F_1\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\kappa\mu}{2}\right)^2} - 1 \right)^{-1} \quad (2.41)$$

- Caso 7

$$E(P^t) = \frac{2^{\frac{2t}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{2t}{\alpha} + \frac{\mu}{2}\right)}{\mu^{\frac{2t}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \quad (2.42)$$

$$\beta\mu = \left(\frac{\mu^{\frac{2\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{4^{\frac{\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\mu}{2}\right)} - 1 \right)^{-1} \quad (2.43)$$

2.9 Equipamento para Medição e Validação das Distribuições

Um conjunto de medidas de campo foi realizado na Unicamp para investigar as estatísticas de curto prazo do sinal desvanecido. O equipamento de medição consiste de uma antena omnidirecional verticalmente polarizada, um amplificador de baixo ruído, um analisador de espectro, um equipamento de aquisição de dados, um *notebook* e um transdutor de distância [TMY03]. A Fig. 2.2 ilustra este equipamento. A transmissão consistiu de um tom em 1.8 GHz com o transmissor e o receptor colocados dentro dos prédios (propagação *indoor*) da engenharia elétrica da Unicamp. O *span* do analisador de espectro foi configurado igual a zero e centrado na frequência desejada e sua saída de vídeo foi usada como entrada do sistema de aquisição de dados. Os dados foram tratados utilizando

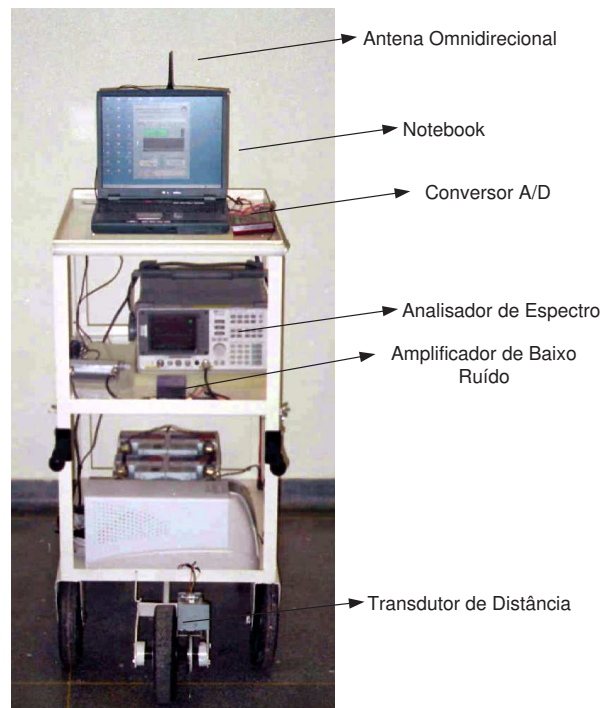


Fig. 2.2: Carrinho de medição.

uma metodologia largamente reportada na literatura [AE00]. Nessa metodologia, a média local é estimada através do método da média móvel e o número de dados utilizados para calcular a média em cada ponto é o mesmo.

Estas medidas são utilizadas para validar alguns dos casos particulares da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, como será visto nos Caps. 3 e 4.

2.10 Conclusões

Este capítulo apresentou uma distribuição amplamente geral nas formas de série e integral. Os resultados foram obtidos para casos limites em que a FDP se reduz à formas mais simples. A distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$ foi particularizada para vários casos especiais, mostrando que todas as distribuições conhecidas tais como Rayleigh, Hoyt, Rice, Weibull, Nakagami- m , Rice Generalizada, $\eta - \mu$, $\kappa - \mu$ e $\alpha - \mu$ podem ser obtidas como casos especiais da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$. Além disso,

momentos e estimadores foram calculados de forma fechada para alguns desses casos particulares.

2.11 Apêndice A - Função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$

A função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é definida como

$$M(u, v, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{u \cos(\theta - \phi) + v \cos(2\theta)} d\theta \quad (2.44)$$

ou pode ser representada em forma de série como

$$M(u, v, \phi) = I_0(u) I_0(v) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k I_k(-v) I_{2k}(u) \cos(2k\phi) \quad (2.45)$$

A função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ apresenta algumas propriedades interessantes relacionadas à função de Bessel

$$M(u, 0, \phi) = I_0(u) \quad (2.46)$$

$$M(0, v, \phi) = I_0(v) \quad (2.47)$$

que são obtidas por meio de (2.44) ou (2.45).

Vale salientar que a forma integral da função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ dada em (2.44) é computacionalmente mais eficiente e produz resultados mais exatos do que o seu equivalente em forma de série dada por (2.45).

2.11.1 A Transformada de Laplace da Função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$

A transformada de Laplace da função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ em relação à variável t , quando $u = a\sqrt{t}$ e $v = bt$ (a e b constantes arbitrárias), é dada por

$$\mathcal{L} [M(a\sqrt{t}, bt, \phi)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a\sqrt{t} \cos(\theta - \phi) + bt \cos(2\theta)} d\theta \right) dt \quad (2.48)$$

fazendo uma mudança de variável $t = z^2$ ($dt = 2z dz$), obtém-se

$$\mathcal{L} \left[M(a\sqrt{t}, bt, \phi) \right] = \int_0^\infty 2ze^{-sz^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{az \cos(\theta-\phi) + bz^2 \cos(2\theta)} d\theta \right) dz \quad (2.49)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} ze^{az \cos(\theta-\phi) + bz^2 \cos(2\theta) - sz^2} d\theta dz \quad (2.50)$$

Usando a identidade $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, obtém-se

$$\mathcal{L} \left[M(a\sqrt{t}, bt, \phi) \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{az(\cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi)) + bz^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) - sz^2} z d\theta dz \quad (2.51)$$

Fazendo outra mudança de variáveis $x = z \cos(\theta)$ e $y = z \sin(\theta)$, o que implica que $z d\theta dz = dx dy$, tem-se que

$$\mathcal{L} \left[M(a\sqrt{t}, bt, \phi) \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{a(x \cos(\phi) + y \sin(\phi)) + bx^2 - by^2 - s(x^2 + y^2)} dx dy \quad (2.52)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ax \cos(\phi) + x^2(b-s)} dx \int_{-\infty}^\infty e^{ay \sin(\phi) - y^2(b+s)} dy \quad (2.53)$$

$$= \frac{e^{\frac{a^2 \cos^2(\phi)}{4(s-b)}}}{\sqrt{s-b}} \cdot \frac{e^{\frac{a^2 \sin^2(\phi)}{4(s+b)}}}{\sqrt{s+b}} \quad (2.54)$$

$$= \frac{e^{\frac{a^2 (s+b \cos(2\phi))}{4(s^2 - b^2)}}}{\sqrt{s^2 - b^2}} \quad (2.55)$$

2.12 Apêndice B

Este apêndice mostra como calcular a transformada de Laplace inversa de (2.22). Usando a série exponencial dada por $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$ em (2.22), $\mathcal{L} [f_W(w)]$ pode ser encontrada como

$$\mathcal{L} [f_W(w)] = k_4^n \sum_{k=0}^\infty \frac{(n k_1^2 (s - k_3 + k_2 \cos(2\phi)))^k}{k! 4^k ((s - k_3)^2 - (k_2)^2)^{\frac{n}{2} + k}} \quad (2.56)$$

usando agora a série binomial $(a + b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$ em (2.56)

$$\mathcal{L}[f_W(w)] = k_4^n \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(n k_1^2)^k (k_2 \cos(2\phi))^{k-i}}{k! 4^k} \frac{(s - k_3)^i}{((s - k_3)^2 - (k_2)^2)^{\frac{n}{2}+k}} \quad (2.57)$$

Usando a transformada de Laplace da função $\frac{1}{(s^2 - k_2^2)^k} \leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma[k]} \left(\frac{w}{2k_2}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(k_2 w)$ (o símbolo \leftrightarrow indica o par: transformada de Laplace e sua transformada inversa), a propriedade da derivada da transformada de Laplace $s^i G(s) \leftrightarrow \frac{d^i g(w)}{dw^i}$ e usando a propriedade do deslocamento $G(s - k_3) \leftrightarrow e^{k_3 w} g(w)$, é possível escrever

$$\frac{(s - k_3)^i}{((s - k_3)^2 - k_2^2)^{\frac{n}{2}+k}} \leftrightarrow e^{k_3 w} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left[\frac{n}{2} + k\right]} \frac{d^i \left(\left(\frac{w}{2k_2}\right)^{\frac{n}{2}+k-\frac{1}{2}} I_{\frac{n}{2}+k-\frac{1}{2}}(k_2 w) \right)}{dw^i} \quad (2.58)$$

Substituindo o resultado de (2.58) em (2.57),

$$f_W(w) = \sqrt{\pi} k_4^n e^{k_3 w} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{(n k_1^2)^k (k_2 \cos(2\phi))^{k-i}}{k! 4^k \Gamma\left[\frac{n}{2} + k\right]} \frac{d^i \left(\left(\frac{w}{2k_2}\right)^{\frac{n}{2}+k-\frac{1}{2}} I_{\frac{n}{2}+k-\frac{1}{2}}(k_2 w) \right)}{dw^i} \quad (2.59)$$

Usando agora a expansão da função de Bessel $I_v(\cdot)$

$$I_v(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma[j + v + 1] j!} \left(\frac{w}{2}\right)^{2j+v} \quad (2.60)$$

e a propriedade da derivada $\frac{d^i}{dw^i} (w^b) = \frac{w^{b-i} \Gamma[1+b]}{\Gamma[1+b-i]}$, o seguinte resultado é obtido

$$f_W(w) = 2^{1-n} \sqrt{\pi} k_4^n e^{k_3 w} w^{-1+n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^k k_1^{2k} k_2^{-i+2j+k} (\cos(2\phi))^{k-i} 2^{-2j-4k} w^{2j+2k-i}}{(k-i)! i! j! \Gamma\left[\frac{n}{2} + k\right] \Gamma\left[\frac{1}{2} + j + k + \frac{n}{2}\right]} \times \frac{\Gamma[2j+2k+n]}{\Gamma[2j+2k+n-i]} \quad (2.61)$$

Usando a identidade $\frac{2^{\frac{1}{2}-x} \Gamma[x]}{\Gamma\left[\frac{x+1}{2}\right]} = \frac{\Gamma\left[\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}}$, (2.61) pode ser simplificada para obter (2.23).

Capítulo 3

As Distribuições $\alpha - \eta - \mu$ e $\alpha - \kappa - \mu$

3.1 Introdução

Neste capítulo, as distribuições $\alpha - \eta - \mu$ e $\alpha - \kappa - \mu$, casos particulares da distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, são apresentadas. O objetivo é aprofundar o conhecimento destas distribuições, mostrando maneiras práticas de aplicá-las para ajustá-las às medidas de campo. É importante ressaltar que, embora essas duas distribuições apresentem razoável número de parâmetros, o que lhes confere alta flexibilidade, elas ainda são matematicamente tratáveis.

3.2 A Distribuição $\alpha - \eta - \mu$

A FDP da envoltória normalizada P , $F_P(\rho)$ da distribuição $\alpha - \eta - \mu$ já foi apresentada em (2.31) e será repetida aqui por conveniência¹

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha (\eta - 1)^{\frac{1}{2} - \mu} (\eta + 1)^{\frac{1}{2} + \mu} \sqrt{\pi} \mu^{\frac{1}{2} + \mu} \rho^{\alpha(\frac{1}{2} + \mu) - 1}}{e^{\frac{(1+\eta)^2 \mu \rho^\alpha}{2\eta}} \sqrt{\eta} \Gamma(\mu)} I_{\mu - \frac{1}{2}} \left(\frac{(\eta^2 - 1) \mu \rho^\alpha}{2\eta} \right) \quad (3.1)$$

¹Para compatibilizar os resultados da distribuição $\eta - \mu$ [Yac00] com aqueles fornecidos pela $\alpha - \eta - \mu$, utilizou-se a definição $\mu_{\alpha - \eta - \kappa - \mu} = 2\mu_{\alpha - \eta - \mu} = 2\mu$.

O momento de ordem t $E[P^t]$ de P pode ser obtido como

$$E(P^t) = \frac{2^{\frac{t}{\alpha}+2\mu} \eta^{\frac{t}{\alpha}+\mu} (1+\eta)^{-2(\frac{t}{\alpha}+\mu)} \Gamma(\frac{t}{\alpha}+2\mu)}{\mu^{\frac{t}{\alpha}} \Gamma(2\mu)} {}_2F_1\left(\frac{t}{2\alpha} + \mu, \frac{t+\alpha}{2\alpha} + \mu, \frac{1}{2} + \mu, \frac{(-1+\eta)^2}{(1+\eta)^2}\right) \quad (3.2)$$

em que ${}_2F_1$ é a função Hipergeométrica de Gauss[GR65].

A FCP pode ser obtida na forma usual por meio da integral da FDP, na forma de série ou utilizando a função $Y_\mu(\cdot, \cdot)$ apresentada em [Yac06]

$$F_P(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{1-2j} \sqrt{\pi} (\eta-1)^{2j} \eta^\mu (\eta+1)^{-2j-2\mu} \Gamma(2(j+\mu), \frac{\rho^\alpha (1+\eta)^2 \mu}{2\eta})}{j! \Gamma(\mu) \Gamma(\frac{1}{2} + j + \mu)} \quad (3.3)$$

$$= 1 - Y_\mu\left(\eta, \frac{(1+\eta)}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \rho^{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (3.4)$$

em que $\Gamma(a, z) = \int_0^z t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função Gamma incompleta e a função $Y_\mu(\cdot, \cdot)$ é dada por [Yac06]

$$Y_\mu(a, b) = \frac{2^{\frac{3}{2}+\mu} (1-a)^{\frac{1}{2}-\mu} a^\mu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu) (1+a)^{\frac{1}{2}+\mu}} \int_b^\infty x^{2\mu} e^{-x^2} I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-a}{1+a} x^2\right) dx \quad (3.5)$$

3.2.1 Estimadores para os Parâmetros α , η e μ

Os estimadores para os parâmetros da distribuição $\alpha - \eta - \mu$ podem ser obtidos a partir do inverso da variância generalizada, $\beta\mu$, definida como

$$\beta\mu = \frac{E^2(P^\beta)}{E(P^{2\beta}) - E^2(P^\beta)} \quad (3.6)$$

A partir deste parâmetro, utiliza-se o seguinte procedimento: 1) Escolhem-se três valores arbitrários para β , ou seja, β_1 , β_2 e β_3 ; 2) a partir destes valores, estima-se $\beta_1\mu$, $\beta_2\mu$ e $\beta_3\mu$ usando os dados experimentais; 3) com estes três valores, obtém-se um sistema de três equações e três incógnitas; 4) através de métodos numéricos, pode-se estimar os valores dos parâmetros.

	Rayleigh	Hoyt	$\alpha - \mu$	$\eta - \mu$	gaussiana unilateral	Weibull	Nakagami- m
α	2	2	α	2	2	α	2
η	1	$\frac{1-b}{1+b}$	1	η	0 ou ∞	1	1 0
μ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\mu_{\alpha-\mu}}{2}$	μ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{m}{2}$ m

Tab. 3.1: A distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e as outras distribuições.

Para a distribuição $\alpha - \eta - \mu$, este estimador é dado por

$$\beta\mu = \left(-1 + \frac{(1+\eta)^{2\mu} \Gamma(2\mu) \Gamma\left(\frac{2\beta}{\alpha} + 2\mu\right) {}_2F_1\left(\frac{\beta}{\alpha} + \mu, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\beta}{\alpha}\right) + \mu, \frac{1}{2} + \mu, \frac{(-1+\eta)^2}{(1+\eta)^2}\right)}{2^{2\mu} \eta^\mu \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha} + 2\mu\right)^2 {}_2F_1\left(\frac{\beta}{2\alpha} + \mu, \frac{\alpha+\beta}{2\alpha} + \mu, \frac{1}{2} + \mu, \frac{(-1+\eta)^2}{(1+\eta)^2}\right)^2} \right)^{-1} \quad (3.7)$$

Embora exato, este método é bastante instável no que diz respeito às raízes. Dessa maneira, para alguns dos casos, é possível obter mais de uma solução para os parâmetros correspondentes.

3.2.2 A Distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e as Outras Distribuições

A distribuição $\alpha - \eta - \mu$ é geral e inclui as seguintes distribuições: Rayleigh, Hoyt (Nakagami- q), $\alpha - \mu$, $\eta - \mu$, gaussiana unilateral, Weibull e Nakagami- m , como casos especiais. A Tab. 3.1 indica valores para se determinar essas relações.

3.3 A Distribuição $\alpha - \kappa - \mu$

A FDP da distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ já foi apresentada em (2.29) e é dada por

$$f_P(\rho) = \frac{\alpha \kappa^{\frac{1-\mu}{2}} (1+\kappa)^{\frac{1+\mu}{2}} \mu \rho^{\frac{\alpha(1+\mu)}{2}-1}}{e^{\mu(\kappa+\rho^\alpha+\kappa\rho^\alpha)}} I_{\mu-1} \left(2 \sqrt{\kappa(1+\kappa)} \mu \rho^{\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (3.8)$$

O momento de ordem t $E[P^t]$ de P pode ser escrito como

$$E(P^t) = \frac{\Gamma\left(\frac{t}{\alpha} + \mu\right) {}_1F_1\left(\frac{t}{\alpha} + \mu, \mu, \kappa\mu\right)}{e^{\kappa\mu} (1+\kappa)^{\frac{t}{\alpha}} \mu^{\frac{t}{\alpha}} \Gamma(\mu)} \quad (3.9)$$

	Rayleigh	Rice	$\alpha - \mu$	$\kappa - \mu$	gaussiana unilateral	Weibull	Nakagami- m
α	2	2	α	2	2	α	2
κ	0	k	0	κ	0	0	0
μ	1	1	μ	μ	$\frac{1}{2}$	1	m

Tab. 3.2: A distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ e as outras distribuições.

em que ${}_1F_1$ é a função Hipergeométrica confluyente de Kummer. Da mesma forma, a FCP pode ser escrita na forma de integral ou usando a função de Marcum [Pro95, Eq. 2-1-122], $Q_\nu(\cdot, \cdot)$. Sendo assim, tem-se que a FCP $F_P(\rho)$ pode ser escrita como

$$F_P(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\kappa^j \mu^j \Gamma(j + \mu, (1 + \kappa) \mu \rho^\alpha)}{j! e^{\kappa \mu} \Gamma(j + \mu)} \quad (3.10)$$

$$= 1 - Q_\mu\left(\sqrt{2\mu\kappa}, \rho^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2\mu(1 + \kappa)}\right) \quad (3.11)$$

em que

$$Q_\nu(a, b) = \frac{1}{a^{\nu-1}} \int_b^\infty x^\nu e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_{\nu-1}(ax) dx \quad (3.12)$$

3.3.1 Estimadores para os Parâmetros α , κ e μ

Calculando o parâmetro dado em (3.6) para a distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ obtém-se

$$\beta\mu = \left(\frac{e^{\kappa\mu} \Gamma\left(\frac{2\beta}{\alpha} + \mu\right) {}_1F_1\left(\frac{2\beta}{\alpha} + \mu, \mu, \kappa\mu\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha} + \mu\right)^2 {}_1F_1\left(\frac{\beta}{\alpha} + \mu, \mu, \kappa\mu\right)^2} - 1 \right)^{-1} \quad (3.13)$$

Os valores para os parâmetros α , κ e μ podem ser obtidos seguindo a mesma metodologia apresentada na Sec. 3.2.1.

3.3.2 A Distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ e as Outras Distribuições

A distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ inclui as seguintes distribuições: Rayleigh, Rice, $\alpha - \mu$, $\kappa - \mu$, gaussiana unilateral, Weibull e Nakagami- m , como casos especiais. A Tab. 3.2 indica essas relações.

3.4 A Distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e a Distribuição $\alpha - \kappa - \mu$

Uma característica importante e peculiar guardam entre si as distribuições $\alpha - \mu$, $\alpha - \kappa - \mu$ e $\alpha - \eta - \mu$. Em um plano, usando escala logarítmica, dado um determinado valor para os parâmetros α e μ , as curvas pertencentes à distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ estarão todas acima da curva da distribuição $\alpha - \mu$ para κ variando de 0 a ∞ . Por outro lado, as curvas pertencentes à distribuição $\alpha - \eta - \mu$ estarão todas abaixo da curva da distribuição $\alpha - \mu$ para η variando de 0 a 1 (ou de 1 a ∞). Em resumo, a distribuição $\alpha - \mu$ pode ser vista como uma distribuição média que divide o plano em duas regiões: o plano superior, descrito pela distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ e o plano inferior, descrito pela distribuição $\alpha - \eta - \mu$. Na Fig. 3.1, esse comportamento é ilustrado. Essa é uma característica interessante que pode ser utilizada para decidir qual distribuição será empregada para ajustar as medidas de campo. Para um determinado conjunto de dados, os parâmetros α e μ são calculados como descrito em [Yac02], e então os dados experimentais são traçados neste plano. No caso de os pontos estarem acima da curva da distribuição $\alpha - \mu$, então a melhor distribuição para ajustar os pontos será a distribuição $\alpha - \kappa - \mu$; caso contrário, a melhor distribuição será a distribuição $\alpha - \eta - \mu$.

Outra característica interessante é que para um valor fixo de $\alpha\mu$ e variando α , a curva da distribuição desloca-se para baixo ou para cima de acordo com o parâmetro α . Este comportamento é ilustrado na Fig. 3.2 para $\alpha\mu = 1.25$.

3.5 Validação das Distribuições Com Medidas de Campo

A partir de medidas, como descrito na Sec. 2.9, pôde-se observar que a distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ se aplica bem nos casos em que a distribuição Rice também se aplica ($m \geq 1$). Da mesma forma, também encontrou-se aplicação da $\alpha - \eta - \mu$ (menos frequente) nos casos em que a distribuição Hoyt era aplicável ($0 \leq m \leq 1$). Mas o mais importante foram os casos em que estas duas (Rice e Hoyt) distribuições apresentaram um ajuste moderado aos dados de campo enquanto que a $\alpha - \kappa - \mu$ e a $\alpha - \eta - \mu$ apresentaram um excelente ajuste. A Fig. 3.3 mostra algumas curvas ilustrando o ajuste

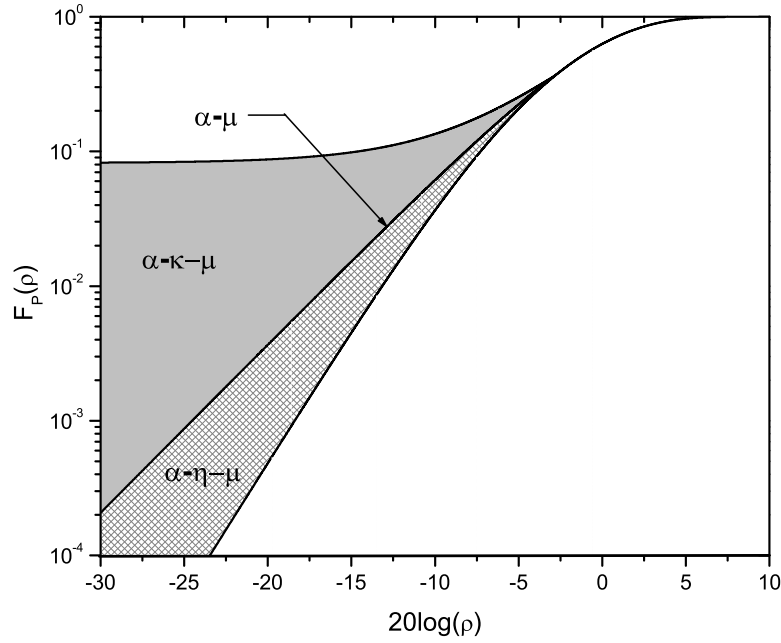


Fig. 3.1: As distribuições $\alpha - \mu$, $\alpha - \eta - \mu$ e a $\alpha - \kappa - \mu$.

obtido pela distribuição $\alpha - \eta - \mu$ e também as distribuições Rayleigh, Nakagami, Weibull e Hoyt, para fins de comparação. Da mesma forma, a Fig. 3.4 mostra algumas curvas ilustrando o ajuste obtido pela distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ e também as distribuições Rayleigh, Nakagami, Weibull e Rice, para fins de comparação.

Para ilustrar esse ajuste, foram calculadas medidas do erro médio² entre os dados experimentais e a distribuição escolhida para ajustar os dados. A Tab. 3.3 mostra esses valores para as curvas nas Figs. 3.3 e 3.4. Em todos os casos, os erros para as distribuições $\alpha - \eta - \mu$ e $\alpha - \kappa - \mu$ são menores do que os erros para as outras distribuições.

3.6 Conclusões

Este capítulo apresentou e caracterizou duas novas distribuições, as distribuições $\alpha - \eta - \mu$ e a $\alpha - \kappa - \mu$, casos particulares da $\alpha - \eta - \kappa - \mu$. Estas incluem, como casos particulares, as distribuições

²O erro médio entre os dados experimentais x_i e os valores teóricos y_i (Rice, Rayleigh, Weibull, Nakagami, $\alpha - \eta - \mu$ ou $\alpha - \kappa - \mu$) é definido como $\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i - x_i|}{x_i}$, em que N é o número de pontos.

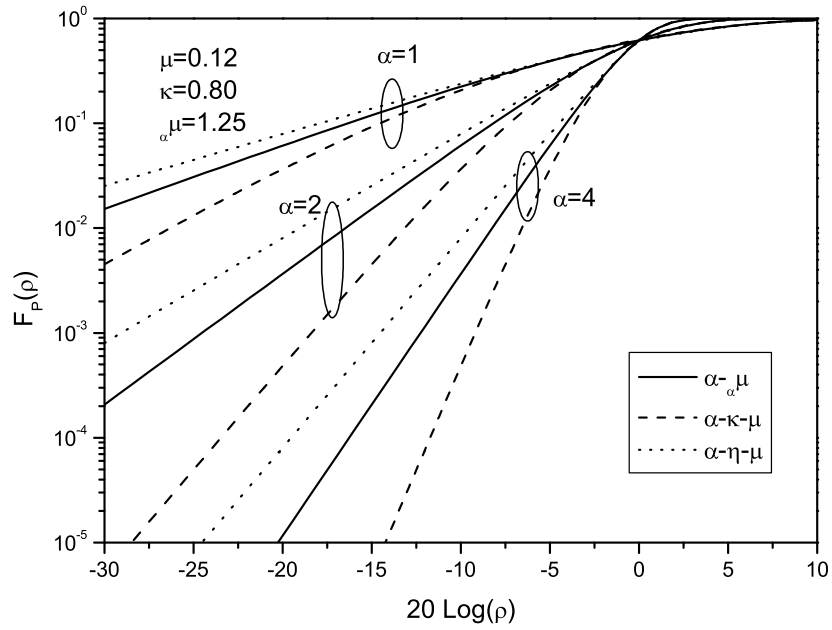


Fig. 3.2: As distribuições $\alpha - \mu$, $\alpha - \eta - \mu$ e $\alpha - \kappa - \mu$.

Distribuição	ϵ (Fig. 3.3)	ϵ (Fig. 3.4)
$\alpha - \eta - \mu$	0.299	—
$\alpha - \kappa - \mu$	—	0.195
Rayleigh	1.280	3.718
Weibull	0.659	0.523
Nakagami	1.731	0.744
Rice	—	0.574
Hoyt	1.32	—

Tab. 3.3: Erro médio para as Figs. 3.3 e 3.4.

$\alpha - \mu$, $\kappa - \mu$, $\eta - \mu$, Nakagami- m , Nakagami- q , Weibull, Hoyt, Rice, Rayleigh e gaussiana unilateral.

Além disso, os estimadores propostos foram validados por meio de medidas experimentais.

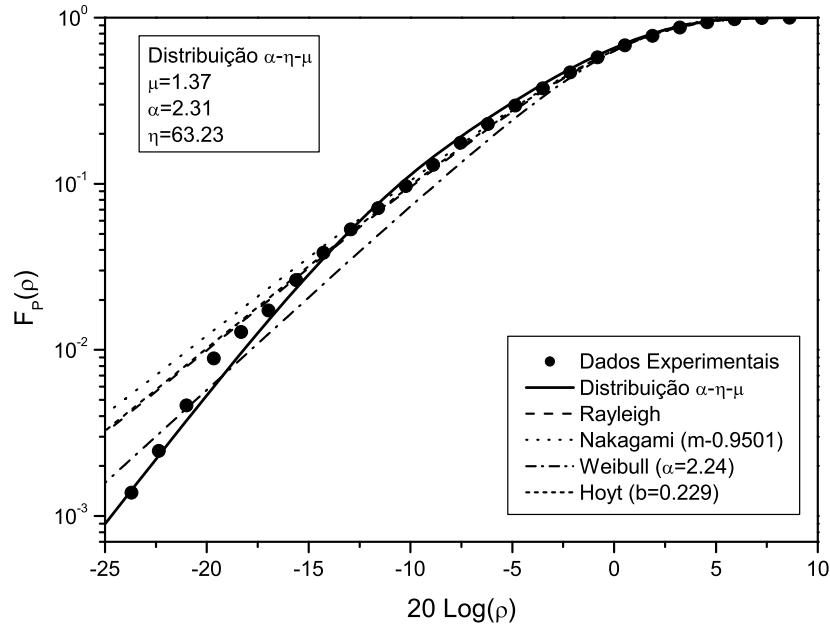


Fig. 3.3: A FCP da distribuição $\alpha - \eta - \mu$ ajustada às medidas *indoor* realizadas em 1.8 GHz na Unicamp.

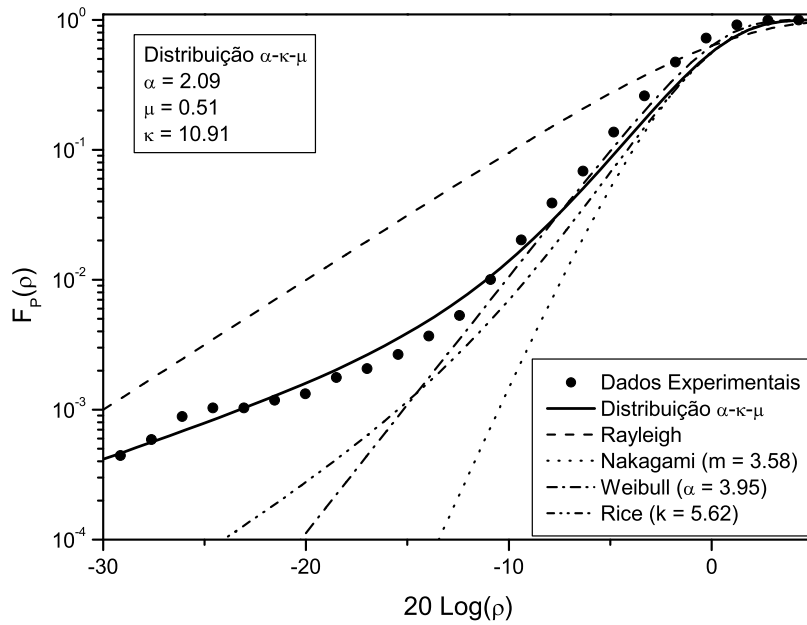


Fig. 3.4: A FCP da distribuição $\alpha - \kappa - \mu$ ajustada às medidas *indoor* realizadas em 1.8 GHz na Unicamp.

Capítulo 4

As Distribuições $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica

Este capítulo especializa e coloca em forma de parâmetros o resultado geral já apresentado em [Bec67] com o objetivo de introduzir, caracterizar e investigar a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e a $\eta - \kappa$ Assimétrica. O trabalho propõe estimadores para η e κ e usa medidas de campo para validar a utilidade dessas distribuições. As distribuições $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica incluem, como casos especiais, as distribuições Rayleigh, Rice, Hoyt, Nakagami- q e gaussiana unilateral. O fato dessas distribuições possuírem mais de um parâmetro de ajuste as torna mais flexíveis que as distribuições comuns. Em situações onde essas distribuições comuns oferecem bons resultados a $\eta - \kappa$ Simétrica e a $\eta - \kappa$ Assimétrica oferecem resultados ainda melhores. Além disso constatou-se, utilizando dados experimentais, que existem várias situações nas quais essas distribuições comuns não se ajustam bem aos dados medidos. Este comportamento não ocorre com a $\eta - \kappa$ Simétrica e a $\eta - \kappa$ Assimétrica. A diferença em relação às outras, observada nessas duas novas distribuições, é a sua característica não monomodal. Para ilustrar este comportamento vários exemplos serão dados ao longo do capítulo. Embora as distribuições $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica possam ser obtidas diretamente da $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, as expressões resultantes não aparecem de forma elegante. Por questões didáticas e de simplicidade e para se chegar a expressões mais concisas, além de melhor justificar os

fenômenos físicos envolvidos, optou-se por deduzir as expressões desde o início. Além disso, os momentos de ordem par podem ser expressos através de polinômios com as novas expressões.

4.1 A Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica

No artigo clássico de Nakagami [Nak60], ele parte de um modelo geral e realiza uma série de simplificações, consideradas "boas o suficiente para problemas de engenharia"[Nak60] para chegar à conhecida distribuição Nakagami- m . Nesse modelo geral, *i.e.*, sem considerar as simplificações mencionadas, pressupõe-se que a intensidade do sinal em qualquer ponto observado é a soma de fasores aleatórios independentes, condicionados ao fato de que as componentes em fase e em quadratura desta soma sejam distribuídas de acordo com a distribuição normal, *i.e.*, seus termos satisfazem as condições do teorema central do limite. Essas componentes, portanto, são variáveis gaussianas *dependentes* com médias e variâncias distintas. Escolhendo os eixos dos termos em fase e em quadratura paralelos aos eixos da elipse equiprovável (*i.e.*, realizando uma mudança conveniente de coordenadas), a covariância entre os termos gaussianos desaparece. A distribuição pode então ser escrita em termos das variáveis gaussianas *independentes* com médias não nulas e variâncias distintas. A obtenção da distribuição na sua forma geral é apresentada em [Bec67], em que esta aparece em termos da média e variância das componentes gaussianas.

Parece que pouca atenção tem sido dada a essa distribuição, talvez por conta de sua forma intrincada, pela falta de estimadores, ou pela falta de uma caracterização geral. Neste trabalho, esta distribuição geral para o desvanecimento é parametrizada em termos do valor quadrático médio da envoltória e de três razões de potências:

- 1) onda espalhada em fase (σ_X^2) e onda espalhada em quadratura (σ_Y^2), dada por (2.10).
- 2) componente dominante em fase (μ_X^2) e onda espalhada em fase (σ_X^2), dada por (2.11);
- 3) componente dominante em quadratura (μ_Y^2) e onda espalhada em quadratura (σ_Y^2), dada por (2.12).

Escolhendo o caso específico, mas ainda bastante geral, formas mais simples do caso geral podem

ser obtidas. Em particular, para razões idênticas das potências dadas em 2) e em 3) a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica é obtida. Para uma das razões dadas em 2) ou 3) nula, a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica é obtida.

A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica é uma distribuição geral que pode ser usada para representar as variações de curto prazo do sinal desvanecido. Considere um sinal com envoltória R , fase Θ e envoltória normalizada $P = R/\hat{r}$, no qual $\hat{r} = \sqrt{E(R^2)}$ é o valor eficaz de R . A distribuição conjunta da $\eta - \kappa$ Simétrica $f_{P,\Theta}(\rho, \theta)$ é dada por

$$f_{P,\Theta}(\rho, \theta) = \frac{\sqrt{h}(1+\kappa)}{\pi \exp(\kappa)} \rho \exp \left(- (1+\kappa) (h + H \cos(2\theta)) \rho^2 + 2\sqrt{h\kappa(1+\kappa)} \cos(\theta - \phi) \rho \right) \quad (4.1)$$

com

$$h = \frac{2 + \eta + \eta^{-1}}{4} \quad (4.2)$$

$$H = \frac{\eta^{-1} - \eta}{4} \quad (4.3)$$

$$\phi = \arctan(\sqrt{\eta}) \quad (4.4)$$

em que $\kappa \geq 0$ e $\eta \geq 0$. Usando as definições dadas na Sec. 2.4 para η (2.10), κ_X (2.11) e κ_Y (2.12) e admitindo que $\kappa = \kappa_X = \kappa_Y$, a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica é obtida. Tal condição leva a uma simetria em relação ao parâmetro $\eta = 1$, *i.e.*, a mesma distribuição é obtida considerando $0 \leq \eta \leq 1$ ou $1 \leq \eta \leq \infty$. Portanto, é necessário estudar o comportamento de distribuição em apenas uma das regiões. A FDP da envoltória normalizada é obtida na seguinte forma

$$f_P(\rho) = \frac{2\sqrt{h}(1+\kappa)}{\exp(\kappa)} \rho \exp \left(- (1+\kappa) h \rho^2 \right) M(u, v, \phi) \quad (4.5)$$

em que a função $M(., ., .)$ é dada em (2.15) com

$$u = 2\sqrt{h\kappa(1+\kappa)}\rho \quad (4.6)$$

$$v = -H(1 + \kappa)\rho^2 \quad (4.7)$$

e ϕ dada em (4.4).

A expressão em forma fechada para a distribuição da fase é obtida aqui como

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\sqrt{h(h + H \cos(2\theta))} + e^{\frac{h\kappa \cos^2(\theta-\phi)}{h+H \cos(2\theta)}} h \sqrt{\kappa\pi} \cos(\theta - \phi) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{h\kappa} \cos(\theta-\phi)}{\sqrt{h+H \cos(2\theta)}}\right)\right)}{2e^{\kappa} \pi (h + H \cos(2\theta))^{\frac{3}{2}}} \quad (4.8)$$

em que $\operatorname{erf}(\cdot)$ é a função erro. O n -ésimo momento $E[P^n]$ de P pode ser obtido na forma de integral usual ou na forma de série dado por

$$E[P^n] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2j+k} 2^{-2j} H^{2j+k} \kappa^k (1 + \kappa)^{2j+2k} \Gamma(1 + 2j + 2k + \frac{n}{2}) \cos(2\phi)^k}{\Gamma(1 + 2k) \exp(\kappa) h^{-k+\frac{1}{2}} \Gamma(1 + j) \Gamma(1 + j + k) (h(1 + \kappa))^{2j+2k+\frac{n}{2}}} \times {}_2F_1\left(-2j - 2k; -k; -2j - 2k - \frac{n}{2}; \frac{h \sec(2\phi)}{H}\right) \quad (4.9)$$

em que ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica de Gauss e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma e $E[R^n] = \hat{r}^n E[P^n]$. Da mesma forma a FCP pode ser obtida na forma integral usual ou em série dada por

$$F_P(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{2^{2(1-i+k)} h^{-\frac{1}{2}+i-2j-k} \kappa^k \Gamma[\frac{1}{2} + j + k]}{\cos(2\phi)^{k-i} H^{i-2j-k} \exp(\kappa) \sqrt{\pi} \Gamma[1 + j] \Gamma[1 + 2k] \Gamma[1 - i + 2j + 2k]} \times (\Gamma[1 - i + 2j + 2k] - \Gamma[1 - i + 2j + 2k, h\rho^2(1 + \kappa)]) \quad (4.10)$$

em que $\Gamma[a, z] = \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ é a função Gamma incompleta.

A Fig. 4.1 mostra várias formas da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica $f_P(\rho)$ para $\eta = 0$ e variando κ . Note que para $\kappa \rightarrow 0$ a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica tende para a distribuição gaussiana unilateral, como era esperado. Quando κ aumenta, significando que a componente determinística do sinal está aumentando, a forma da FDP tende para um sino e quando $\kappa \rightarrow \infty$ tende para um impulso em $\rho = 1$.

A Fig. 4.2 mostra várias formas da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica $f_P(\rho)$ para $\eta = 0.5$ e variando κ . Neste caso quando $\kappa = 0$ a FDP coincide com a densidade de Hoyt (ou Nakagami- q). Como no caso

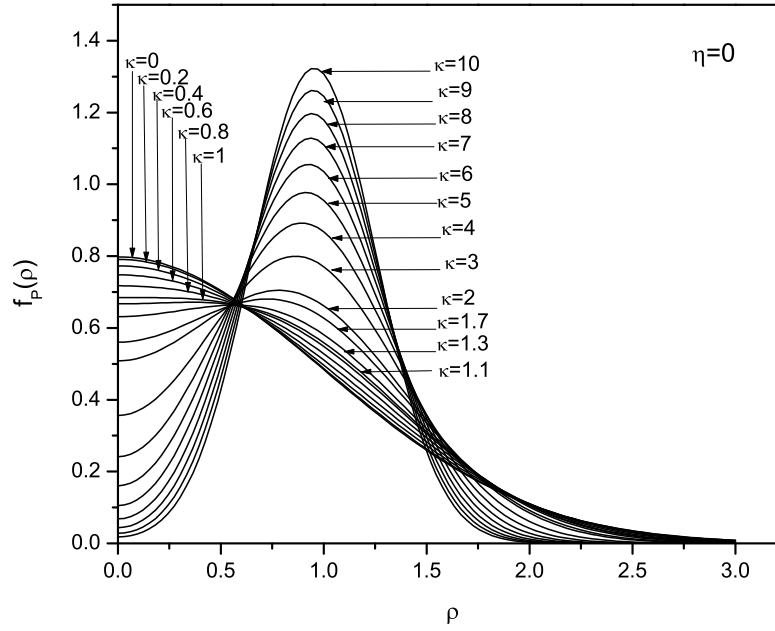


Fig. 4.1: A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para um η fixo ($\eta = 0$).

anterior quando $\kappa \rightarrow \infty$ a FDP tende a um impulso em $\rho = 1$.

A Fig. 4.3 mostra várias formas da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica $f_P(\rho)$ para $\kappa = 1$ e variando η . Neste caso quando $\eta = 1$ a FDP coincide com a distribuição Rice.

4.1.1 Obtenção da Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica

Sejam X e Y processos estacionários independentes gaussianos das componentes em fase e em quadratura, respectivamente. Assuma que $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ e $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$. A distribuição conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\exp\left(-\frac{\sigma_Y^2(x-\mu_X)^2 + \sigma_X^2(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right)}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \quad (4.11)$$

A envoltória R pode ser escrita em termos das componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido como

$$R^2 = X^2 + Y^2 \quad (4.12)$$

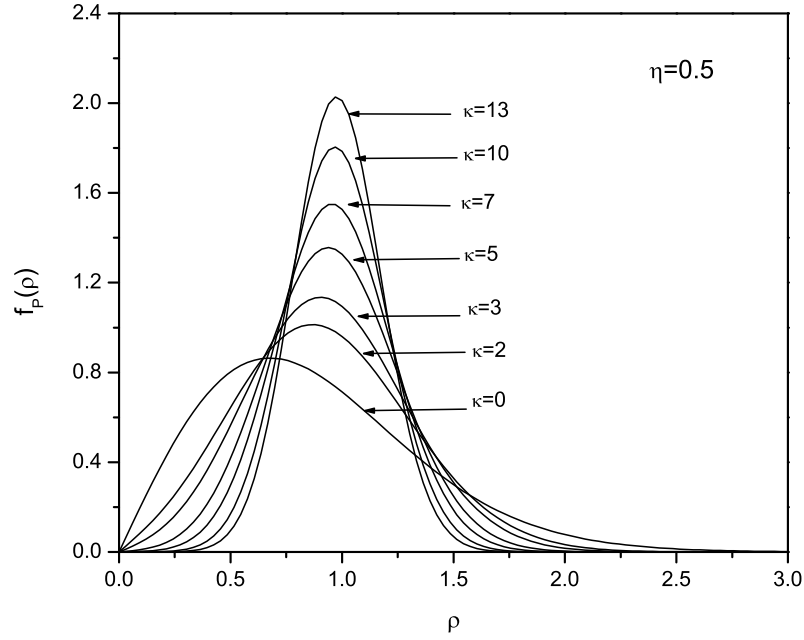


Fig. 4.2: A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para um η fixo ($\eta = 0.5$).

com $X = R \cos(\Theta)$, $Y = R \sin(\Theta)$ e $\Theta = \arctan(Y/X)$. Portanto a FDP $f_{R,\Theta}(r, \theta)$ de R e Θ é dada por

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = |J| f_{X,Y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \quad (4.13)$$

em que $|J| = r$ é o Jacobiano da transformação. Dado o modelo físico da distribuição e usando as razões definidas na Sec. 2.4 para η dada em (2.10), κ_X dada em (2.11) e κ_Y dada em (2.12), com $\kappa = \kappa_X = \kappa_Y$, a seguinte expressão pode ser obtida

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{r \sqrt{\eta} e^{-\frac{r^2(1+\eta)}{4\sigma_X^2} - \frac{r^2(1-\eta)\cos(2\theta)}{4\sigma_X^2} + \frac{r\sqrt{(1+\eta)\kappa}\cos(\theta-\phi)}{\sigma_X}}}{2\pi\sigma_X^2 \exp(\kappa)} \quad (4.14)$$

em que ϕ é dada em (4.4). Usando (4.12)

$$E(R^2) = \mu_X^2 + \mu_Y^2 + \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \quad (4.15)$$

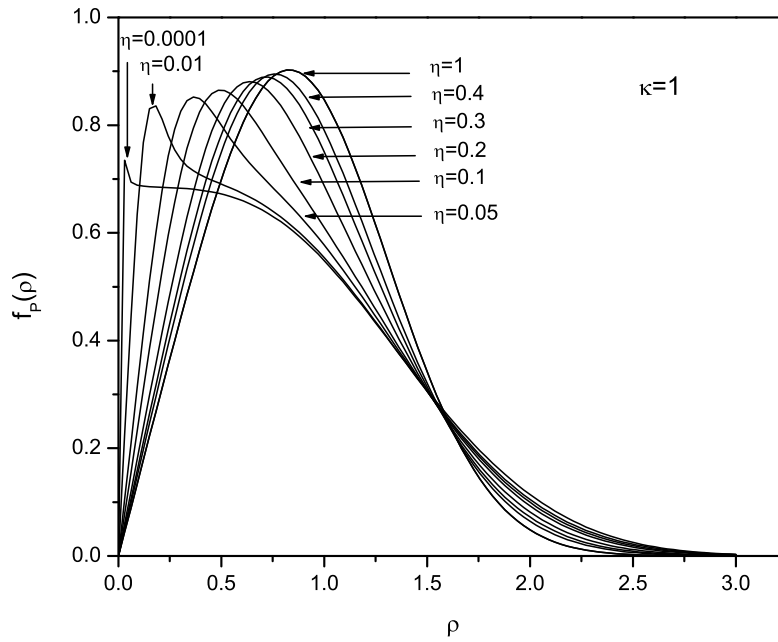


Fig. 4.3: A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para um κ fixo ($\kappa = 1$).

e usando as definições para η e κ , segue que (4.15) pode ser escrita como

$$\hat{r}^2 = E(R^2) = \sigma_X^2 (1 + \eta^{-1}) (1 + \kappa) \quad (4.16)$$

Fazendo as devidas substituições e usando a transformação de variável $f_{P,\Theta}(\rho, \theta) = \hat{r} f_{R,\Theta}(\hat{r}\rho, \theta)$ segue que a FDP $f_{P,\Theta}(\rho, \theta)$ é obtida por meio da expressão (4.1). As densidades $f_P(\rho)$ e $f_\Theta(\theta)$ dadas em (4.5) e (4.8), respectivamente, seguem diretamente por integração.

4.1.2 Estimadores para os Parâmetros η e κ

Os estimadores para os parâmetros η e κ podem ser obtidos em termos dos momentos da envoltória. Em particular, pode ser mostrado que

$$E[P^4] = \frac{3 + 2\eta(1 + \kappa)^2 + \kappa(6 + \kappa) + \eta^2(3 + \kappa(6 + \kappa))}{(1 + \eta)^2(1 + \kappa)^2} \quad (4.17)$$

$$E[P^6] = \frac{(15 + \kappa(45 + \kappa(15 + \kappa))) + 2\eta(-3 + \kappa(-9 + \kappa(3 + \kappa))) + \eta^2(15 + \kappa(45 + \kappa(15 + \kappa))))}{(1 + \eta)^2(1 + \kappa)^3} \quad (4.18)$$

Manipulando convenientemente (4.17) e (4.18), a seguinte expressão é obtida

$$\begin{aligned} &(-12 + 9E[P^4] - E[P^6]) + (-60 + 45E[P^4] - 5E[P^6])\kappa + (-84 + 69E[P^4] - 9E[P^6])\kappa^2 \\ &+ (-32 + 39E[P^4] - 7E[P^6])\kappa^3 + (-4 + 6E[P^4] - 2E[P^6])\kappa^4 = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{1 + 2\kappa} - \sqrt{-2 + E[P^4](1 + \kappa)^2 - \kappa(4 + \kappa)}}{\sqrt{1 + 2\kappa} + \sqrt{-2 + E[P^4](1 + \kappa)^2 - \kappa(4 + \kappa)}} \quad (4.20)$$

As equações (4.19) e (4.20) são a base para estimar η e κ . Note que (4.19) resulta em quatro possíveis soluções para κ , mas apenas duas serão não negativas e reais. Usando um destes dois possíveis valores para κ , (4.20) pode ser resolvido para obter η . Portanto, dois possíveis pares de solução, (η_1, κ_1) e (η_2, κ_2) , são obtidos. Esta ambigüidade pode ser resolvida usando um outro momento, (*i.e.*, o primeiro momento). Neste caso, o processo se dá como se segue: 1) estime o primeiro momento ($E[P]$) com o par (η_1, κ_1) em (4.9); 2) estime o primeiro momento ($E[P]$) com o par (η_2, κ_2) em (4.9); 3) Estime o primeiro momento a partir dos dados medidos; 4) Compare os resultados de 1) com 3) e de 2) com 3); 4) Escolha o par cujo primeiro momento correspondente seja mais próximo do primeiro momento dos dados medidos. Obviamente, se os dados seguem a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica de maneira exata, então a menor diferença será nula.

Dado um conjunto de dados de campo com informação da envoltória do sinal, o procedimento

prático para determinar os parâmetros da distribuição η e κ é o seguinte: 1) Estimar $E[R^2]$, $E[R^4]$ e $E[R^6]$; 2) Usando $E[P^4] = E[R^4]/E[R^2]^2$ e $E[P^6] = E[R^6]/E[R^2]^3$ em (4.19) e (4.20) η e κ são obtidos. Um ponto importante que deve ser frisado é que como os estimadores da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica requerem o cálculo das estatísticas de ordem superior, ou seja $E[P^4]$ e $E[P^6]$ ¹, uma grande quantidade de dados é necessária para que os estimadores forneçam resultados confiáveis. No caso de não se ter uma quantidade de dados suficiente, recomenda-se usar algum outro método alternativo como por exemplo o método descrito na Sec. 4.1.4.

4.1.3 A Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e as Outras Distribuições

A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica é uma distribuição geral que inclui, como casos particulares, as distribuições Rayleigh, Rice, Hoyt, Nakagami- q e gaussiana unilateral. Ela também pode aproximar a distribuição Nakagami- m .

A distribuição Hoyt pode ser obtida da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica de maneira exata para $\kappa = 0$ e usando a seguinte relação $b = \frac{1-\eta}{1+\eta}$, em que b é o parâmetro de Hoyt. Partindo da distribuição Hoyt, a distribuição gaussiana unilateral é obtida quando $b \rightarrow \pm 1$ ($\eta \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow \infty$). Da mesma forma, partindo da distribuição Hoyt a distribuição Rayleigh é obtida de maneira exata quando $b = 0$ ($\eta = 1$). A distribuição Nakagami- q pode ser obtida por meio da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica de maneira exata se $\kappa = 0$ e $q = \eta$, em que q é o parâmetro da respectiva distribuição. Partindo da distribuição Nakagami- q a distribuição gaussiana unilateral pode ser obtida quando $q \rightarrow 0$ ou $q \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow \infty$). Da mesma forma, partindo da distribuição Nakagami- q a distribuição Rayleigh pode ser obtida se $q = 1$ ($\eta = 1$). A distribuição Rice pode ser obtida da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica de forma exata se $\eta = 1$ e $k = \kappa$, em que k é o parâmetro de Rice. Partindo da distribuição Rice a distribuição Rayleigh pode ser obtida se $k = 0$ ($\kappa = 0$).

O parâmetro m de Nakagami pode ser escrito em termos de η e κ reconhecendo que este parâmetro é o inverso da variância normalizada da envoltória ao quadrado, *i.e.*, $m = \text{Var}^{-1}(P^2)$. Usando esta

¹Para o cálculo do parâmetro de Nakagami- m a estatística de maior ordem que se precisa é $E[P^4]$.

κ	η	$\eta - \kappa$ Simétrica
0	1	Rayleigh
0	$\frac{1-b}{1+b}$	Hoyt
0	q	Nakagami- q
0	$\rightarrow 0$ ou $\rightarrow \infty$	gaussiana unilateral
k	1	Rice

Tab. 4.1: A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e as outras distribuições.

definição para a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica, obtém-se

$$m = \frac{(1 + \eta)^2 (1 + \kappa)^2}{2(1 + \eta^2)(1 + 2\kappa)} \quad (4.21)$$

Através de (4.21) pode ser observado que exceto para o caso em que $m = 0.5$ o que implica em $(\eta, \kappa) = (0, 0)$, um número infinito de curvas para a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica pode ser obtido para um mesmo m . Um par apropriado (η, κ) pode ser encontrado que leva à melhor aproximação para a distribuição Nakagami- m . Um detalhe interessante é que o mínimo de (4.21) é obtido para $(\eta, \kappa) = (0, 0)$, para o qual $m = 0.5$. Neste caso, a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica se particulariza na distribuição gaussiana unilateral, da mesma forma que a distribuição Nakagami- m . A Tab. 4.1 resume estas relações entre a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e as outras distribuições. (A FDP para casos limites de η , *i.e.*, $\eta \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow \infty$ é dada em fórmula fechada no apêndice.)

4.1.4 Aplicação da Distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica

A aplicação da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica implica na estimação dos seus parâmetros η e κ (veja Sec. 4.2.2). Por outro lado, é possível utilizar a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica estimando o parâmetro m e escolhendo um par apropriado (η, κ) satisfazendo (4.21) que nos leva ao melhor ajuste dos pontos. Em particular, dado um m , por meio de (4.21) pode ser visto que

$$m \leq \frac{(1 + \kappa)^2}{(1 + 2\kappa)} \leq 2m \quad (4.22)$$

ou, equivalentemente,

$$m - 1 + \sqrt{m(m-1)} \leq \kappa \leq 2m - 1 + \sqrt{2m(2m-1)} \quad (4.23)$$

com a restrição física $\kappa \geq 0$, *real*. Portanto, para qualquer m (*i.e.*, obtido por meio de medidas de campo) o parâmetro κ pode ser escolhido dentro do intervalo definido em (4.22) (ou, equivalentemente, em (4.23)) e o parâmetro η estimado de (4.21) como

$$\eta = \frac{(1 + \kappa)^2 - 2\sqrt{m(1 + 2\kappa)((1 + \kappa)^2 - m(1 + 2\kappa))}}{(1 + \kappa)^2 + 2m(1 + 2\kappa)} \quad (4.24)$$

com a restrição física usual $\eta \geq 0$, *real*. A Fig. 4.4 mostra os possíveis valores de η e κ para qualquer valor de m . A Fig. 4.5 e a Fig. 4.6, respectivamente, descrevem uma amostra das várias possíveis formas da FDP e FCP da $\eta - \kappa$ Simétrica, $f_P(\rho)$ e $F_P(\rho)$, em função da envoltória normalizada ρ para o mesmo parâmetro de Nakagami $m = 1.25$. Pode ser observado que, embora a variância normalizada (parâmetro m) seja mantida constante para cada figura, as curvas são substancialmente diferentes uma das outras. Esse comportamento é particularmente notável para a FCP, na qual a cauda inferior pode diferir de uma curva para outra de algumas ordens de magnitude. Note, na Fig. 4.6, que a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica está sempre acima da curva Nakagami- m .

4.1.5 Validação da Distribuição Por Meio de Medidas de Campo

Através de nossas medidas, pôde-se observar que a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica se aplica bem nos casos em que a distribuição Rice também se aplica ($m \geq 1$). Da mesma forma, também encontrou-se aplicação (menos frequente) nos casos em que a distribuição Hoyt era aplicável ($0 \leq m \leq 1$). Mas o mais importante foram os casos em que essas duas distribuições apresentaram um ajuste moderado aos dados de campo enquanto que a $\eta - \kappa$ Simétrica apresentou um excelente ajuste. A Fig. 4.7 mostra alguns gráficos ilustrando o ajuste obtido pela distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica e também a distribuição Rice para fins de comparação. Note, na Fig. 4.7, que a distribuição Rice apresentou um bom ajuste em

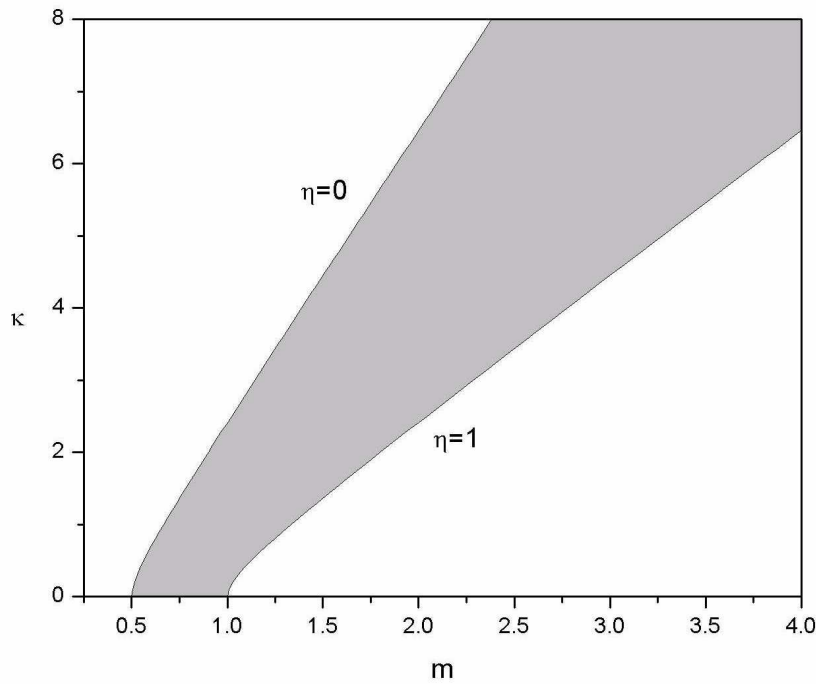


Fig. 4.4: Possíveis valores de η e κ para um determinado valor de m .

ambos os casos, mas a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica apresentou resultados ainda melhores. Mostra-se ainda seu ajuste aos dados experimentais obtidos por outros autores. Para isso, utiliza-se a referência [AE00]. Neste trabalho, o experimento foi feito em um ambiente *indoor* na frequência de 10 GHz. Extraíndo os pontos de forma visual das Fig. 4(a) e Fig. 4(c) de [AE00], ajusta-se os parâmetros η e κ da distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica usando o procedimento dado na Sec. 4.1.4. A Fig. 4.8 compara o ajuste da potência normalizada ($\omega = \rho^2$) da $\eta - \kappa$ Simétrica aos dados em [AE00]. Na curva superior, nota-se que a distribuição Rice não se ajusta bem aos dados na cauda da distribuição, mas apresenta bom ajuste para valores altos da envoltória. Por outro lado, a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica apresenta um ajuste muito bom para valores pequenos da envoltória e tende a seguir a concavidade da curva verdadeira. Para a curva inferior o ajuste apresentado pela distribuição Rice é muito bom, mas ele não segue a forma exata da curva experimental como acontece na distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica.

Foram calculadas medidas do erro médio entre os dados experimentais e a distribuição escolhida

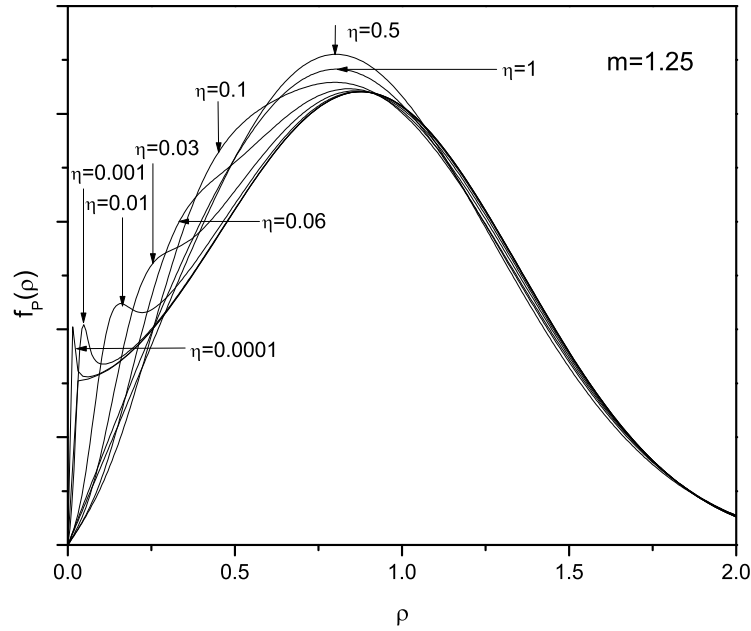


Fig. 4.5: A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para o mesmo parâmetro de Nakagami m ($m=1.25$). O par (η, κ) assume os seguintes valores $[(0.0001, 3.435), (0.001, 3.426), (0.01, 3.336), (0.03, 3.148), (0.06, 2.892), (0.1, 2.592), (0.5, 1.123), (1, 0.809)]$.

	$\eta - \kappa$ Simétrica	Rice
Fig. 4.7 (curva de baixo)	0.151062	0.365349
Fig. 4.7 (curva de cima)	0.130657	0.191869
Fig. 4.8 (curva de baixo)	0.101822	0.162877
Fig. 4.8 (curva de cima)	0.148779	0.173843

Tab. 4.2: Erro médio para as Figs. 4.7 e 4.8.

para ajustar os dados (ou seja, Rice e η - κ Simétrica). A Tab. 4.2 mostra esses valores para as curvas nas Figs. 4.7 e 4.8. Em todos os casos, o erro da distribuição η - κ Simétrica é menor do que o erro para a distribuição Rice, embora, a distribuição Rice também apresente bons resultados. Por outro lado, de forma contrária a de Rice, a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica tende a reproduzir fielmente a forma da curva (concavidade e/ou convexidade) experimental.

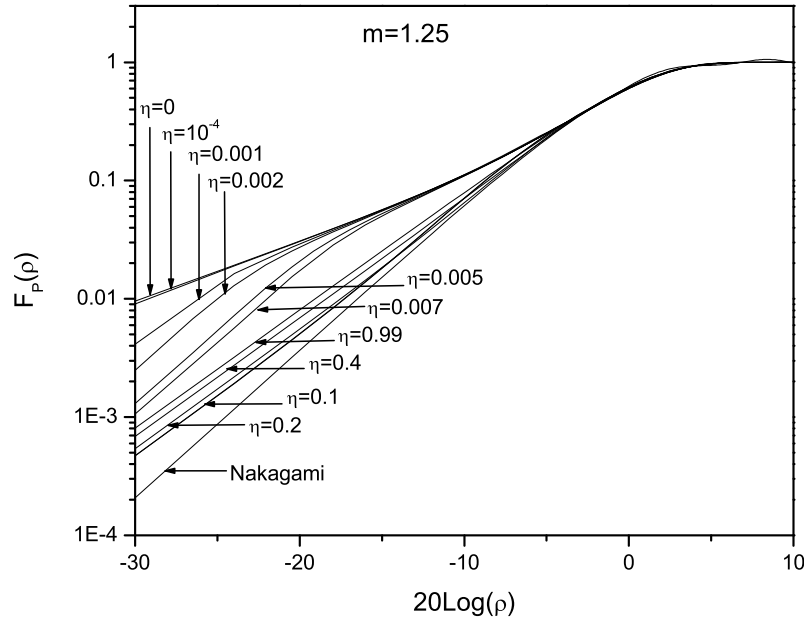


Fig. 4.6: A distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica para o mesmo parâmetro m ($m=1.25$). O par (η, κ) assume os seguintes valores $[(0, 3.436), (0.0001, 3.435), (0.001, 3.426), (0.002, 3.416), (0.005, 3.386), (0.007, 3.366), (0.1, 2.592), (0.2, 2.011), (0.4, 1.321), (0.99, 0.809)]$.

4.2 A Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica

A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica, assim como a distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica, é uma distribuição geral que pode ser usada para representar variações de curto prazo do sinal desvanecido. Seja a envoltória do sinal R , fase θ e envoltória normalizada $P = R/\hat{r}$, em que $\hat{r} = \sqrt{E(R^2)}$ é o valor eficaz de R , a FDP conjunta da $\eta - \kappa$ Assimétrica $f_{P,\Theta}(\rho, \theta)$ é escrita como

$$f_{P,\Theta}(\rho, \theta) = \frac{\sqrt{h} (1 + \kappa) \rho e^{2(h+H)} \sqrt{\kappa(1+\kappa)} \rho \cos(\theta) - (1+\kappa) \rho^2 (h+H \cos(2\theta))}{\pi e^{(h+H)\kappa}} \quad (4.25)$$

em que $h = \frac{2+\eta+\eta^{-1}}{4}$, $H = \frac{\eta^{-1}-\eta}{4}$. A FDP da envoltória normalizada é obtida como

$$f_P(\rho) = \frac{2\sqrt{h} (1 + \kappa)}{e^{(h+H)\kappa}} \rho e^{-h(1+\kappa)\rho^2} M(u, v, 0) \quad (4.26)$$

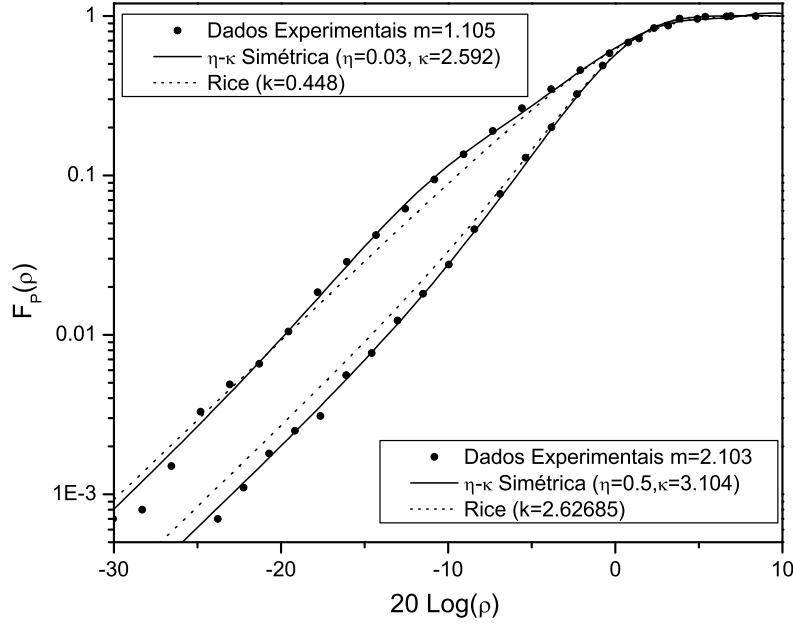


Fig. 4.7: A FCP da $\eta - \kappa$ Simétrica ajustada aos dados de medidas *indoor* realizadas na frequência de 1.8 GHz na Unicamp.

em que a função $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ é dada em (2.15) com $u = 2(h + H) \sqrt{\kappa(1 + \kappa)} \rho$ e $v = -(H(1 + \kappa) \rho^2)$.

A distribuição da fase pode ser obtida de forma fechada como

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{e^{-(h+H)\kappa} \sqrt{h}}{2\pi (h + H \cos(2\theta))^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{h + H \cos(2\theta)} + e^{\frac{(h+H)^2 \kappa \cos(\theta)^2}{h+H \cos(2\theta)}} (h + H) \sqrt{\pi \kappa} \cos(\theta) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{(h + H) \sqrt{\kappa} \cos(\theta)}{\sqrt{h + H \cos(2\theta)}}\right) \right) \right) \quad (4.27)$$

O n -ésimo momento $E[P^n]$ de P pode ser obtido na forma integral ou na forma de série como

$$E[P^n] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} \frac{(-1)^{-i+2j+t} 4^t e^{\frac{h\kappa}{-h+H}} h^{-1+i-2j-t-n} (h - H)^{\frac{1-2t+n}{2}} H^{-i+2j+t}}{\sqrt{\pi} (1 + \kappa)^{\frac{n}{2}} \Gamma(1 + j) \Gamma(1 + 2t) \Gamma(1 - i + 2j + 2t)} \times (h + H)^{\frac{1}{2} - 2i + 4j + 3t - 2(-i+2j+t) + \frac{n}{2}} \kappa^t \Gamma\left(\frac{1}{2} + j + t\right) \Gamma\left(1 - i + 2j + 2t + \frac{n}{2}\right) \quad (4.28)$$

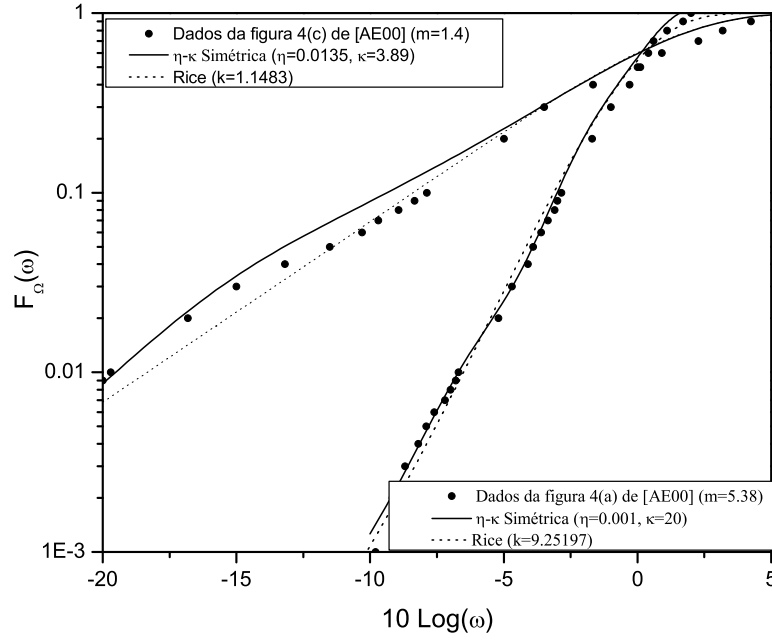


Fig. 4.8: A FCP da $\eta - \kappa$ Simétrica ajustada aos dados de medidas *indoor* na frequência de 10 GHz, como relatado em [AE00].

Da mesma forma, a FCP pode ser obtida na forma de série como

$$F_P(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\Gamma[1-i+2j+2n] - \Gamma[1-i+2j+2n, \rho^2(1+\kappa)h])}{\exp\left(\frac{\kappa h}{h-H}\right) \sqrt{\pi} \Gamma[1+j] \Gamma[1+2n] \Gamma[1-i+2j+2n]} \\ \times (-1)^{-i+2j+n} 4^n h^{-1+i-2j-n} \Gamma\left[\frac{1}{2} + j + n\right] (h-H)^{\frac{1}{2}-n} H^{-i+2j+n} (h+H)^{\frac{1}{2}+n} \kappa^n \quad (4.29)$$

A Fig. 4.9, para η fixo ($\eta = 0$) e variando κ e a Fig. 4.10 para η fixo ($\eta = 0.5$) e variando κ e a Fig. 4.11 para κ fixo ($\kappa = 1$) e variando η , mostram as várias formas da distribuição da $\eta - \kappa$ Assimétrica $f_P(\rho)$.

4.2.1 Obtenção da Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica

A obtenção da $\eta - \kappa$ Assimétrica é semelhante àquela da $\eta - \kappa$ Simétrica. Sejam X e Y as componentes em fase e em quadratura, respectivamente. Considere que $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = 0$,

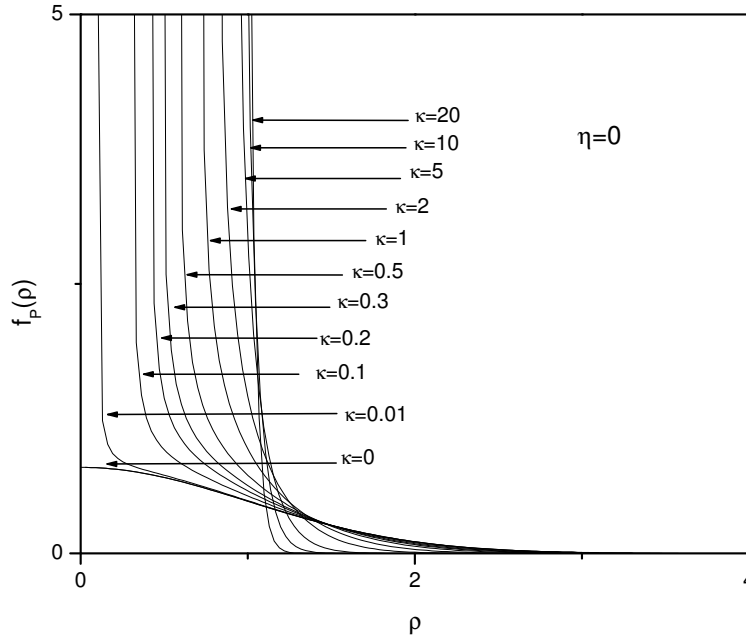


Fig. 4.9: A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para η fixo ($\eta = 0$).

$\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ e $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2$. A FDP $f_{X,Y}(x,y)$ de X e Y pode ser encontrada da forma usual. A envoltória R pode ser escrita em termos das componentes em fase e em quadratura como $R^2 = X^2 + Y^2$ com $X = R \cos(\Theta)$, $Y = R \sin(\Theta)$ e $\Theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$. Portanto a FDP conjunta $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ de R e Θ é obtida pelo procedimento padrão de transformação de variável.

A grande diferença agora em relação à distribuição $\eta - \kappa$ Simétrica é a forma como κ é definido. O parâmetro η é definido da mesma forma, *i.e.* $\eta = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$, mas o parâmetro κ é definido da seguinte forma

$$\kappa = \frac{\mu_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \quad (4.30)$$

Usando essa nova definição, segue que $E(R^2) = r_{rms}^2 = (1 + \eta^{-1})(1 + \kappa)\sigma_X^2$. Efetuando as devidas substituições e depois de várias simplificações, as densidades de probabilidade apresentadas na Sec. 4.2 são encontradas.

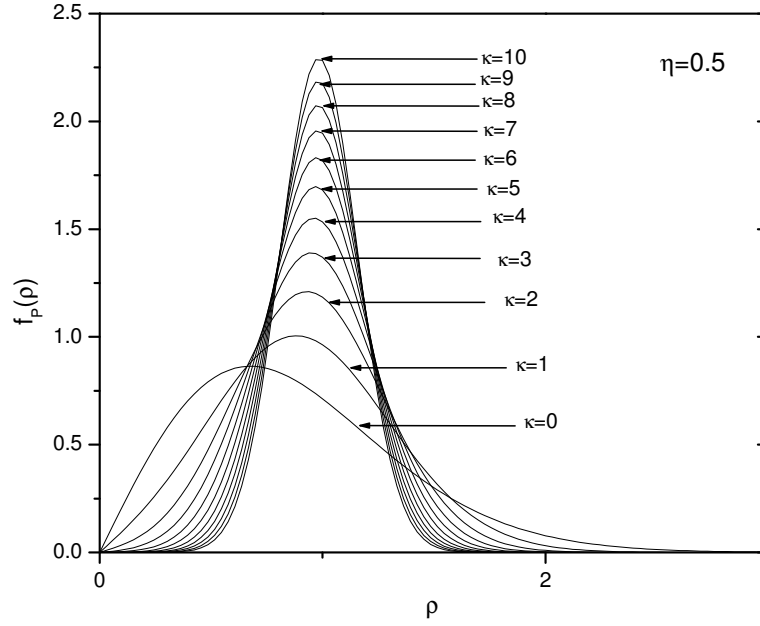
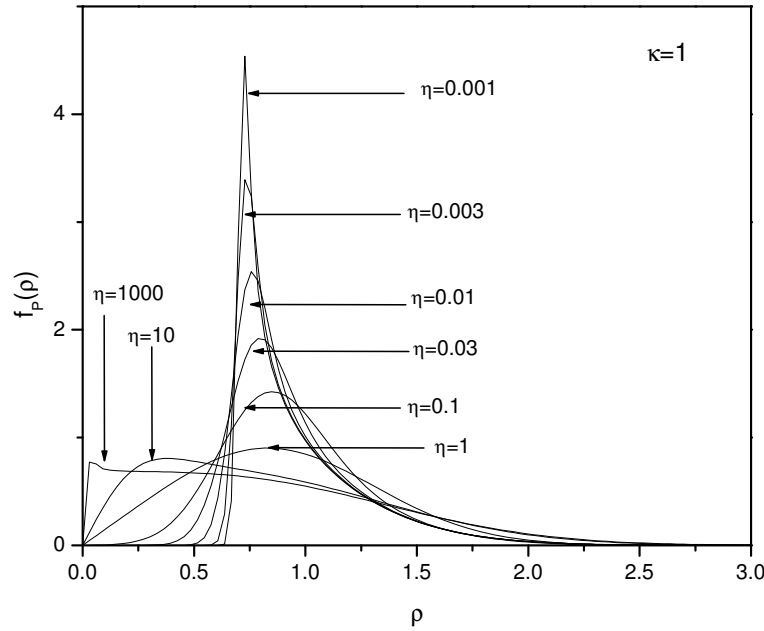


Fig. 4.10: A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para η fixo ($\eta = 0.5$).

4.2.2 Estimadores para os Parâmetros η e κ

Os estimadores para os parâmetros η e κ podem ser obtidos em termos dos momentos da envoltória. Em particular, $E[P^4]$ e $E[P^6]$ podem ser expressos na forma de radicais em função de η e κ . Essas equações podem ser manipuladas para produzir

$$\begin{aligned}
 & 144 - 216 E[P^4] + 81 E[P^4]^2 + 24 E[P^6] - 18 E[P^4] E[P^6] + E[P^6]^2 + \\
 & \left(864 - 1296 E[P^4] + 486 E[P^4]^2 + 144 E[P^6] - 108 E[P^4] E[P^6] + 6 E[P^6]^2 \right) \kappa + \\
 & \left(2160 - 3240 E[P^4] + 1215 E[P^4]^2 + 360 E[P^6] - 270 E[P^4] E[P^6] + 15 E[P^6]^2 \right) \kappa^2 + \\
 & \left(2496 - 4032 E[P^4] + 1620 E[P^4]^2 + 448 E[P^6] - 360 E[P^4] E[P^6] + 20 E[P^6]^2 \right) \kappa^3 + \\
 & \left(1296 - 2520 E[P^4] + 1215 E[P^4]^2 + 264 E[P^6] - 270 E[P^4] E[P^6] + 15 E[P^6]^2 \right) \kappa^4 + \\
 & \left(288 - 720 E[P^4] + 486 E[P^4]^2 + 48 E[P^6] - 108 E[P^4] E[P^6] + 6 E[P^6]^2 \right) \kappa^5 + \\
 & \left(16 - 72 E[P^4] + 81 E[P^4]^2 - 8 E[P^6] - 18 E[P^4] E[P^6] + E[P^6]^2 \right) \kappa^6 = 0 \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Fig. 4.11: A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para κ fixo ($\kappa = 1$).

$$\eta = \frac{1 - \kappa \pm \sqrt{-2 + E[P^4] - 4\kappa + 2E[P^4]\kappa + E[P^4]\kappa^2}}{1 + \kappa \mp \sqrt{-2 + E[P^4] - 4\kappa + 2E[P^4]\kappa + E[P^4]\kappa^2}} \quad (4.32)$$

Dado $E[P^4]$ e $E[P^6]$, (4.31) leva a seis possíveis soluções para κ , mas apenas uma delas será não negativa e real. Usando esse valor para κ , (4.32) pode ser resolvida para obter dois possíveis valores para η . Portanto, dois possíveis pares de solução, (η_1, κ) e (η_2, κ) , são obtidos. Tal ambiguidade pode ser resolvida por meio de outro momento (*i.e.*, o primeiro momento). Neste caso o processo se dá como se segue: 1) estima-se o primeiro momento ($E[P]$) com o par (η_1, κ) em (4.28); 2) estima-se o primeiro momento ($E[P]$) com o par (η_2, κ) em (4.28); 3) Estima-se o primeiro momento dos dados medidos; 4) Compara-se os resultados de 1) com 3) e 2) com 3); 4) Escolhe-se o par cujo primeiro momento correspondente seja mais próximo do primeiro momento dos dados medidos. Se os dados seguem a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica de maneira exata, então a menor diferença será nula.

Dado um conjunto de dados de campo com informação da envoltória do sinal, o procedimento prático para determinar os parâmetros da distribuição η e κ é o seguinte: 1) Estimar $E[R^2]$, $E[R^4]$ e $E[R^6]$; 2) Usando $E[P^4] = E[R^4]/E[R^2]^2$ e $E[P^6] = E[R^6]/E[R^2]^3$ em (4.31) e (4.32) η e κ são

obtidos.

4.2.3 A Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica e as Outras Distribuições

A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica é uma distribuição geral que inclui as distribuições Rayleigh, Rice, Hoyt, Nakagami- q e gaussiana unilateral como casos especiais e pode também aproximar a distribuição Nakagami- m .

A distribuição Hoyt pode ser obtida da distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica de maneira exata se $\kappa = 0$ e $b = \frac{\eta-1}{\eta+1}$, em que b é o parâmetro de Hoyt. Da distribuição Hoyt a distribuição gaussiana unilateral pode ser obtida se $b \rightarrow \mp 1$ ($\eta \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow \infty$). Da mesma forma, da distribuição Hoyt a distribuição Rayleigh é obtida de maneira exata se $b = 0$ ($\eta = 1$). A distribuição Nakagami- q pode ser obtida da distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica de forma exata se $\kappa = 0$ e $q = \eta$, em que q é o respectivo parâmetro. Da distribuição Nakagami- q , a distribuição gaussiana unilateral pode ser obtida se $q \rightarrow 0$ ou $q \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow 0$ ou $\eta \rightarrow \infty$). Da mesma forma, partindo da distribuição Nakagami- q a distribuição Rayleigh pode ser obtida usando $q = 1$ ($\eta = 1$). A distribuição Rice pode ser obtida da distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica de forma exata se $\eta = 1$ e $k = \kappa$, em que k é o parâmetro de Rice. Partindo da distribuição Rice a distribuição Rayleigh pode ser obtida se $k = 0$ ($\kappa = 0$).

O parâmetro de Nakagami m pode ser escrito em termos de η e κ usando o fato de que m é o inverso da variância normalizada da envoltória ao quadrado, *i.e.* $m = \text{Var}^{-1}(P^2)$. Usando tal definição para a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica, pode ser mostrado que

$$m = \frac{(1 + \eta)^2(1 + \kappa)^2}{2(1 + \eta^2 + 2\eta\kappa(1 + \eta))} \quad (4.33)$$

Usando (4.33), nota-se que exceto para o caso em que $m = 0.5$, o que implica em $(\eta, \kappa) = (0, 0)$, um número infinito de curvas da $\eta - \kappa$ Assimétrica pode ser obtido para o mesmo valor do parâmetro m . Um par apropriado (η, κ) pode ser encontrado que leva à melhor aproximação para a distribuição Nakagami- m . Um detalhe interessante é que o mínimo de (4.33) é obtido para $(\eta, \kappa) = (0, 0)$, para o qual $m = 0.5$. Neste caso, a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica se particulariza na distribuição gaussiana

κ	η	$\eta - \kappa$ Assimétrica
0	1	Rayleigh
0	$\frac{1-b}{1+b}$	Hoyt
0	q	Nakagami- q
0	$\rightarrow 0$ ou $\rightarrow \infty$	gaussiana unilateral
k	1	Rice

Tab. 4.3: A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica e as outras distribuições.

unilateral, da mesma forma que a distribuição Nakagami- m . A Tab. 4.3 resume estas relações entre a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica e as outras distribuições

4.2.4 Aplicação da Distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica

A aplicação da distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica implica na estimação dos seus parâmetros η e κ (veja Sec. 4.2.2). Por outro lado, é possível utilizar a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica estimando o parâmetro m e escolhendo um par apropriado (η, κ) satisfazendo (4.33) que leva ao melhor ajuste dos pontos. Em particular, dado um m e um κ , o parâmetro η pode ser escolhido por meio de

$$\eta = \frac{1 + 2\kappa - 2m\kappa + \kappa^2 \pm 2\sqrt{m(1 - m + 2\kappa - 2m\kappa + \kappa^2 + m\kappa^2)}}{-1 + 2m - 2\kappa + 4m\kappa - \kappa^2} \quad (4.34)$$

com a restrição usual de que $\eta \geq 0$, *real*. A Fig. 4.12 mostra uma amostra das várias formas da FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica $f_P(\rho)$ em função da envoltória normalizada ρ para o mesmo parâmetro de Nakagami $m = 1.25$. Pode ser visto que, embora o parâmetro m seja mantido constante, as curvas são substancialmente diferentes umas das outras. Note que a a parte inferior da curva, ou a cauda da distribuição pode variar ordens de grandeza de uma para a outra. Note também que a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica pode ficar acima ou abaixo da curva de Nakagami- m .

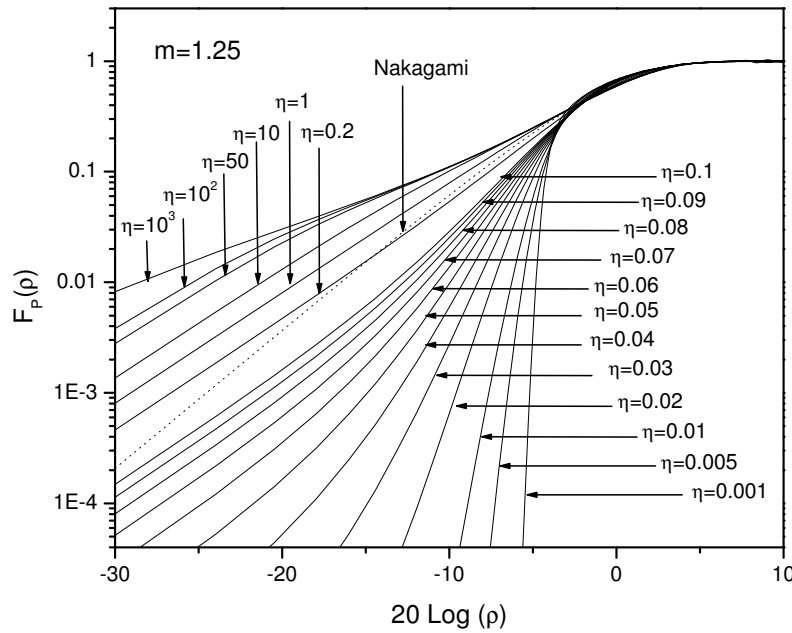


Fig. 4.12: A FDP $\eta - \kappa$ Assimétrica para o mesmo parâmetro de Nakagami m ($m=1.25$).

4.2.5 Validação da $\eta - \kappa$ Assimétrica Por Meio de Medidas de Campo

Foram realizadas medidas de campo, usando o mesmo equipamento e método descrito na Sec. 4.1.5. Através de nossas medidas, pôde-se observar que a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica se aplica bem nos casos em que a distribuição Rice também se aplica ($m \geq 1$). Da mesma forma, também encontrou-se aplicação (menos frequente) nos casos em que a distribuição Hoyt era aplicável ($0 \leq m \leq 1$). Mas o mais importante foram os casos em que estas duas distribuições apresentaram um ajuste moderado aos dados de campo, enquanto que a $\eta - \kappa$ Assimétrica apresentou um excelente ajuste. A Fig. 4.13 mostra alguns gráficos ilustrando o ajuste obtido pela distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica e também a distribuição Rice para fins de comparação. Note, na Fig. 4.13, que a distribuição Rice apresentou um bom ajuste em ambos os casos, mas a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica apresentou resultados ainda melhores. Ainda na Fig. 4.13 note como a distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica tende a seguir a concavidade da curva verdadeira.

Foram calculadas medidas do erro médio entre os dados experimentais e a distribuição escolhida para ajustar os dados (ou seja, Rice e $\eta - \kappa$ Assimétrica). A Tab. 4.4 mostra estes valores para as curvas

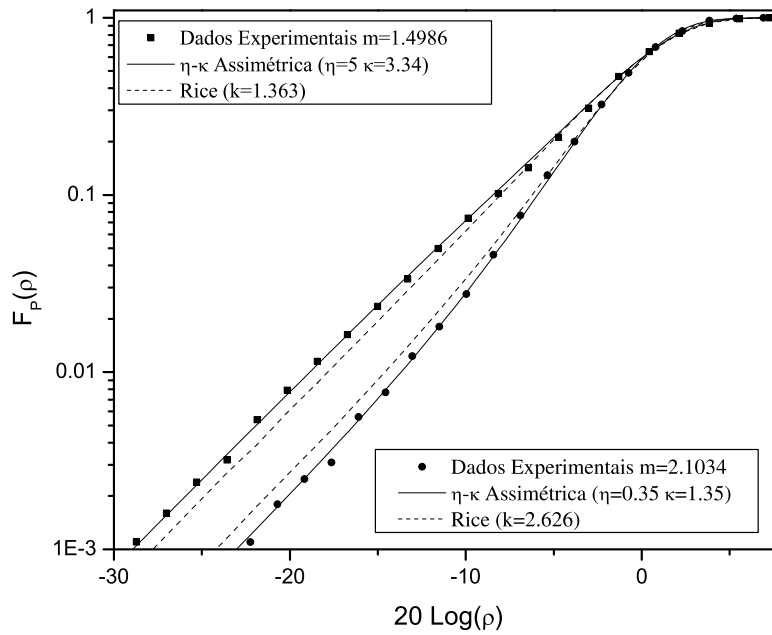


Fig. 4.13: A distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica ajustada aos dados das medidas *indoor* feitas na Unicamp em 1.8 GHz.

	$\eta - \kappa$ Assimétrica	Rice
Fig.4.13 (curva de cima)	0.081	0.160
Fig. 4.13 (curva de baixo)	0.145	0.383

Tab. 4.4: Erro médio para a Fig. 4.13.

na Fig. 4.13. Em todos os casos, o erro da distribuição $\eta - \kappa$ Assimétrica é menor do que o erro para a distribuição Rice, embora, a distribuição Rice também apresente bons resultados.

4.3 Conclusões

Este capítulo apresentou as distribuições $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica, duas distribuições gerais que incluem as distribuições Rayleigh, Rice, Hoyt, Nakagami- q e gaussiana unilateral como casos especiais. Simulações e medidas de campo foram feitas para caracterizar estas distribuições e foi constatado que estas se aplicam em casos nos quais as distribuições Hoyt e Rice também se aplicam. Devido a sua grande versatilidade e maior número de parâmetros, as duas distribuições

apresentaram excelentes resultados em casos onde essas últimas duas distribuições apresentam resultados moderados. Medidas numéricas do erro médio entre as curvas experimentais e as distribuições teóricas foram calculadas, e em todos os casos o erro da distribuição foi menor do que o erro para a distribuição Rice, embora, a distribuição Rice também forneça bons resultados. Foi observado que as distribuições $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica tendem a reproduzir a forma das curvas experimentais, o que é uma característica que não se encontra na maioria das distribuições (comportamento monomodal).

4.4 Apêndice

A FDP e a FCP da $\eta - \kappa$ Simétrica para o caso limite $\eta \rightarrow 0$.

A FDP de R quando $\eta \rightarrow 0$ pode ser obtida usando $R^2 = X^2$ com $E[X] = \mu_X$ e $Var(X) = \sigma_X^2$. Usando $\kappa = \mu_X^2/\sigma_X^2$ e usando a transformação de variável apropriada para encontrar P a seguinte FDP pode ser obtida

$$f_P(\rho) = \sqrt{\frac{1+\kappa}{2\pi}} e^{-\frac{\kappa}{2}} \left[e^{-\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)\rho^2+2\sqrt{\frac{\kappa(1+\kappa)}{4}}\rho} + e^{-\left(\frac{1+\kappa}{2}\right)\rho^2-2\sqrt{\frac{\kappa(1+\kappa)}{4}}\rho} \right] \quad (4.35)$$

e sua FCP é dada por

$$F_P(\rho) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\rho + \rho\kappa - \sqrt{\kappa(1+\kappa)}}{\sqrt{2(1+\kappa)}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\rho + \rho\kappa + \sqrt{\kappa(1+\kappa)}}{\sqrt{2(1+\kappa)}} \right) \right) \quad (4.36)$$

Parte II

Estatísticas de Segunda Ordem

Capítulo 5

Estatísticas de Segunda Ordem em Sistemas de Diversidade em Canais Hoyt e Weibull Independentes

O desempenho dos sistemas de comunicação sem fio é consideravelmente afetado pelo fenômeno do multipercurso. Técnicas de diversidade são meios efetivos usados para mitigar o efeito deletério do desvanecimento. A taxa de ocorrência destes desvanecimentos, ou taxa de cruzamento de nível (TCN), e a duração média de desvanecimento (DMD) fornecem uma caracterização dinâmica do canal de comunicação. Por serem estatísticas de segunda ordem, estas complementam as estatísticas de primeira ordem, e têm encontrado várias aplicações na modelagem e concepção de sistemas práticos.

Expressões para a TCN e a DMD de um canal sem diversidade foram obtidas para ambientes Rayleigh [Jak74], Rice [Ric44], Nakagami- m [YBG99] e mais recentemente Hoyt [WYP02] e Weibull [SZKT04]. Vários trabalhos têm abordado as estatísticas de segunda ordem de sistemas com diversidade. Em [AFP88], expressões para a TCN e a DMD do combinador por seleção (CS), combinador por razão máxima (CRM), e combinador por ganho igual (CGI) para dois ramos em ambientes Rayleigh correlacionados foram apresentados. O caso Nakagami- m com M canais independentes e identicamente distribuído (iid) foi resolvido em [YdSB01] para o CS, CRM e CGI. Resultados en-

volvendo canais independentes mas não idênticos para o canal Nakagami- m foram apresentados em [IM02].

5.1 Canais Hoyt

A distribuição Hoyt ou Nakagami- q [Hoy47] é uma distribuição flexível, que pode variar desde uma distribuição gaussiana unilateral a uma distribuição Rayleigh, e tem encontrado aplicações em propagação via satélite [WYP02]. Apesar de sua importância, pouca atenção tem sido dada a esse tipo de desvanecimento. Esta seção apresenta expressões exatas para a TCN e a DMD para o CRM e CGI em canais Hoyt. As fórmulas se aplicam a M ramos não balanceados (potências distintas), não-idênticos e independentes e são particularizadas para alguns casos, para os quais resultados já são conhecidos na literatura, e no caso mais geral por meio de simulações.

5.1.1 Estatísticas dos Ramos

A envoltória Hoyt R_i e a fase Θ_i no i -ésimo ramo, $i = 1, \dots, M$, são modeladas como

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2} \quad (5.1)$$

$$\Theta_i = \arctan \frac{Y_i}{X_i} \quad (5.2)$$

em que X_i e Y_i são processos aleatórios gaussianos estacionários independentes de média zero com variâncias dadas por $\sigma_{X_i}^2$ e $\sigma_{Y_i}^2$, respectivamente. A função densidade de probabilidade conjunta $f_{R_i, \Theta_i}(\cdot, \cdot)$ de R_i e Θ_i é dada por [Hoy47]

$$f_{R_i, \Theta_i}(r_i, \theta_i) = \frac{r_i}{\Omega_i \pi \sqrt{1 - b_i^2}} \exp \left(-\frac{1 - b_i \cos 2\theta_i}{\Omega_i (1 - b_i^2)} r_i^2 \right) \quad (5.3)$$

em que $\Omega_i = E[R_i^2]$ e $b_i \triangleq (\sigma_{X_i}^2 - \sigma_{Y_i}^2)/(\sigma_{X_i}^2 + \sigma_{Y_i}^2)$, $-1 \leq b_i \leq 1$ é o parâmetro de Hoyt. A função densidade de probabilidade, $f_{R_i}(\cdot)$, de R_i é obtida como

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{2r_i}{\Omega_i \sqrt{1 - b_i^2}} \exp\left(-\frac{r_i^2}{\Omega_i(1 - b_i^2)}\right) I_0\left(\frac{b_i r_i^2}{\Omega_i(1 - b_i^2)}\right) \quad (5.4)$$

Para calcular a TCN e a DMD do CGI e do CRM, é feito uso da FDP condicional $f_{\dot{R}_i|R_i, \Theta_i}(\cdot|\cdot, \cdot)$ da derivada da envoltória \dot{R}_i no i -ésimo ramo dado o conhecimento das VAs R_i e Θ_i . Através de (5.1), pode-se escrever

$$R_i \dot{R}_i = X_i \dot{X}_i + Y_i \dot{Y}_i \quad (5.5)$$

em que \dot{X}_i e \dot{Y}_i denotam, respectivamente, a derivada temporal de X_i e Y_i . Sabendo que $X_i = R_i \cos \Theta_i$ e $Y_i = R_i \sin \Theta_i$, segue que

$$\dot{R}_i = \dot{X}_i \cos \Theta_i + \dot{Y}_i \sin \Theta_i \quad (5.6)$$

No caso de espalhamento isotrópico, \dot{X}_i e \dot{Y}_i são processos aleatórios estacionários gaussianos de média zero e variância $\sigma_{\dot{X}_i}^2 = (\sqrt{2}\pi f_m)^2 \sigma_{X_i}^2$ e $\sigma_{\dot{Y}_i}^2 = (\sqrt{2}\pi f_m)^2 \sigma_{Y_i}^2$, respectivamente, em que f_m é o desvio Doppler máximo dado em Hertz [Jak74]. Desta forma, usando (5.6), \dot{R}_i , dado R_i e Θ_i , é também um processo aleatório estacionário gaussiano de média nula, de forma que a distribuição condicional é dada por

$$f_{\dot{R}_i|R_i, \Theta_i}(\dot{r}_i|r_i, \theta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{R}_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{r}_i}{\sigma_{\dot{R}_i}}\right)^2\right) \quad (5.7)$$

com $\sigma_{\dot{R}_i}^2 = \Omega_i(\pi f_m)^2(1 + b_i \cos 2\theta_i)$.

A TCN e a DMD de um sinal aleatório são definidas, respectivamente, como o número médio de cruzamentos de um nível r na direção ascendente (ou descendente) por segundo e como a duração média que o sinal fica abaixo de um determinado nível r . A TCN $n_R(r)$ e a DMD $T_R(r)$ da saída do

combinador R no nível r são, respectivamente, dadas por [Ric44]

$$n_R(r) = \int_0^\infty \dot{r} f_{R,\dot{R}}(r, \dot{r}) d\dot{r} \quad (5.8)$$

$$T_R(r) = \frac{F_R(r)}{n_R(r)} \quad (5.9)$$

em que $f_{R,\dot{R}}(\cdot, \cdot)$ é a FDP conjunta de R e sua derivada temporal \dot{R} , e $F_R(\cdot)$ é a FCP de R .

A seguir, (5.8) e (5.9) são calculadas para um sistema com M -ramos utilizando os CGI e CRM em ambiente Hoyt desvanecidos.

5.1.2 Combinador por Ganho Igual

No CGI, o sinal recebido é primeiro ajustado para que a defasagem entre os sinais seja nula e depois somados de forma que a envoltória da saída do combinador R , já levando em conta a potência do ruído na saída, possa ser escrita como $R = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M R_i$. Assim, tem-se que

$$\dot{R} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \dot{R}_i \quad (5.10)$$

A FCP de R pode ser calculada como a integral da FDP conjunta de R_i , $i = 1, \dots, M$, em um volume M dimensional limitado pelo hiperplano $\sqrt{M}r = \sum_{i=1}^M r_i$ e os eixos deste mesmo hiperplano [Bre59] tal que

$$F_R(r) = \int_0^{\sqrt{M}r} \int_0^{\sqrt{M}r-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=2}^M r_i} \times f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (5.11)$$

em que $f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i)$ (ramos independentes) é a FDP conjunta de R_i , $i = 1, \dots, M$, e $f_{R_i}(\cdot)$ é dada por (5.4).

Note, por meio de (5.7) e (5.10), que \dot{R} , dados R_i e Θ_i , $i = 1, \dots, M$, é um processo aleatório

estacionário gaussiano de média zero e variância $\sigma_{\dot{R}}^2 = \frac{(\pi f_m)^2}{M} \sum_{i=1}^M \Omega_i (1 + b_i \cos 2\theta_i)$. Sendo assim, a FDP é dada por

$$f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M}(\dot{r}|r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{R}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{r}}{\sigma_{\dot{R}}}\right)^2\right) \quad (5.12)$$

Em seguida, explora-se esse fato incluindo as variáveis Θ_i s na formulação de $f_{R, \dot{R}}(\cdot, \cdot)$. Como visto a seguir, isto simplifica os cálculos. Derivando (5.11) com relação a r para obter $f_R(r)$, como em [YdsB01], e então usando a regra de Bayes, $f_{R, \dot{R}}(\cdot, \cdot)$ pode ser obtida como

$$\begin{aligned} f_{R, \dot{R}}(r, \dot{r}) &= \sqrt{M} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{M}r} \int_0^{\sqrt{M}r-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=3}^M r_i} \\ &\times f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M, \dot{R}}\left(\left(\sqrt{M}r - \sum_{i=2}^M r_i\right), r_2, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M, \dot{r}\right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M d\theta_1 \cdots d\theta_M \end{aligned} \quad (5.13)$$

em que $f_{R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M, \dot{R}}(\cdot, \dots, \cdot, \cdot, \dots, \cdot, \cdot)$ é a FDP conjunta de R_i , Θ_i , $i = 1, \dots, M$ e \dot{R} . Obviamente,

$$\begin{aligned} f_{R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M, \dot{R}}(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M, \dot{r}) &= \\ f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M}(\dot{r}|r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) f_{R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M}(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) \end{aligned} \quad (5.14)$$

em que $f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M}(\cdot|\cdot, \dots, \cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ é dado por (5.12) e $f_{R_1, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M}(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i, \Theta_i}(r_i, \theta_i)$, já que os ramos são independentes. Usando (5.14) em (5.13) e (5.8), a TCN da saída dos M -ramos do sistema do CGI em um ambiente Hoyt pode ser finalmente escrita como

$$\begin{aligned} n_R(r) &= \sqrt{\pi/2} f_m \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{M}r} \int_0^{\sqrt{M}r-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=3}^M r_i} \sqrt{\sum_{i=1}^M \Omega_i (1 + b_i \cos 2\theta_i)} \\ &\times f_{R_1, \Theta_1}\left(\left(\sqrt{M}r - \sum_{i=2}^M r_i\right), \theta_1\right) \prod_{i=2}^M f_{R_i, \Theta_i}(r_i, \theta_i) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M d\theta_1 \cdots d\theta_M \end{aligned} \quad (5.15)$$

em que $f_{R_i, \Theta_i}(\cdot, \cdot)$ é dada por (5.3). (Observe que a inclusão dos Θ_i s na formulação leva a uma integração em forma fechada em relação a \dot{r} em (5.8).) A partir de (5.9), (5.11) e (5.15), a DMD da saída do CGI em um sistema de M ramos Hoyt desvanecidos é obtida.

5.1.3 Combinador por Razão Máxima

No CRM, o sinal recebido é primeiro ajustado para que a defasagem entre os sinais seja nula, depois cada sinal é amplificado apropriadamente por um combinador ótimo, e depois o sinal resultante é adicionado de forma que a envoltória do combinador R seja dada por $R = \sqrt{\sum_{i=1}^M R_i^2}$. Dessa maneira tem-se que

$$\dot{R} = \sum_{i=1}^M \frac{R_i}{R} \dot{R}_i \quad (5.16)$$

A análise do CRM segue exatamente os mesmos passos detalhados para o CGI na Sec. 5.1.2, considerando que, para o CRM, o hiperplano usado para calcular $F_R(\cdot)$ é $r^2 = \sum_{i=1}^M r_i^2$ e que $\sigma_{\dot{R}}^2 = (\pi f_m)^2 (\sum_{i=1}^M R_i^2)^{-1} \sum_{i=1}^M \Omega_i R_i^2 (1 + b_i \cos 2\theta_i)$. As expressões para $F_R(\cdot)$, $f_{R, \dot{R}}(\cdot, \cdot)$ e $n_R(\cdot)$ são dadas por (5.17), (5.18) e (5.19), respectivamente.

$$F_R(r) = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - r_M^2}} \cdots \int_0^{\sqrt{r^2 - \sum_{i=3}^M r_i^2}} \int_0^{\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}} f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} f_{R, \dot{R}}(r, \dot{r}) = & \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - r_M^2}} \cdots \int_0^{\sqrt{r^2 - \sum_{i=3}^M r_i^2}} \\ & \times \frac{r}{\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}} f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \Theta_1, \dots, \Theta_M, \dot{R}} \left(\left(\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2} \right), r_2, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M, \dot{r} \right) \\ & dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M d\theta_1 \cdots d\theta_M \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}
n_R(r) = & \sqrt{\pi/2} f_m \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - r_M^2}} \cdots \int_0^{\sqrt{r^2 - \sum_{i=3}^M r_i^2}} \\
& \sqrt{\frac{\Omega_1 \left(r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2 \right) (1 + b_1 \cos 2\theta_1) + \sum_{i=2}^M \Omega_i r_i^2 (1 + b_i \cos 2\theta_i)}{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}} \\
& \times f_{R_1, \Theta_1} \left(\left(\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}, \theta_1 \right) \prod_{i=2}^M f_{R_i, \Theta_i}(r_i, \theta_i) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M d\theta_1 \cdots d\theta_M \right) \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Da mesma forma que o caso anterior, $f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i)$, já que os ramos são independentes. Através de (5.9), (5.17) e (5.19), a DMD do CRM em um ambiente Hoyt pode ser obtida.

5.1.4 Gráficos da TCN e da DMD para o CGI e CRM

As formulações gerais obtidas neste trabalho podem ser especializadas naquelas já encontradas na literatura. Em particular, para canais balanceados e $b_i = 0$, $i = 1, \dots, M$, estas se reduzem às expressões do CGI e CRM para M -ramos do caso iid Rayleigh, dadas por [YdsB01, Eqs. 23 e 24] com $m = 1$ e [YdsB01, Eqs. 38 e 39], respectivamente. Da mesma forma, para canais balanceados e $b_i \rightarrow \pm 1$, $i = 1, \dots, M$, estas se reduzem ao caso iid com distribuição gaussiana unilateral, dadas por [YdsB01, Eqs. 23, 24, 36 e 37] com $m = 0.5$. Para casos mais gerais, incluindo ramos idênticos e não idênticos, são feitas simulações de forma *exaustiva* e comparadas com as expressões analíticas obtidas aqui. Todos os casos investigados revelam uma excelente concordância entre os resultados analíticos e os simulados. As Figs. 5.1 e 5.2 mostram a TCN e a DMD do CGI e CRM, respectivamente, para $M = 1, 2, 4$ e $b_i = 0, 0.9, 0.999$, considerando canais Hoyt idênticos. Por uma questão de clareza de apresentação, os dados da simulação não são apresentados nas figuras. Mas de fato, eles são praticamente coincidentes com as curvas teóricas.

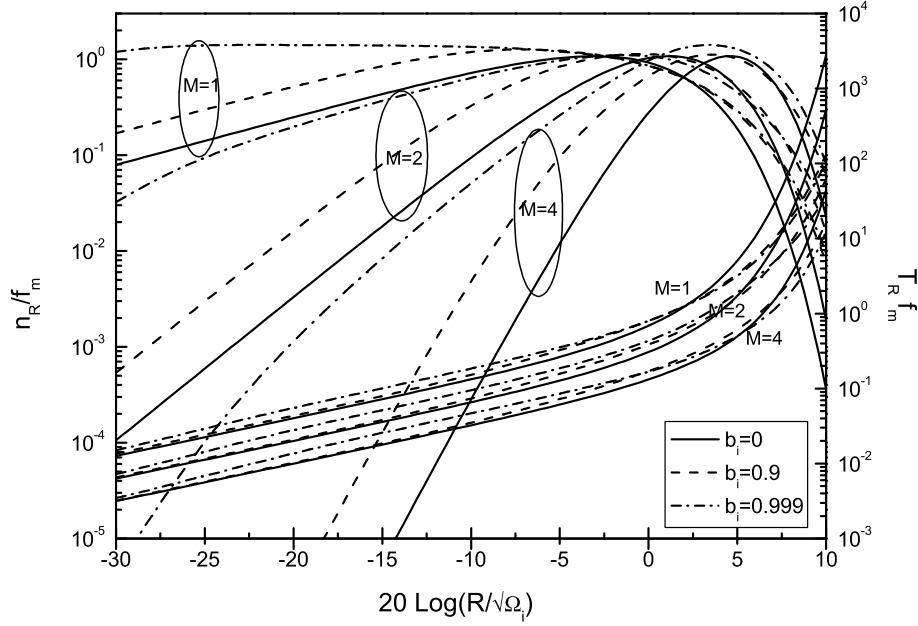


Fig. 5.1: A TCN e a DMD para o CGI em canais Hoyt idênticos ($M = 1, 2, 4$ e $b_i = 0, 0.9, 0.999$).

5.2 Canais Weibull

A distribuição Weibull é uma distribuição empírica que foi primeiramente utilizada em aplicações na área de confiabilidade. Por sua versatilidade tem sido usada também na área de comunicação sem fio para modelar a envoltória do sinal com desvanecimento. Devido à falta de base teórica [ABC⁺88], a aplicação da distribuição Weibull em comunicação sem fio tem sido limitada às estatísticas de primeira ordem do sinal desvanecido.

No trabalho de [Yac02], um modelo físico para a distribuição Weibull foi proposto. Essencialmente, no modelo proposto, a envoltória Weibull do sinal desvanecido R_i no i -ésimo ramo, $i = 1, \dots, M$, é uma função não-linear do módulo das componentes dos multipercurso e esta não linearidade é expressa em termos do parâmetro $\alpha_i > 0$, *i.e.*,

$$R_i = (X_i^2 + Y_i^2)^{1/\alpha_i} \quad (5.20)$$

em que X_i e Y_i são processos aleatórios estacionários gaussianos independentes de média nula e

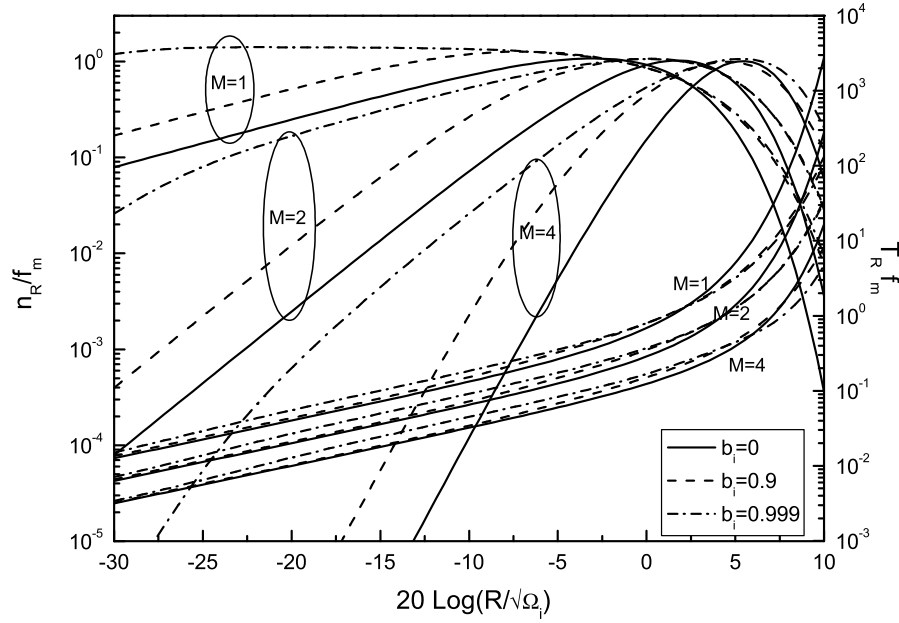


Fig. 5.2: A TCN e a DMD para o CRM em canais Hoyt idênticos ($M = 1, 2, 4$ e $b_i = 0, 0.9, 0.999$).

mesma variância σ^2 . A FDP $f_{R_i}(\cdot)$ de R_i é dada por

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{\alpha_i r_i^{\alpha_i-1}}{\Omega_i} \exp\left(-\frac{r_i^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right) \quad (5.21)$$

em que $\Omega_i = E[R_i^{\alpha_i}]$. No caso de haver um ambiente com espalhamento isotrópico, as derivadas temporais \dot{X}_i e \dot{Y}_i de X_i e Y_i , respectivamente, são processos aleatórios estacionários gaussianos de média zero e variância $(\sqrt{2\pi}f_m)^2 \sigma^2$ [Jak74]. A FDP condicional $f_{\dot{R}_i|R_i}(\cdot|\cdot)$ de \dot{R}_i (a derivada temporal de R_i) dado R_i pode ser facilmente encontrada por meio de (5.20) como

$$f_{\dot{R}_i|R_i}(\dot{r}_i|r_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{R}_i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{r}_i}{\sigma_{\dot{R}_i}}\right)^2\right) \quad (5.22)$$

em que $\sigma_{\dot{R}_i}^2 = \left(\frac{2\pi f_m}{\alpha_i}\right)^2 \Omega_i r_i^{2-\alpha_i}$ e f_m é o desvio Doppler máximo.

5.2.1 Combinador por Ganho Igual

Neste tipo de combinação, como já explicado na Sec. 5.1.2, os sinais são somados de acordo com a expressão $R = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M R_i$.

A FCP de R pode ser calculada integrando a FDP conjunta de $R_i, i = 1, \dots, M$, no volume de M dimensões limitado pelo hiperplano $\sqrt{M}r = \sum_{i=1}^M r_i$ e os eixos deste hiperplano. Usando o mesmo procedimento dado em [YdSB01]

$$F_R(r) = \int_0^{\sqrt{M}r} \int_0^{\sqrt{M}r-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=2}^M r_i} \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (5.23)$$

em que $f_{R_i}(\cdot)$ é dado por (5.21).

Note que através de (5.22) e (5.10) que $f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M}(\cdot | \cdot, \dots, \cdot)$, a FDP condicional de \dot{R} dado $R_i, i = 1, \dots, M$, é um processo aleatório estacionário gaussiano de média zero e variância $\sigma_{\dot{R}}^2 = \sum_{i=1}^M \sigma_{\dot{R}_i}^2 / M$. Sendo assim, a FDP é dada por

$$f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M}(\dot{r} | r_1, \dots, r_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\dot{R}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{r}}{\sigma_{\dot{R}}}\right)^2\right) \quad (5.24)$$

Derivando (5.11) em relação a r obtém-se $f_R(r)$ da mesma forma que em [YdSB01] e então usando a regra de Bayes, $f_{R, \dot{R}}(\cdot, \cdot)$ pode ser encontrada como

$$f_{R, \dot{R}}(r, \dot{r}) = \sqrt{M} \overbrace{\int_0^{\sqrt{M}r} \int_0^{\sqrt{M}r-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=3}^M r_i}}^{M-1} \times f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \dot{R}}\left(\left(\sqrt{M}r - \sum_{i=2}^M r_i\right), r_2, \dots, r_M, \dot{r}\right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (5.25)$$

em que $f_{R_1, \dots, R_M, \dot{R}}(\cdot, \dots, \cdot, \cdot)$ é a FDP conjunta de $R_i, i = 1, \dots, M$ e \dot{R} . Obviamente que

$$f_{R_1, \dots, R_M, \dot{R}}(r_1, \dots, r_M, \dot{r}) = f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M}(\dot{r} | r_1, \dots, r_M) f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) \quad (5.26)$$

em que $f_{\dot{R}|R_1, \dots, R_M}(\cdot|\cdot, \dots, \cdot)$ já foi definida em (5.24) e $f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i)$, já que os ramos são independentes. Usando (5.14) em (5.25) e (5.8) de forma apropriada, a TCN da saída do CGI no ambiente Weibull desvanecido pode ser escrita como

$$n_R(r) = \sqrt{2\pi} f_m \overbrace{\int_0^{\sqrt{M}r} \int_0^{\sqrt{M}r-r_M} \dots \int_0^{\sqrt{M}r-\sum_{i=3}^M r_i}}^{M-1} \sqrt{\frac{\left(\sqrt{M}r - \sum_{i=2}^M r_i\right)^{2-\alpha_1} \Omega_1}{\alpha_1^2} + \sum_{i=2}^M \frac{r_i^{2-\alpha_i} \Omega_i}{\alpha_i^2}} \times f_{R_1}\left(\sqrt{M}r - \sum_{i=2}^M r_i\right) \prod_{i=2}^M f_{R_i}(r_i) dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M \quad (5.27)$$

em que $f_{R_i}(\cdot)$ é dado em (5.21).

Através de (5.9), (5.23) e (5.27), a DMD pode também ser obtida para o caso.

5.2.2 Combinador por Razão Máxima

O CRM já foi explicado na Sec. 5.1.3. Neste caso as expressões para $F_R(\cdot)$, $f_{R, \dot{R}}(\cdot, \cdot)$ e $n_R(\cdot)$ são dadas, respectivamente, por

$$F_R(r) = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_M^2}} \dots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=3}^M r_i^2}} \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=2}^M r_i^2}} \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i) dr_1 dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M \quad (5.28)$$

$$f_{R, \dot{R}}(r, \dot{r}) = \overbrace{\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-r_M^2}} \dots \int_0^{\sqrt{r^2-\sum_{i=3}^M r_i^2}}}^{M-1} \frac{r}{\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}} \times f_{R_1, R_2, \dots, R_M, \dot{R}}\left(\left(\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}\right), r_2, \dots, r_M, \dot{r}\right) dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M \quad (5.29)$$

$$n_R(r) = \sqrt{2\pi} f_m \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - r_M^2}} \cdots \int_0^{\sqrt{r^2 - \sum_{i=3}^M r_i^2}} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2}} \sqrt{\frac{\left(r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2\right)^{\frac{4-\alpha_1}{2}} \Omega_1}{\alpha_1^2} + \sum_{i=2}^M \frac{r_i^{4-\alpha_i} \Omega_i}{\alpha_i^2}} \times f_{R_1} \left(\sqrt{r^2 - \sum_{i=2}^M r_i^2} \right) \prod_{i=2}^M f_{R_i}(r_i) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (5.30)$$

Através de (5.9), (5.28) e (5.30), a DMD para este caso pode ser facilmente obtida.

5.2.3 Casos Especiais

Fórmulas exatas, mais simples, podem ser obtidas para casos particulares das fórmulas gerais encontradas neste trabalho. Além disso, elas podem ser particularizadas para casos conhecidos da literatura.

Novas Expressões em Forma Fechada

As expressões em forma fechada apresentadas nesta subseção foram obtidas para canais com mesma potência, *i.e.*, $\Omega_i = \Omega$, $i = 1, \dots, M$, e os mesmos parâmetros de desvanecimento, *i.e.*, $\alpha_i = \alpha$, $i = 1, \dots, M$. Definindo $\rho = r / \sqrt[\alpha]{\Omega}$, tem-se que

- Para o CGI e $\alpha = 1$

$$n_R(r) = \frac{\sqrt{2\pi} f_m M^{\frac{2M-1}{4}} \rho^{M-\frac{1}{2}}}{\Gamma(M) \exp(\sqrt{M}\rho)} \quad (5.31)$$

$$T_R(r) = \frac{\Gamma(M, \sqrt{M}\rho) \exp(\sqrt{M}\rho)}{\sqrt{2\pi} f_m M^{\frac{2M-1}{4}} \rho^{M-\frac{1}{2}}} \quad (5.32)$$

- Para o CRM, dois-ramos ($M = 2$) e $\alpha = 4$

$$n_R(r) = e^{-\rho^4} \sqrt{\pi} \left(\rho^2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\rho^4 - 1) e^{\frac{\rho^4}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (5.33)$$

$$T_R(r) = \frac{\sqrt{2} (e^{\rho^4} - 1) - \sqrt{\pi} \rho^2 e^{\frac{\rho^4}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2\pi} \rho^2 + \pi (\rho^4 - 1) e^{\frac{\rho^4}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{2}} \right)} \quad (5.34)$$

Resultados da Literatura

Para $M = 1$, os resultados coincidem com os resultados do trabalho de [SZKT04, Eqs. 12 e 13]. Para canais com diversidade balanceados e $\alpha_i = 2$, $i = 1, \dots, M$, as expressões se reduzem ao caso M -ramos dos CGI e CRM do caso Rayleigh iid, dado por [YdSB01, Eqs. 23 e 24] com $m = 1$ e [YdSB01, Eqs. 38 e 39], respectivamente.

5.2.4 Gráficos da TCN e da DMD para o CGI e CRM

Para casos mais gerais, incluindo ramos idênticos e não idênticos, foram feitas simulações de forma *exaustiva* e comparadas com os resultados obtidos aqui analiticamente. Em todos os casos investigados uma excelente concordância foi encontrada entre os resultados analíticos e os simulados. As Figs. 5.3 e 5.4 mostram a TCN e a DMD do CGI e CRM, respectivamente, para $M = 1, 2, 4$ e $\alpha_i = 2, 3, 4$, considerando ramos com potências idênticas. Por questões de clareza, os dados simulados foram omitidos nas figuras. Mas de fato eles são praticamente coincidentes com as curvas teóricas.

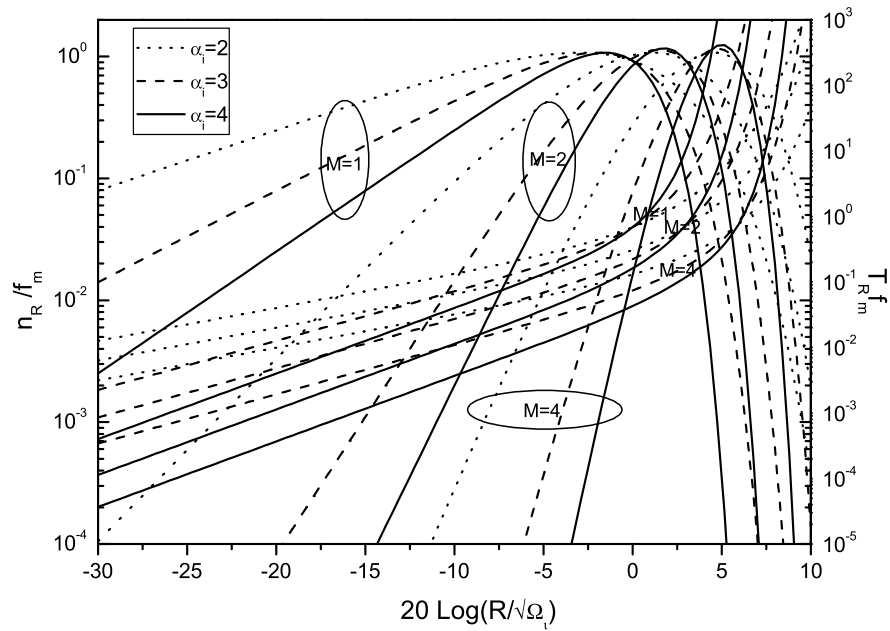


Fig. 5.3: A TCN e a DMD do CGI para ramos com potências idênticas em canais Weibull desvanecidos ($M = 1, 2, 4$ e $\alpha_i = 2, 3, 4$).

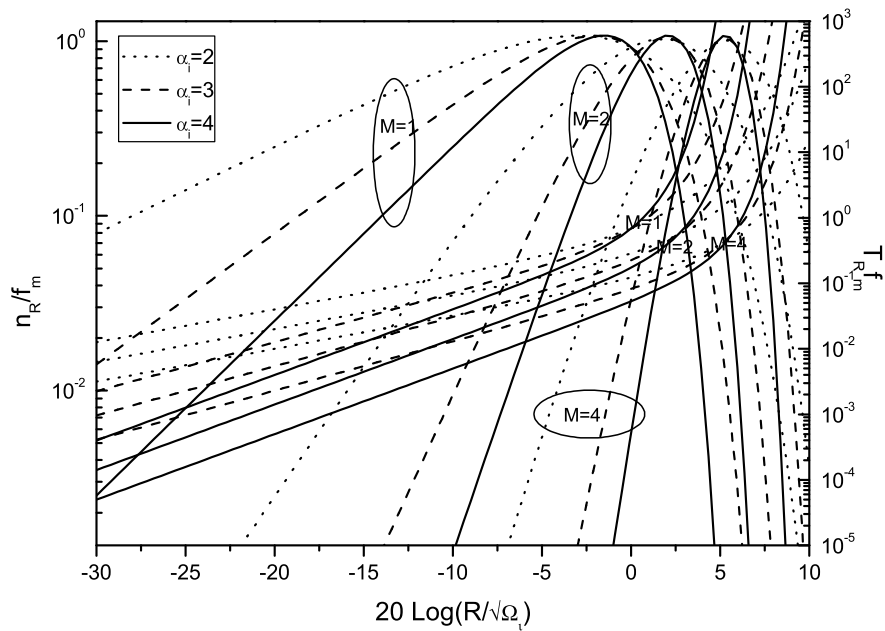


Fig. 5.4: A TCN e a DMD do CRM para ramos com potências idênticas em canais Weibull desvanecidos ($M = 1, 2, 4$ e $\alpha_i = 2, 3, 4$).

5.3 Conclusões

Fórmulas *exatas* para a taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento utilizando as técnicas de diversidade CGI e CRM com M ramos em ambiente Hoyt e Weibull foram obtidas. Estas fórmulas foram validadas especializando-as e comparando-as com resultados particulares, para os quais fórmulas anteriores já haviam sido deduzidas, e de forma mais geral por simulações computacionais.

Capítulo 6

Estatísticas de Segunda Ordem em Sistemas com Dois Ramos Correlacionados em Ambientes Hoyt

Neste capítulo, expressões exatas para a TCN e a DMD para dois ramos utilizando os combinadores por seleção (CS), por ganho igual (CGI) e por razão máxima (CRM) em ambientes Hoyt desvanecidos são apresentadas. As expressões são gerais e se aplicam aos casos não balanceados, correlacionados e foram validadas para casos particulares para os quais os resultados já são conhecidos.

6.1 A FDP Conjunta da Envoltória e Fase para a Distribuição Hoyt

Em um ambiente Hoyt, o sinal recebido na i -ésima antena ($i = 1, 2$), pode ser representado na forma complexa como

$$X_i(t) + \mathbf{i}Y_i(t) = R_i(t) \exp(\mathbf{i} \Theta_i(t)) \quad (6.1)$$

em que $X_i(t)$, $Y_i(t)$ são processos aleatórios estacionários independentes de média zero e variância $\sigma_{X_i}^2$ e $\sigma_{Y_i}^2$, respectivamente e $\eta = \sqrt{-1}$. Os processos aleatórios $R_i(t)$ e $\Theta_i(t)$ seguem a distribuição da envoltória e da fase do modelo de Hoyt [Hoy47], respectivamente.

Agora calcula-se a distribuição conjunta de $X_i \triangleq X_i(t)$, $Y_i \triangleq Y_i(t)$, ($i = 1, 2$). Definindo o vetor $\mathbf{Z} = [X_1 Y_1 X_2 Y_2] = [R_1 \cos(\Theta_1) \ R_1 \sin(\Theta_1) \ R_2 \cos(\Theta_2) \ R_2 \sin(\Theta_2)]$, a distribuição gaussiana conjunta $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ pode ser escrita como [RS66]

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^2 (\det \mathbf{b})^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{z} \mathbf{b}^{-1} \mathbf{z}^T \right) \quad (6.2)$$

em que:

(i) $[\cdot]^T$ denota a matriz transposta e \mathbf{b} é a matriz covariância dada por

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & 0 & \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \mu_{12} & -\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2} \eta_{12} \\ 0 & \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1} \sigma_{X_2} \eta_{12} & \sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2} \mu_{12} \\ \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \mu_{12} & \sigma_{Y_1} \sigma_{X_2} \eta_{12} & \sigma_{X_2}^2 & 0 \\ -\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2} \eta_{12} & \sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2} \mu_{12} & 0 & \sigma_{Y_2}^2 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

(ii) $\mu_{ij} = \mu_{ij}(0)$ e $\eta_{ij} = \eta_{ij}(0)$ são os coeficientes de correlação, definidos como

$$\mu_{ij}(\tau) = \frac{\text{Cov}(X_i(t), X_j(t+\tau))}{\sqrt{\text{Var}(X_i(t)) \text{Var}(X_j(t+\tau))}} = \frac{\text{Cov}(Y_i(t), Y_j(t+\tau))}{\sqrt{\text{Var}(Y_i(t)) \text{Var}(Y_j(t+\tau))}} \quad (i \leq j) \quad (6.4)$$

e

$$\eta_{ij}(\tau) = -\frac{\text{Cov}(X_i(t), Y_j(t+\tau))}{\sqrt{\text{Var}(X_i(t)) \text{Var}(Y_j(t+\tau))}} = \frac{\text{cov}(Y_i(t), X_j(t+\tau))}{\sqrt{\text{Var}(Y_i(t)) \text{Var}(X_j(t+\tau))}} \quad (i \neq j) \quad (6.5)$$

e

$$\eta_{ii}(\tau) = \frac{\text{Cov}(X_i(t), Y_i(t+\tau))}{\sqrt{\text{Var}(X_i(t)) \text{Var}(Y_i(t+\tau))}} \quad (i = 1, 2) \quad (6.6)$$

No caso de processos gaussianos, as seguintes relações são válidas: $\mu_{22} = \mu_{11}$, $\mu_{21} = \mu_{12}$, $\eta_{21} = -\eta_{12}$ e $\eta_{22} = \eta_{11}$ [Jak74]. A FDP conjunta $f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ pode ser escrita como $f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = |J| f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$, em que $|J| = r_1 r_2$ é o Jacobiano da transformação. Portanto, a FDP conjunta de Hoyt da envoltória e fase bidimensional é obtida aqui e dada por

$$f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{r_1 r_2 e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[r_1^2 \left(\frac{\sin^2(\theta_1)}{\sigma_{Y_1}^2} + \frac{\cos^2(\theta_1)}{\sigma_{X_1}^2} \right) + r_2^2 \left(\frac{\sin^2(\theta_2)}{\sigma_{Y_2}^2} + \frac{\cos^2(\theta_2)}{\sigma_{X_2}^2} \right) \right]}}{4\pi^2 (1-\rho^2) \sigma_{X_1} \sigma_{Y_1} \sigma_{X_2} \sigma_{Y_2}} \times e^{\frac{r_1 r_2}{(1-\rho^2)} \left[\mu_{12} \left(\frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_2)}{\sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2}} + \frac{\cos(\theta_1) \cos(\theta_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \right) + \eta_{12} \left(\frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_2)}{\sigma_{Y_1} \sigma_{X_2}} + \frac{\cos(\theta_1) \sin(\theta_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2}} \right) \right]} \quad (6.7)$$

em que

$$\rho^2 = \mu_{12}^2 + \eta_{12}^2 \quad (6.8)$$

6.1.1 Sistemas com Diversidade

A envoltória da saída e sua derivada para o CS, CGI e CRM são dadas, respectivamente, por

$$R = \begin{cases} \max\{R_1, R_2\} & \text{CS} \\ \frac{R_1 + R_2}{\sqrt{2}} & \text{CGI} \\ \sqrt{R_1^2 + R_2^2} & \text{CRM} \end{cases} \quad \dot{R} = \begin{cases} \dot{R}_1 & R_1 \geq R_2 \\ \dot{R}_2 & R_1 < R_2 \\ \frac{\dot{R}_1 + \dot{R}_2}{\sqrt{2}} & \text{CGI} \\ \frac{R_1 \dot{R}_1 + R_2 \dot{R}_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} & \text{CRM} \end{cases} \quad (6.9)$$

Dado que \dot{R}_i é um processo aleatório estacionário gaussiano de média zero [FFY05], fica claro através de (6.9) que a FDP condicional $f_{\dot{R}|R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ é também um processo aleatório gaussiano com média $m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e variância $\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$. Essas quantidades dependem do esquema de combinação e podem ser determinadas posteriormente. Com isso em mente, pode-se escrever

$$f_{\dot{R}, R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = f_{\dot{R}|R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \quad (6.10)$$

Sabendo que $f_{\dot{R}, R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ é dada em (6.10), e as relações entre $R_1, R_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2$ são dadas em (6.9), a FDP conjunta $f_{\dot{R}, R}(\dot{r}, r)$ pode ser obtida e utilizada em (5.8) para o cálculo da TCN.

A questão crucial do problema passa a ser a determinação de

$$f_{\dot{R}|R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)} \exp \left(-\frac{(\dot{r} - m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2))^2}{2 \sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)} \right) \quad (6.11)$$

Mais especificamente, a chave do problema é a determinação de $m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e $\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ para cada esquema de combinação. Por enquanto, considere-se que essas variáveis sejam conhecidas. Portanto a TCN pode ser determinada utilizando [AFP88, Eq. 8] para o CS e de [FFY05, Eqs. (12) e (17)] para o CGI e CRM, respectivamente, como sendo

$$n_R(r) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \vartheta(r_1, r) f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, r, \theta_1, \theta_2) dr_1 d\theta_1 d\theta_2 \\ \quad + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \vartheta(r, r_2) f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r, r_2, \theta_1, \theta_2) dr_2 d\theta_1 d\theta_2 & \text{CS} \\ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}r} \sqrt{2} \vartheta(r_1, \sqrt{2}r - r_1) f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, \sqrt{2}r - r_1, \theta_1, \theta_2) dr_1 d\theta_1 d\theta_2 & \text{CGI} \\ \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_1^2}} \vartheta(r_1, \sqrt{r^2 - r_1^2}) f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, \sqrt{r^2 - r_1^2}, \theta_1, \theta_2) dr_1 d\theta_1 d\theta_2 & \text{CRM} \end{cases} \quad (6.12)$$

no qual

$$\vartheta(r_1, r_2) \triangleq \int_0^\infty \dot{r} f_{\dot{R}|R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) d\dot{r} \quad (6.13)$$

Usando (6.11) em (6.13), pode-se encontrar esta integral de forma fechada como sendo

$$\vartheta(r_1, r_2) = \frac{\sigma_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{m_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{2 \sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)} \right) + \frac{m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{2} \sigma_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)} \right) \right) \quad (6.14)$$

Utilizando a metodologia dada em [Bre59], a FCP $F_R(r)$ é dada por

$$F_R(r) = \int_0^{\gamma_1} \int_0^{\gamma_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dr_2 dr_1 \quad (6.15)$$

com

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 = r & \text{para o CS} \\ \gamma_1 = \sqrt{2}r & \gamma_2 = \sqrt{2}r - r_1 & \text{para o CGI} \\ \gamma_1 = r & \gamma_2 = \sqrt{r^2 - r_1^2} & \text{para o CRM} \end{cases} \quad (6.16)$$

A DMD segue diretamente de (5.9), (6.12) e (6.15).

6.2 Estatísticas Condicionais de \dot{R}

O objetivo desta seção é encontrar a média $m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ e a variância $\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ da FDP gaussiana condicional $f_{\dot{R}|R_1, R_2, \Theta_1, \Theta_2}(\dot{r}|r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)$ para cada esquema de combinação.

6.2.1 Preliminares

Através de (6.1), pode-se escrever

$$\dot{R}_i = \cos(\theta_i)\dot{X}_i + \sin(\theta_i)\dot{Y}_i \quad (6.17)$$

Logo

$$m_{\dot{R}_i}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \triangleq E[\dot{R}_i|\mathbf{Z}] = \cos(\theta_i) E[\dot{X}_i|\mathbf{Z}] + \sin(\theta_i) E[\dot{Y}_i|\mathbf{Z}] \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{R}_i}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) &\triangleq \text{Var}(\dot{R}_i|\mathbf{Z}) = \cos^2(\theta_i) \text{Var}[\dot{X}_i|\mathbf{Z}] + \sin^2(\theta_i) \text{Var}[\dot{Y}_i|\mathbf{Z}] + \\ &\quad + \sin(2\theta_i) \text{Cov}[\dot{X}_i, \dot{Y}_i|\mathbf{Z}] \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{R}_1, \dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) &\triangleq \text{Cov}(\dot{R}_1, \dot{R}_2|\mathbf{Z}) = E[\dot{R}_1 \dot{R}_2|\mathbf{Z}] - E[\dot{R}_1|\mathbf{Z}] E[\dot{R}_2|\mathbf{Z}] = \\ &= \cos(\theta_1) \left[\cos(\theta_2) \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2|\mathbf{Z}) + \sin(\theta_2) \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) \right] + \\ &\quad + \sin(\theta_1) \left[\cos(\theta_2) \text{Cov}(\dot{Y}_1, \dot{X}_2|\mathbf{Z}) + \sin(\theta_2) \text{Cov}(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

Note que, através de (6.18) e (6.19), a média e a variância de \dot{R}_i dado \mathbf{Z} podem ser calculadas em função da média, variância e covariância de \dot{X}_i e \dot{Y}_i conhecendo \mathbf{Z} . Para obter essas estatísticas, os seguintes passos serão realizados:

1. Definindo $\dot{\mathbf{Z}} = [\dot{X}_1 \ \dot{Y}_1 \ \dot{X}_2 \ \dot{Y}_2]$, a FDP multivariável gaussiana $f_{\{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\}}(\{\dot{\mathbf{z}}|\mathbf{z}\})$ ¹ é determinada;
2. Usando o resultado de [RS66], a matriz média \mathbf{M} e a matriz covariância $\mathbf{\Delta}$ da distribuição gaussiana condicional $f_{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}}(\dot{\mathbf{z}}|\mathbf{z})$ são obtidas;
3. Usando essas matrizes, a média, a variância e a covariância de \dot{X}_i e \dot{Y}_i dado \mathbf{Z} são obtidas;
4. Finalmente, usando (6.18), (6.19) e (6.20) a média e variância de \dot{R} dado \mathbf{Z} são encontradas.

Para determinar $f_{\{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\}}(\{\dot{\mathbf{z}}|\mathbf{z}\})$, a FDP multivariável gaussiana, dada em (6.2), é usada com matriz covariância

$$\mathbf{\Lambda} = E[\{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\}^T \{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\}] - E[\{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\}^T] E[\{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

¹ $\{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}\} = [\dot{X}_1 \ \dot{Y}_1 \ \dot{X}_2 \ \dot{Y}_2 \ X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2]$

Usando os resultados de [Pap02, Eq. 9.106], as seguintes relações são válidas:

$$E[P(t)\dot{P}(t+\tau)] = \frac{dE[P(t)P(t+\tau)]}{d\tau} \quad (6.22)$$

$$E[\dot{P}(t)P(t+\tau)] = -\frac{dE[P(t)P(t+\tau)]}{d\tau} \quad (6.23)$$

$$E[\dot{P}(t)\dot{P}(t+\tau)] = -\frac{d^2E[P(t)P(t+\tau)]}{d\tau^2} \quad (6.24)$$

Definem-se

$$\dot{\mu}_{ij} = \left. \frac{d\mu_{ij}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (6.25)$$

$$\ddot{\mu}_{ij} = \left. \frac{d^2\mu_{ij}(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} \quad (6.26)$$

$$\dot{\eta}_{ij} = \left. \frac{d\eta_{ij}(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (6.27)$$

$$\ddot{\eta}_{ij} = \left. \frac{d^2\eta_{ij}(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} \quad (6.28)$$

em que $\mu_{ij}(\tau)$ e $\eta_{ij}(\tau)$ são dados em (6.4), (6.5) e (6.6). Usando esses resultados, as matrizes \mathbf{a} e \mathbf{c} podem ser escritas da seguinte forma

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\ddot{\mu}_{11}\sigma_{X_1}^2 & 0 & -\ddot{\mu}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \ddot{\eta}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_2} \\ 0 & -\ddot{\mu}_{11}\sigma_{Y_1}^2 & -\ddot{\eta}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{X_2} & -\ddot{\mu}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} \\ -\ddot{\mu}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & -\ddot{\eta}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{X_2} & -\ddot{\mu}_{11}\sigma_{X_2}^2 & 0 \\ \ddot{\eta}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_2} & -\ddot{\mu}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} & 0 & -\ddot{\mu}_{11}\sigma_{Y_2}^2 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\eta}_{11}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_1} & -\dot{\mu}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \dot{\eta}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_2} \\ \dot{\eta}_{11}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_1} & 0 & -\dot{\eta}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{X_2} & -\dot{\mu}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} \\ \dot{\mu}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} & \dot{\eta}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{X_2} & 0 & -\dot{\eta}_{11}\sigma_{X_2}\sigma_{Y_2} \\ -\dot{\eta}_{12}\sigma_{X_1}\sigma_{Y_2} & \dot{\mu}_{12}\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2} & \dot{\eta}_{11}\sigma_{X_2}\sigma_{Y_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

e a matriz \mathbf{b} é dada em (6.3). Note que os elementos da diagonal principal na matriz \mathbf{c} são todos nulos, já que em um processo estacionário o coeficiente de correlação entre o processo e sua derivada temporal é sempre nulo em $\tau = 0$ ($\dot{\mu}_{11} = 0$) [Pap02].

Usando os resultados de [RS66, pp. 495-496], a FDP condicional de $\dot{\mathbf{Z}}$ dado \mathbf{Z} ², $f_{\dot{\mathbf{Z}}|\mathbf{Z}}(\dot{\mathbf{z}}|\mathbf{z})$, é distribuída de acordo com a distribuição gaussiana com matriz média \mathbf{M} e matriz covariância Δ dadas por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} E[\dot{X}_1|\mathbf{Z}] \\ E[\dot{Y}_1|\mathbf{Z}] \\ E[\dot{X}_2|\mathbf{Z}] \\ E[\dot{Y}_2|\mathbf{Z}] \end{bmatrix} = (\mathbf{c}\mathbf{b}^{-1}) \mathbf{Z} \quad (6.31)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \text{Var}(\dot{X}_1|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{Y}_1|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) \\ \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{Y}_1|\mathbf{Z}) & \text{Var}(\dot{Y}_1|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{Y}_1, \dot{X}_2|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) \\ \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{X}_2|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{Y}_1, \dot{X}_2|\mathbf{Z}) & \text{Var}(\dot{X}_2|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{X}_2, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) \\ \text{Cov}(\dot{X}_1, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) & \text{Cov}(\dot{X}_2, \dot{Y}_2|\mathbf{Z}) & \text{Var}(\dot{Y}_2|\mathbf{Z}) \end{bmatrix} = \mathbf{a} - \mathbf{c}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{c}^T \quad (6.32)$$

Usando essas expressões e depois de um processo longo e tedioso, as matrizes \mathbf{M} e Δ podem ser obtidas na seguinte forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1x_1 + m_2\frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{Y_1}}y_1 + m_3\frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}}x_2 + m_4\frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{Y_2}}y_2 \\ -m_2\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{X_1}}x_1 + m_1y_1 - m_4\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{X_2}}x_2 + m_3\frac{\sigma_{Y_1}}{\sigma_{Y_2}}y_2 \\ -m_3\frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{X_1}}x_1 + m_4\frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{Y_1}}y_1 - m_1x_2 + m_2\frac{\sigma_{X_2}}{\sigma_{Y_2}}y_2 \\ -m_4\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{X_1}}x_1 - m_3\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{Y_1}}y_1 - m_2\frac{\sigma_{Y_2}}{\sigma_{X_2}}x_2 - m_1y_2 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

²Note que fornecer a informação das variáveis $\mathbf{Z} = [X_1Y_1X_2Y_2]$ é o mesmo que fornecer a informação sobre as variáveis $[R_1\Theta_1R_2\Theta_2]$.

$$\Delta = - \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 \Delta_1 & 0 & \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \Delta_2 & -\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2} \Delta_3 \\ 0 & \sigma_{Y_1}^2 \Delta_1 & \sigma_{X_2} \sigma_{Y_1} \Delta_3 & \sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2} \Delta_2 \\ \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} \Delta_2 & \sigma_{X_2} \sigma_{Y_1} \Delta_3 & \sigma_{X_2}^2 \Delta_1 & 0 \\ -\sigma_{X_1} \sigma_{Y_2} \Delta_3 & \sigma_{Y_1} \sigma_{Y_2} \Delta_2 & 0 & \sigma_{Y_2}^2 \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

em que

$$m_1 = \frac{\mu_{12} \dot{\mu}_{12} + \eta_{12} \dot{\eta}_{12}}{1 - \rho^2} \quad (6.35)$$

$$m_2 = \frac{\eta_{12} \dot{\mu}_{12} - \mu_{12} \dot{\eta}_{12} - \dot{\eta}_{11}}{1 - \rho^2} \quad (6.36)$$

$$m_3 = \frac{\dot{\eta}_{11} \eta_{12} - \dot{\mu}_{12}}{1 - \rho^2} \quad (6.37)$$

$$m_4 = \frac{\dot{\eta}_{12} + \dot{\eta}_{11} \mu_{12}}{1 - \rho^2} \quad (6.38)$$

$$\Delta_1 = \ddot{\mu}_{11} + \frac{\dot{\mu}_{12}^2 + \dot{\eta}_{12}^2 + \dot{\eta}_{11}^2 + 2\dot{\eta}_{11} (\mu_{12} \dot{\eta}_{12} - \dot{\mu}_{12} \eta_{12})}{1 - \rho^2} \quad (6.39)$$

$$\Delta_2 = \ddot{\mu}_{12} + \frac{2 \dot{\eta}_{12} (\eta_{12} \dot{\mu}_{12} - \dot{\eta}_{11}) - \mu_{12} (\dot{\mu}_{12}^2 - \dot{\eta}_{11}^2 - \dot{\eta}_{12}^2)}{1 - \rho^2} \quad (6.40)$$

$$\Delta_3 = \ddot{\eta}_{12} + \frac{2 \dot{\mu}_{12} (\dot{\eta}_{11} + \mu_{12} \dot{\eta}_{12}) + \eta_{12} (\dot{\eta}_{12}^2 - \dot{\eta}_{11}^2 - \dot{\mu}_{12}^2)}{1 - \rho^2} \quad (6.41)$$

e ρ é dado em (6.8).

6.2.2 Média e Variância dos \dot{R}_i s

Usando (6.9), as médias e as variâncias condicionais, para cada esquema de combinação, são obtidas em seguida.

Combinador por Seleção

- se $R_1 \geq R_2$

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \quad (6.42)$$

$$\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \sigma_{\dot{R}_1}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \quad (6.43)$$

- se $R_1 < R_2$

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \quad (6.44)$$

$$\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \sigma_{\dot{R}_2}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \quad (6.45)$$

Combinador por Ganho Igual

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{2}} \quad (6.46)$$

$$\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{\sigma_{\dot{R}_1}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + \sigma_{\dot{R}_2}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + 2\sigma_{\dot{R}_1, \dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{2} \quad (6.47)$$

Combinador por Razão Máxima

$$m_{\dot{R}}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{r_1 m_{\dot{R}_1}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + r_2 m_{\dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

$$\sigma_{\dot{R}}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{r_1^2 \sigma_{\dot{R}_1}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + r_2^2 \sigma_{\dot{R}_2}^2(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) + 2r_1 r_2 \sigma_{\dot{R}_1, \dot{R}_2}(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2)}{r_1^2 + r_2^2} \quad (6.48)$$

6.2.3 Casos Especiais

Para o caso Rayleigh, $\sigma_{X_i} = \sigma_{Y_i} = \sigma$ ($i = 1, 2$), as Equações de (6.42) a (6.48) se reduzem de forma *exata* às equações de [AFP88, Eqs. 26 e 27]. No caso de independência dos ramos (*i.e.*, grande separação entre as antenas) a média e a variância não são função de R_1 , R_2 , Θ_1 e Θ_2 pois $\mu_{12} = \dot{\mu}_{12} = \ddot{\mu}_{12} = \eta_{12} = \dot{\eta}_{11} = \dot{\eta}_{12} = \ddot{\eta}_{12} = 0$. Portanto, neste caso, os resultados coincidem com os resultados do trabalho [FFY05] para o CGI e CRM com o número de ramos $M = 2$.

6.3 Resultados Numéricos

As expressões obtidas para a TCN e a DMD são gerais e podem ser aplicadas para qualquer tipo de diversidade (espaço, frequência ou tempo). Nesta seção, considera-se a diversidade espacial na estação móvel, da mesma forma como foi feito em [AFP88]. Supondo ondas incidentes com mesma amplitude e fases independentes, a função de correlação cruzada é dada por [Jak74, Lee69]

$$\mu_{11}(\tau) = \frac{J_0(2\pi f_m \tau)}{1 + (\Delta\omega \bar{T})^2} \quad (6.49)$$

$$\mu_{12}(\tau) = \frac{J_0\left(2\pi\sqrt{(f_m \tau)^2 + (d/\lambda)^2} - 2(f_m \tau)(d/\lambda)\cos(\xi)\right)}{1 + (\Delta\omega \bar{T})^2} \quad (6.50)$$

$$\eta_{11}(\tau) = \Delta\omega \bar{T} \mu_{11}(\tau) \quad (6.51)$$

$$\eta_{12}(\tau) = \Delta\omega \bar{T} \mu_{12}(\tau) \quad (6.52)$$

em que $J_0(\cdot)$ é a função de Bessel de ordem zero, λ é o comprimento de onda, f_m é o desvio Doppler máximo dado em Hz, d é a distância entre as antenas, $\Delta\omega$ é a separação em frequência (angular), \bar{T} é o espalhamento temporal e $\xi \in [0, 2\pi]$ é o ângulo entre o eixo da antena e a direção do veículo em radianos.

No caso de haver uma separação de frequência nula segue que $\eta_{11}(\tau) = 0$ e $\eta_{12}(\tau) = 0$. O coeficiente de correlação pode ser calculado como

$$\mu_{11} = 1 \quad (6.53)$$

$$\mu_{12} = J_0(2\pi d/\lambda) \quad (6.54)$$

$$\dot{\mu}_{11} = 0 \quad (6.55)$$

$$\dot{\mu}_{12} = 2\pi f_m \cos(\xi) J_1(2\pi d/\lambda) \quad (6.56)$$

$$\ddot{\mu}_{11} = -2(\pi f_m)^2 \quad (6.57)$$

$$\ddot{\mu}_{12} = (2\pi f_m)^2 \left\{ \frac{J_1(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} \cos(2\xi) - \cos^2(\xi) J_0(2\pi d/\lambda) \right\} \quad (6.58)$$

em que $J_1(\cdot)$ é a função de Bessel de primeira ordem.

Nas figuras a seguir foi usado o parâmetro de Hoyt [Hoy47] $b_i \triangleq \frac{\sigma_{X_i}^2 - \sigma_{Y_i}^2}{\sigma_{X_i}^2 + \sigma_{Y_i}^2}$ e potências individuais $\Omega_i = \sigma_{X_i}^2 + \sigma_{Y_i}^2$.

Por questão de simplicidade, os ramos são considerados balanceados e idênticos. As Figs. 6.1 e 6.2 mostram a TCN normalizada (eixo esquerdo vertical), n_R/f_m , e a DMD (eixo direito vertical), $T_R f_m$, para $\xi = 0^\circ$ e $\xi = 90^\circ$, respectivamente, em função do nível da envoltória (em dB), para o CS, CGI e CRM. Os seguintes parâmetros foram utilizados: $d/\lambda = 0.06$ e $b_i = 0.5$.

As Figs. 6.3 e 6.4 mostram a TCN e a DMD normalizadas para dois diferentes ângulos de antena $\xi = 0^\circ$ e $\xi = 90^\circ$, respectivamente, em função do parâmetro d/λ , para o CS, CGI e CRM. O nível da envoltória utilizado foi de $r/\sqrt{\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}} = -20$ dB, os parâmetros da distribuição Hoyt que foram utilizados foram $b_i = 0.5$ e a potência de cada canal foi feita a mesma, ou seja, balanceada. Pode ser visto que quando o espaçamento entre as antenas aumenta a TCN diminui, tornando-se oscilatória e convergente. A Fig. 6.3 também ilustra que o CRM tem a menor TCN para ambos os ângulos da antena. Pode ser visto na Fig. 6.4 que o formato da curva da DMD para o CS, CGI e CRM é pouco dependente do espaçamento entre as antenas quando $\xi = \pi/2$.

6.4 Conclusões

Fórmulas *exatas* para a TCN e a DMD utilizando os combinadores por seleção, ganho igual e razão máxima com dois ramos em ambientes não balanceados, não idênticos e correlacionados foram apresentadas. Como resultado parcial, foi deduzida a distribuição bidimensional conjunta da fase e envoltória para a distribuição Hoyt. As fórmulas foram validadas especializando os resultados gerais em resultados em que já se conheciam fórmulas anteriores.

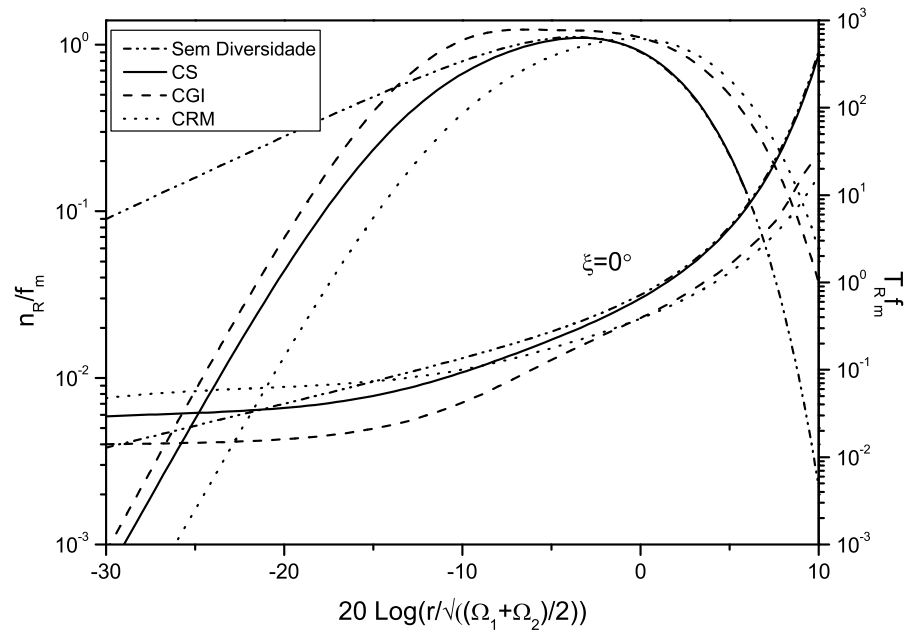


Fig. 6.1: A TCN e a DMD normalizadas para $d/\lambda = 0.06$, $\xi = 0^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$.

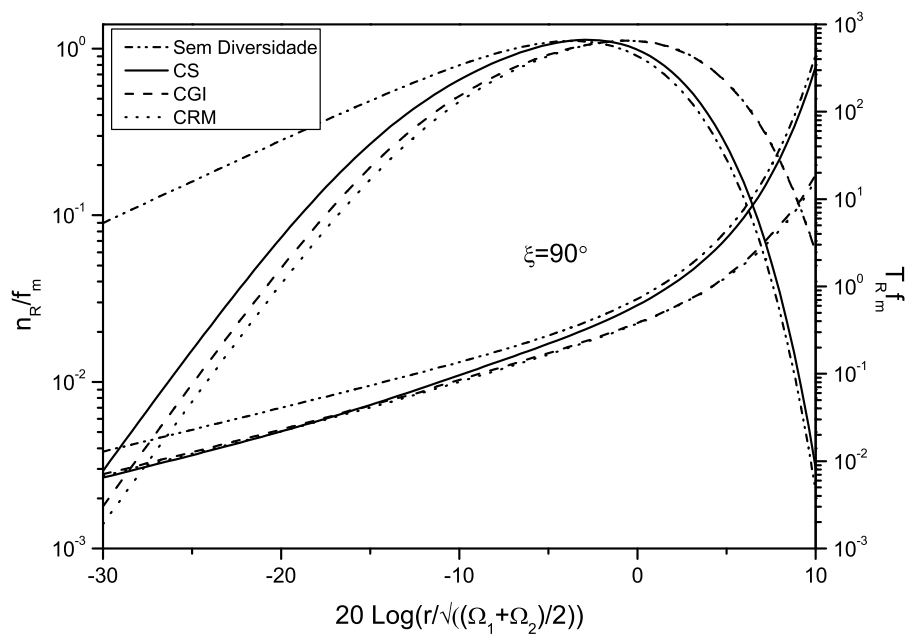


Fig. 6.2: A TCN e a DMD normalizadas para $d/\lambda = 0.06$, $\xi = 90^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$.

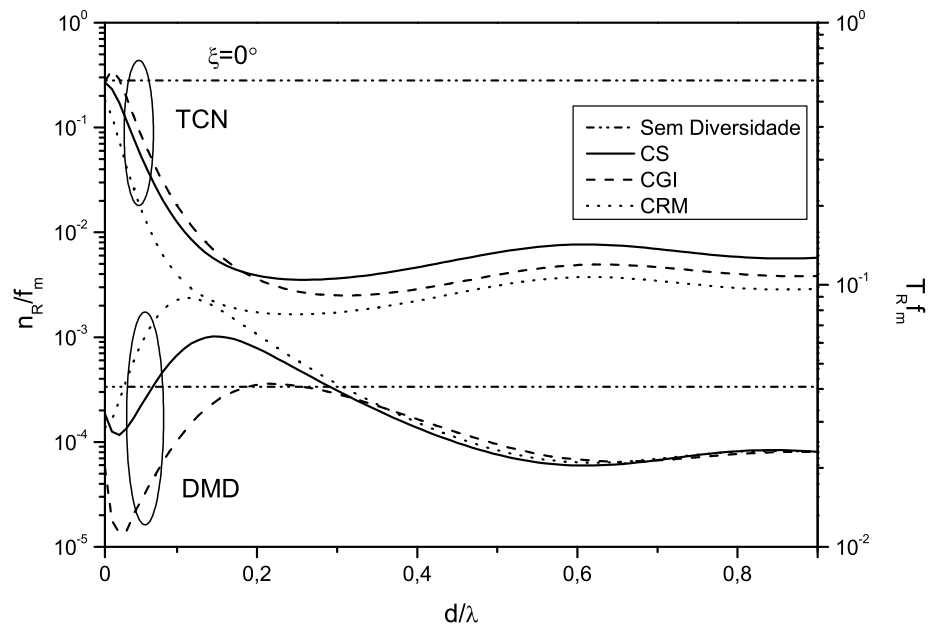


Fig. 6.3: A TCN e a DMD normalizadas para $r/\sqrt{\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}} = -20\text{dB}$, $\xi = 0^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$.

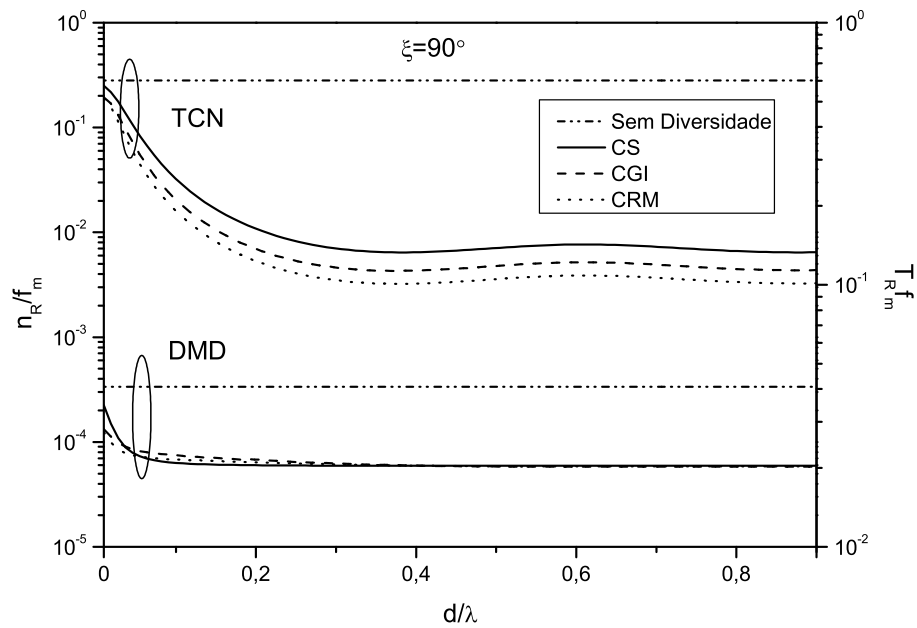


Fig. 6.4: A TCN e a DMD normalizadas para $r/\sqrt{\frac{\Omega_1+\Omega_2}{2}} = -20\text{dB}$, $\xi = 90^\circ$ e parâmetros de Hoyt idênticos $b_i = 0.5$.

Parte III

Distribuição de Fase

Capítulo 7

A FDP Conjunta para a Envoltória e Fase da Distribuição Nakagami- m

Neste capítulo, a FDP conjunta para a envoltória e fase da distribuição Nakagami- m é obtida. Quando $m = 1$ a distribuição Nakagami- m se reduz a distribuição Rayleigh e portanto a distribuição da fase neste caso é uniforme. Exceto para o caso $m = 1$, a distribuição da fase é não uniforme. Para valores quaisquer, seu formato assemelha-se com a FDP de Hoyt ($0.5 \leq m \leq 1$) ou Rice ($1 \leq m \leq \infty$) e coincide com estas nos casos limites.

7.1 Introdução

Quando a distribuição da envoltória Nakagami- m foi proposta [Nak60], nada foi dito em relação à distribuição da fase. Com isso, a suposição comumente adotada é a de que a fase é uniforme, independentemente do parâmetro m [BC01, YN00, IM02]. Este capítulo propõe uma nova distribuição de fase para a distribuição Nakagami- m baseada em um consistente modelo de desvanecimento.

Como é de conhecimento na literatura, a distribuição Nakagami- m aproxima a distribuição Hoyt para $0.5 \leq m \leq 1$ e a de Rice para $m > 1$. De fato, quando o parâmetro de Hoyt vale $b = 0$, o de Rice $k = 0$ e o de Nakagami $m = 1$, estas três distribuições se particularizam na distribuição

Rayleigh, na qual a distribuição de fase se aplica. Exceto para este valor em particular, a distribuição de fase para Hoyt e Rice são não uniformes. Além disso, para $b = \pm 1$ e $m = 0.5$, as distribuições da envoltória de Hoyt e Nakagami- m coincidem com a distribuição gaussiana unilateral, para a qual a distribuição de fase de Hoyt são funções impulsos em 0 e π , ou em $\pi/2$ e $3\pi/2$. Além disso, para $k \rightarrow \infty$ e $m \rightarrow \infty$, as distribuições da envoltória de Rice e Nakagami- m também tendem a coincidir, mas a fase de Rice neste caso tende à função impulso em que a componente dominante (linha de visada) predomina. Por exemplo, se a energia da componente dominante é igualmente distribuída entre as componentes em fase e em quadratura, as funções impulsos correspondentes aparecem em $\pi/4$ ou $3\pi/4$ ou $5\pi/4$ ou $7\pi/4$. Por uma questão de consistência, qualquer modelo de fase proposto para o sinal Nakagami- m deve satisfazer essas propriedades. Mais especificamente, essa nova distribuição de fase deve coincidir com as distribuições Hoyt e Rice nos casos em que as distribuições da envoltória também coincidem. Também seria desejável que para outros casos a distribuição da fase produzisse formas semelhantes equivalentemente ao que ocorre com a distribuição da envoltória. O atendimento destas condições pode, provavelmente, ser levado a efeito de diversas maneiras, mas o requisito fundamental é manter a formulação a mais simples possível, como por exemplo, sem ter de incluir novos parâmetros. Este capítulo propõe um novo modelo para a distribuição de fase para a distribuição Nakagami- m .

7.2 A Distribuição Conjunta Fase-Envoltória para Nakagami- m

Sejam R e Θ VAs representando, respectivamente, a envoltória e a fase do sinal de Nakagami- m . A FDP conjunta $f_{R,\Theta}(r, \theta)$ como proposta aqui é dada por

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{m^m |\sin(2\theta)|^{m-1} r^{2m-1}}{2^{m-1} \Omega^m \Gamma^2(m/2)} \exp\left(-\frac{m r^2}{\Omega}\right) \quad (7.1)$$

A FDP da envoltória $f_R(r)$ é a já bem conhecida distribuição Nakagami- m [Nak60]

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{m r^2}{\Omega}\right) \quad (7.2)$$

e a FDP da fase $f_\Theta(\theta)$ é dada por

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(m) |\sin(2\theta)|^{m-1}}{2^m \Gamma^2(m/2)} \quad (7.3)$$

Claramente

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = f_R(r) \times f_\Theta(\theta) \quad (7.4)$$

i.e., a fase e a envoltória são VAs independentes.

7.3 Obtenção da FDP Conjunta

Seja $N = R \exp(j\Theta)$ o sinal Nakagami- m , no qual R é a envoltória e Θ é a fase. Portanto

$$R^2 = X^2 + Y^2 \text{ e } \Theta = \tan^{-1}(Y / X) \quad (7.5)$$

em que

$$X = R \cos \Theta \text{ e } Y = R \sin \Theta \quad (7.6)$$

são as componentes em fase e em quadratura do sinal. Para m inteiro

$$Z^2 = \sum_{i=1}^m G_i^2 \quad (7.7)$$

em que $Z = X$ ou $Z = Y$, como necessário, e G_i é uma VA gaussiana de média zero e variância $\Omega/(2m)$. A seguir a distribuição de Z é obtida.

Como passo intermediário, encontra-se a FDP $f_W(w)$ de $W = Z^2$, que segue uma distribuição

chi-quadrada com m graus de liberdade, i.e. [Pap02]

$$f_W(w) = \frac{m^{\frac{m}{2}} w^{\frac{m}{2}-1}}{\Omega^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \exp\left(-\frac{mw}{\Omega}\right) \quad (7.8)$$

A variável Z pode ser escrita como

$$Z = \text{sgn}(Z) \times |Z| \quad (7.9)$$

em que $\text{sgn}(\cdot)$ é a função sinal. Note que $|Z| = \sqrt{W}$. Portanto

$$f_{|Z|}(|z|) = \frac{2m^{\frac{m}{2}} |z|^{m-1}}{\Omega^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \exp\left(-\frac{mz^2}{\Omega}\right) \quad (7.10)$$

Motivado pelo fato de que para $m = 1$ a distribuição de Z deve se reduzir à distribuição gaussiana, considera-se que valores positivos e negativos de Z ocorrem com probabilidade idêntica. Portanto a FDP $f_Z(z)$ de Z é obtida através de (7.10) como

$$f_Z(z) = \frac{m^{\frac{m}{2}} |z|^{m-1}}{\Omega^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \exp\left(-\frac{mz^2}{\Omega}\right) \quad -\infty < z < \infty \quad (7.11)$$

Usando a transformação dada em (7.5) segue que $f_{R,\Theta}(r, \theta) = |J| f_{X,Y}(x, y)$, em que $|J|$ é o Jacobiano da transformação dado por $|J| = r$. Usando agora a independência entre X e Y pode-se escrever que $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$, observando que as FDP marginais são dadas em (7.11). Realizando todos os procedimentos matemáticos a expressão em (7.1) é obtida. Embora obtida para valores inteiros de m , não há nenhuma restrição matemática para que esta expressão seja utilizada para qualquer $m > 0$.

7.4 Discussão dos Resultados

Nesta seção será feita uma comparação entre a distribuição de fase de Nakagami- m , obtida aqui, e a distribuição Hoyt e Rice. A FDP da fase de Hoyt é dada em [Hoy47]

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{2\pi(1-b\cos(2\theta))} \quad (7.12)$$

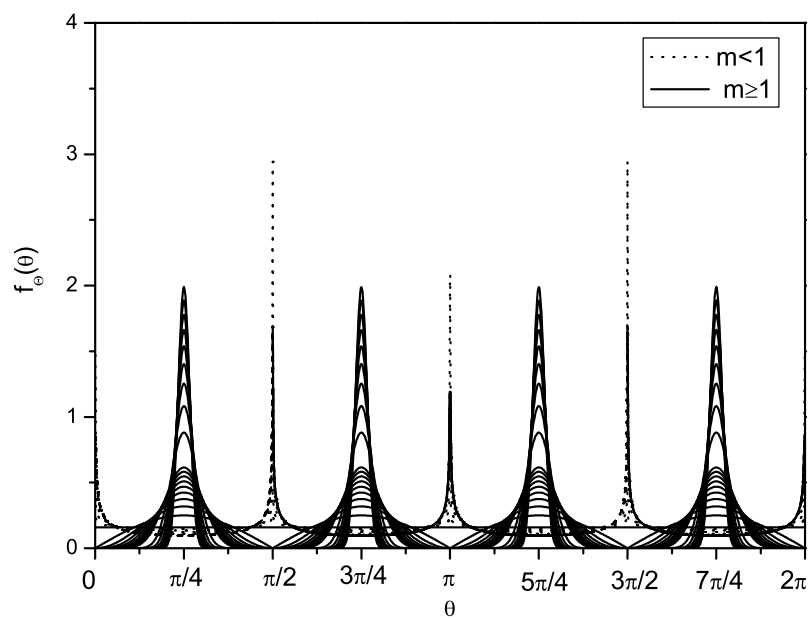
em que $-1 \leq b \leq 1$ é o parâmetro de Hoyt. A FDP de Rice é dada por

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1 + 2\sqrt{\pi k} e^{4k \cos^2(\theta-\phi)} \cos(\theta-\phi)}{2\pi e^{4k}} \left(1 + \operatorname{erf}(2\sqrt{k} \cos(\theta-\phi))\right) \quad (7.13)$$

em que $k \geq 0$ é o parâmetro de Rice e ϕ é a fase a qual depende da razão das componentes em quadratura e em fase do sinal. Se estas forem idênticas em módulo, então $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. A Fig. 7.1 descreve as várias formas da FDP da fase de Nakagami- m $f_{\Theta}(\theta)$ em função de θ para $m = 0.5, \dots, \infty$. Note que para $m = 0.5$ a função impulso tende a correr em $0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$; para $m = 1$ a distribuição é uniforme; e para $m \rightarrow \infty$ a função impulso tende a ocorrer em $\pm\pi/4$ e $\pm3\pi/4$. Para fins de comparação, a Fig. 7.2 mostra as formas da distribuição de fase de Hoyt e Rice variando os seus respectivos parâmetros. Note que ambas as Fig. 7.1 e 7.2 exibem formas similares e são coincidentes nos casos limites. A Fig. 7.3 mostra a forma da FDP da fase de Nakagami- m em coordenadas polares.

7.5 Conclusões

Este capítulo apresentou a distribuição conjunta da fase e envoltória para Nakagami- m . Contrariamente ao que é usualmente considerado, exceto para o caso $m = 1$, a FDP da fase de Nakagami- m é não uniforme. Ao invés disso, este trabalho propôs uma nova distribuição de fase em que sua forma varia de acordo com o parâmetro m . A nova distribuição apresentou formas similares às distribuições Hoyt e Rice e coincide com elas nos casos limites, em que as distribuições das envoltórias também

Fig. 7.1: Distribuição de fase de Nakagami- m .

coincidem.

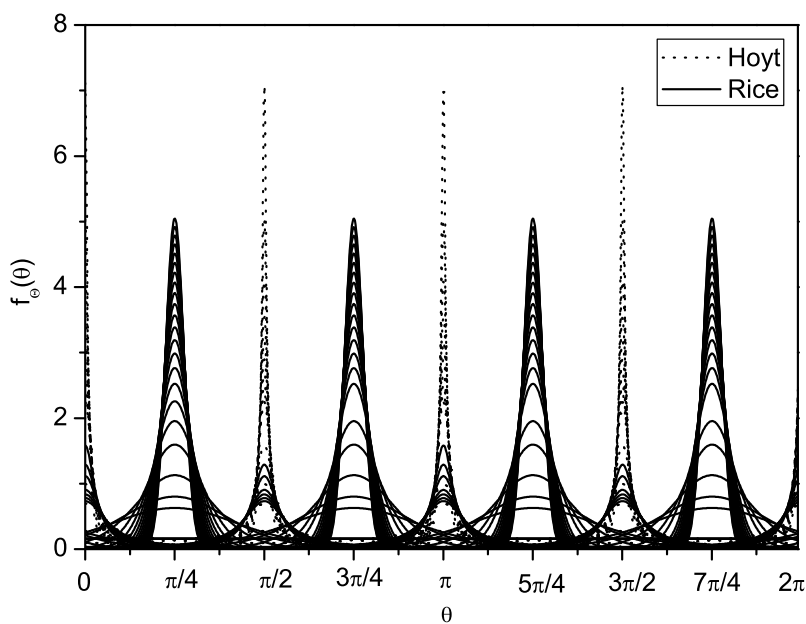
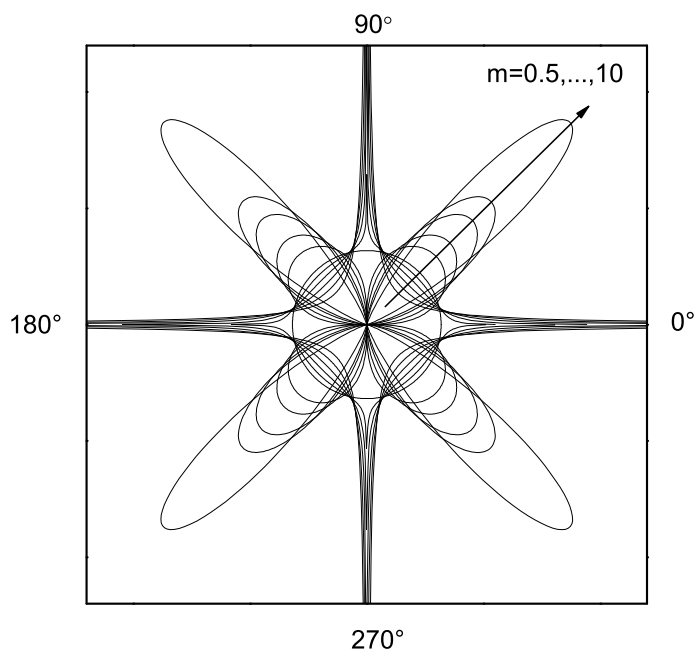


Fig. 7.2: Distribuição da fase de Rice e Hoyt.

Fig. 7.3: Distribuição da fase de Nakagami- m em coordenadas polares.

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, uma nova distribuição de probabilidade amplamente geral, a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, foi proposta. Através dessa distribuição pode-se obter, como casos particulares, várias outras distribuições conhecidas na literatura, tais como Rayleigh, Rice, Nakagami- m , Hoyt (Nakagami- q), Weibull, $\alpha - \mu$ (Gamma Generalizada) $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$. Por conta de sua generalidade, todos os mais importantes ambientes de desvanecimento podem ser modelados por essa distribuição. Além de prover a função densidade de probabilidade para a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$, os momentos e a função cumulativa de probabilidade também foram encontrados.

Para quatro dos casos particulares desta distribuição, as distribuições $\alpha - \eta - \mu$, $\alpha - \kappa - \mu$, $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica, estimadores baseados nos momentos foram propostos. A aplicabilidade destes estimadores foi verificada utilizando medidas de campo realizadas na Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação da Unicamp com um equipamento construído no laboratório Wisstek para esta finalidade.

Em seguida, estatísticas de segunda ordem, em particular a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento, foram encontradas de forma exata para as distribuições Hoyt e Weibull em ambientes com M ramos desbalanceados, não idênticos e independentes utilizando os combinadores por ganho igual e por razão máxima. Para validar as novas expressões, estas foram comparadas com dados de simulações e reduzidas a casos nos quais os resultados já eram conheci-

dos. Além disso, para alguns destes casos particulares, as expressões gerais foram simplificadas e obtidas através de fórmulas fechadas.

Estendendo esse último trabalho e seguindo o pioneiro trabalho de Adachi, que abordou o caso Rayleigh, a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento foram obtidas para ambientes Hoyt desvanecidos com dois ramos correlacionados. Neste trabalho, reformulou-se a metodologia de Adachi, já que, para o caso estudado, a mesma abordagem não seria possível pela maior complexidade da distribuição Hoyt em relação à distribuição Rayleigh. Assim, obteve-se um procedimento geral para a análise da taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento em ambientes com apenas um *cluster*, tais como Rice, Weibull, $\eta - \kappa$ Simétrica e $\eta - \kappa$ Assimétrica.

Finalmente este trabalho propôs, de forma precursora, uma distribuição marginal para a fase da distribuição Nakagami- m . Ao contrário do que convencionalmente se pensava, a distribuição não é uniforme e independente do parâmetro m , mas extremamente dependente de tal parâmetro.

8.1 Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho foram identificados vários problemas que ainda não foram resolvidos e que seriam contribuições interessantes para a área. São estes:

- Implementação de um simulador para dois ramos correlacionados em canais com distribuição arbitrária (Rayleigh, Nakagami- m , Hoyt, Weibull, etc ...);
- Validação através de medidas experimentais e cálculo da TCN e da DMD para a distribuição $\alpha - \eta - \kappa - \mu$;
- Realização de medidas utilizando diversidade e a obtenção da correlação entre os dois sinais;
- Cálculo da TCN e da DMD em canais Nakagami- m com dois ramos correlacionados;
- Determinação da distribuição da diferença de fase utilizando o combinador por seleção em ramos correlacionados para diversos ambientes (Nakagami, Weibull, Rice, etc...).

Referências Bibliográficas

- [ABC⁺88] N. S. Adawi, Henry L. Bertoni, Joseph R. Child, William A. Daniel, John E. Dettra, Robbert P. Eckert, Earl H. Flath, and Robert T. Forrest. Coverage prediction for mobile radio systems operating in the 800/900 MHz frequency range. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 37:3–72, Fev. 1988.
- [AE00] A. F. Abouraddy and S. M. Elnoubi. Statistical Modeling of the Indoor Radio Channel at 10 GHz Through Propagation Measurements - Part I: Narrow-Band Measurements and Modeling. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 49(5):1491–1507, Set. 2000.
- [AFP88] F. Adachi, M. T. Feeney, and J. D. Parsons. Effects of correlated fading on level crossing rates and average fade durations with predetection diversity reception. In *Proc. Inst. Elect. Eng.*, pages 11–17, Fev. 1988.
- [BC01] Norman C. Beaulieu and Christine Cheng. An Efficient Procedure for Nakagami- m Fading Simulation. In *Global Telecommunications Conference*, volume 6, Nov. 2001.
- [BD91] W. R. Braun and U. Dersch. A physical mobile radio channel model. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 40(2):472–482, Mai. 1991.
- [Bec67] P. Beckmann. *Probability in Communication Engineering*. Harcourt Brace and World, New York, 1967.
- [Bre59] D. G. Brennan. Linear Diversity Combining Techniques. In *IRE*, volume 47, pages 1075–1102, Jun. 1959.

- [FFY05] G. Fraidenraich, J. C. S. Santos Filho, and M. D. Yacoub. Second-Order Statistics of Maximal-Ratio and Equal-Gain Combining in Hoyt Fading. *IEEE Commun. Lett.*, 9(1), Jan. 2005.
- [GR65] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 4th edition, 1965.
- [Hoy47] R. S. Hoyt. Probability Functions for the Modulus and Angle of the Normal Complex Variate. *Bell System Technical Journal*, 26:318–359, Abr. 1947.
- [IM02] Cyril-Daniel Iskander and P. Takis Mathiopoulos. Analytical Level Crossing Rates and Average Fade Durations for Diversity Techniques in Nakagami Fading Channels. *IEEE Trans. Commun.*, 50(8):1301–1309, Ago. 2002.
- [Jak74] W. C. Jakes. *Microwave Mobile Communications*. New York: Wiley, 1974.
- [L.35] Pawsey J. L. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 31(125), 1935.
- [Lee69] W. C. Y. Lee. An extended correlation function of two random variables applied to mobile radio transmission. *Bell Syst. Tech. J.*, pages 3423–3440, 1969.
- [Nak60] M. Nakagami. *The m-Distribution - A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading*. Statistical Methods in Radio Wave Propagation. W. C. Hoffman, Ed. Elmsford, NY: Pergamon, 1960.
- [Pap02] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. Fourth edition, 2002.
- [Par00] J. D. Parsons. *The Mobile Radio Channel*. John Wiley and Sons, 2000.
- [PHK03] G. Park, D. Hong, and C. Kang. Level Crossing rate estimation with doppler adaptative noise suppression technique in frequency domain. In *VTC 2003*, pages 1192–1195, 2003.

- [Pro95] John G. Proakis. *Digital Communications*. McGRAW-HILL International., 3rd edition, 1995.
- [Ric44] S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*, 23:282–332, Jul. 1944.
- [RL28] Fisher R.A. and Tippett L.H.C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, pages 180–190, 1928.
- [RS66] Schwartz M. Bennett W. R. and Stein S. *Communication Systems and Techniques*. New York, 1966.
- [She77] N. H. Shepherd. Radio wave loss deviation and shadow loss at 900 MHz. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 26:306–313, Nov. 1977.
- [Ste87] S. Stein. Fading channel issues in system engineering. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 5(2):68–69, Fev. 1987.
- [Suz77] H. Suzuki. A statistical model for urban radio propagation. *IEEE Trans. Commun.*, 25(7):673–679, Jul. 1977.
- [SZKT04] Nikos C. Sagias, Dimitris A. Zogas, George K. Karagiannidis, and George S. Tombras. Channel Capacity and Second-Order Statistics in Weibull Fading. *IEEE Commun. Lett.*, 8(6):377–379, Jun. 2004.
- [TMY03] Hermano B. Tercius, Fábio C. Martins, and Michel Daoud Yacoub. Modular spacially controlled data aquisition equipment (in Portuguese). In *Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia - COBENGE- Rio de Janeiro*, Set. 2003.
- [VH93] R. Vijayan and J. M. Holtzman. Foundations for level crossing analysis of handoff algorithms. In *Proc. ICC*, pages 935–939, Mai. 1993.

- [Wei39] Waloddi Weibull. A statistical theory of the strength of materials. *Royal Swedish Institute for Engineering Research*, (151), 1939.
- [W.S80] Lord Rayleigh J. W.S. *Phil. Mag.*, 73(10), 1880.
- [WYP02] Cheng-Xiang Wang, Neji Youssef, and Matthias Patzold. Level-crossing rate and average duration of fades of deterministic simulation models for Nakagami-Hoyt fading channels. In *The 5th International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications*, volume 1, pages 272–276, Out. 2002.
- [Yac00] M. D. Yacoub. The $\eta - \mu$ Distribution: A General Fading Distribution. In *IEEE Boston Fall Vehicular Technology Conference 2000*, Set. 2000.
- [Yac01] M. D. Yacoub. The $\kappa - \mu$ Distribution: A General Fading Distribution. In *IEEE Atlantic City Fall Vehicular Technology Conference 2001*, Out. 2001.
- [Yac02] M. D. Yacoub. The $\alpha - \mu$ Distribution: A General Fading Distribution. In *PIMRC 2002, Lisboa*, Set. 2002.
- [Yac06] M. D. Yacoub. The $\kappa - \mu$ Distribution and the $\eta - \mu$ Distribution. *aceito para publicação em IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2006.
- [YBG99] M.D. Yacoub, J. E. Vargas B., and Leonardo G. R. Guedes. On High Order Statistics of the Nakagami- m Distribution. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 48(3):790–793, Mai. 1999.
- [YdSB01] M.D. Yacoub, C.R.C.M. da Silva, and J. E. Vargas B. Second-order statistics for Diversity-Combining Techniques in Nakagami-Fading Channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 50(6):1464–1470, Nov. 2001.
- [YFTM04] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, Hermano B. Tercius, and Fábio C. Martins. The Symmetrical $\eta - \kappa$ Distribution. In *PIRMC - The 15th IEEE International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications - Barcelona, Espanha*, Set. 2004.

- [YN00] K. W. Yip and T. S. Ng. A simulation model for Nakagami- m fading channels, $m < 1$. *IEEE Trans. Commun.*, 48(2):214–221, Fev. 2000.