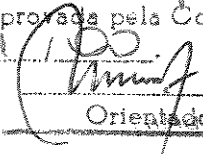


Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Décio Bispo
e aprovada pela Comissão
Julgada em 06/11/2000

Orientador

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E COMPUTAÇÃO

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE MÁQUINAS ELÉTRICAS
INCLUINDO O EFEITO DA SATURAÇÃO MAGNÉTICA**

Décio Bispo

Orientador: **Prof. Dr. Mauro Sérgio Miskulin**
Co-orientador: **Prof. Dr. Luciano Martins Neto**

Tese de Doutorado

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de DOUTOR em ENGENHARIA ELÉTRICA.

Área de Concentração: Automação

Tese de Doutorado apresentada em 06 de novembro de 2000 à Banca Examinadora constituída pelos professores:

Presidente:

Prof. Mauro Sérgio Miskulin – FEEC/UNICAMP

Membros:

Prof. Dr. José Roberto Cardoso – USP/São Paulo

Prof. Dr. Gilio Aluísio Simone – ALIE/Limeira

Prof. Dr. Carlos Rodrigues de Souza – FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Edson Moschim – FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Ernesto Ruppert Filho – FEEC/UNICAMP

UNIDADE BC
 N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
B542c
 V. 44334
 Ex. 16-392101
 TOMBO BC/
 PROC. 16-392101
 C ☐ D ☒
 PREC. R\$ 11,00
 DATA 10/05/01
 N.º CPD

CM-00155157-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
 BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B542c

Bispo, Décio

Contribuição ao estudo de máquinas elétricas incluindo o efeito da saturação / Décio Bispo.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientadores: Mauro Sérgio Miskulin, Luciano Martins Neto.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Indução eletromagnética . 2. Transformadores elétricos. 3. Motores elétricos de indução. I. Miskulin, Mauro Sérgio. II. Martins Neto, Luciano. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**A minha esposa Ofélia e aos filhos Danilo e
Laise**

AGRADECIMENTOS

Ao Professores PhD Mauro Sérgio Miskulin da UNICAMP e Dr. Luciano Martins Neto da UFU, pela orientação e discussões no desenvolvimento do trabalho.

A CAPES pelo indispensável apoio financeiro.

Essencialmente, agradeço a Deus que nos dá paz e conforto em todos os momentos de dificuldades.

RESUMO

No estudo das máquinas elétricas muitas vezes é necessário verificar o comportamento das máquinas, considerando o efeito da saturação magnética. A representação deste efeito no modelo matemático desenvolvido, é obtido através da não linearidade da curva de magnetização, que associado aos parâmetros físicos, e em conjunto com as equações diferenciais da máquina, soluciona-se através de um processo de integração numérica, o modelo proposto. Este trabalho apresenta um modelo matemático considerando a saturação magnética no transformador e na máquina de indução trifásica. Utilizando-se de simulações computacionais, e testes experimentais, comprova-se a validade dos modelos.

ABSTRACT

The effect of magnetic saturation, is an important aspect to be taken into account when studying the behaviour of electrical machines. In the mathematical model developed throughout this work, the representation of that effect was based on the non linearity of the magnetization curve, along with the physical parameters and the differential equations of the machine. That method, based on a process of numeric integration, was used to solve the proposed model. In so doing, this work shows a mathematical model which takes into account the effect of magnetic saturation for a transformer and for a tri-phasic induction machine. The model was validated through computer simulations and comparisons with experimental results.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. A Saturação Magnética	01
1.2. Objetivo do Trabalho	01
1.3. Desenvolvimento do Trabalho	02

CAPÍTULO II

ANÁLISES TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE UM TRANSFORMADOR MONOFÁSICO INCLUINDO O EFEITO DA SATURAÇÃO MAGNÉTICA

2.1. Modelagem não Linear	05
2.2. Levantamento Experimental dos Parâmetros e Características de um Transformador Monofásico	11
2.2.1. Introdução	11
2.2.2. Determinação Experimental dos Parâmetros do Circuito Equivalente.....	11
2.2.3. Considerações sobre as Perdas no Ferro do Transformador	12
2.2.4. Determinação Experimental “Foucault” (R_f).....	13
2.2.5. Obtenção Experimental da Curva de Magnetização	16
2.3. Resultados Teóricos e Experimentais	19
2.3.1. Introdução	19
2.3.2. Energização do Transformador em Vazio.....	20
2.3.3. Energização do Transformador em Carga.....	21
2.4. Conclusões	25

CAPÍTULO III

MODELAGEM DA MÁQUINA DE INDUÇÃO INCLUINDO A SATURAÇÃO MAGNÉTICA

3.1. Equações Elétricas Fundamentais	27
3.2. Concatenamento do Fluxo Magnetizante λ_{mi}	27
3.3. Determinação do Ponto de Operação da Máquina	34
3.4. Conjugado Eletromagnético	44

CAPÍTULO IV

ENSAIO EXPERIMENTAL DO MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO

4.1. Introdução	49
4.2. Levantamento dos Parâmetros da Máquina de Indução Trifásica	49
4.2.1. Resistência do Estator por Fase	49
4.2.2. Outros Parâmetros	49
4.2.2.1. Ensaio em Vazio	49
4.2.2.2. Ensaio de Rotor Bloqueado	51
4.2.2.3. Determinação dos Parâmetros da Máquina através do Ensaio em Vazio e Rotor Bloqueado	51
4.3. Determinação das Característica Magnéticas da Máquina de Indução Trifásica	54
4.3.1. Perdas no Ferro da Máquina de Indução Trifásica	55
4.3.2. Determinação dos Coeficientes das Curvas ($B_i(\alpha, \theta) \times FM_i(\alpha, \theta)$)	57
4.3.3. Obtenção das Funções ($FFM_i \times FM_i$)	60

CAPÍTULO V

SIMULAÇÃO DIGITAL

5.1. Introdução	63
5.2. Determinação do Ponto de Operação	63
5.3. Análise do Ângulo de Referência (α) no Equacionamento de (λ_{mi})	64
5.3.1. Determinação de FR_1 e FI_1	64
5.3.2. Determinação da Posição do Ângulo (α)	64
5.4. Determinação das Correntes para a Máquina ligada em Estrela Isolada	65
5.5. Determinação das Tensões nas Fases para a Máquina Ligada em Estrela Isolada	67
5.6. Ligação em Triângulo	68
5.7. Determinação dos Conjugados	68
5.7.1. Conjugado Eletromagnético	68
5.7.2. Conjugado de Carga e Conjugado de Aceleração	68
5.7.3. Velocidade Angular do Rotor	68
5.8. Fluxograma para a Solução Numérica das Equações	69

CAPÍTULO VI

RESULTADOS EXPERIMENTAIS E SIMULADOS

6.1. Dados do Motor a ser Ensaiado	71
6.2. Ensaaios Experimentais	71
6.3. Ensaio em Vazio para Máquina Ligada em (Y)	73
6.3.1. Formas de Onda obtidas da Simulação	73
6.3.2. Valores obtidos em Laboratório	75
6.4. Ensaio a Vazio para a Máquina Ligada em (Δ)	76
6.4.1. Formas de Onda Obtidas na Simulação	76
6.4.2. Valores Obtidos em Laboratório	77
6.5. Ensaio a Plena Carga para a Máquina Ligada em (Y)	78
6.5.1. Formas de Onda Obtidas na Simulação	78
6.5.2. Valores Medidos em Laboratório	80
6.6. Ensaio a Plena Carga para a Máquina Ligada em (Δ)	82
6.6.1. Formas de Onda Obtidas na Simulação	82
6.6.2. Valores Medidos em Laboratório	83
6.7. Ensaio com Sobrecarga de 10% para a Máquina Ligada em (Y)	84
6.7.1. Formas de Onda Obtidas na Simulação	84
6.7.2. Valores Medidos em Laboratório	85
6.8. Ensaio com Sobrecarga de 10% para a Máquina Ligada em (Δ)	86
6.8.1. Formas de Onda obtidas na Simulação	86
6.8.2. Valores Medidos em Laboratório	87
6.9. Análise dos Resultados	88

CAPÍTULO VII

7.1. Conclusões	89
7.2. Estudos Propostos	90
Referências Bibliográficas.....	91
Bibliografia	93

ANEXO 1 – CONCEITUAÇÃO DA FUNÇÃO ACÚMULO DE ESPIRAS E FUNÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DE ESPIRAS APLICADO AO CÁLCULO DO FLUXO CONCATENADO POR UM ENROLAMENTO

A1.1. Introdução	97
------------------------	----

A1.2. Função Distribuição de Espiras	98
A1.3. Função Acumulo de Espiras	101

ANEXO 2 – DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS DAS EQUAÇÕES [3.19], [3.20], [3.21], [3.22], [3.23]

A2.1. Desenvolvimento da Integral da Equação [3.19] para λ_{mi1}	103
A2.2. Desenvolvimento da Integral da Equação [3.20] para λ_{mi2}	105
A2.3. Desenvolvimento da Integral da Equação [3.21] para λ_{mi3}	112
A2.4. Desenvolvimento da Integral da Equação [3.22] para λ_{mi4}	115
A2.5. Desenvolvimento da integral da Equação [3.23] para λ_{mi5}	119
A2.6. Valor Final de λ_{mi}	122

ANEXO 3 – DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DO CONJUGADO

A3.1. Elementos do Equacionamento	125
---	-----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - A Saturação Magnética

A saturação magnética caracteriza-se por uma não linearidade física do circuito magnético. Portanto, na obtenção do fluxo magnético que se concatena com um enrolamento de um dispositivo eletromagnético ou eletromagnético-mecânico, rigorosamente não pode ser aplicado o princípio da sobreposição dos fluxos magnéticos. Torna-se necessário caracterizar, o campo magnetizante resultante da força magnetomotriz (F_{mm}) existente, que é função das correntes elétricas dos enrolamentos e da posição angular, bem como da densidade de campo magnético (B), que é a distribuição do fluxo normal à superfície do entreferro, função da força de magnetização do circuito magnético.

No projeto de um determinado dispositivo, é necessário que se estude a distribuição resultante da densidade do campo magnético, e que este fique na região não linear da curva característica do seu circuito magnético. Isto significa que em algumas situações os dispositivos operam com determinados níveis de saturação magnética, trabalhando na região não linear da curva, ocasionando efeitos que devem ser observados com detalhes e mesmo quantificados. Um estudo mais aprofundado das características destes dispositivos, inclui a saturação magnética no modelo matemático a ser desenvolvido, para que se represente com melhor precisão os fenômenos que ocorrem na sua operação. A forma mais adequada de incluir o efeito da saturação não é a mesma para cada dispositivo em estudo, e é diferente em função do problema a ser solucionado.

Para se fazer uma análise dos efeitos um dos caminhos é a simulação digital, evidenciando a utilização da curva de magnetização, conjuntamente com outros elementos que também devem compor a análise, tais como os seus parâmetros, as distribuições espaciais de campo magnético e de condutores, as perdas no material magnético, bem como a estrutura física do dispositivo, e com suas equações diferenciais solucionar o modelo matemático a ser desenvolvido. Com os resultados obtidos da simulação pode-se analisar as distorções harmônicas, provocadas pelos harmônicos espaciais, nas formas de onda de tensão e corrente e também alterações nos valores eficazes que devem ser comparados aos valores obtidos em laboratório.

1.2 - Objetivo do Trabalho

Este trabalho tem como objetivo analisar o efeito da saturação magnética, através de um modelo matemático que inclua a curva de magnetização, permitindo através de um programa em computador digital, simular o transformador e a máquina de indução trifásica, utilizando-se as grandezas disponíveis apenas nos seus terminais elétricos, obtendo-se como resposta por exemplo suas correntes para uma excitação de tensão, sem

se preocupar com localização no seu interior de regiões saturadas e não saturadas magneticamente.

O modelo matemático desenvolvido no trabalho analisa o efeito da saturação ao longo do tempo, utilizando-se as suas grandezas físicas incluindo as distribuições espaciais do campo magnético e condutores conjugada com a equação de uma reta que relaciona força magnetomotriz com o máximo desta força magnetomotriz obtida no desenvolvimento do modelo matemático e da curva de magnetização levantada a partir dos laços, utilizando o ensaio em vazio para o transformador e o ensaio a vazio síncrono para a máquina de indução trifásica.

Os resultados teóricos fornecidos pela simulação digital do modelo matemático, são comparados aos resultados experimentais fornecidos por levantamentos executados em laboratórios.

1.3 - Desenvolvimento do Trabalho

O Capítulo II apresenta o desenvolvimento do modelo matemático do transformador, com seus resultados da simulação comparados aos resultados obtidos em laboratório e suas conclusões.

No Capítulo III tem-se o desenvolvimento da modelagem da máquina de indução trifásica balanceada, incluindo o efeito da saturação magnética, onde são desenvolvidas as equações elétricas fundamentais, utilizando a equação de uma reta que relaciona força magnetomotriz (FFM) com o máximo desta força magnetomotriz (FM), obtida no desenvolvimento do modelo, que vem a auxiliar na solução das equações diferenciais da máquina. Também neste Capítulo desenvolve-se o equacionamento do conjugado eletromagnético.

No Capítulo IV consta o levantamento dos parâmetros da máquina de indução trifásica balanceada, utilizando o ensaio de rotor em vazio e bloqueado, com estes parâmetros e utilizando o ensaio em vazio síncrono aplicado a máquina de indução, determina-se a tensão e_i no ramo magnetizante, e a corrente de magnetização i_i' , após descontadas as perdas no ferro da máquina. Obtém-se a relação da tensão e_i deslocada de noventa graus elétricos da corrente i_i' do ramo magnetizante. Levanta-se os laços de fluxo por unidade de ângulo por força magnetomotriz que é proporcional a i_i' , obtendo-se ($B_i \times FM_i$), com a união dos extremos dos vários laços chega-se a curva segmentada que relaciona a densidade de fluxo B_i com o máximo da força magnetomotriz FM_i para o fundamental e terceiro harmônico, determinando os coeficientes linear e angular, destes segmentos de reta respectivamente, a_j e b_j que serão utilizados nas funções que relacionam força magnetomotriz pelo máximo desta força magnetomotriz ($FFM_i \times FM_i$), obtidos do desenvolvimento do modelo matemático.

No Capítulo V é executado o cruzamento da função linear ($FFM_1 \times FM_1$) com as curvas ($FFM_i \times FM_i$) para a fundamental e a terceira harmônica. Calculando o valor do fluxo de magnetização da fase i (λ_{mi}) e as correntes do estator e rotor, determinando o

conjugado eletromagnético. Também são avaliadas as derivadas no tempo, executando o processo de integração numérica, testando a sua convergência.

No Capítulo VI são apresentados os resultados experimentais e simulados. Com os dados do motor é feita a simulação digital e o levantamento experimental nas condições a vazio, a plena carga, e sobrecarga de 10% para a máquina ligada em estrela e delta, obtendo as formas de onda de tensão, corrente, velocidade e conjugado eletromagnético fazendo-se as análises dos resultados.

No Capítulo VII descrevem-se as conclusões do trabalho, bem como as propostas de estudos futuros a serem realizados em sua continuidade.

CAPÍTULO II

MODELAGEM DO TRANSFORMADOR INCLUINDO A SATURAÇÃO MAGNÉTICA

2.1 – Modelagem não linear

A figura (2.1) mostra um transformador monofásico alimentado pelo enrolamento “a”, apresentando no seu secundário uma carga R_c e L_c .

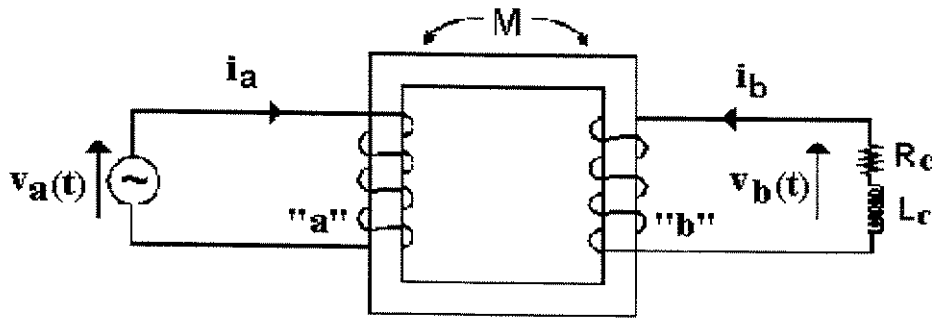


Figura (2.1) Transformador monofásico.

A relação entre as grandezas elétricas deste transformador é dada por [2.1].

$$\frac{d\lambda_a}{dt} = v_a - r_a \cdot i_a \quad [2.1]$$

v_a – valor instantâneo da tensão no enrolamento primário do transformador

i_a – valor instantâneo da corrente no enrolamento primário

λ_a – valor instantâneo do concatenamento do fluxo total do enrolamento primário

r_a – resistência do enrolamento primário.

Considerando o fluxo de dispersão do primário como não sendo saturado, o fluxo total concatenado no enrolamento primário é dado por [2.2].

$$\lambda_a = L_a \cdot i_a + \lambda_m \quad [2.2]$$

Na qual:

L_a – indutância de dispersão do primário do transformador

λ_m – concatenamento do fluxo de magnetização do primário.

Por outro lado, no secundário do transformador tem-se:

$$v'_b = r'_b \cdot i'_b + \frac{d\lambda'_b}{dt} \quad [2.3]$$

Na qual:

v'_b – valor instantâneo da tensão no secundário, referido ao primário

r'_b – resistência do enrolamento secundário, referida ao primário

i'_b – valor instantâneo da corrente do secundário, referida ao primário

λ'_b – valor instantâneo do concatenamento total de fluxo no secundário, referido ao primário.

Observando o lado da carga, obtém-se a equação [2.4].

$$v'_b = -r'_c \cdot i'_b - L'_c \cdot \frac{di'_b}{dt} \quad [2.4]$$

Na qual:

r'_c, L'_c - resistência e indutância da carga, respectivamente referidas ao primário.

Igualando as equações [2.3] e [2.4] obtém-se [2.5].

$$(r'_c + r'_b) \cdot i'_b + \frac{d\lambda'_b}{dt} + L'_c \cdot \frac{di'_b}{dt} = 0 \quad [2.5]$$

De maneira idêntica ao primário verifica-se que:

$$\lambda'_b = L'_b \cdot i'_b + \lambda_m \quad [2.6]$$

Na qual

L'_b – indutância de dispersão do secundário, referido ao primário.

Substituindo a equação [2.6] em [2.5] determina-se [2.7].

$$(r'_b + r'_c) \cdot i'_b + \frac{d}{dt} (L'_b \cdot i'_b + L'_a \cdot i'_b + \lambda_m) = 0 \quad [2.7]$$

Chamando:

$$\lambda_t = L'_b i'_b + L'_c i'_b + \lambda_m \quad [2.8]$$

tem-se [2.9]:

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = -(r'_b + r'_c) i'_b \quad [2.9]$$

Fazendo:

$$r_t = r'_b + r'_c$$

$$L_t = L'_b + L'_c$$

chega-se a equação [2.10]

$$\frac{d\lambda_t}{dt} = -r_t i'_b \quad [2.10]$$

Reescrevendo, por comodidade, as equações [2.1], [2.2] e [2.8], respectivamente, tem-se:

$$\frac{d\lambda_a}{dt} = v_a - r_a i_a \quad [2.11]$$

$$i_a = \frac{\lambda_a - \lambda_m}{L_a} \quad [2.12]$$

$$i'_b = \frac{\lambda_t - \lambda_m}{L_t} \quad [2.13]$$

Conhecendo-se a tensão “ v_a ” e os parâmetros resistivos e indutivos do transformador e carga, as equações de [2.10] a [2.13] formam um sistema com as variáveis de estado λ_a e λ_t , desde que se conheça λ_m .

Observando a convenção de sinais adotada na figura (2.2), a corrente de magnetização é dada por:

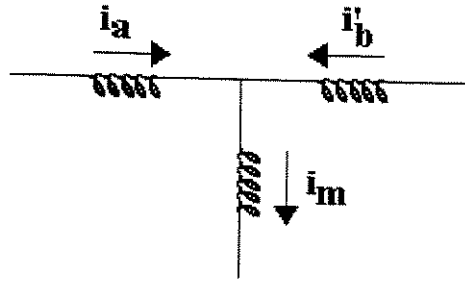


Figura 2.2 – Convenção de Sinais.

$$i_m = i_a + i'_b \quad [2.14]$$

De [2.12] a [2.14] tem-se [2.15]:

$$i_m = \frac{\lambda_a - \lambda_m}{L_a} + \frac{\lambda_t - \lambda_m}{L_t} \quad [2.15]$$

Isolando λ_m da equação [2.15] obtém-se:

$$\lambda_m = \frac{\lambda_a \cdot L_t + \lambda_t \cdot L_a}{L_a + L_t} - i_m \left| \frac{L_a \cdot L_t}{L_a + L_t} \right| \quad [2.16]$$

fazendo:

$$K_1 = \frac{\lambda_a \cdot L_t + \lambda_t \cdot L_a}{L_a + L_t} \quad [2.17]$$

$$K_2 = \frac{L_a \cdot L_t}{L_a + L_t} \quad [2.18]$$

A equação [2.16] se torna [2.19]

$$\lambda_m = K_1 - K_2 \cdot i_m \quad [2.19]$$

Para valores fixos de λ_a e λ_t a equação [2.19] representa uma reta que relaciona λ_m e i_m , possuindo os coeficientes angular K_2 e linear K_1 .

Considerando, para efeito de determinação de fluxo magnético no transformador a sua curva de magnetização, para cada instante, as grandezas fluxo e corrente magnetizantes devem possuir valores tais que satisfaçam tanto a equação da reta, bem como a da curva de magnetização do transformador. Estes valores são encontrados através da intersecção da reta e da referida curva.

Para a obtenção desta intersecção, a sistemática adotada é descrita a seguir:

Utilizando a curva de magnetização representada na figura (2.3), pode-se subdividi-la em vários segmentos retilíneos obtendo-se as suas respectivas equações de reta. Com este procedimento, os valores do fluxo e da corrente de magnetização são obtidos pela intersecção da reta dada pela equação [2.19] e pela equação da reta de um dos segmentos da curva de magnetização, da figura (2.4).

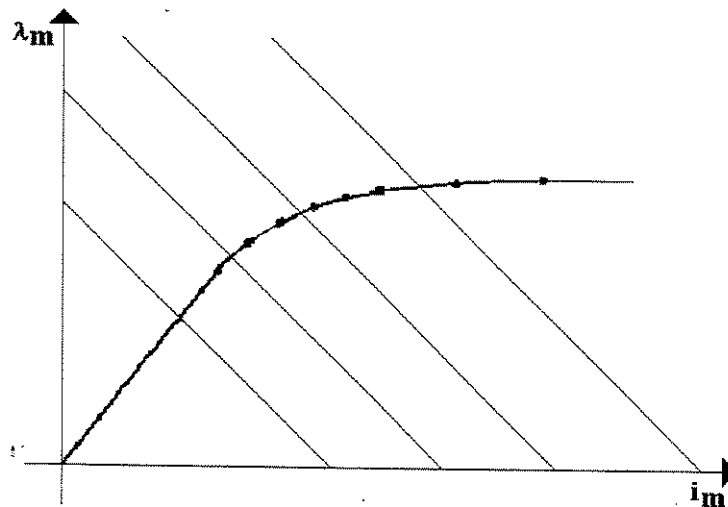


Figura (2.3) – Curva de magnetização discretizada.

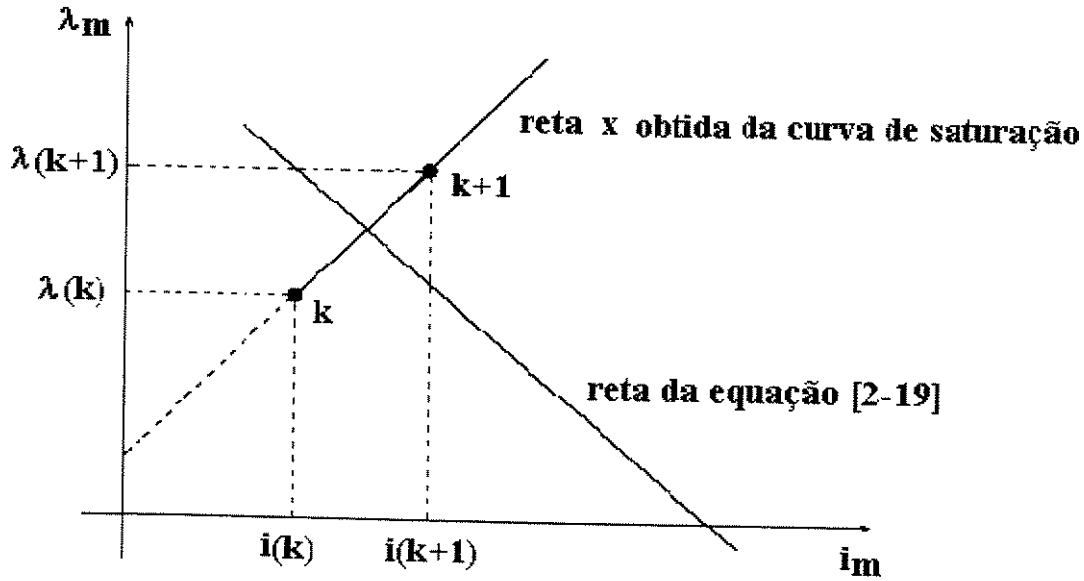


Figura (2.4) – Representação do cruzamento das retas.

A equação da reta que passa pelos pontos (K) e (K + 1) pode ser escrita:

$$\lambda_m = A_K + B_K \cdot i_m \quad [2.20]$$

onde A_K e B_K são respectivamente coeficientes linear e angular da reta “x” na figura (2.4). Tais coeficientes são obtidos pelas expressões [2.21] e [2.22].

$$B_K = \frac{\lambda(K) - \lambda(K-1)}{i(K) - i(K-1)} \quad [2.21]$$

$$A_K = \lambda(K) - B_K \cdot i(K) \quad [2.22]$$

Conhecidos A_K e B_K , pode-se igualar as equações [2.20] e [2.19], obtendo-se:

$$i_m = \frac{K_1 - A_K}{K_2 + B_K} \quad [2.23]$$

$$\lambda_m = \frac{A_K \cdot K_2 + B_K \cdot K_1}{B_K + K_2} \quad [2.24]$$

Um outro aspecto a ser abordado se refere a precisão no valor determinado de λ_m e i_m que é tanto maior quanto maior for a segmentação da curva de magnetização.

Devido a simetria da curva de magnetização, basta encontrar o cruzamento apenas na sua parte positiva; para a outra parte basta colocar convenientemente os sinais.

2.2 – Levantamento Experimental dos Parâmetros e Característica de um Transformador Monofásico

2.2.1 – Introdução

O transformador a ser analisado teórica e experimentalmente possui os seguintes dados.

- Tensão primária 220 volts
- Tensão secundária 375 volts

São feitos ensaios para obtenção experimental das grandezas:

- Resistência do primário
- Resistência do secundário
- Indutância de dispersão do primário
- Indutância de dispersão do secundário
- Resistência equivalente a dissipação das perdas “Foucault”
- Curva de magnetização.

2.2.2 – Determinação Experimental dos Parâmetros do Circuito Equivalente

O transformador é colocado em funcionamento por um tempo suficiente até atingir a temperatura normal de operação. Em seguida mede-se as resistências dos enrolamentos do primário e secundário através de uma ponte de Kelvin. Os resultados obtidos são:

- Resistência do primário 0,433 ohms
- Resistência do secundário 2,521 ohms
- Resistência do secundário referido ao primário 0,5677 ohms.

Da forma tradicional, através do ensaio em curto-circuito do transformador, determinam-se suas indutâncias de dispersão.

- Indutância de dispersão do primário 0,00355 Henry
- Indutância de dispersão secundária referido ao primário 0,00355 Henry

2.2.3 – Considerações sobre as Perdas no Ferro do Transformador

Deve-se observar que na modelagem desenvolvida não se considera as perdas no ferro do transformador. Porém ao ensaiá-lo, nos resultados obtidos estarão representadas as referidas perdas. Desta forma para se utilizar os resultados obtidos nos ensaios experimentais, na modelagem matemática, é preciso eliminar estas perdas.

Como já se conhece do modelo clássico do transformador, as perdas no ferro são dissipadas por uma resistência em paralelo com o ramo magnetizante. Porém no levantamento da curva de magnetização se faz necessário a obtenção dos laços de histerese e desta forma é importante separar as perdas por “Foucault” e “Histerese”.

Tais perdas variam com a frequência aproximadamente da seguinte forma.

- As perdas por histerese variam linearmente com a frequência para uma indução máxima de operação constante.
- As perdas por corrente de Foucault variam diretamente com o quadrado da frequência para uma indução máxima constante.

Portanto para o transformador com o secundário em vazio a potência ativa de entrada vale:

$$P_o = K_h \cdot f + K_f \cdot f^2 + R_a \cdot I_a^2 \quad [2.25]$$

Na qual:

K_h – constante para determinação das perdas por histerese

K_f – constante para determinação das perdas por Foucault

f - frequência em Hz

R_a – resistência do primário

I_a - corrente do primário.

Ensaando o transformador em vazio para duas frequências f_1 e f_2 , mantendo em ambos os ensaios a mesma indução máxima, da equação [2.25], tem-se:

$$P_1 = K_h \cdot f_1 + K_f \cdot f_1^2 + R_a \cdot i_1^2 \quad [2.26]$$

$$P_2 = K_h \cdot f_2 + K_f \cdot f_2^2 + R_a \cdot i_2^2 \quad [2.27]$$

Na qual:

P_1 – potência em vazio na frequência f_1

P_2 – potência em vazio na frequência f_2

i_1 - corrente em vazio na frequência f_1

i_2 - corrente em vazio na frequência f_2

Deve-se observar que, para manter constante durante os dois ensaios a indução máxima, as tensões aplicadas em ambos os ensaios são diferentes. Através das equações [2.26] e [2.27] pode-se determinar K_h e K_f .

A perda por “Foucault” é dada por:

$$P_F = K_f \cdot f^2 \quad [2.28]$$

Conhecendo K_f , obtido da solução do sistema de equações [2.26] e [2.27], para a frequência de 60Hz obtem-se P_F utilizando a equação [2.28]. Admitindo as perdas por “Foucault” dissipadas em uma resistência R_f em paralelo com o ramo magnetizante do transformador, chamando de E a sua força eletromotriz, a resistência R_f pode ser obtida por [2.29].

$$R_f = \frac{E^2}{P_F} \quad [2.29]$$

A força eletromotriz E é obtida à partir da tensão e corrente do primário a vazio, e da resistência e indutância de dispersão do primário. Conhecendo E e P_F obtém-se R_f da equação [2.29].

2.2.4 – Determinação Experimental de R_f

Inicializa-se o procedimento em laboratório medindo a potência do transformador em vazio, para duas frequências distintas no caso 50 e 60 Hertz.

Posteriormente, utilizando-se do equacionamento proposto no item (2.2.3), determina-se a resistência R_f .

Devido aos erros de leitura que podem ocorrer com a utilização de aparelhos convencionais que não detectam distorções na forma de onda, optou-se pelo uso de um osciloscópio digital, adquirindo as formas de onda de tensão e corrente, trabalhando com seus valores instantâneos, em um programa de integração numérica, o que vem a melhorar a precisão dos resultados obtidos.

A forma de onda de corrente é adquirida através de um resistor de 1 ohm conectado em série com o enrolamento do transformador e a tensão é coletada diretamente nos seus terminais com utilização de um osciloscópio, manipulando as formas de ondas obtidas através de um microcomputador.

Para o levantamento, utilizou-se um sistema de geração com máquina síncrona como alternador, a qual é movimentada por uma máquina de corrente contínua. Com o controle do fluxo de campo da máquina de corrente contínua controla-se a velocidade da máquina síncrona, e por conseguinte sua frequência, neste caso 50 a 60 Hertz.

Para separar estas duas perdas é necessário calcular K_h e K_f . Para isto valores instantâneos da tensão primária v_o e corrente primária i_o são adquiridas na frequência de 50 a 60 Hertz como apresentada na figura (2.5).

Com valores instantâneos de v_o e i_o é possível o cálculo da perda total a vazio P_o , à partir da equação [2.30].

$$P_o = f \cdot \int_0^{1/f} v_o \cdot i_o \cdot dt \quad [2.30]$$

A perda no cobre a vazio P_{jo} pode ser calculada por:

$$P_{jo} = f \cdot R_a \int_0^{1/f} (i_o(t))^2 \cdot dt \quad [2.31]$$

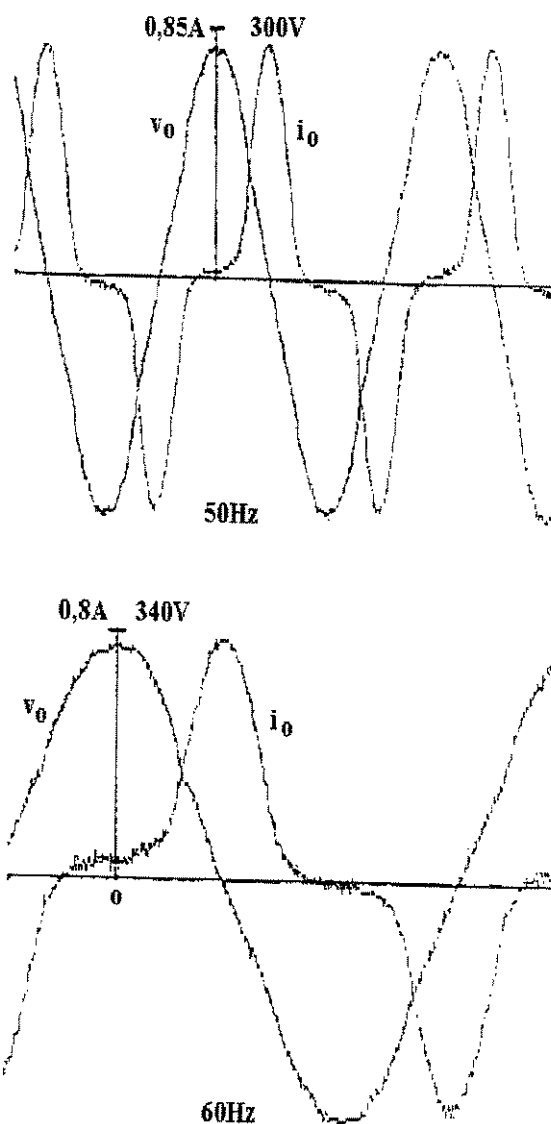


Figura (2.5) – Formas de onda v_o e i_o .

A perda no núcleo a vazio P_{co} é obtida pela diferença, entre P_o e P_{jo} .

$$P_{co} = P_o - P_{jo} \quad [2.32]$$

A tabela (2.1) apresenta os valores das perdas determinadas pelas equações [2.30]; [2.31]; [2.32]. onde P_o é a perda total a vazio, P_{jo} as perdas no cobre a seguir e P_{co} perdas no núcleo em vazio.

Tabela (2.1) – Perdas a vazio em 50 e 60 Hertz

F Hz	P_o (W)	P_{jo} (W)	P_{co} (W)
50	18,2	0,6	17,6
60	21,5	0,4	21,1

Ao descontar as perdas no cobre da equação [2.25] esta se resume na equação [2.33].

$$P_o = K_h \cdot f + K_f \cdot f^2 \quad [2.33]$$

Com a tabela 1 e a equação [2.33], para as frequências de 50 e 60 Hertz, calcula-se K_h e K_f . Os resultados obtidos são:

$$K_h = 0,35 \text{ W/Hz}$$

$$K_f = 2,67 \cdot 10^{-5} \text{ W/Hz}^2$$

Com K_h e K_f calcula-se através da equação [2.28] as perdas por “Foucault”.

$$P_F = 10,5 \text{ watts}$$

Com a equação [2.29] calcula-se R_F para $V_b = 220$ volts e $P_F = 10,5$ watts resultando:

$$R_f = 4600 \text{ ohms}$$

2.2.5 – Obtenção Experimental da Curva de Magnetização

Sabe-se que a tensão no secundário do transformador a vazio esta relacionada com o fluxo de magnetização λ_m através da equação [2.34].

$$V_{bo} = \frac{d\lambda_m}{dt} \quad [2.34]$$

v_{bo} representa uma tensão a vazio, adquirida pelo osciloscópio digital, no secundário do transformador para uma tensão v_{ao} aplicada ao primário. Verifica-se que:

$$v_{bo} = V_{max} \cdot \text{sen}(\omega t)$$

$$\lambda_m = -\frac{V_{max}}{\omega} \cdot \cos(\omega t) \quad [2.35]$$

Para obtenção do fluxo magnetizante λ_m a partir da tensão secundária a vazio v_{bo} representada na equação [2.34] é necessário que v_{bo} instantaneamente esteja defasada de noventa graus, deve-se portanto atrasar a tensão da corrente de noventa graus, e dividindo-se seu valor máximo ponto a ponto por ω , como verificado na equação [2.35], onde:

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = 60 \text{ Hz} \quad [2.36]$$

Com o transformador a vazio levanta-se as curvas de tensão do secundário e a corrente do primário e se memoriza com a utilização do osciloscópio.

A corrente levantada no ensaio é a soma da corrente de magnetização com a corrente de Foucault. Portanto deve-se subtrair a corrente de Foucault da corrente total, para se obter a corrente de magnetização.

As formas de onda de v_{bo} e i_m estão representadas na figura (2.6), para uma tensão primária de 220 V.

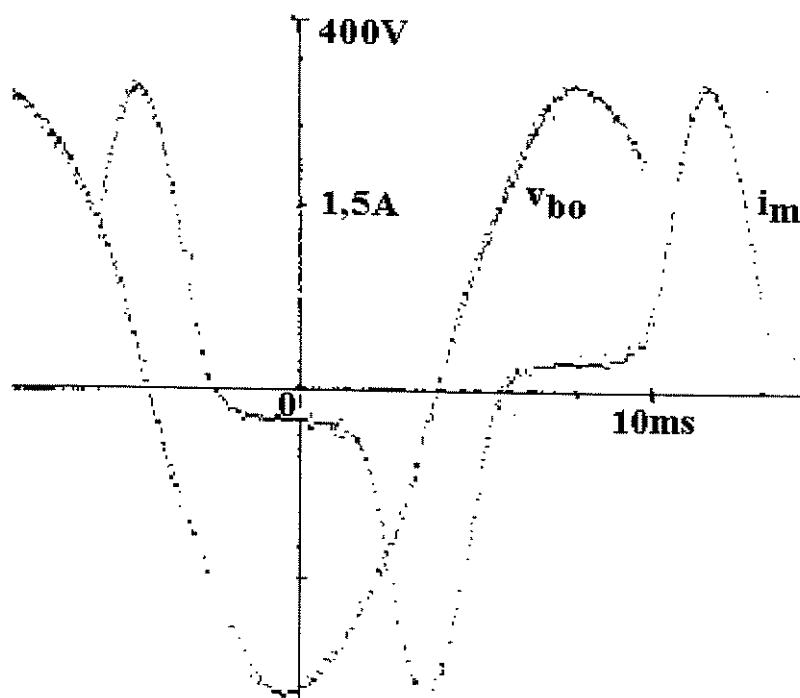


Figura (2.6) – $v_{bo}(t)$ e i_m para $v_a = 220$ V.

De posse das ondas λ_m e i_m , obtém-se a curva λ_m por i_m , que corresponde aos laços de histerese.

Foram levantados os laços de histerese para algumas tensões 120, 180, 220 volts, representadas na figura (2.7).

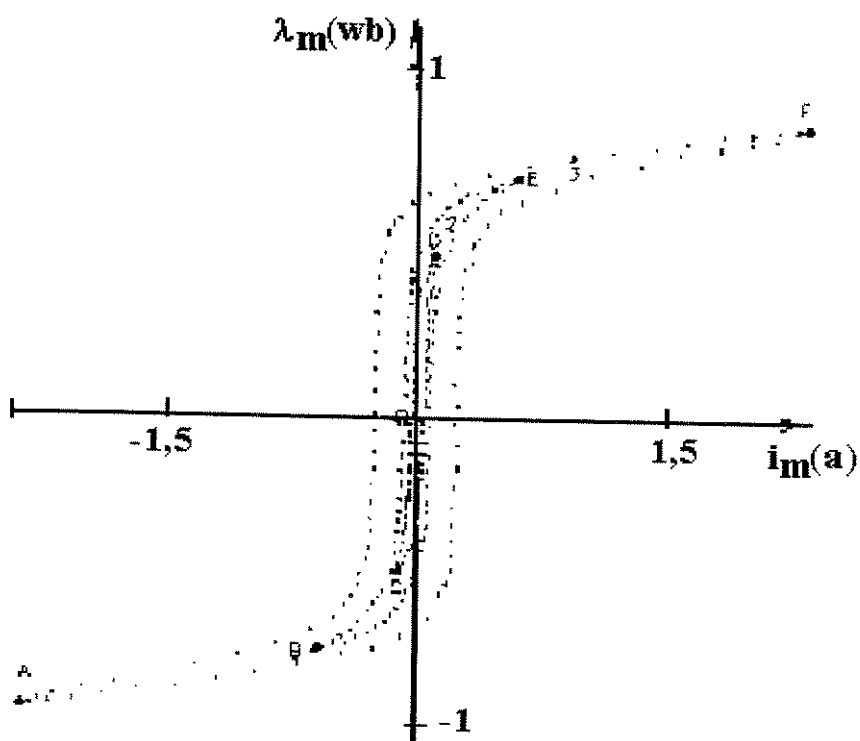


Figura (2.7) – Representação dos laços de histerese.

A união dos extremos dos laços para várias tensões, obtém-se a curva de magnetização, cujos os pontos estão representados na tabela (2.2) e a curva resultante na figura (2.8).

Tabela (2.2) – Pontos da curva de magnetização.

i_m	λ_m	i_m	λ_m
0	0	0.38	$6.49e^{-1}$
0.02	$1.3e^{-1}$	0.4	$6.595e^{-1}$
0.04	$2.8e^{-1}$	0.42	$6.6e^{-1}$
0.06	$3.7e^{-1}$	0.44	$6.64e^{-1}$
0.08	$4.7187e^{-1}$	0.46	$6.7e^{-1}$
0.1	$5.05e^{-1}$	0.48	$6.74e^{-1}$
0.12	$5.25e^{-1}$	0.5	$6.78e^{-1}$
0.14	$5.42e^{-1}$	0.52	$6.82e^{-1}$
0.16	$5.57e^{-1}$	0.54	$6.88e^{-1}$
0.18	$5.69e^{-1}$	0.56	$6.9e^{-1}$
0.2	$5.8e^{-1}$	0.58	$6.95e^{-1}$
0.22	$5.29e^{-1}$	0.6	$7.0e^{-1}$

0.24	$6.02e^{-1}$	0.62	$7.04e^{-1}$
0.26	$6.1e^{-1}$	0.64	$7.09e^{-1}$
0.28	$6.19e^{-1}$	0.74	$7.23e^{-1}$
0.3	$6.25e^{-1}$	0.84	$7.38e^{-1}$
0.32	$6.31e^{-1}$	0.94	$7.5e^{-1}$
0.34	$6.38e^{-1}$	2.8	$8.88e^{-1}$
0.36	$6.42e^{-1}$	6.56	1.056
		10.32	1.224

Utilizando a tabela 2.2 obtém-se a curva de magnetização representada na figura (2.8).

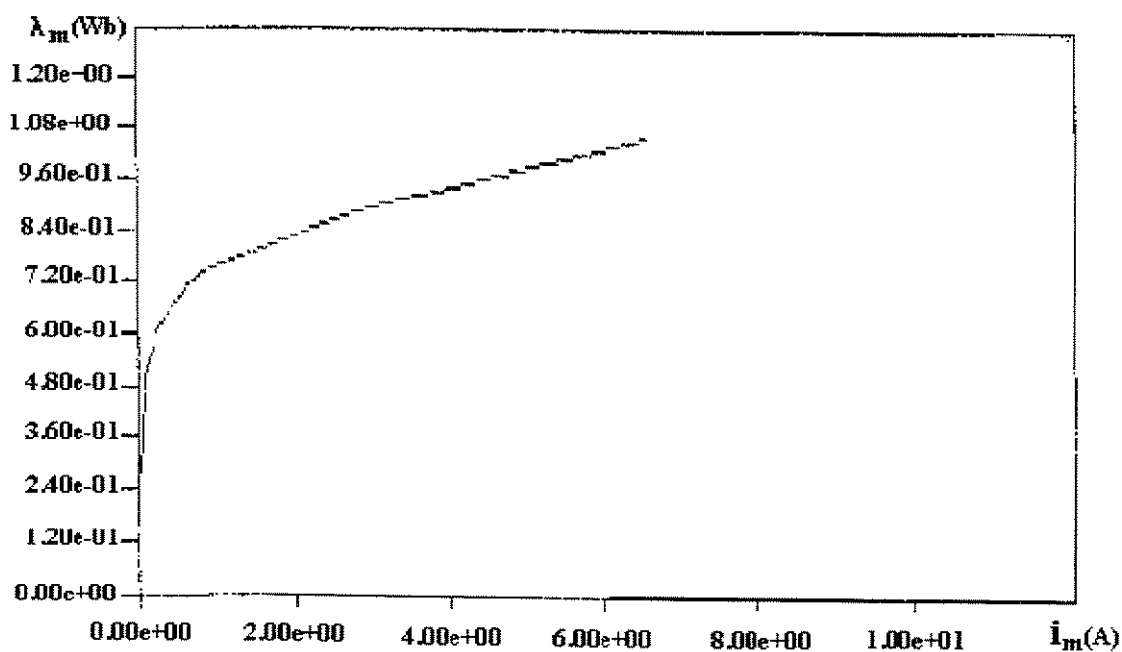


Figura (2.8) – Curva de magnetização do transformador.

2.3 – Resultados Experimentais e Teóricos

2.3.1 – Introdução

Para que possa verificar a validade do equacionamento são feitos os seguintes ensaios:

- Energização do transformador em vazio
- Energização do transformador em carga.

Em cada ensaio, grava-se as curvas de tensão e corrente do primário na memória do osciloscópio. Em seguida são feitas simulações digitais utilizando-se a modelagem apresentada no item 2.1.

2.3.2 – Energização do Transformador em Vazio

O ensaio segue a montagem da figura (2.9).

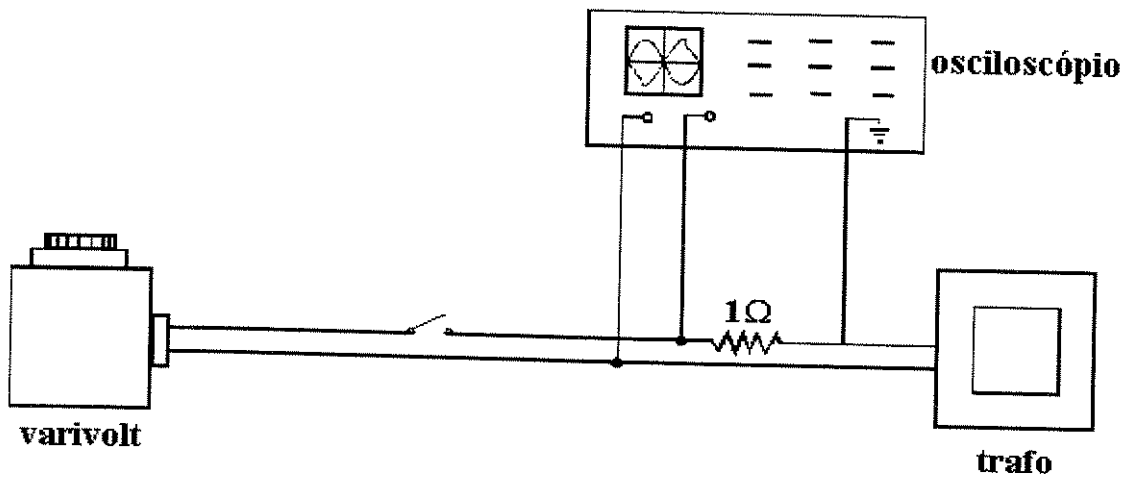
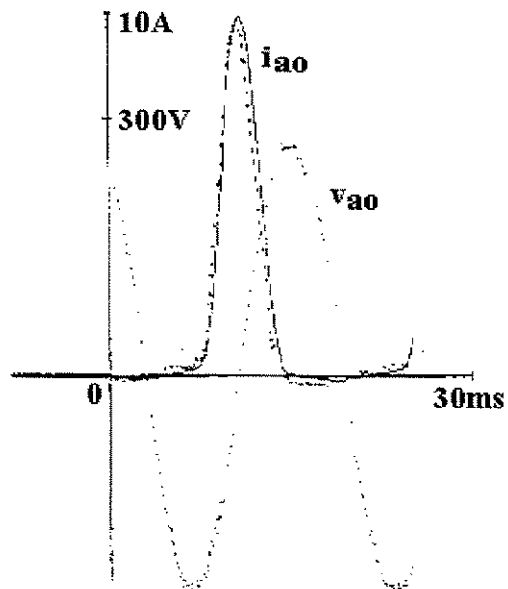


Figura (2.9) – Transformador a vazio.

Corrente transitória no primário com energização do transformador a vazio, tensão 180 volts, representada na figura (2.10).

- Instante inicial → 0,0 segundos
- Instante final → 0,025 segundos
- Tensão de pico → 265 volts
- Ângulo inicial tensão → 0,5461 rad.



: Resultado Experimental | Resultado Simulado
 Figura (2.10) – Transitório de corrente para o transformador a vazio 180 V.

2.3.3 – Energização do Transformador em Carga

Para o caso em análise, a carga anterior é uma resistência de $25\text{ K}\Omega$, portanto o transformador esta praticamente operando em vazio.

No instante da manobra a carga passa a ser:

- Reostato: $258\ \Omega$
- Bobina 1: 22 mH
- Bobina 2: $22,291\text{ mH}$
- Resistência da bobina 1: $2,46\ \Omega$
- Resistência da bobina 2: $1,93\ \Omega$
- Chave ch : fechada

Na figura (2.11) representa-se a montagem do ensaio do transformador com carga.

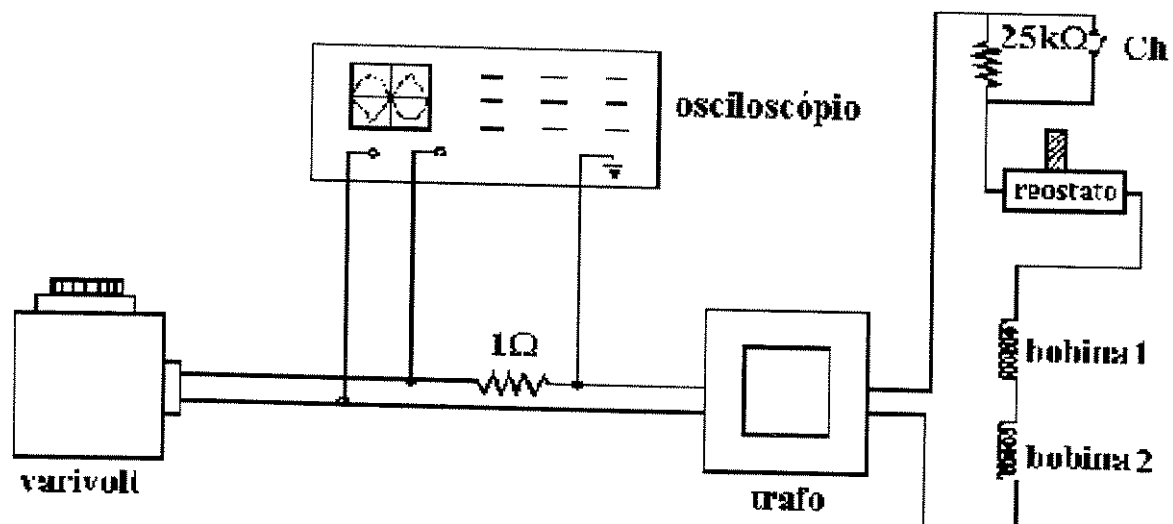
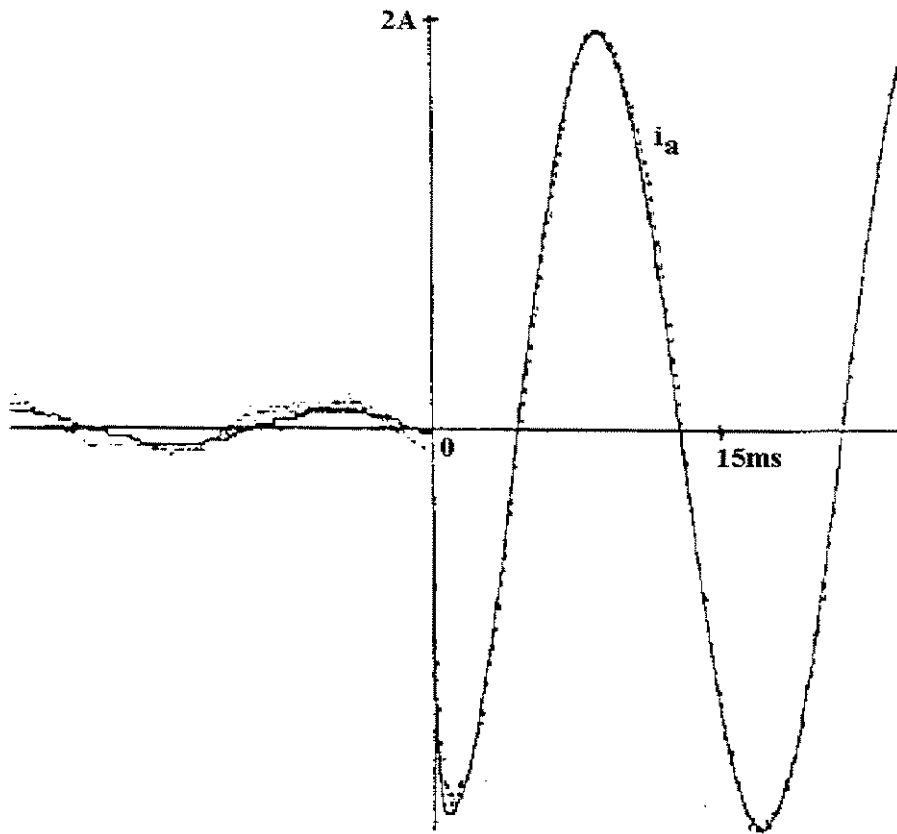


Figura (2.11) – Operação do transformador com carga.

- Resultados da energização do transformador com carga.
- Corrente transitória no primário com chaveamento de carga no secundário, para a tensão de 120 volts, representados na figura (2.12)
- Dados
 - Instante inicial → 0,025 segundos
 - Instante final → 0,025 segundos
 - Tensão de pico → 172 volts
 - Ângulo inicial tensão → 0,0 radianos
 - Instante do chaveamento → 0,0 segundos

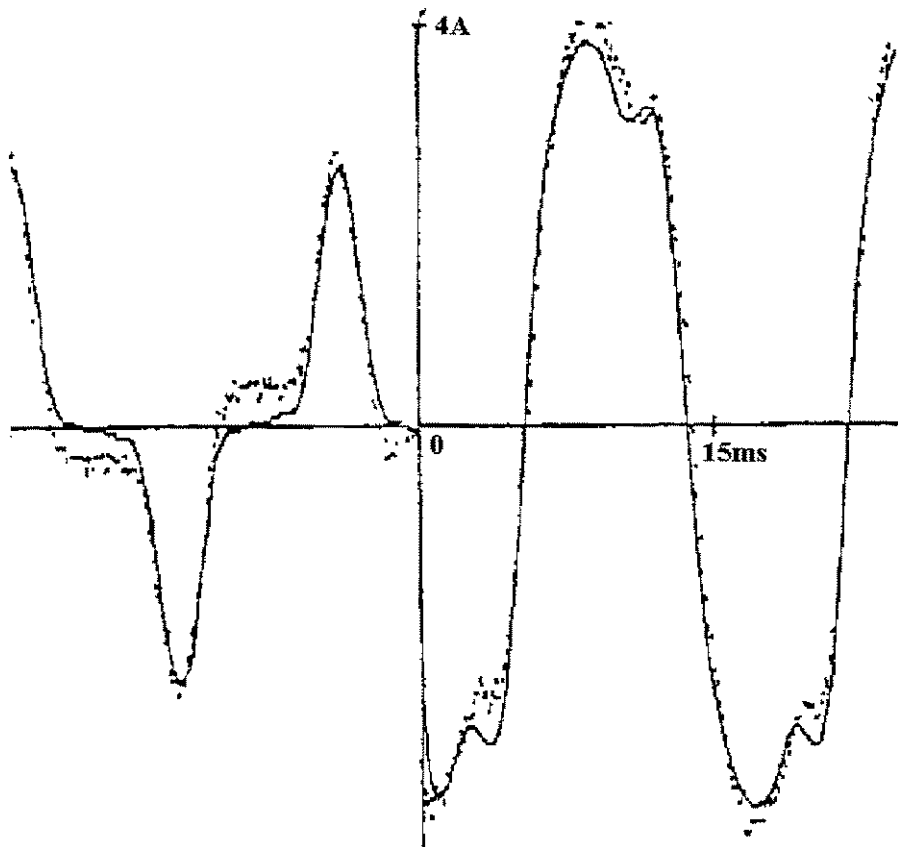


⋮ Resultado Experimental

| Resultado Simulado

Figura (2.12) – Transitório de corrente para transformador energizado em carga para 120 volts.

- Corrente transitória no primário com chaveamento de carga no secundário, para tensão de 160 volts, representado na figura (2.13).
- Dados
 - Instante inicial $\rightarrow 0,03174$ segundos
 - Instante final $\rightarrow 0,025$ segundos
 - Tensão de pico $\rightarrow 260$ volts
 - Ângulo inicial tensão $\rightarrow 2,543$ radianos
 - Instante do chaveamento $\rightarrow 0,0$ segundos



— Resultado Experimental

····· Resultado Simulado

Figura (2.14) – Transitório de corrente para transformador energizado em carga para 200 volts.

2.4 – Conclusões:

Analisando os resultados obtidos nas figuras (2.10) (2.12), (2.13) e (2.14), onde são representadas conjuntamente resultados simulados e experimentais, a vazio e com carga, e nestas condições verifica-se o comportamento das formas de ondas antes e após o chaveamento, plotando-se as curvas de i_a para um determinado v_a aplicado.

Para os casos analisados as semelhanças entre as curvas levantadas através de ensaios executados em laboratório e as simulações feitas através de um programa em computador digital comprovam a boa precisão que pode ser obtida com o uso desta modelagem.

A precisão do modelo pode ser melhorada ainda mais se a curva de magnetização for discretizada em um número cada vez maior de segmentos de retas, principalmente na região não linear da curva de magnetização.

CAPÍTULO III

MODELAGEM DA MÁQUINA DE INDUÇÃO INCLUINDO A SATURAÇÃO MAGNÉTICA

3.1 – Equações Elétricas Fundamentais

A equação que relaciona as grandezas concatenamento de fluxo λ_i , tensão v_i e a corrente i_i em uma fase i da máquina é dada por:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = v_i - r_i \cdot i_i \quad [3.1]$$

O concatenamento do fluxo λ_i incorpora as parcelas correspondente ao fluxo disperso e ao fluxo magnetizante da fase i . Considerando o fluxo disperso como não saturado tem-se:

$$\lambda_i = L_i \cdot i_i + \lambda_{mi} \quad [3.2]$$

Onde L_i e λ_{mi} são respectivamente a indutância de dispersão e o concatenamento de fluxo magnetizante da fase i .

Para resolver a equação [3.1], conhecendo v_i , é preciso relacionar i_i e λ_i . Isto é possível considerando a equação [3.2], desde que se conheça o fluxo magnetizante λ_{mi} .

3.2 – Concatenamento do Fluxo Magnetizante λ_{mi}

Considerando que os parâmetros L_i , R_i e a tensão v_i sejam conhecidos para solucionar a equação [3.1], deve-se obter a relação de i_i com λ_i . Isto é obtido através da equação [3.2], conhecendo-se λ_{mi} .

Para se obter λ_{mi} , considera-se como hipótese que o componente fundamental da distribuição espacial da força magnetomotriz resultante produzida pelas correntes em todas as fases do estator e rotor da máquina seja $F_{mm}(\alpha, \theta)$. Considerando como referência angular θ_i , com origem no eixo da fase i do estator, utilizando uma determinada seqüência de fase, em um dado instante o valor máximo de $F_{mm}(\alpha, \theta)$ se encontra em uma posição dada pelo ângulo (α) da figura (3.1). Neste instante a máquina está em determinado nível de saturação magnética pode-se obter a distribuição espacial de densidade de campo $B(\alpha, \theta)$, como mostra a figura (3.1).

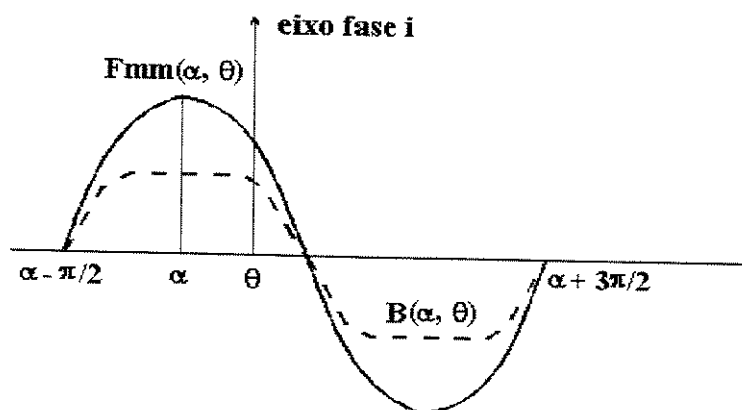


Figura (3.1) – Representação $F_{mm}(\alpha_1, \theta)$ e $B(\alpha_1, \theta)$.

Utilizando-se de uma representação genérica do material magnético da máquina de indução, como mostra a figura (3.2), calcula-se o infinitésimo do concatenamento de fluxo da fase i $d\lambda_{mi}$, através da equação [3.3].

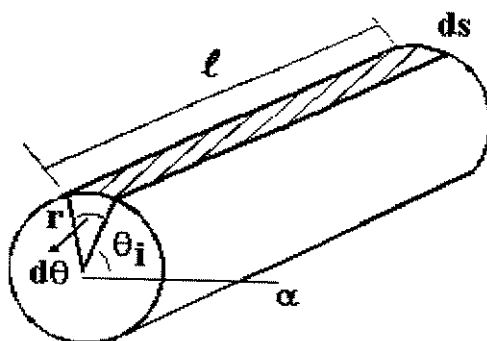


Figura (3.2) – Representação genérica do material magnético do rotor da máquina.

Na qual:

ℓ - é o comprimento do rotor

ds - é um infinitésimo da seção do rotor

r - raio do rotor

θ_i - ângulo de posição do rotor genérico

$d\theta$ - é um infinitésimo do ângulo de posição.

O infinitésimo do concatenamento do fluxo da fase i é dado por:

$$d\lambda_{mi} = f_A \cdot d\phi \quad [3.3]$$

Na qual:

f_A – é a função acúmulo de espiras definida no anexo (1).

$d\phi$ - infinitesimal do fluxo em uma determinada posição

A função acúmulo de espiras é representada por:

$$f_A = \sum \frac{Kh}{h} [1 - \cos[h(\theta - \theta_i)]] \quad [3.4]$$

Onde θ_i é o ângulo representado na figura (3.2), $dmfo$, h r s ordem do harmônico espacial, podendo ser igual a 1 para harmônica fundamental, e 3 para o terceiro harmônica. Sabe-se que:

$$d\phi = B(\alpha, \theta) \cdot ds \quad [3.5]$$

onde:

$$ds = \ell \cdot r \cdot d\theta \quad [3.6]$$

Substituindo a equação [3.6] em [3.5] tem-se:

$$d\phi = \ell \cdot r \cdot B(\alpha, \theta) \cdot d\theta \quad [3.7]$$

Substituindo [3.7] em [3.3] obtém-se:

$$d_{\lambda_{mi}} = \ell \cdot r \cdot \sum \frac{Kh}{h} [1 - \cos[h(\theta - \theta_i)]] B(\alpha, \theta) \cdot d\theta \quad [3.8]$$

Na qual $B(\alpha, \theta)$ que se relaciona com a força magnetomotriz $F_{mm}(\alpha, \theta)$, através de magnetização, como mostra a figura (3.3).

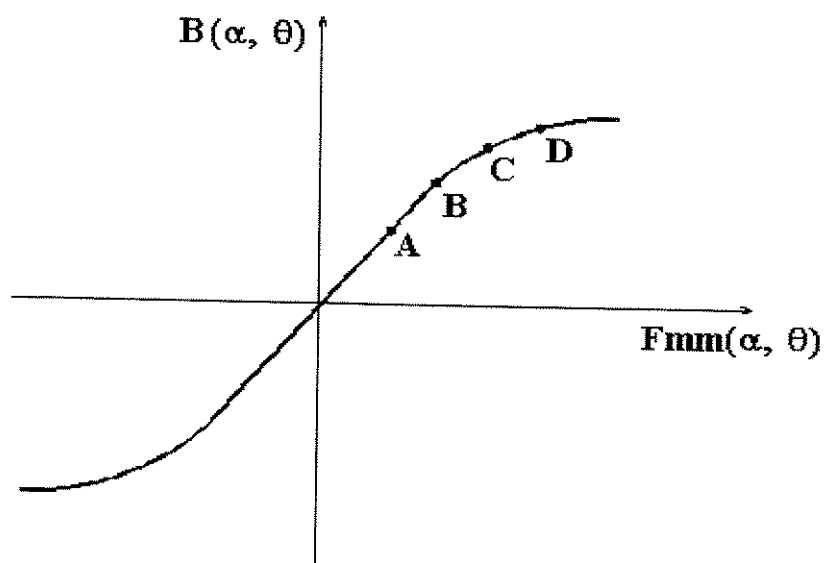


Figura (3.3) – Representação da curva $B(\alpha, \theta)$ por $Fmm(\alpha, \theta)$.

Tomando-se os pontos (A, B, C, ... , D) na curva $B(\alpha, \theta)$ por $Fmm(\alpha, \theta)$ da figura (3.3), propõe-se a linearização desta função em segmentos de retas. Portanto para j -ésimo segmento de reta, obtém-se sua representação na figura (3.4).

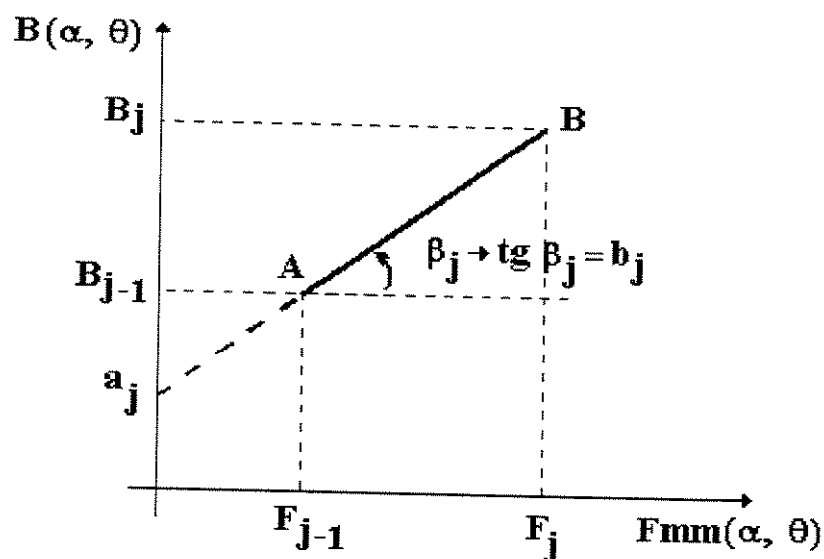


Figura (3.4) – Segmento de reta da curva $B(\alpha, \theta)$ por $Fmm(\alpha, \theta)$.

Onde a_j e b_j representados na figura (3.4) são função dos pontos $A(F_{j-1}, B_{j-1})$ e $B(F_j, B_j)$, sendo a_j obtido do prolongamento do segmento \overline{AB} . Verifica-se que para o segmento representado que $F_{mm}(\alpha, \theta)$ se encontra no intervalo entre F_{j-1} e F_j , portanto pode-se obter a relação:

$$B(\alpha, \theta) = a_j + b_j \cdot F_{mm}(\alpha, \theta) \quad [3.9]$$

Através da figura (3.1) o componente fundamental da distribuição espacial da força magnetomotriz total, pode ser escrita através da equação [3.10].

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \quad [3.10]$$

onde FM é o valor máximo da $F_{mm}(\alpha, \theta)$.

Logo substituindo a equação [3.10] em [3.9] obtém-se:

$$B(\alpha, \theta) = a_j + b_j FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \quad [3.11]$$

Substituindo a equação [3.11] na equação [3.8] tem-se:

$$d_{\lambda_{mi}} = \ell.r. \sum \frac{Kh}{h} [1 - \cos[h(\alpha - \theta_i)]] [a_j + b_j FM \cdot \cos(\theta - \alpha)] d\theta \quad [3.12]$$

ou

$$d_{\lambda_{mi}} = \ell.r. \sum \frac{Kh}{h} [a_j - a_j \cdot \cos[h(\theta - \theta_i)] + b_j FM \cdot \cos(\theta - \alpha) - b_j FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \cos[h(\theta - \theta_i)]] d\theta$$

ou

$$d_{\lambda_{mi}} = \ell.r. \sum \frac{Kh}{h} [a_j - a_j \cdot \cos[h(\theta - \theta_i)] + b_j FM \cdot \cos(\theta - \alpha) - \frac{b_j FM}{2} \cos(\theta(1-h) - \alpha + h\theta_i) - \frac{b_j FM}{2} \cos(\theta(1-h) - \alpha + h\theta_i)] d\theta \quad [3.13]$$

A integração da equação [3.13] deve ser feita em intervalo de 2π radianos para cobrir todo o comprimento do entreferro da máquina.

Portanto tomando o ângulo α como referência tem-se:

$$\lambda_{mi} = \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} d\lambda_{mi} \quad [3.14]$$

Substituindo a equação [3.13] em [3.14], vem:

$$\begin{aligned} \lambda_{mi} = r \cdot \ell \cdot \sum \frac{Kh}{h} \cdot [& \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} a_j d\theta - \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} a_j \cdot \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta \\ & + \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} b_j \cdot FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot d\theta \\ & - \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} \frac{b_j \cdot FM}{2} \cdot \cos(\theta(1-h) - \alpha + h \cdot \theta_i) \cdot d\theta \\ & - \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} \frac{b_j \cdot FM}{2} \cdot \cos(\theta(1+h) - \alpha + h \cdot \theta_i) \cdot d\theta] \end{aligned} \quad [3.15]$$

Os valores a_j e b_j dentro das integrais da equação [3.15] não podem ser considerados constantes. Para a determinação destes valores utiliza-se a curva $B(\alpha, \theta)$ por $F_{mm}(\alpha, \theta)$ segmentada em trechos lineares representada na figura (3.3).

Utilizando a figura (3.3) onde está representado um segmento genérico \overline{AB} , obtém-se as equações [3.16] e [3.17], para os coeficientes b_j e a_j .

$$b_j = \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} \quad [3.16]$$

e

$$a_j = -b_j \cdot F_{j-1} + B_{j-1} \quad [3.17]$$

Dividindo a equação [3.15] em cinco integrais tem-se:

$$\lambda_{mi} = \lambda_{mi1} + \lambda_{mi2} + \lambda_{mi4} + \lambda_{mi5} \quad [3.18]$$

Na qual:

$$\lambda_{mi1} = r.\ell.\sum \frac{Kh}{h} \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} d\theta \quad [3.19]$$

$$\lambda_{mi2} = r.\ell.\sum \frac{Kh}{h} \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} a_j \cdot \cos[h(\theta - \theta_i)] d\theta \quad [3.20]$$

$$\lambda_{mi3} = r.\ell.\sum \frac{Kh}{h} \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} b_j \cdot FM \cdot \cos(\theta - \alpha) d\theta \quad [3.21]$$

$$\lambda_{mi4} = r.\ell.\sum \frac{Kh}{h} \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} \frac{b_j \cdot FM}{2} \cdot \cos(\theta(1-h) - \alpha + h.\theta_i) d\theta \quad [3.22]$$

$$\lambda_{mi5} = r.\ell.\sum \frac{Kh}{h} \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} \frac{b_j \cdot FM}{2} \cdot \cos(\theta(1+h) - \alpha - h.\theta_i) d\theta \quad [3.23]$$

Analisando as integrais das equações [3.19]; [3.20]; [3.21]; [3.22]; [3.23] para $h = 1$ caracterizando o componente fundamental e $h = 3$ para o terceiro harmônico, chega-se a λ_{mi} cujo o desenvolvimento se encontra no anexo (2).

$$\begin{aligned} \lambda_{mi} = & -4.r.\ell.K_1 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N a_{j1} \cdot [\text{sen}(\theta_j - \alpha) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha)] \\ & - 2.r.\ell.K_1 \cdot FM_1 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N b_{j1} \cdot [\theta_j - \theta_{j-1}] \\ & - 2.r.\ell.FM_1 \cdot K_1 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) \\ & - r.\ell \cdot \frac{K3}{9} \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N a_{j3} \cdot [\text{sen}(3\theta_j - 3\alpha) - \text{sen}(3\theta_{j-1} - 3\alpha)] \\ & - \frac{2.r.\ell.FM_3 \cdot K_3}{3} \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N b_{j3} \cdot \text{sen}(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \cdot \cos(2\theta_{j-1} + 2\theta_j - 2\alpha) \\ & - \frac{2.r.\ell.FM_3 \cdot K_3}{3} \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N b_{j3} \cdot \text{sen}(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \cdot \cos(2\theta_{j-1} + 2\theta_j - 4\alpha) \end{aligned} \quad [3.24]$$

Na qual:

$$\theta_j = \alpha - \pi/2$$

$$\theta_N = \alpha$$

3.3 – Determinação do Ponto de Operação da Máquina

Um processo para a solução das equações diferenciais da máquina de indução trifásica pode ser obtido utilizando a equação do fluxo magnetizante λ_{mi} .

A equação [3.24] representa o fluxo magnetizante da i -ésima fase, como função dos pontos da curva $B(\alpha, \theta)$ por $F_{mm}(\alpha, \theta)$. O fluxo magnetizante se relaciona com a corrente da fase i , através da relação:

$$\lambda_i = L_i \cdot i_i + \lambda_{mi} \quad [3.25]$$

ou

$$i_i = \frac{\lambda_i}{L_i} - \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \quad [3.26]$$

A $F_{mm}(\alpha, \theta)$ de uma fase pode ser encontrada no anexo (1) e é dada por:

$$F_{mm_i}(\alpha, \theta) = K \cdot i_i \cdot f_A \quad [3.27]$$

Na qual:

f_A é a função de acúmulo de condutores.

A $F_{mm_i}(\alpha, \theta)$ total será portanto:

$$F_{mm_i}(\alpha, \theta) = K \cdot K_h \sum_i i_i \cos(\theta - \theta_i) \quad [3.28]$$

onde:

K é uma constante relacionada com a força magnetomotriz da máquina, e K_h é uma constante de projeto relacionada com a função acúmulo de espiras.

Substituindo a equação [3.26] em [3.28], vem:

$$F_{mm_i}(\alpha, \theta) = K.Kh. \sum_i \frac{\lambda_i}{L_i} \cdot \cos(\theta - \theta_i) - K.Kh \sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \cdot \cos(\theta - \theta_i) \quad [3.29]$$

onde os membros do lado direito e esquerdo da equação [3.29], podem ser representados por:

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = \text{Re}[FM_i \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\alpha}]$$

$$\sum_i \frac{\lambda_i}{L_i} \cos(\theta - \theta_i) = \text{Re} \left[\sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta_i} \right]$$

$$\sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \cos(\theta - \theta_i) = \text{Re} \left[\sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{-j\theta_i} \right] \quad [3.30]$$

Substituindo as equações [3.30] e [3.29] chega-se:

$$FM_i \cdot e^{-j\alpha} = K.Kh. \sum_i \frac{\lambda_i}{L_i} e^{-j\theta_i} - K.Kh \cdot \sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} e^{-j\theta_i} \quad [3.31]$$

Separando as partes reais e imaginárias ambos os lados da igualdade [3.31] determina-se:

$$\begin{aligned} F_R &= f_R(\lambda_i) - \lambda_{mR} \\ F_I &= f_I(\lambda_i) + \lambda_{mI} \end{aligned} \quad [3.32]$$

onde:

$$\begin{aligned} F_R &= \frac{FM_i}{K.Kh} \cdot \cos \alpha \\ F_I &= \frac{FM_i}{K.Kh} \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad [3.33]$$

$$f_R(\lambda_i) = \sum_i \frac{\lambda_i}{L_i} \cos \theta_i$$

$$f_I(\lambda_i) = \sum_i \frac{\lambda_i}{L_i} \sin \theta_i \quad [3.34]$$

$$\lambda_{mR} = \sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \cos \theta_i$$

$$\lambda_{mI} = \sum_i \frac{\lambda_{mi}}{L_i} \sin \theta_i \quad [3.35]$$

Utilizando do termo λ_{mR} da equação [3.35] e substituindo a equação [3.24], que representa o fluxo magnetizante concatenado (λ_{mi}), obtém-se a equação [3.36].

$$\begin{aligned} \lambda_{mR} = & \left\{ - \sum \frac{K.K_1}{L_i} \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ 4.a_{j1} \cdot [\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_j - \alpha)] \right. \right. \\ & + 2.FM_1.b_{j1} \cdot \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) + 2.FM_1.b_{j1} \cdot \cos(\theta_j - \theta_{j-1}) \\ & - \sum \frac{K.K_3}{L_i} \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{4}{9} \cdot a_{j3} \cdot [\sin 3(\theta_j - \alpha) - \sin 3(\theta_j - \alpha)] \right. \\ & + \frac{2}{3} \cdot FM_3.b_{j3} \cdot \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(-\theta_{j-1} - \theta_j + 4\alpha) \\ & \left. \left. + \frac{2}{3} \cdot FM_3.b_{j3} \cdot \sin(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \cdot \cos(2\theta_{j-1} + 2\theta_j - 4\alpha) \right\} \right\} \cdot \cos \theta_i \end{aligned} \quad [3.36]$$

Utilizando-se o termo λ_{mI} da equação [3.35] e da mesma forma substituindo o termo λ_{mi} obtém-se a equação [3.37].

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi} = & \left\{ - \sum \frac{K.K_1}{L_i} \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ 4.a_{j1} \cdot [\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \right. \\
& + 2.FM_1.b_{j1} \cdot \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) + 2.FM_1.b_{j1} \cdot \cos(\theta_j - \theta_{j-1}) \\
& - \sum \frac{K.K_3}{L_i} \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{4}{9} \cdot a_{j3} \cdot [\sin 3(\theta_j - \alpha) - \sin 3(\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
& + \frac{2}{3} \cdot FM_3.b_{j3} \cdot \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(-\theta_{j-1} - \theta_j + 2\alpha) \\
& \left. \left. + \frac{2}{3} \cdot FM_3.b_{j3} \cdot \sin(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \cdot \cos(2\theta_{j-1} + 2\theta_j - 4\alpha) \right\} \right\} \cdot \cos \theta_i
\end{aligned}
\tag{3.37}$$

Através da equação [3.36] e [3.37] podem-se determinar as curvas ou tabelas dos valores de λ_{mi} como função de α , FM_i e do ângulo entre o rotor e o estator θ_R , que esta implícito nos valores de θ_i , conforme verifica-se a seguir:

$$\begin{aligned}
\theta_a &= 0 \\
\theta_b &= 120^\circ \\
\theta_c &= -120^\circ \\
\theta_A &= \theta_R \\
\theta_B &= \theta_R + 120^\circ \\
\theta_C &= \theta_R - 120^\circ
\end{aligned}
\tag{3.38}$$

Onde θ_a , θ_b , θ_c são os ângulos das fases do estator e θ_A , θ_B , θ_C são ângulos das fases do rotor da máquina.

Levando a equação [3.36] e a identidade abaixo:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \theta_i) \cdot \cos \theta_i &= \frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\cos(\alpha - 2\theta_i)}{2} \\
\cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \cos \theta_i &= \frac{\cos(3\alpha - 4\theta_i)}{2} + \frac{\cos(3\alpha - 2\theta_i)}{2}
\end{aligned}$$

e definindo

$$\begin{aligned}
FFM_1 = & \sum_{j=1}^N \left\{ 4.a_{j1} \cdot [\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
& + 2.FM_1.b_{j1} \cdot \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) \\
& \left. + 2.FM_1.b_{j1} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
FFM_3 = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{4}{9} \cdot a_{j3} \cdot [\text{sen } 3(\theta_j - \alpha) - \text{sen } 3(\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
+ \frac{2}{3} \cdot FM_3 \cdot b_{j3} \cdot \text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(\theta_{j-1} - \theta_j + 2\alpha) \\
\left. + \frac{2}{3} \cdot FM_3 \cdot b_{j3} \cdot \text{sen}(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \cdot \cos(2\theta_{j-1} + 2\theta_j - 4\alpha) \right\}
\end{aligned} \quad [3.39]$$

Pode-se obter então

$$\begin{aligned}
\lambda_{mR} = -K \cdot K_1 \cdot \sum_i \frac{1}{L_i} \cdot [\cos(\alpha - \theta_i) \cdot \cos \theta_i] FFM_1 \\
- K \cdot K_3 \cdot \sum_i \frac{1}{L_i} \cdot [\cos(3\alpha - 3\theta_i) \cdot \cos \theta_i] FFM_3
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\lambda_{mR} = -\frac{1}{2} K \cdot K_1 \cdot \sum_i \frac{1}{L_i} \cdot [\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\theta_i)] FFM_1 \\
- \frac{1}{2} K \cdot K_3 \cdot \sum_i \frac{1}{L_i} \cdot [\cos(3\alpha - 4\theta_i) + \cos(3\alpha - 2\theta_i)] FFM_3
\end{aligned} \quad [3.40]$$

Substituindo os valores de θ_i dados em [3.38] em [3.36], tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mR} = -\frac{1}{2} K \cdot K_1 \cdot FFM_1 \left\{ \frac{1}{L_a} \cdot [\cos \alpha + \cos \alpha] + \frac{1}{L_b} [\cos \alpha + \cos(\alpha - 240^\circ)] \right. \\
+ \frac{1}{L_c} [\cos \alpha + \cos(\alpha + 240^\circ)] + \frac{1}{L_A} [\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\theta_R)] \\
\left. + \frac{1}{L_B} [\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\theta_R - 240^\circ)] + \frac{1}{L_C} [\cos \alpha + \cos(\alpha - 2\theta_R + 240^\circ)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{K.K_3.FFM_3}{2} \left\{ \frac{1}{L_a} [\cos(3\alpha) + \cos(3\alpha)] + \frac{1}{L_b} [\cos(3\alpha - 480^\circ) + \cos(3\alpha + 240^\circ)] \right. \\
& + \frac{1}{L_c} [\cos(3\alpha + 480^\circ) + \cos(3\alpha + 240^\circ)] + \frac{1}{L_d} [\cos(3\alpha - 4\theta_R) + \cos(3\alpha - 2\theta_R)] \\
& + \frac{1}{L_B} [\cos(3\alpha - 3\theta_R + 480^\circ) + \cos(3\alpha - 2\theta_R - 240^\circ)] \\
& \left. + \frac{1}{L_C} [\cos(3\alpha - 3\theta_R + 480^\circ) + \cos(3\alpha - 2\theta_R + 240^\circ)] \right\}
\end{aligned}
\tag{3.41}$$

Fazendo:

$$L_a = L_b = L_c = L_s$$

$$L_A = L_B = L_C = L_R$$

chega-se:

$$\lambda_{mR} = -\frac{1}{2} K.K_1.FFM_1 \left[\frac{1}{L_s} + \frac{1}{L_R} \right] . 3 . \cos \alpha \tag{3.42}$$

Para λ_{mi} tem-se a seguinte identidade a ser utilizada.

$$\cos(\alpha - \theta_i) . \sin \theta_i = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin(2\theta_i - \alpha)$$

$$\cos(3\alpha - 3\theta_i) . \sin \theta_i = \frac{1}{2} \sin(3\alpha - 2\theta_i) + \frac{1}{2} \sin(3\alpha - 4\theta_i)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi} = & -\frac{1}{2} K.K_1.FFM_1 \cdot \left\{ \frac{1}{L_s} [(\sin \alpha + \sin \alpha) + (\sin \alpha + \sin(240^\circ - \alpha))] \right. \\
& + (\sin \alpha + \sin(-240^\circ - \alpha))] + \frac{1}{L_R} [(\sin \alpha + \sin(2\theta_R - \alpha)) \\
& \left. + (\sin \alpha + \sin(2\theta_R + 240^\circ - \alpha))] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{K.K_3.FFM_3}{2} \left\{ \frac{1}{L_s} [\sin(3\alpha) + \sin(3\alpha) + \sin(3\alpha - 240^\circ) \right. \\
& + \sin(3\alpha - 480^\circ) + \sin(3\alpha + 240^\circ) + \sin(3\alpha - 480^\circ)] \\
& + \frac{1}{L_R} [\sin(3\alpha - 2\theta_R) + \sin(3\alpha - 4\theta_R) + \sin(3\alpha - 2\theta_R - 240^\circ) \\
& + \sin(3\alpha - 4\theta_R - 480^\circ) + \sin(3\alpha - 2\theta_R + 240^\circ) + \sin(3\alpha - 4\theta_R + 480^\circ)] \left. \right\} \\
& \hspace{15em} [3.43]
\end{aligned}$$

Simplificando a equação [3.43], obtém-se:

$$\lambda_{ml} = -\frac{1}{2} K.K_1.FFM_1 \left[\frac{1}{L_s} + \frac{1}{L_R} \right] 3 \sin \alpha \quad [3.44]$$

Verifica-se que a componente do terceiro harmônico se anula, nas equações [3.42] e [3.44], apresentando estas expressões somente a componente fundamental.

Utilizando as equações [3.33] combinadas com, as equações [3.42] e [3.44] chega-se:

$$F_R = \frac{L_s.L_R}{\frac{3}{2} K^2.K_1^2.(L_s + L_R)} \cdot \frac{FM_1}{FFM_1} \cdot \lambda_{mR} \quad [3.45]$$

$$F_I = \frac{L_s.L_R}{\frac{3}{2} K^2.K_1^2.(L_s + L_R)} \cdot \frac{FM_1}{FFM_1} \cdot \lambda_{mI} \quad [3.46]$$

Isolando o termo λ_{mR} e λ_{mI} função F_R e F_I das equações [3.45] e [3.46] e substituindo na equação [3.32], obtém-se as equações [3.47] e [3.48].

$$F_R = f_R(\lambda_i) - \frac{3.K^2.K_1^2.(L_s + L_R).FFM_1.F_R}{2.L_s.L_R.FM_1} \quad [3.47]$$

$$F_I = f_I(\lambda_i) - \frac{3.K^2.K_I^2.(L_s + L_R).FFM_I.F_I}{2.L_s.L_R.FM_I} \quad [3.48]$$

Manipulando algebricamente as equações [3.47] e [3.48] tem-se; [3.49 e [3.50].

$$\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{K^2.K_I^2.(L_s + L_R)}{L_s.L_R} \cdot \frac{FFM_I}{FM_I}\right) \cdot F_R = f_R(\lambda_i) \quad [3.49]$$

$$\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{K^2.K_I^2.(L_s + L_R)}{L_s.L_R} \cdot \frac{FFM_I}{FM_I}\right) \cdot F_I = f_I(\lambda_i) \quad [3.50]$$

Elevando ao quadrado ambos os lados das equações [3.49] e [3.50], somando as equações resultantes, chega-se a:

$$\left[1 + \frac{A.FFM_I}{FM_I}\right]^2 \cdot [F_R^2 + F_I^2] = f_R^2(\lambda_i) + f_I^2(\lambda_i) \quad [3.51]$$

onde:

$$A = \frac{3.K^2.K_I^2.(L_s + L_R)}{2.L_s.L_R} \quad [3.52]$$

Através das equações [3.33] chega-se a:

$$F_R^2 + F_I^2 = \left(\frac{FM_I}{K.K_I}\right)^2 \quad [3.53]$$

Substituindo a equação [3.53] em [3.50] vem:

$$\left[1 + \frac{A.FFM_I}{FM_I}\right]^2 \cdot \left[\frac{FM_I}{K.K_I}\right]^2 = f_R^2(\lambda_i) + f_I^2(\lambda_i) \quad [3.54]$$

Portanto:

$$\left[1 + \frac{A \cdot FFM_1}{FM_1}\right] \left[\frac{FM_1}{K \cdot K_1}\right] = \pm f(\lambda_i) \quad [3.55]$$

onde

$$f(\lambda_i) = \sqrt{f_R^2(\lambda_i) + f_I^2(\lambda_i)} \quad [3.56]$$

da equação [3.55] tem-se:

$$FFM_1 = \pm \frac{K \cdot K_1}{A} f(\lambda_i) - \frac{1}{A} FM_1 \quad [3.57]$$

A equação [3.57] representa duas retas sendo mostrada na figura (3.5) a reta no primeiro quadrante.

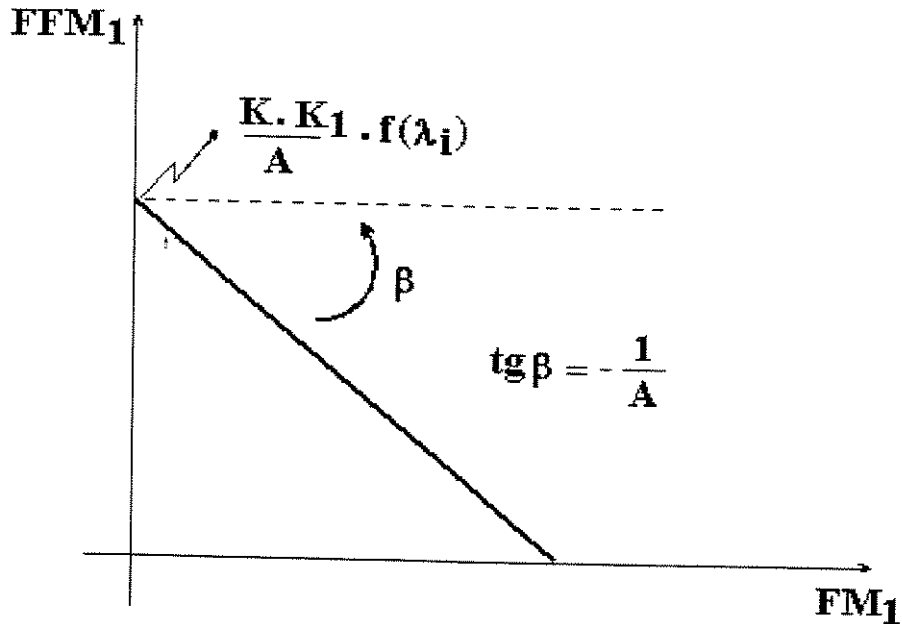


Figura (3.5) – Representação da reta $FFM_1 \times FM_1$.

A outra reta FFM_1 por FM_1 localizada no terceiro quadrante não será considerada no desenvolvimento, por não satisfazer a solução do problema físico em análise, sendo que a equação [3.57] representa apenas valores de FFM_1 como função de FM_1 positivos portanto tem-se:

$$FFM_1 = \frac{K.K_1}{A} . f(\lambda_i) - \frac{1}{A} FM_1 \quad [3.58]$$

A reta dada pela equação [3.58] considera somente a influência do harmônico fundamental, já que a terceira harmônica cancelou-se ao longo do desenvolvimento matemático.

Manipulando a equação [3.58], fazendo:

$$D = \frac{K.K_1}{A} . f(\lambda_i) \quad [3.59]$$

e

$$C = \frac{1}{A}$$

$$C = \frac{2.L_s.L_R}{3.(K^2.K_1^2(L_s + L_R))} \quad [3.60]$$

Chega-se a reta (FFM_1 x FM_1) dada pela equação [3.61]:

$$FFM_1 = D - C . FM_1 \quad [3.61]$$

A utilização em conjunto das equações [3.61], bem como da curva $B_i(\alpha, \theta)$ por $F_{mm_i}(\alpha, \theta)$ em segmentos de reta conforme a figura (3.4), que permite determinar os coeficientes a_j , b_j e F_j , F_{j-1} , FM , estes serão utilizados na solução do modelo matemático, permitindo a determinação do ponto de operação da máquina de indução trifásica.

3.4 – Conjugado Eletromagnético

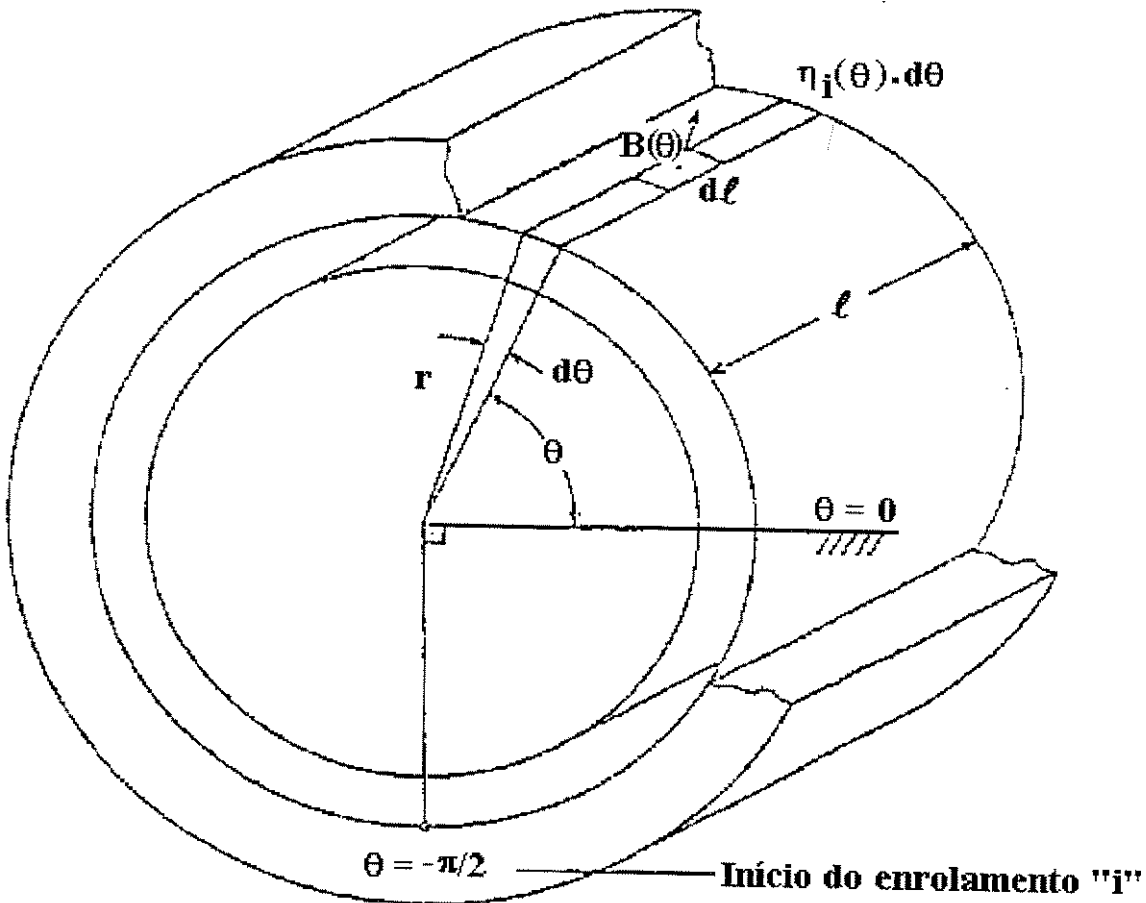


Figura (3.6) – Representação dos enrolamentos do rotor.

Na figura (3.6), observa-se o rotor de uma máquina de indução, com uma distribuição infinitesimal de condutores por fase $\eta_i(\theta)$ desenvolvida no anexo 1. A corrente do elemento infinitesimal é dado por $(i_i \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta)$, onde i_i é a corrente da i -ésima fase do rotor.

Na presença da densidade do campo magnético $B(\alpha, \theta)$ surge um conjugado dT_i sobre o lado ativo infinitesimal do condutor dado por:

$$dT_i = r \cdot \ell \cdot B(\alpha, \theta) i_i \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta$$

[3.62]

Na qual:

ℓ - comprimento do rotor

r - raio do rotor

$B(\alpha, \theta)$ – densidade fluxo

i_i – corrente do rotor

$\eta_i(\theta)$ – função distribuição de condutores

$$B(\alpha, \theta) = a_j + b_j \cdot F_{mm}(\alpha, \theta) = a_j + b_j \cdot F_{M_i} \cdot \cos(\theta - \alpha) \quad [3.63]$$

e

$$\eta_i(\theta) = \sum K_h \cdot \sin[h(\theta - \theta_i)] \quad [3.64]$$

Nas equações [3.62] e [3.64] o índice (i) aplica-se as fases A, B, C do rotor. Substituindo a equação [3.64] em [3.65] em [3.63] vem:

$$dT_i = r \cdot \ell \cdot i_i \cdot [a_j \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta + b_j \cdot F_{M_i} \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta] \quad [3.65]$$

Desenvolvendo a equação [3.65] tem-se:

$$dT_i = r \cdot \ell \cdot i_i \cdot a_j \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta + r \cdot \ell \cdot i_i \cdot b_j \cdot F_{M_i} \cdot \cos(\theta - \alpha) \eta_i(\theta) d\theta \quad [3.66]$$

Utilizando $F_{mm}(\alpha, \theta)$ como referência para o cálculo dos coeficientes a_j , b_j , determina-se os intervalos de integração encontrados na relação [3.67] que está representado na figura (3.7).

$$\theta_R < \theta < \theta_R + 2\pi \quad [3.67]$$

onde θ_R é o ângulo entre a fase i em relação a referência α ao longo do entreferro da máquina.

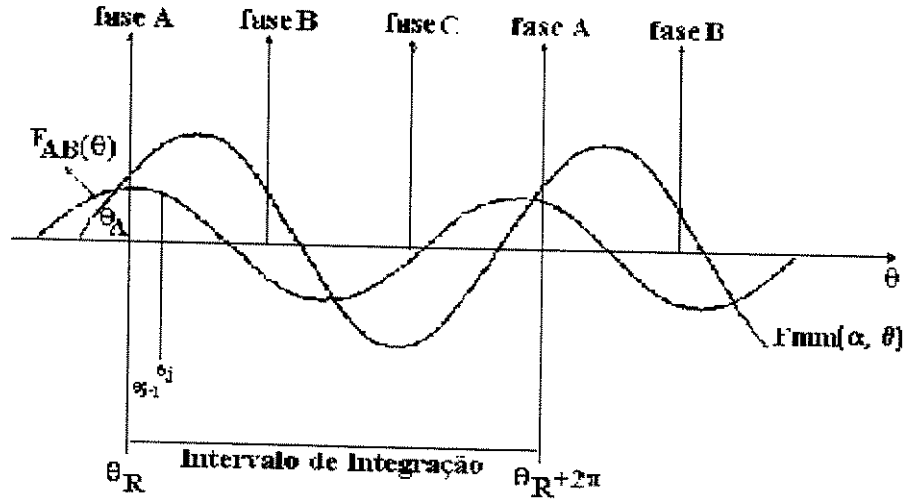


Figura (3.7) – Representação dos limites de integração.

Solucionando a integral da equação [3.66] tem-se:

$$T_i = \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} dT_i \quad [3.68]$$

$$T_i = r \cdot \ell \cdot i_i \cdot \left[\int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} a_j \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta + \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} b_j \cdot FM_i \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot \eta_i(\theta) \cdot d\theta \right] \quad [3.69]$$

Separando a integral da equação [3.69] em duas integrais I_1 e I_2 , vem:

$$I_1 = \sum Kh \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} a_j \cdot \text{sen}[h(\theta - \theta_j)] \cdot d\theta \quad [3.70]$$

$$I_2 = \sum Kh \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} b_j \cdot FM_i \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}[h(\theta - \theta_j)] \cdot d\theta \quad [3.71]$$

Desenvolvimento das integrais [3.70] e [3.71] encontram-se no anexo (3). O resultado final das integrais estão representadas na equação [3.72].

$$\begin{aligned}
T_i = K_1 . r . \ell . i_i \left\{ 4 . \text{sen}(\alpha - \theta_i) . \sum_{j=1}^N a_{j1} [\text{sen}(\theta_j - \alpha) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
- 2 . FM_1 . \text{sen}(\alpha - \theta_i) . \sum_{j=1}^N b_{j1} . [\text{sen}(\theta_i - \theta_{j-1}) . \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) + 2 . (\theta_j - \theta_{j-1})] \Big\} \\
+ K_3 . r . \ell . i_i \left\{ - \frac{4}{3} . \text{sen}(3\alpha - 3\theta_i) . \sum_{j=1}^N a_{j3} [\text{sen}(3\theta_j - 3\alpha) - \text{sen}(3\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
- \frac{FM_3}{2} . \text{sen}(3\alpha - 3\theta_i) . \sum_{j=1}^N b_{j3} . [2 . \text{sen}(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) . \cos(-2\theta_j - 2\theta_{j-1} + 4\alpha) \\
+ 4 . \text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1}) . \cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 2\alpha)] \Big\}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Analisando a equação [3.72], verifica-se que ele apresenta um componente referente ao harmônico fundamental, representado por T_{i1} , e um componente referente ao terceiro harmônico T_{i3} representadas pelas equações [3.73] e [3.74] respectivamente.

$$\begin{aligned}
T_{i1} = K_1 . r . \ell . i_i \left\{ 4 . \text{sen}(\alpha - \theta_i) . \sum_{j=1}^N a_{j1} [\text{sen}(\theta_j - \alpha) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
- 2 . FM_1 . \text{sen}(\alpha - \theta_i) . \sum_{j=1}^N b_{j1} . [\text{sen}(\theta_i - \theta_{j-1}) . \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) + (\theta_j - \theta_{j-1})] \Big\}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
T_{i3} = K_3 . r . \ell . i_i \left\{ - \frac{4}{9} . \text{sen}(3\alpha - 3\theta_i) . \sum_{j=1}^N a_{j3} [\text{sen}(3\theta_j - 3\alpha) - \text{sen}(3\theta_{j-1} - \alpha)] \right. \\
- \frac{FM_3}{2} . \text{sen}(3\alpha - 3\theta_i) . \sum_{j=1}^N b_{j3} . [2 . \text{sen}(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) . \cos(-2\theta_j - 2\theta_{j-1} + 4\alpha) \\
+ 4 . \text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1}) . \cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 2\alpha)] \Big\}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

CAPÍTULO IV

ENSAIO EXPERIMENTAL DO MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO

4.1 - Introdução

Para a utilização do modelo matemático é necessário a obtenção experimental dos parâmetros da máquina, bem como o levantamento da sua curva de magnetização, utilizada na solução das equações fundamentais da máquina.

4.2 - Levantamento dos Parâmetros da Máquina de Indução Trifásica

São apresentados a seguir procedimentos a serem utilizados para o levantamento de todos os parâmetros da máquina de indução trifásica.

4.2.1 - Resistência do Estator por Fase

Considerando uma máquina de indução de 2 CV de seis terminais alimentada em 220 volts movimentada por um período para que a temperatura interna atinja o equilíbrio, faz-se o desligamento da mesma, e através de uma ponte de Kelvin mede-se a resistência de cada uma das bobinas, obtendo a resistência por fase do estator da máquina.

4.2.2 - Outros Parâmetros

Através dos ensaios em vazio e rotor bloqueado, aplicados a máquina de indução trifásica, determinam-se os parâmetros restantes.

4.2.2.1 - Ensaio em Vazio

O esquema elétrico que permite a realização do teste em vazio da máquina é mostrado na figura (4.1)

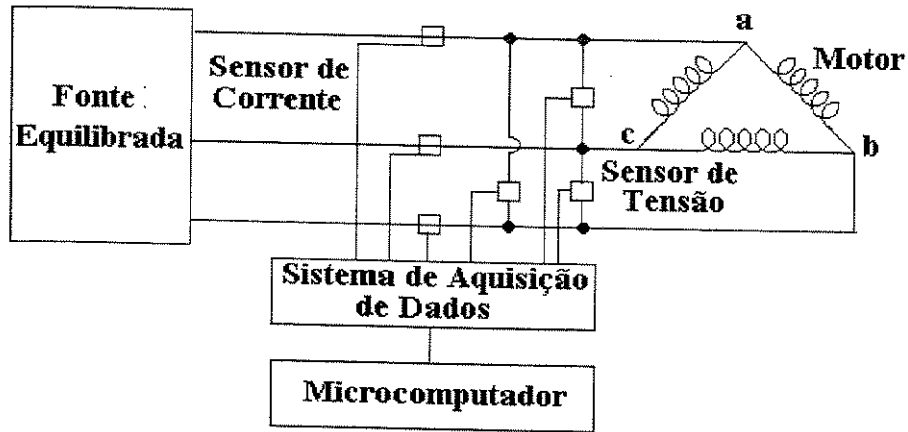


Figura (4.1) – Configuração básica para o ensaio em vazio e rotor bloqueado.

A máquina é alimentada por uma fonte senoidal de tensões trifásicas equilibrada. A fonte de tensão garante distorções harmônicas e desbalanceamento, que podem ser consideradas desprezíveis. Suas características estão apresentadas na tabela (4.1).

Como a potência ativa P_o para o motor em vazio é determinado por:

$$P_o = P_{ac} + P_{bc} \quad [4.1]$$

onde

$$P_{ac} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{ac} \cdot i_a \cdot dt \quad [4.2]$$

$$P_{bc} = \frac{1}{T} \int_0^T v_{bc} \cdot i_b \cdot dt \quad [4.3]$$

Sendo P_{ac} e P_{bc} determinados a partir das formas de tensão e corrente medidas através de sensores de efeito Hall e captadas por um sistema de aquisição de dados e analisados através de microcomputador conforme a figura (4.1).

A partir dos valores instantâneos de linha v_{ab} , i_a , v_{bc} e i_b obtém-se os valores eficazes V_{ac} , I_a , V_{bc} , I_b e através da equação [4.1] determina-se P_o .

Considerando $V_{ab} = V_0$ e $I_a = I_0$ pode-se obter:

$$R_o = \frac{P_o}{3I_0^2} \quad [4.4]$$

$$Z_o = \sqrt{3} \cdot \frac{V_0}{I_0} \quad [4.5]$$

$$X_0 = \sqrt{Z_0^2 - R_0^2} \quad [4.6]$$

Os resultados das equações [4.4], [4.5] e [4.6], são válidos, já que o ensaio em vazio é realizado com tensão reduzida fazendo com que a máquina opere na região linear da curva de magnetização, minimizando erros devidos as distorções harmônicas.

Sendo $\dot{Z}_0 = (R_0 + jX_0)$ a impedância por fase do circuito do motor em vazio, considerando as perdas rotacionais.

4.2.2.2 - Ensaio de Rotor Bloqueado

O esquema elétrico para o ensaio com rotor bloqueado é o mesmo da figura (4.1), portanto:

$$P_b = P_{ac} + P_{bc} \quad [4.7]$$

$$R_b = \frac{P_b}{3I_b^2} \quad [4.8]$$

$$Z_b = \sqrt{3} \cdot \frac{V_b}{I_b} \quad [4.9]$$

$$X_b = \sqrt{Z_b^2 - R_b^2} \quad [4.10]$$

onde $(\dot{Z}_b = R_b + jX_b)$ é a impedância por fase do circuito do motor com rotor bloqueado, considerando as perdas rotacionais.

4.2.2.3 – Determinação dos Parâmetros da Máquina através do Ensaio em Vazio e Rotor Bloqueado

Os parâmetros por fase da máquina referido ao estator são representados por:

R_s – resistência do estator

X_s – reatância de dispersão do estator

R_R – resistência do rotor

X_R – reatância de dispersão do rotor

X_m – reatância de magnetização

Considerando os circuitos equivalentes da máquina de indução em vazio, sem perdas rotacionais, e a rotor bloqueado, com as perdas rotacionais incluídas em R_R , tem-se a figura (4.2) a, b.

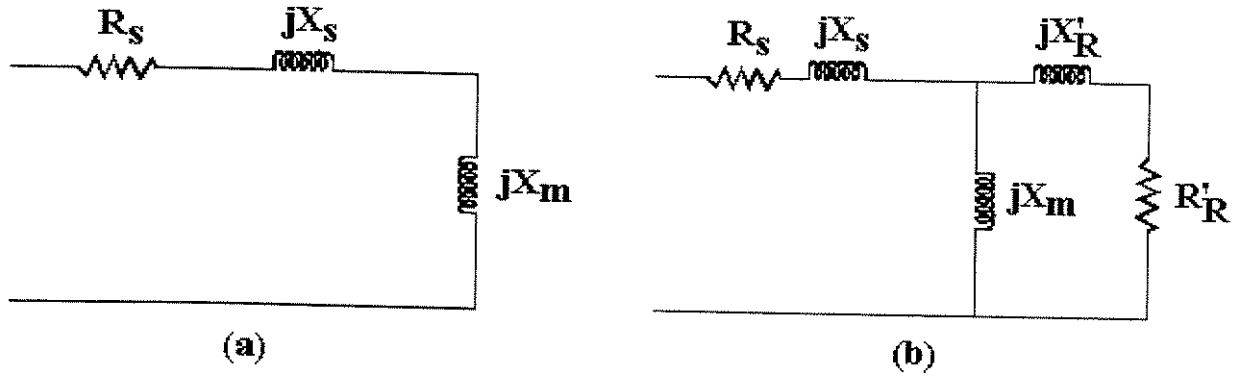


Figura (4.2) – Circuito equivalente para (a) rotor em vazio (b) rotor bloqueado.

Utilizando os resultados do teste em vazio com parâmetros do circuito equivalente da figura (4.2) a, tem-se:

$$X_0 = X_s + X_m \quad [4.11]$$

Utilizando os resultados dos testes em rotor bloqueado com os parâmetros do circuito equivalente da figura (4.2)b, tem-se:

$$R_b + jX_b = R_s + jX_s + \frac{(R'_R + jX'_R)jX_m}{R'_R + j(X'_R + X_m)} \quad [4.12]$$

Considerando que $R'_R \ll X_m$ a equação [4.12] torna-se:

$$R_b = K^2 \cdot R'_R + R_s \quad [4.13]$$

e

$$X_b = K \cdot X'_R + X_s \quad [4.14]$$

Na qual:

$$K = \frac{X_m}{X_m + X'_R} \quad [4.15]$$

Para uma máquina de rotor em gaiola categoria (A), segundo [5], considera-se:

$$X'_R = X_s \quad [4.16]$$

As equações [4.11], [4.13] e [4.15] formam um sistema que pode ser resolvido por um processo iterativo através da grandeza K .

Adotando para esta grandeza um valor K_i , das equações [4.11], [4.14], [4.15], [4.16], obtém-se um novo valor de K_{i+1} , dado por:

$$K_{i+1} = 1 - \frac{X_b}{X_0(1 + K_i)} \quad [4.17]$$

A cada iteração, compara-se os valores de K_i e K_{i+1} até se chegar a uma diferença aceitável. Chamando de K_F , o valor final de K , obtém-se os valores dos parâmetros do circuito equivalente a partir das equações:

$$X_s = X'_R = \frac{X_b}{1 + K_F} \quad [4.18]$$

$$X_m = X_0 - \frac{X_0}{1 + K_F} \quad [4.19]$$

$$R'_R = \frac{R_b - R_s}{K_F^2} \quad [4.20]$$

Aplicando ao processo iterativo descrito, ao motor de indução trifásico em gaiola de esquilo de 2 CV, 1720 RPM, 60 Hz, $\Delta/Y - 220/380V - 6,90/3,99 A$, $\eta = 77,6\%$, $\cos \varphi = 0,78$, obtém-se os valores dos parâmetros mostrados na tabela (4.1).

Tabela (4.1) – Parâmetros do motor de indução.

$R_s(\Omega)$	$R_R(\Omega)$	$X_s(\Omega)$	$X_R(\Omega)$	$X_m(\Omega)$
3,1110	3,8310	3,1823	3,1823	72,6230

A fonte de tensão equilibrada, os sensores de efeito Hall e o sistema de aquisição de dados verificado na figura (4.1), tem suas especificações dadas através das tabelas (4.2) e (4.3).

Tabela (4.2) – Fontes de tensão.

Grandezas	Especificações
Modelo	HP 6834 A
Fase	3
Potência nominal	1500 VA/fase
Correntes nominais em valor eficaz	10 A, 5 A

Frequência nominal de saída regulação de carga	0,5 %
Regulação de linha	0,1 %
Distorções harmônica total máxima 1 % placa	0,2 % (utilizado nos ensaios)
Desbalanceamento máximo	0,1 %
Erro de tensão eficaz	0,05 % + 250 mV
Erro da corrente eficaz	0,1 % + 50 mA
Erro da frequência	0,01 % + 0,01 Hz
Erro da potência aparente	0,15 % + 3 VA
Erro da potência ativa	0,15 % + 3 W
Fator de potência	0,01
Frequência	47 – 63 Hz
Faixa de tensão de entrada	180 – 256 V, 360 – 440 V

Tabela (4.3) – Sensores e sistema de aquisição de dados.

Grandezas	Especificações
Tensão	Efeito Hall – 1:60
Corrente	Efeito Hall – 1:1000
Placa A/D	
Grandezas	Especificações
Fabricante	Data Translations
Modelo	DT31 e EZ
Resolução	12 bits
Canais de entrada	16 canais
Frequência de amostragem	250 KHz
Ganhos	1, 2, 4, 8
Variações de tensões	$\pm 1,25, 2,5, 5$ e 10 V
Sobretensões	35 V ou ± 20 V obf
Erros	Ganho 1 – erro $\pm 0,5$ % e Ganho 2,4 e 8 – erro $\pm 0,07$ %

4.3. Determinação das Características Magnéticas da Máquina de Indução Trifásica

Com os parâmetros da máquina de indução trifásica determinados, e utilizando-se o ensaio experimental, verificado na figura (4.3), onde a máquina de indução é levada à velocidade síncrona através de um motor síncrono acoplado ao eixo da máquina de indução, e utilizando uma fonte de tensão equilibrada que alimenta a máquina de indução, com suas característica dada pela tabela (4.1), e com a utilização de sensores para leitura da tensão e corrente alimentando um sistema de aquisição de dados, com suas característica

dada pela tabela (4.2), com esta configuração calcula-se as perdas no ferro a partir do estator da máquina.

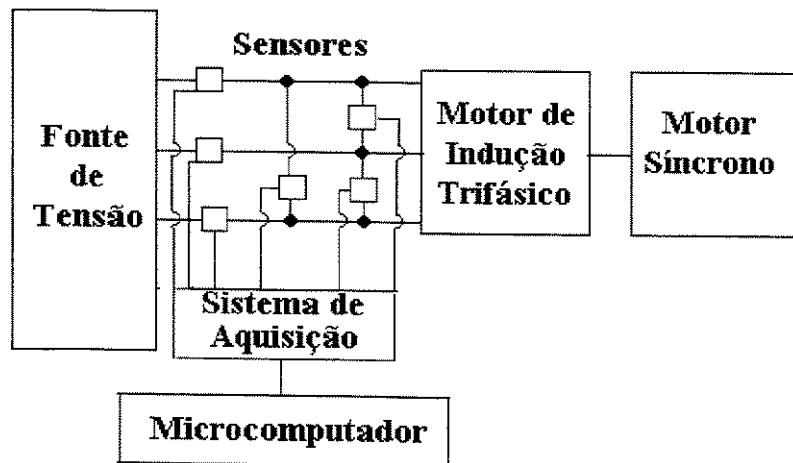


Figura (4.3) Ensaio em vazio síncrono da máquina de indução trifásica.

4.3.1 - Perdas no Ferro da Máquina de Indução Trifásica

É necessário para o levantamento da curva de magnetização que se determine as perdas no ferro, já que a modelagem desenvolvida não leva em consideração estas perdas, para isto deve-se retirar da corrente a vazio i_i representada na figura (4.4) a componente de perdas i_{pi} , obtendo-se a corrente de magnetização i'_i .

Através do ensaio da máquina de indução em vazio a velocidade síncrona, obtém-se o circuito equivalente representado na figura (4.4), onde o ramo magnetizante é representado por um bipolo não linear, levando em consideração a saturação magnética.

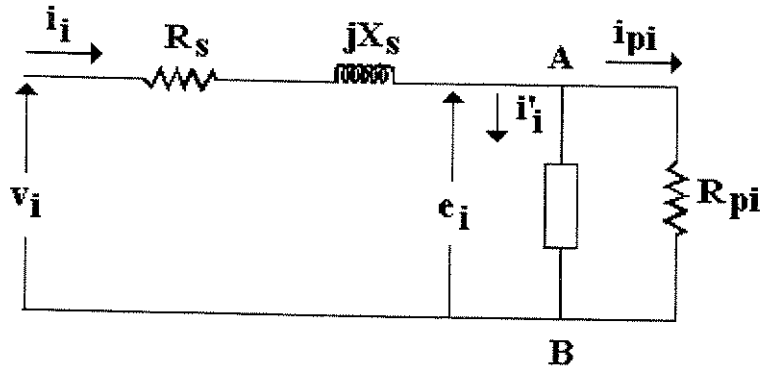


Figura (4.4) – Circuito equivalente para determinação das perdas no ferro.

Na qual:

e_i – é a força eletromotriz induzida na fase i , em valor instantâneo;

R_{pi} – resistência que representa as perdas no ferro;

i_{pi} – corrente na fase i correspondente as perdas no ferro, em valor instantâneo;

i'_i – corrente de magnetização na fase i sem as perdas no ferro, em valor instantâneo.

Tomando como referência a figura (4.4) para cálculo das perdas, é necessário que se obtenha os valores de v_i e i_i , através de um ensaio levando a máquina de indução a velocidade síncrona, utilizando-se de uma máquina que funcionará como motor síncrono acoplado no eixo da máquina de indução, com o mesmo sentido de rotação, nestas condições verifica-se o sincronismo da máquina síncrona através de um sincronoscópio, e faz-se a obtenção da forma de onda de tensão e corrente, utilizando um sistema de aquisição de dados acoplado a um microcomputador, como verificado na figura (4.3).

Com v_i e i_i advindo de um sistema de aquisição de dados onde utiliza-se sensores de efeito Hall para que se minimize distorções nos sinais, calcula-se e_i , utilizando a equação [4.21].

$$e_i = v_i - R_s \cdot i_i - L_s \frac{di_i}{dt} \quad [4.21]$$

A derivada (di/dt) da equação [4.21] pode ser obtida com precisão, decompondo em série de Fourier, derivando os harmônicos analiticamente e recompondo-os.

Utilizando a figura (4.4) calcula-se a potência ativa injetada nos terminais A e B por:

$$P_i = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T e_i \cdot i_i \cdot dt \quad [4.22]$$

Com o valor da potência calculada na fase i dada pela equação [4.22], e determinando o valor eficaz da tensão e_i , ou seja E_i , pode-se obter a resistência de perdas R_{pi} .

$$R_{pi} = \frac{E_i^2}{P_i} \quad [4.23]$$

Com o valor de R_{pi} , calculado pela equação [4.23] e a tensão aplicada e_i , calcula-se a corrente de perdas i_{pi} pela equação [4.24].

$$i_{pi} = \frac{e_i}{R_{pi}} \quad [4.24]$$

Analisando a figura (4.4), obtém-se a corrente i_i' do ramo magnetizante por diferença, como representado na equação [4.25].

$$i_i' = i_i - i_{pi} \quad [4.25]$$

ou para fase “a”:

$$i_a' = i_a - \frac{e_a}{R_{pa}} \quad [4.26]$$

4.3.2 - Determinação dos Coeficientes das Curvas ($B_i(\alpha, \theta)$ x $FM_i(\alpha, \theta)$)

Com a obtenção de v_i do sistema de aquisição de dados, a partir do ensaio a velocidade síncrona, e determinando e_i através da equação [4.21], decompondo a derivada da corrente i_i analiticamente através de seus harmônicos, tem-se i_i' calculada para cada condição de e_i através da equação [4.26]. Compondo a tensão e_i com seu valor máximo dividido por uma constante, e deslocada de noventa graus elétricos da corrente i_i' , obtém-se fluxo por unidade de ângulo da máquina, como sendo densidade de fluxo $B_i(\alpha, \theta)$, por corrente de magnetização i_i' para unidade de ângulo que é a força magnetomotriz ($FM_i(\alpha, \theta)$), conforme a figura (3.2), determinando os laços para o fundamental e terceiro harmônico representados respectivamente na figura (4.5) e (4.6).

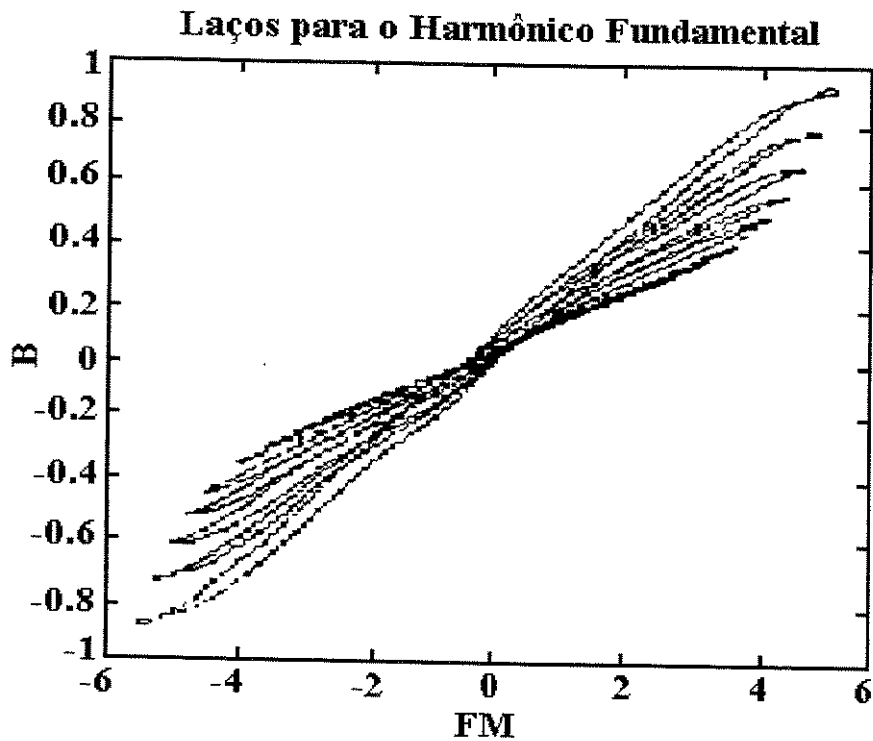


Figura (4.5) – Laços obtidos para o harmônico fundamental.

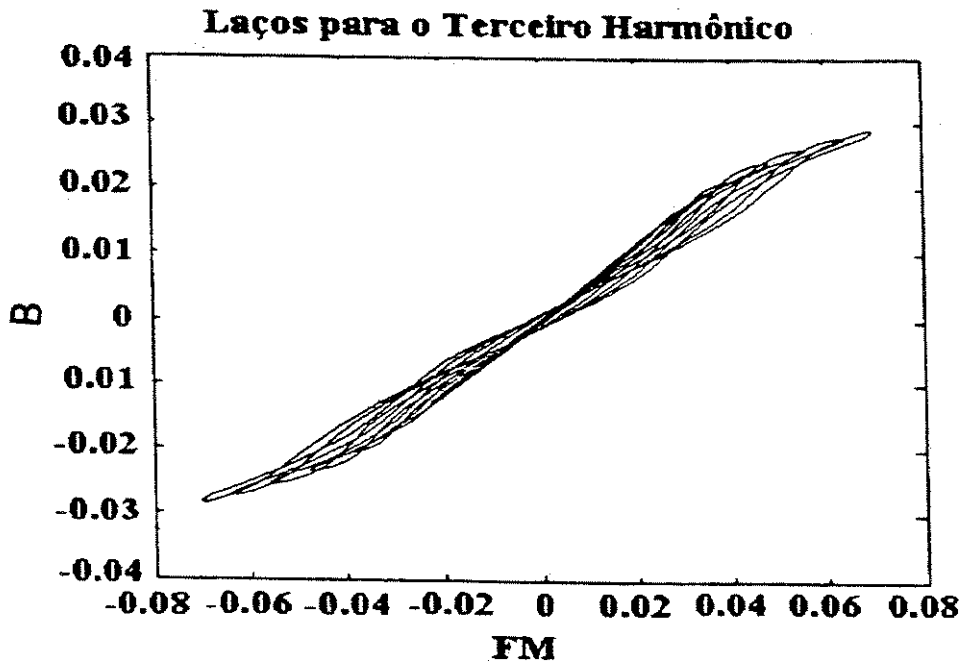


Figura (4.6) – Laços obtidos para o terceiro harmônico.

Unindo os extremos dos laços obtém-se as curvas $(B_i(\alpha, \theta) \times FM_i(\alpha, \theta))$ representados nas figuras (4.7) e (4.8)

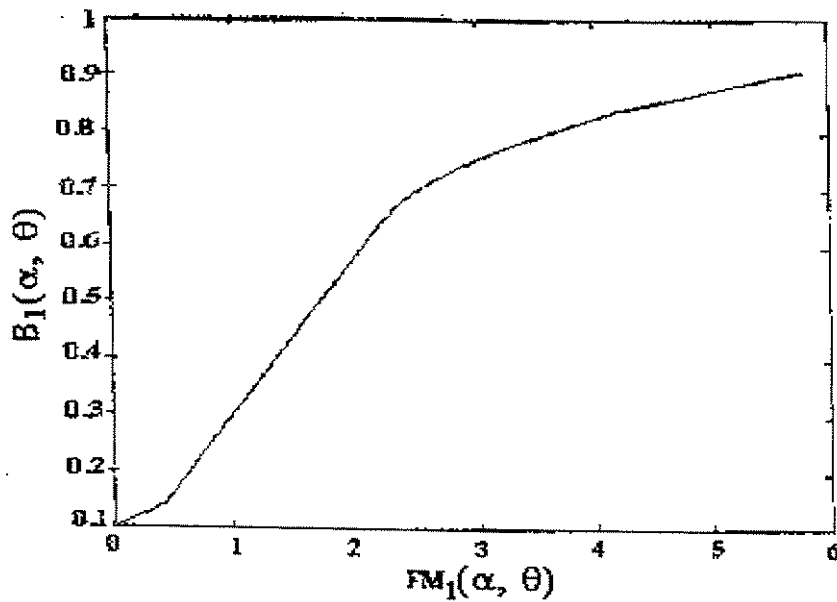


Figura (4.7) – $B_1(\alpha, \theta) \times FM_1(\alpha, \theta)$

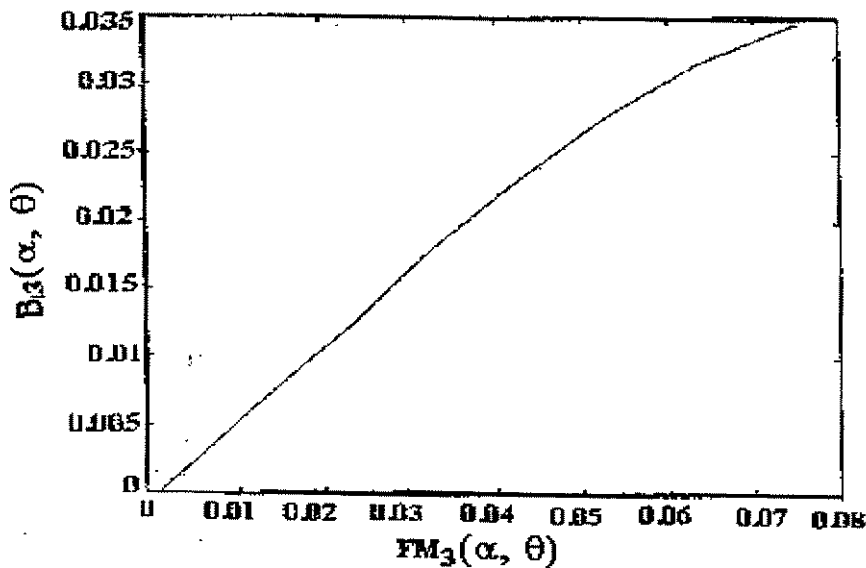


Figura (4.8) – $B_3(\alpha, \theta) \times FM_3(\alpha, \theta)$

Utilizando as curvas das figuras (4.7) e (4.8), representadas em segmentos de reta, conforme a figura (3.3), determina-se os coeficientes b_j e a_j dadas pelas equações [3.17] e [3.18], bem como os F_j , F_{j-1} e FM , para o fundamental e terceiro harmônico, que serão utilizados nas funções ($FFM_i \times FM_i$).

4.3.3. - Obtenção das Funções (FFM_i x FM_i)

Utilizando a equação [3.10], chega-se a:

$$F_{mm}(\theta_j - \alpha) = F_{(j)i} = FM_i \cdot \cos(\theta_j - \alpha) \quad [4.27]$$

$$F_{mm}(\theta_{j-1} - \alpha) = F_{(j-1)i} = FM_i \cdot \cos(\theta_{j-1} - \alpha) \quad [4.28]$$

Portanto

$$(\theta_j - \alpha) = \arccos \frac{F_{(j)i}}{FM_i} \quad [4.29]$$

$$(\theta_{j-1} - \alpha) = \arccos \frac{F_{(j-1)i}}{FM_i} \quad [4.30]$$

Na equação [4.30] e [4.31], sabe-se que $\alpha > \theta_j$ e $\alpha > \theta_{j-1}$ o que fornece um valor negativo no lado esquerdo das equações.

Calculando o $(\arccos \frac{F_{(j)i}}{FM_i})$ e $(\arccos \frac{F_{(j-1)i}}{FM_i})$ e levando em consideração que $F_{(j)i}$ e

$F_{(j-1)i}$ e FM_i são positiva obtém-se dois valores para $(\arccos \frac{F_{(j)i}}{FM_i})$ e $(\arccos \frac{F_{(j-1)i}}{FM_i})$. O ângulo positivo não é levado em consideração uma vez que se está trabalhando com $(\theta_j - \alpha)$ negativo.

Portanto tem-se:

$$(\theta_j - \alpha) = - \arccos \frac{F_{(j)i}}{FM_i} \quad [4.31]$$

$$(\theta_{j-1} - \alpha) = - \arccos \frac{F_{(j-1)i}}{FM_i} \quad [4.32]$$

Substituindo as equações [4.31] e [4.32] em [3.31], obtém-se as funções (FFM_i x FM_i) para o fundamental e terceiro harmônico, representados nas equações [4.33] e [4.34], respectivamente.

$$\begin{aligned} FFM_1 = & \sum_{j=1}^N \left\{ 2a_{j1} \left[\sin \left(\arccos \frac{F_{j1}}{FM_1} \right) \right] \left[- \sin \left(\arccos \frac{F_{j1}}{FM_1} \right) \right] \right. \\ & + FM_1 \cdot b_{j1} \cdot \sin \left(\arccos \frac{F_{(j-1)1}}{FM_1} - \arccos \frac{F_{j1}}{FM_1} \right) \cdot \cos \left(\arccos \frac{F_{(j-1)1}}{FM_1} + \arccos \frac{F_{j1}}{FM_1} \right) \\ & \left. + FM_1 \cdot b_{j1} \cdot \left(\arccos \frac{F_{(j-1)1}}{FM_1} - \arccos \frac{F_{j1}}{FM_1} \right) \right\} \end{aligned}$$

[4.33]

$$\begin{aligned}
FFM_3 = & \sum_{j=1}^N \frac{2}{3} \cdot a_{j3} \cdot \left[\text{sen} \left(3 \cdot \arccos \frac{F_{(j-1)3}}{FM_3} \right) - \text{sen} \left(3 \cdot \arccos \frac{F_{j3}}{FM_3} \right) \right] \\
& + FM_3 \cdot b_{j3} \cdot \text{sen} \left(\arccos \frac{F_{(j-1)3}}{FM_3} - \arccos \frac{F_{j3}}{FM_3} \right) \cdot \cos \left(\arccos \frac{F_{(j-1)3}}{FM_3} + \arccos \frac{F_{j3}}{FM_3} \right) \\
& + FM_3 \cdot b_{j3} \cdot \text{sen} \left[2 \cdot \left(\arccos \frac{F_{j3}}{FM_3} - \arccos \frac{F_{(j-1)3}}{FM_3} \right) \right] \cdot \cos \left[2 \cdot \left(\arccos \frac{F_{(j-1)3}}{FM_3} + \arccos \frac{F_{j3}}{FM_3} \right) \right]
\end{aligned}$$

[4.34]

CAPÍTULO V

SIMULAÇÃO DIGITAL

5.1 - Introdução

Utilizando como dados para a simulação os parâmetros e a tensão aplicada ao estator da máquina e trabalhando com a reta ($FFM_1 \times FM_1$) e as duas funções ($FFM_i \times FM_i$) tanto para o fundamental como o terceiro harmônico, e manipulando as equações fundamentais da máquina, soluciona-se o modelo proposto.

5.2 - Determinação do Ponto de Operação

Com a reta obtida da equação [3.63] e com as funções determinadas pelas equações [4.33] e [4.34], obtém-se o ponto de cruzamento da reta com as funções, como está representado na figura (5.1).

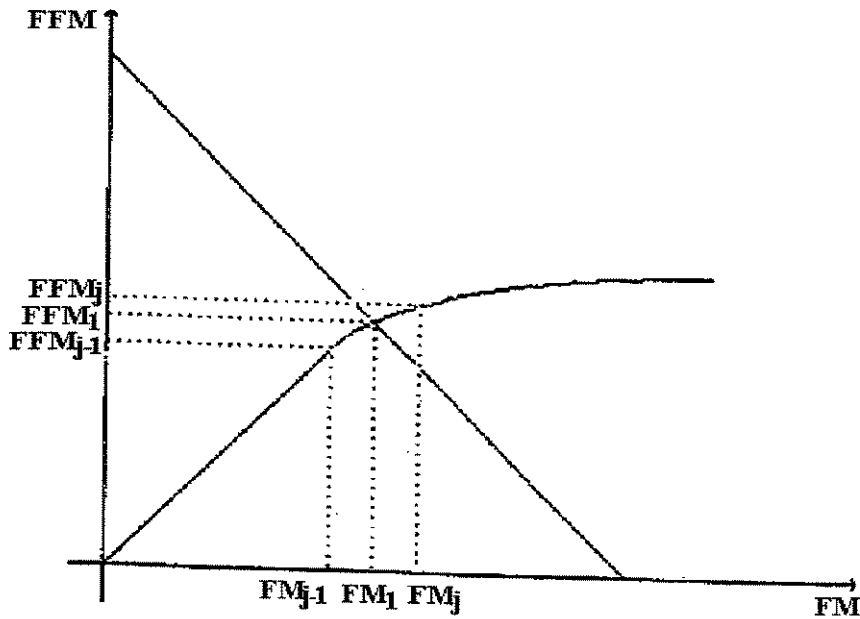


Figura (5.1) – Determinação da reta sobre a curva para o cruzamento.

$$M = \frac{FFM_j - FFM_{j-1}}{FM_j - FM_{j-1}} \quad [5.1]$$

$$M \cdot (FM_j - FM_{j-1}) = FFM_j - FFM_{j-1}$$

$$FFM_j = FFM_{j-1} - M \cdot (FM_j - FM_{j-1}) \quad [5.2]$$

Com a equação [3.62] e [5.2] no cruzamento tem-se $FFM_1 = FFM_j$ e $FM_1 = FM_j$

$$D_1 - C_1 \cdot FM_1 = FFM_{j-1} + M \cdot (FM_1 - FM_{j-1})$$

Desenvolvendo a igualdade chega-se:

$$FM_j = \frac{D - FFM_{j-1} + M \cdot FM_{j-1}}{(C + M)} \quad [5.3]$$

Portanto para obtenção das duas grandezas do cruzamento das retas basta utilizar-se as equações [5.2] e [5.3], que fornecerão os valores de FFM_1 , FFM_3 , FM_1 e FM_3 .

5.3- Análise dos Valores do Ângulo de Referência (α) no Equacionamento de (λ_{mi})

5.3.1 - Determinação de FR_1 e FI_1

$$FR_1 = \frac{fR_1(\lambda_1)}{1 + A \cdot \frac{FFM_1}{FM_1}} \quad [5.4]$$

$$FI_1 = \frac{fI_1(\lambda_1)}{1 + A \cdot \frac{FFM_1}{FM_1}} \quad [5.5]$$

5.3.2 - Determinação da Posição do ângulo (α)

Se $FR_1 > 0$ e $FI_1 > 0$ α está no primeiro quadrante.

$$\alpha = \arcsen \left(\frac{K \cdot K_1 \cdot FI_1}{FM_1} \right) \quad [5.6]$$

Se $FR_1 > 0$ e $FI_1 < 0$ α está no quarto quadrante.

$$\alpha = \arcsen \left(\frac{K \cdot K_1 \cdot FI_1}{FM_1} \right) \quad [5.7]$$

Se $FR_1 < 0$ e $FI_1 > 0$ α está no segundo quadrante.

$$\alpha = 180^\circ - \arcsin \left(\frac{K.K_1.FI_1}{FM_1} \right) \quad [5.8]$$

Se $FR_1 < 0$ e $FI_1 < 0$ α está no terceiro quadrante.

$$\alpha = 180^\circ - \arcsin \left(\frac{K.K_1.FI_1}{FM_1} \right) \quad [5.9]$$

5.4 - Determinação das Correntes para a Máquina Ligada em Estrela Isolada

Para máquina ligada em estrela as tensões de linha aplicada ao estator da máquina é que são conhecidas as tensões de fase representadas pela equação [3.1], devem ser trabalhadas para que as equações resultantes, representem as referidas tensões de linha.

Portanto da equação [3.1] tem-se:

$$v_{ab} = R_s \cdot i_{ab} + \frac{d\lambda_{ab}}{dt} \quad [5.10]$$

$$v_{bc} = R_s \cdot i_{bc} + \frac{d\lambda_{bc}}{dt} \quad [5.11]$$

$$v_{ca} = R_s \cdot i_{ca} + \frac{d\lambda_{ca}}{dt} \quad [5.12]$$

Sendo v_{ab} , v_{bc} e v_{ca} valores instantâneos das tensões da linha aplicada ao estator da máquina.

As correntes de linha são obtidas através das diferenças das correntes das fase, como:

$$i_{ab} = i_a - i_b \quad [5.13]$$

$$i_{bc} = i_b - i_c \quad [5.14]$$

$$i_{ca} = i_c - i_a \quad [5.15]$$

Da mesma forma obtém-se λ_{ab} , λ_{bc} e λ_{ca} através de:

$$\lambda_{ab} = \lambda_a - \lambda_b \quad [5.16]$$

$$\lambda_{bc} = \lambda_b - \lambda_c \quad [5.17]$$

$$\lambda_{ca} = \lambda_c - \lambda_a \quad [5.18]$$

Manipulando as equações [5.32] para as fases do estator e rotor para as variáveis das equações anteriores tem-se:

$$F_R = \frac{1}{L_s} \left(\lambda_{ab} + \frac{1}{2} \lambda_b \right) + \frac{1}{L_R} \left[\sum_{i=A,B,C} \lambda_i \cdot \cos \theta_i \right] \quad [5.19]$$

$$F_I = \frac{\sqrt{3}}{2L_s} (\lambda_{bc}) + \frac{1}{L_R} \left(\sum_{i=A,B,C} \lambda_i \cdot \sin \theta_i \right) \quad [5.20]$$

Através da equação [3.34] obtém-se:

$$\lambda_{mab} = \lambda_{ma} - \lambda_{mb} \quad [5.21]$$

$$\lambda_{mbc} = \lambda_{mb} - \lambda_{mc} \quad [5.22]$$

$$\lambda_{mca} = \lambda_{mc} - \lambda_{ma} \quad [5.23]$$

Obtém-se as correntes de linha através da equação [3.2], tem-se:

$$i_{ab} = \left(\frac{\lambda_{ab} - \lambda_{mab}}{L_s} \right) \quad [5.24]$$

$$i_{bc} = \left(\frac{\lambda_{bc} - \lambda_{mbc}}{L_s} \right) \quad [5.25]$$

$$i_{ca} = \left(\frac{\lambda_{ca} - \lambda_{mca}}{L_s} \right) \quad [5.26]$$

As correntes de fases podem ser determinadas através das equações [5.13] e [5.14] e sabendo que a igualdade da equação [5.27] é válida para ligação em estrela isolada.

$$i_a + i_b + i_c = 0 \quad [5.27]$$

Para máquina ligada em estrela isolada tem-se:

$$i_{ab} = i_a - i_b \quad [5.28]$$

$$i_{bc} = i_b - i_c \quad [5.29]$$

Solucionando o sistema formado pelas equações [5.27]; [5.28] e [5.29] obtém-se as correntes das fases do estator da máquina.

$$i_a = \left(\frac{2.i_{ab} + i_a}{3} \right) \quad [5.30]$$

$$i_b = \left(\frac{i_{bc} + i_{ab}}{3} \right) \quad [5.31]$$

$$i_c = (i_a + i_b) \quad [5.32]$$

5.5 – Determinação das Tensões nas Fases para a Máquina Ligada em Estrela Isolada

Com as correntes de fase determinadas através das equações [5.30], [5.31], [5.32] e utilizando a equação [3.2], chega-se ao concatenamento total de fluxo de cada fase, λ_a , λ_b , λ_c .

$$\lambda_a = \lambda_{ma} + L_s \cdot i_a \quad [5.33]$$

$$\lambda_b = \lambda_{mb} + L_s \cdot i_b \quad [5.34]$$

$$\lambda_c = \lambda_{mc} + L_s \cdot i_c \quad [5.35]$$

Através das equações [5.33], [5.34] e [5.35] calcula-se as derivadas no tempo.

$$\frac{d\lambda_a}{dt} = v_a \cdot R_s \cdot i_a \quad [5.35]$$

$$\frac{d\lambda_a}{dt} = \lambda_{ma} + L_s \cdot i_a \quad [5.36]$$

$$\frac{d\lambda_b}{dt} = \lambda_{mb} + L_s \cdot i_b \quad [5.37]$$

$$\frac{d\lambda_c}{dt} = \lambda_{mc} + L_s \cdot i_c \quad [5.38]$$

Determina-se as tensões nas fases utilizando a equação [3.1] através de:

$$v_a = R_s \cdot i_a + \frac{d\lambda_a}{dt} \quad [5.39]$$

$$v_b = R_s \cdot i_b + \frac{d\lambda_b}{dt} \quad [5.40]$$

$$v_c = R_s \cdot i_c + \frac{d\lambda_c}{dt} \quad [5.41]$$

5.6 – Ligação em Triângulo

Para máquina ligada em triângulo as tensões de fase são conhecidas, portanto as equações utilizadas são as mesma do capítulo (3).

5.7 – Determinação dos Conjugados

5.7.1. Conjugado Eletromagnético

Utilizando a equação [3.72] e aplicando os ângulos das relações [3.38] obtém-se a equação[5.42]

$$\begin{aligned}
 T_i = r.\ell.K_1.\text{sen}(\alpha - \theta_i).FM_1.[i_{A1}.\text{sen}(\alpha - \theta_R) \\
 + i_{B1}.\text{sen}(\alpha - \theta_R - 120^\circ) + i_{C1}.\text{sen}(\alpha - \theta_R + 120^\circ)] \\
 + r.\ell.K_3.FM_3.\text{sen}(3\alpha + 3\theta_i).[i_{A3}.\text{sen}(\alpha - \theta_R) \\
 + i_{B3}.\text{sen}(\alpha - \theta_R - 120^\circ) + i_{C3}.\text{sen}(\alpha - \theta_R + 120^\circ)]
 \end{aligned} \quad [5.42]$$

onde i_{A1} , i_{B1} , i_{C1} e i_{A3} , i_{B3} , i_{C3} são correntes do rotor para o fundamental e terceiro harmônico.

5.7.2 – Conjugado de Carga e Conjugado de Aceleração

Utilizando a representação do conjugado de carga T_c em [N.m] como um conjugado inicial T_0 , diretamente proporcional a velocidade angular do rotor ω , representado na equação [5.43].

$$T_c = T_0 + T_{01} . \omega + T_{02} . \omega^2 \quad [5.43]$$

Portanto o conjugado de aceleração é determinado pela diferença entre o conjugado eletromagnético T_i e conjugado de carga T_c .

$$T_A = T_i - T_c \quad [5.44]$$

5.7.3. Velocidade Angular do Rotor

A velocidade angular do rotor ω é determinada através da derivada do ângulo entre a referência (α) e o eixo da fase é representado por θ conforme a figura (3.1) e denominado θ_R , representado na equação [5.45].

$$\omega = \frac{d\theta_R}{dt} \quad [5.45]$$

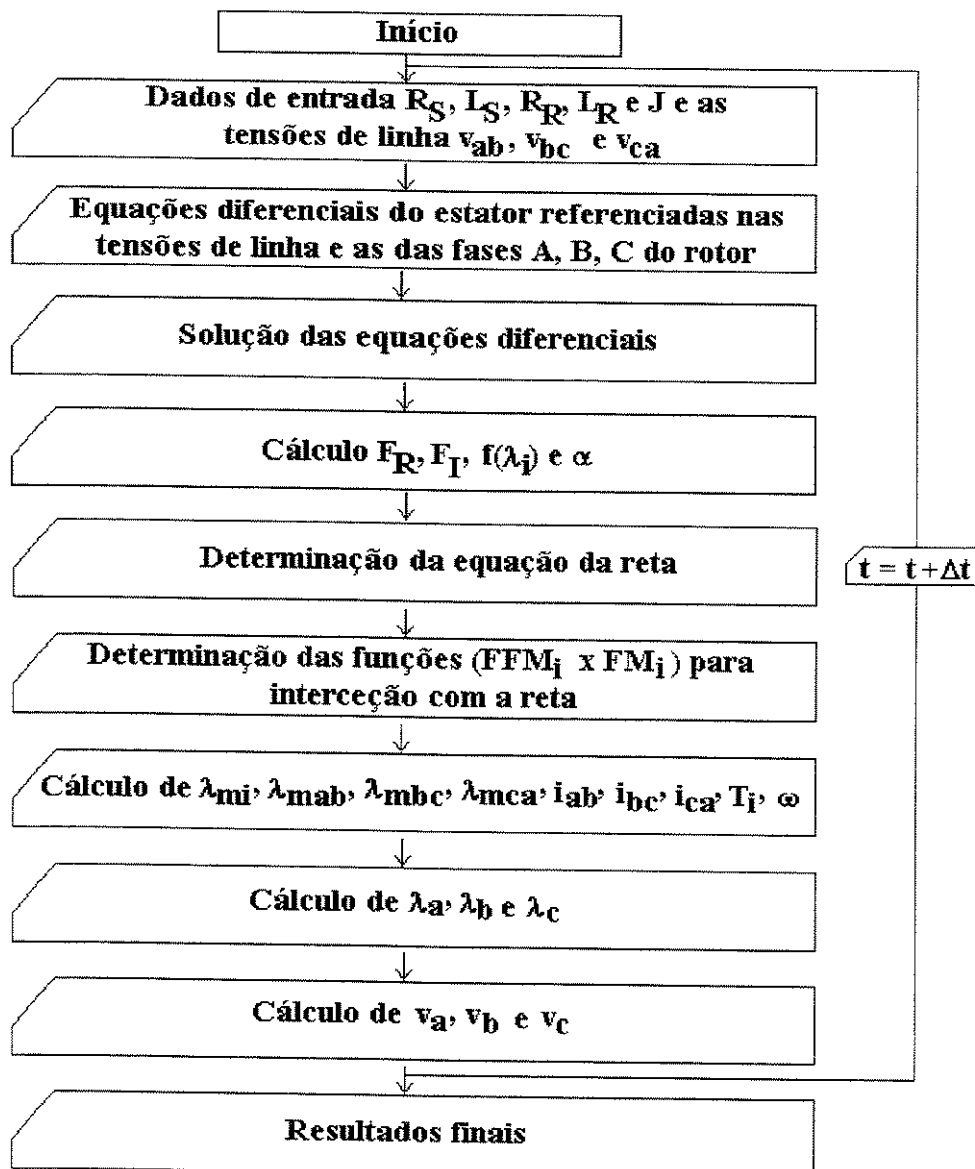
A derivada da velocidade no tempo é calculada pela equação [5.46].

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T_A}{J} \quad [5.46]$$

onde J é o momento de inércia da máquina em estudo.

Utilizando o método numérico (Runge Kutta de 4ª Ordem R_{K4}) para a solução do sistema de equação diferenciais e adotando um erro (ϵ) para as variáveis a serem analisadas, verifica-se a convergência do sistema.

5.8 – Fluxograma para a Solução Numérica das Equações



CAPÍTULO VI

RESULTADOS EXPERIMENTAIS E SIMULADOS

6.1 – Dados do Motor a ser Ensaiado

- Motor de indução trifásico gaiola de esquilo
- Potência 2 CV
- Tensão $v_y = 380$ V; $v_\Delta = 220$ V
- Corrente $i_y = 3,9$ A ; $i_\Delta = 6,9$ A
- Velocidade nominal 1720 rpm
- Conjugado nominal 7,1 N.m

Através dos dados anteriores e dos parâmetros do motor levantados no item (4.2), e com as funções obtidas das equações [3.21], [4.31] e [4.33], que são utilizadas conjuntamente com as equações diferenciais na solução numérica do sistema, faz-se a comparação dos resultados teóricos obtidos na simulação com os resultados experimentais, que estão expostos nos itens seguintes deste capítulo.

6.2 – Ensaio Experimental

Para o ensaio do motor de indução em vazio, a meia carga, a plena carga e com sobre carga de 10% utiliza-se os diagramas das figuras (6.1) e (6.2).

Para execução do ensaio experimental a máquina de indução trifásica é ligada em estrela e triângulo como mostram as figuras (6.1) e (6.2), e esta é alimentada por uma fonte de tensão equilibrada, sendo que sua especificação se encontra na tabela (4.2), e as formas de onda de tensão e corrente são lidas, através de sensores de efeito Hall, cuja especificação se encontra na tabela (4.3), e através de um sistema de aquisição de dados são feitas análises utilizando um microcomputador.

O freio eletromagnético é ajustado para as condições de ensaio, a plena carga e com sobrecarga de 10% controlado a corrente de alimentação do motor, sendo que na condição a vazio o freio é desacoplado da máquina de indução para se adquirir os dados do ensaio.

Nos itens que seguem são apresentados dados experimentais e simulados para as ligações estrela e triângulo da máquina de indução trifásica.

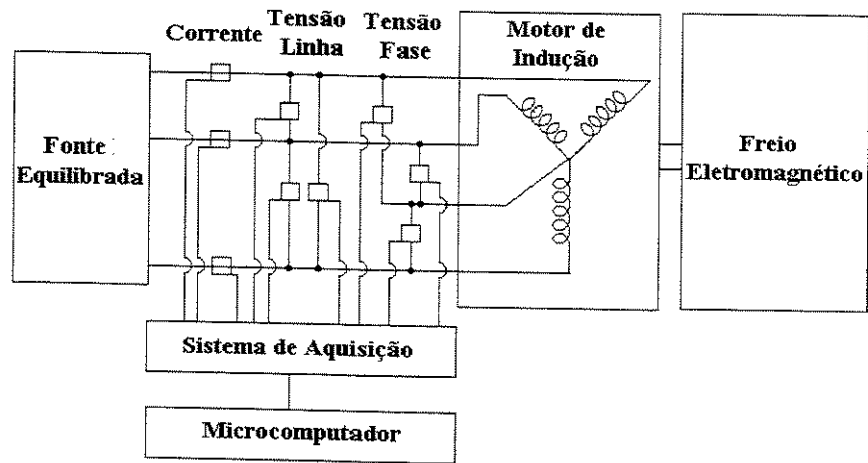


Figura (6.1) – Representação para o ensaio a meia-carga, plena carga e sobrecarga para a máquina ligada em estrela.

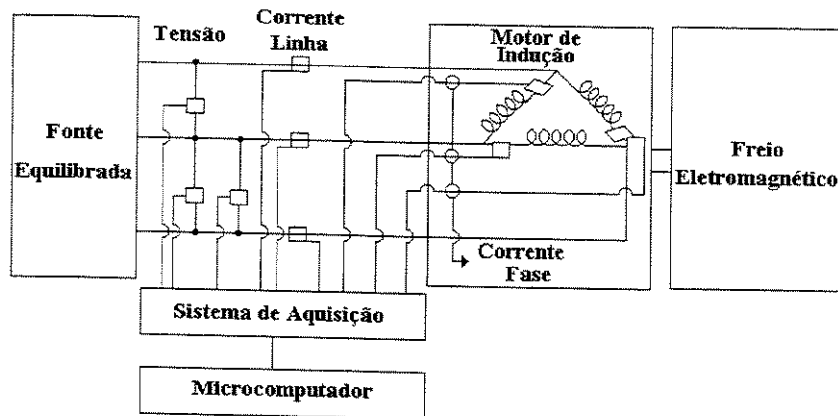


Figura (6.2) – Representação para o ensaio a meia-carga, plena carga e sobrecarga para a máquina ligada em delta.

6.3 – Ensaio em Vazio para Máquina Ligada em Y

6.3.1 – Formas de Onda Obtidas na Simulação

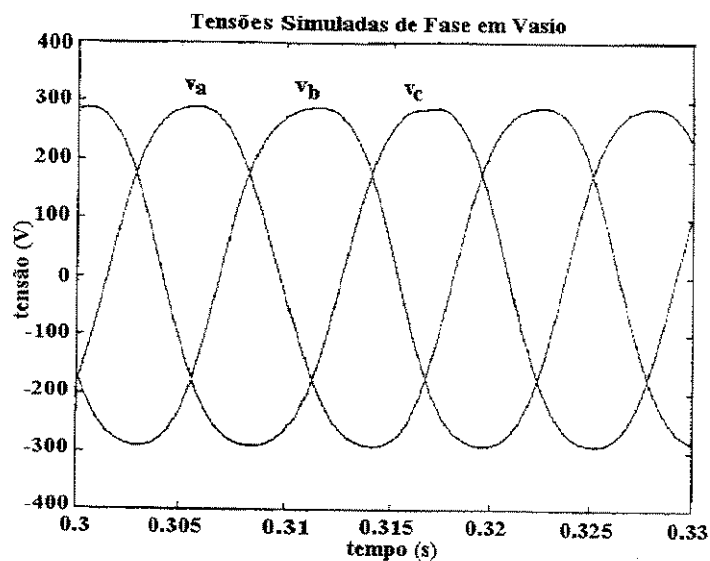


Figura (6.3) – Tensões simuladas de fase em vazio.

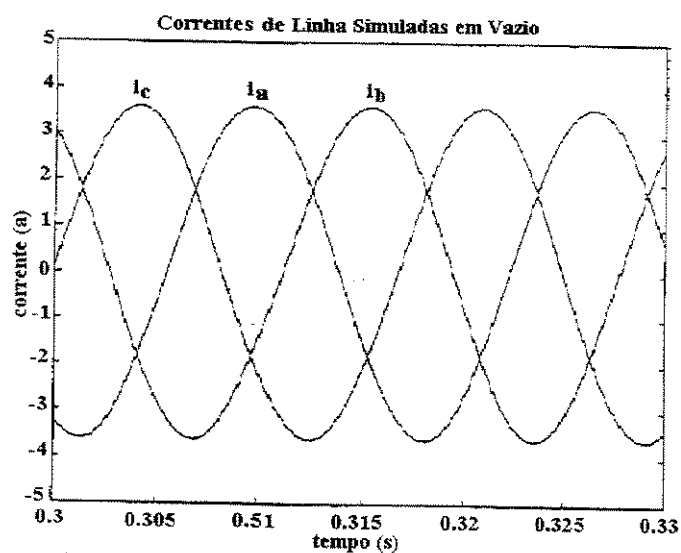


Figura (6.4) – Correntes de linha simuladas em vazio.

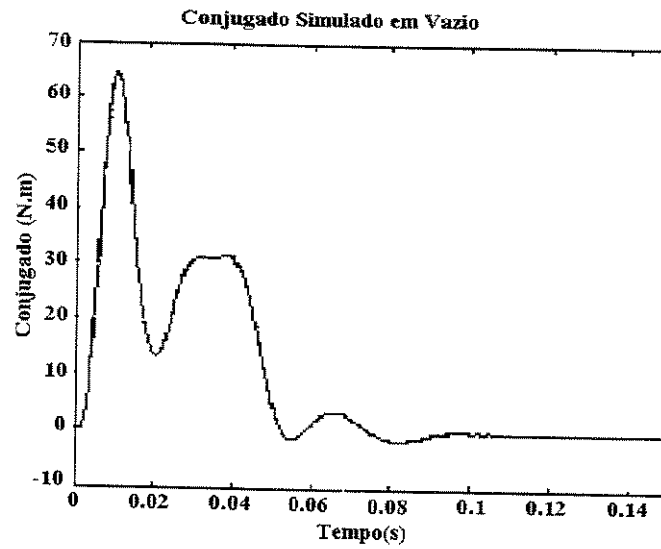


Figura (6.5) – Conjugado simulado em vazio

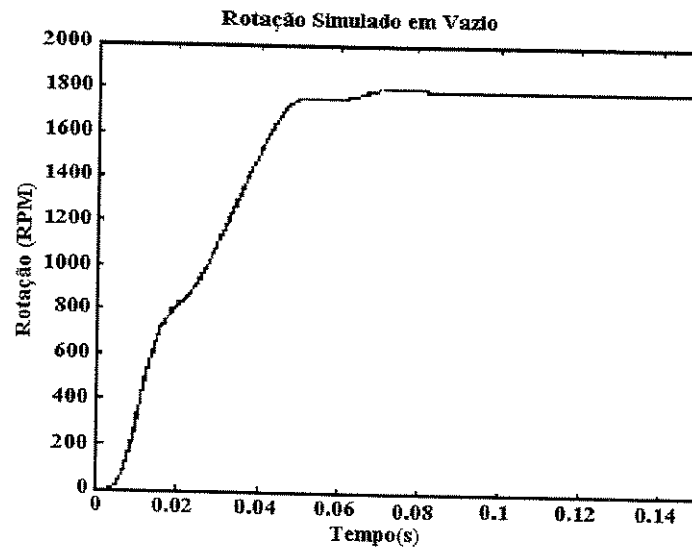


Figura (6.6) – Rotação Simulado em Vazio

6.3.2 – Valores Medidos em Laboratório

- Tensões à vazio $V_a, V_b, V_c = 380 \text{ V}$
- Correntes à vazio $I_a, I_b, I_c = 2,8 \text{ A}$
- Velocidade vazio 1795 rpm

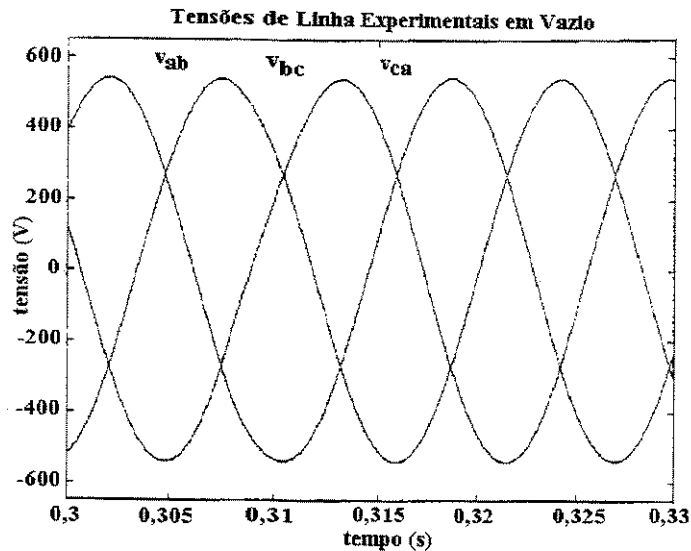


Figura (6.7) – Tensões de linha aplicadas à máquina em vazio.

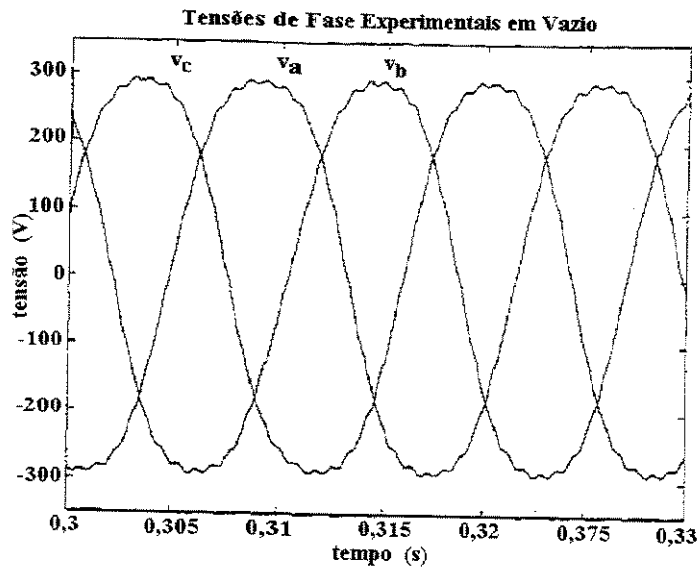


Figura (6.8) – Tensões de fase aplicada à máquina em vazio.

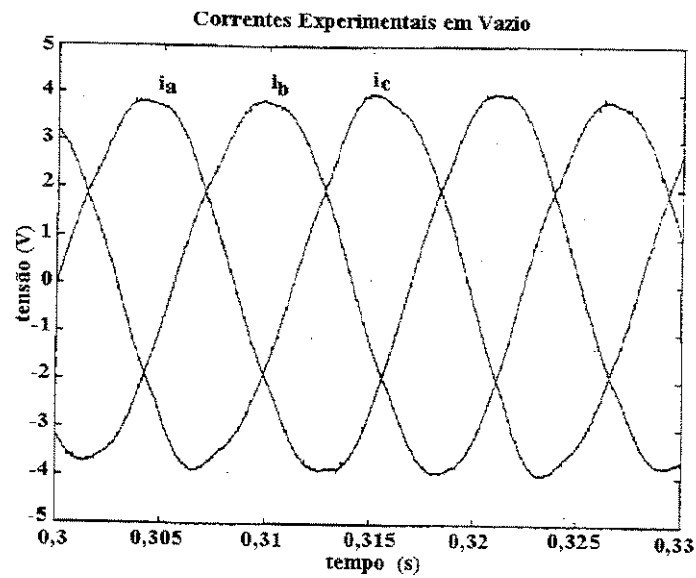


Figura (6.9) – Correntes de linha aplicada à máquina em vazio.

6.4 – Ensaio em Vazio para Máquina Ligada em (Δ)

6.4.1 – Formas de Onda Obtidas na Simulação

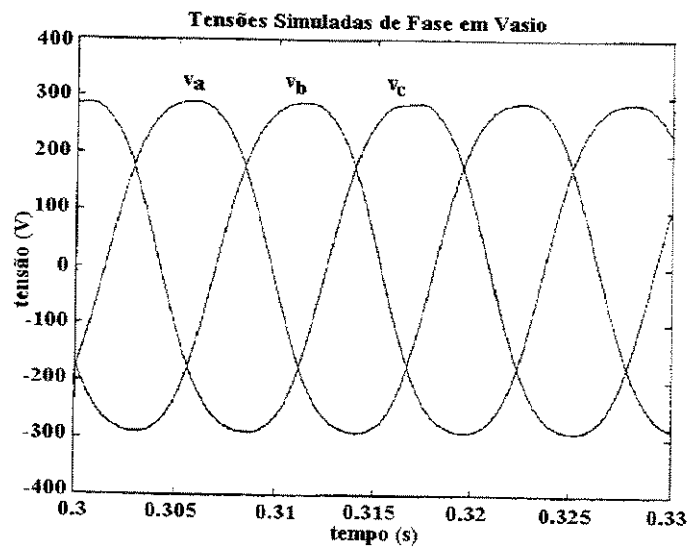


Figura (6.10) – Tensões Simuladas na Fase em Vazio.

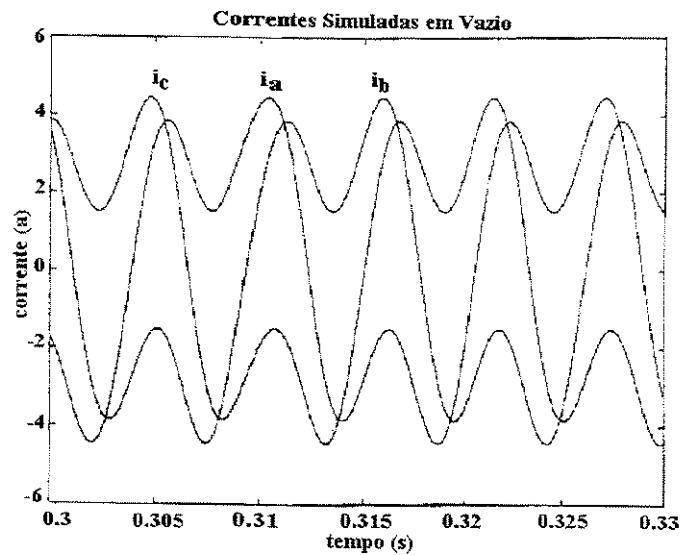


Figura (6.11) – Correntes na Linha Simuladas em Vazio.

6.4.2 – Valores Obtidos em Laboratório

- Tensões à vazio $V_a, V_b, V_c = 220 \text{ V}$
- Correntes à vazio $I_a, I_b, I_c = 4,9 \text{ A}$
- Velocidade a vazio 1795 rpm

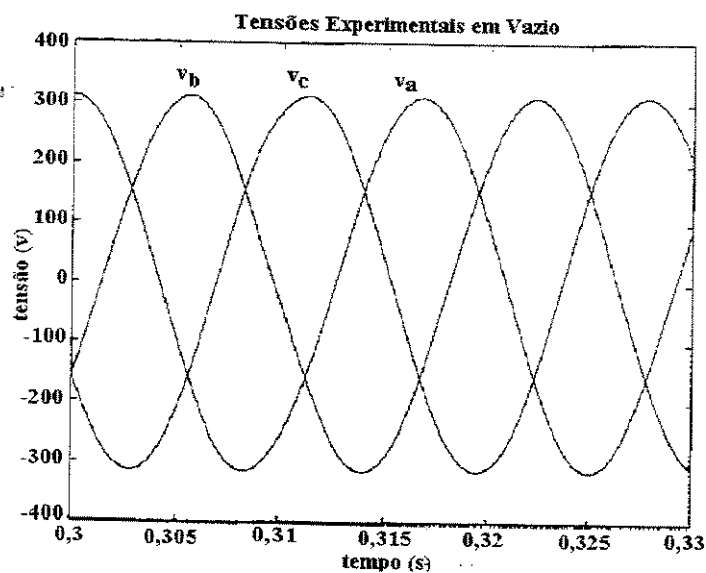


Figura (6.12) – Tensões de linha aplicada à máquina em vazio.

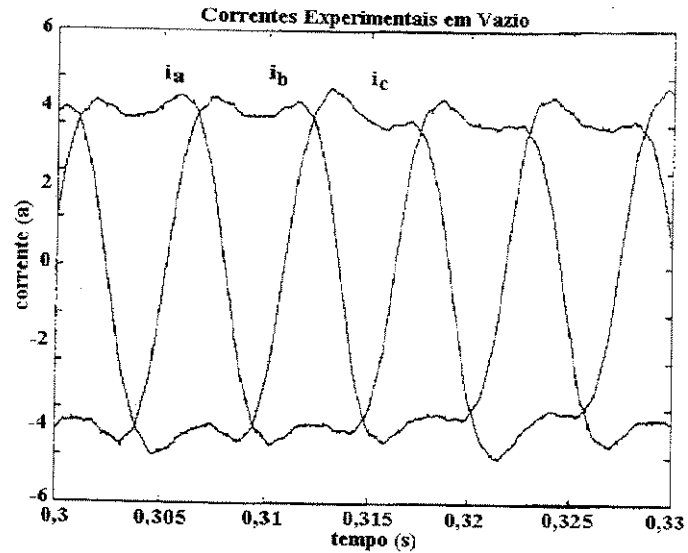


Figura (6.13) – Correntes de fase aplicada à máquina em vazio.

6.5 – Ensaio a Plena Carga para Máquina Ligada em (Y)

6.5.1 – Formas de Onda Obtidas na Simulação

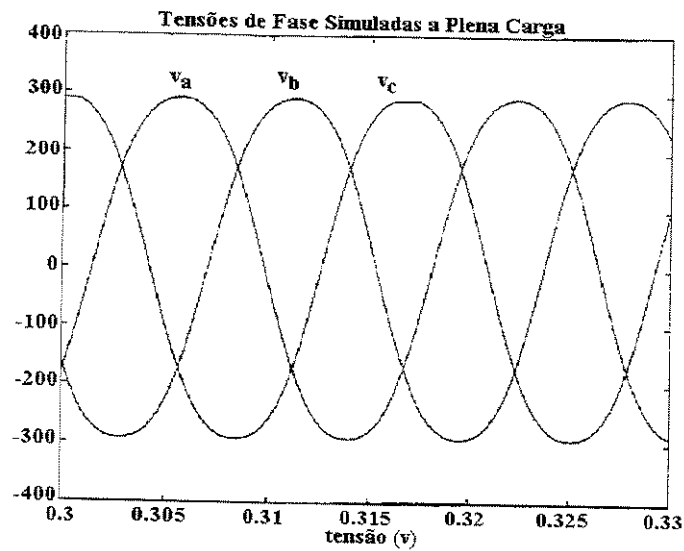


Figura (6.14) – Tensões Simulação de Fase a Plena Carga.

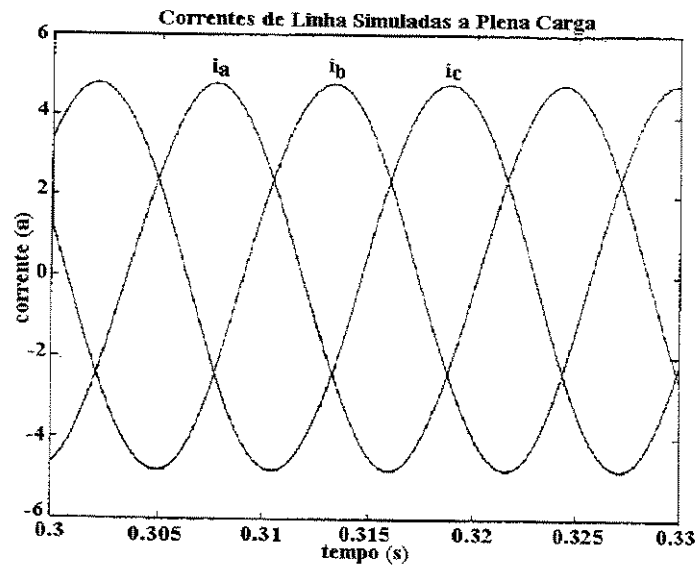


Figura (6.15) – Correntes de Linha Simulada a Plena Carga

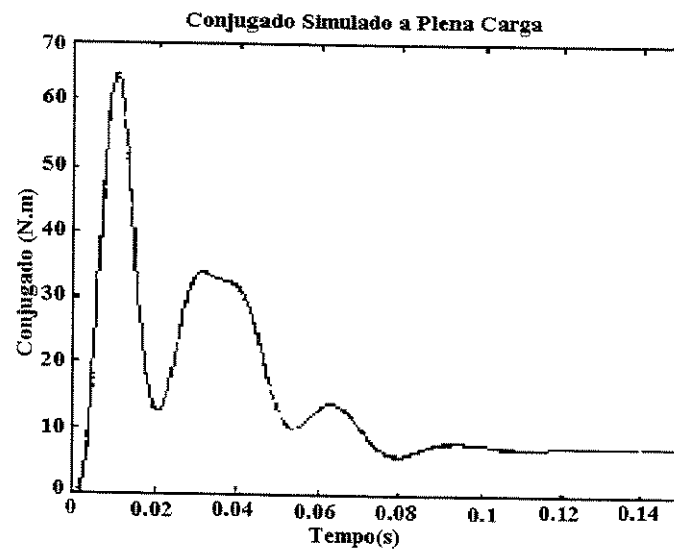


Figura (6.16) – Conjugado Simulado a Plena Carga

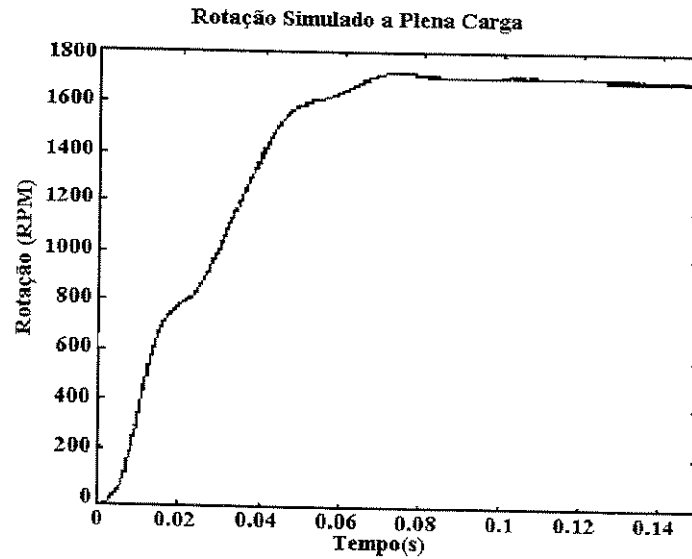


Figura (6.17) – Rotação Simulada a Plena Carga

6.5.2 – Valores Medidos em Laboratórios

- Tensões à plena carga $V_a, V_b, V_c = 380 \text{ V}$
- Correntes à plena carga $I_a, I_b, I_c = 3,99 \text{ A}$
- Velocidade à plena carga 1729 rpm

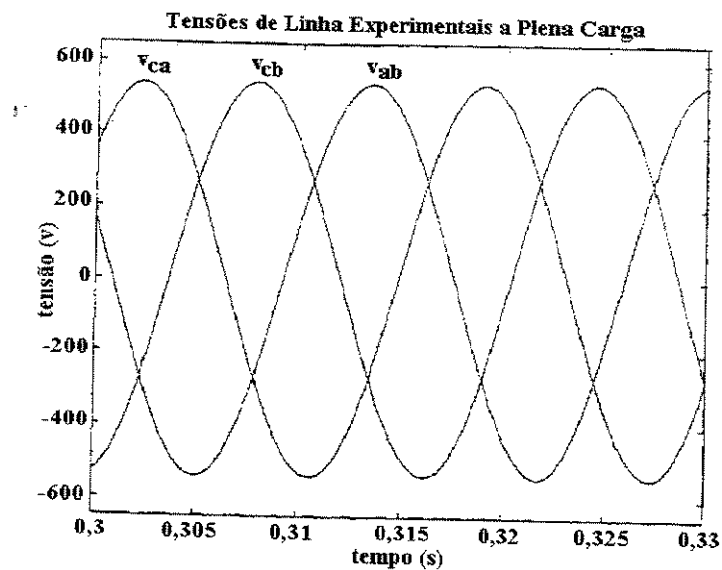


Figura (6.18) – Tensões de Linha Aplicada à Máquina a Plena Carga.

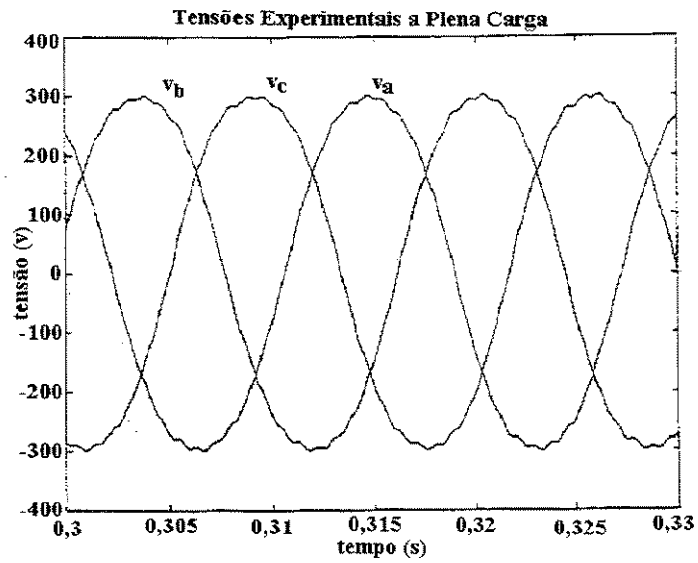


Figura (6.19) – Tensão de Fase Aplicada à Máquina a Plena Carga.

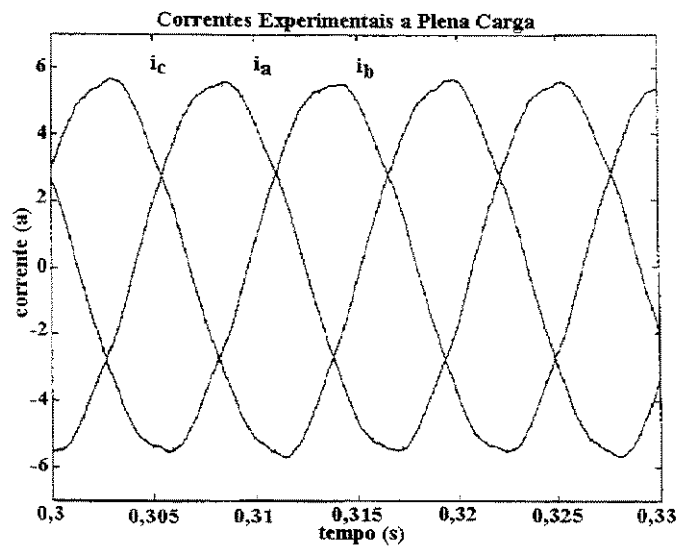


Figura (6.20) - Correntes de linha aplicada à máquina a plena carga.

6.6 – Ensaio a Plena Carga para a Máquina Ligada em (Δ)

6.6.1 – Formas de Onda Obtidas na Simulação

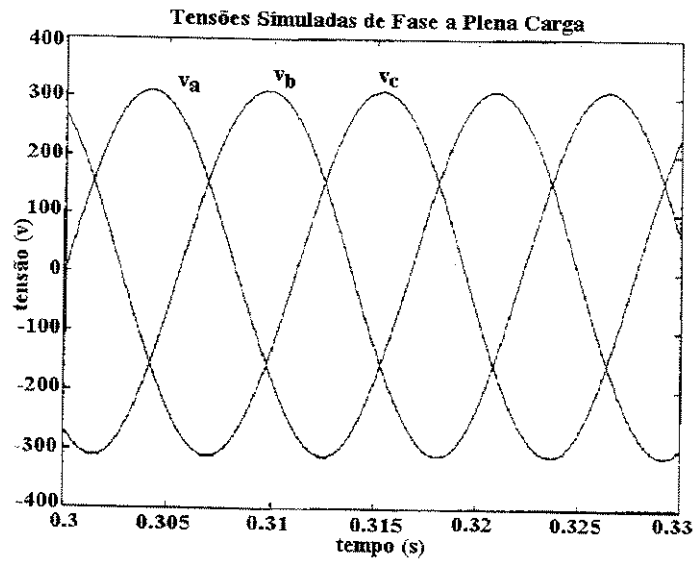


Figura (6.21) – Tensões simuladas de fase a plena carga

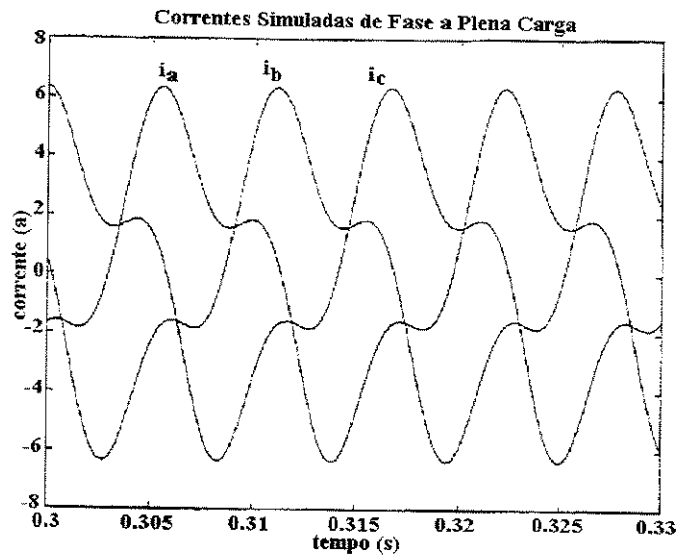


Figura (6.22) – Correntes simuladas na fase a plena carga

6.6.2 – Valores Medidos em Laboratório

- Tensões a plena carga $V_a, V_b, V_c = 220 \text{ V}$
- Correntes a plena carga $I_a, I_b, I_c = 6,9 \text{ A}$
- Velocidade a plena carga 1729 rpm

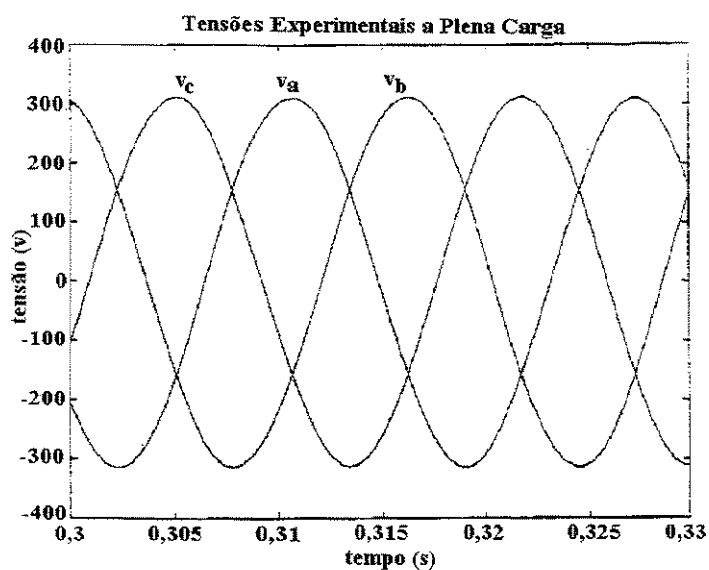


Figura (6.23) – Tensões de fase aplicadas à máquina a plena carga.

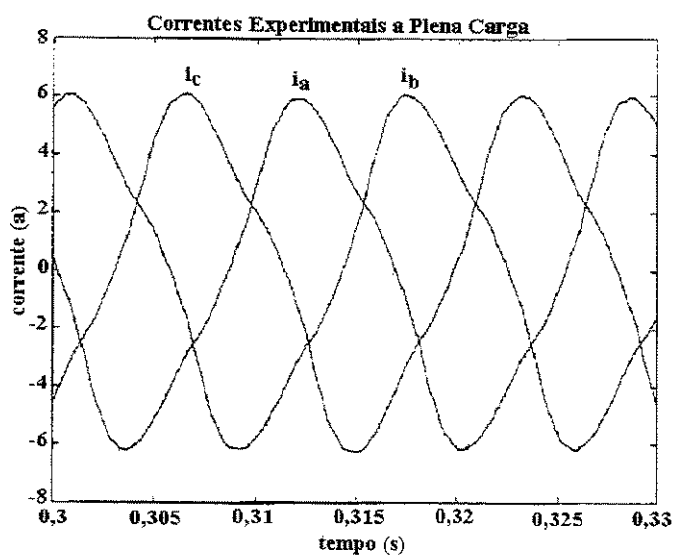


Figura (6.24) – Correntes de fase aplicada à máquina a plena carga.

6.7 – Ensaio com Sobrecarga de 10% para a Máquina Ligada em (Y)

6.7.1 – Formas de Onda Obtidas na Simulação

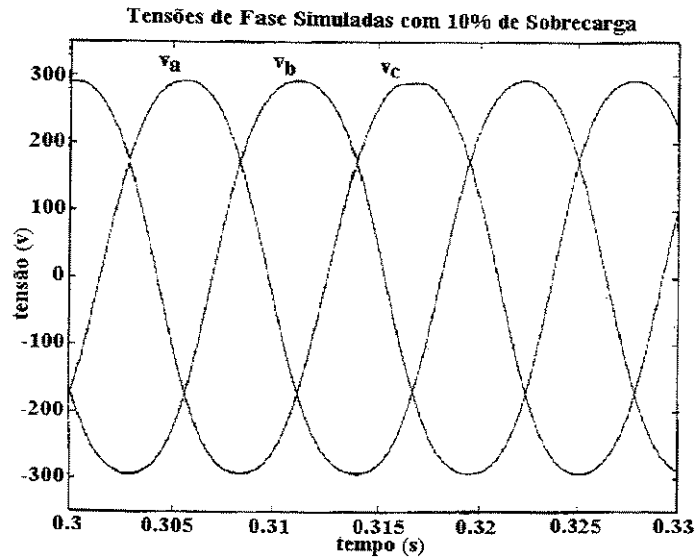


Figura (6.25) – Tensões simuladas de fase com 10% de sobrecarga.

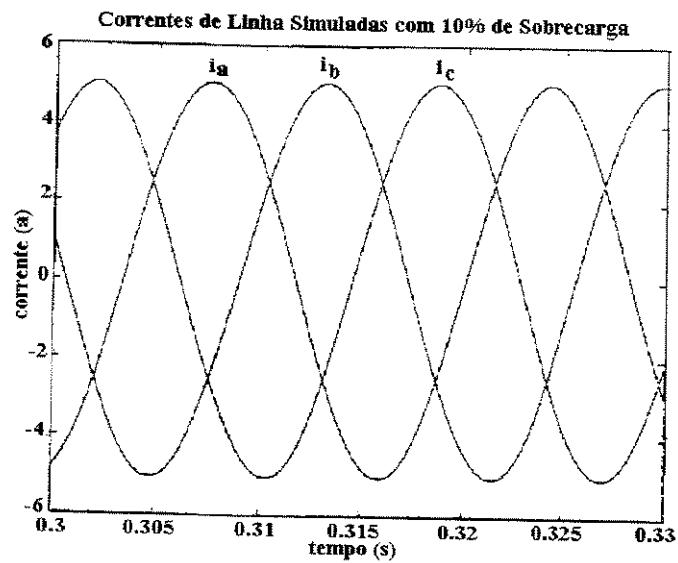


Figura (6.26) – Correntes de linha simuladas com 10% de sobrecarga.

6.7.2 – Valores Medidos em Laboratório

- Tensões aplicadas em sobrecarga de 10% V_a , V_b , $V_c = 380$ V
- Correntes aplicadas com sobrecarga de 10% I_a , I_b , $I_c = 4,18$ A
- Velocidade com sobrecarga de 10% 1718 rpm

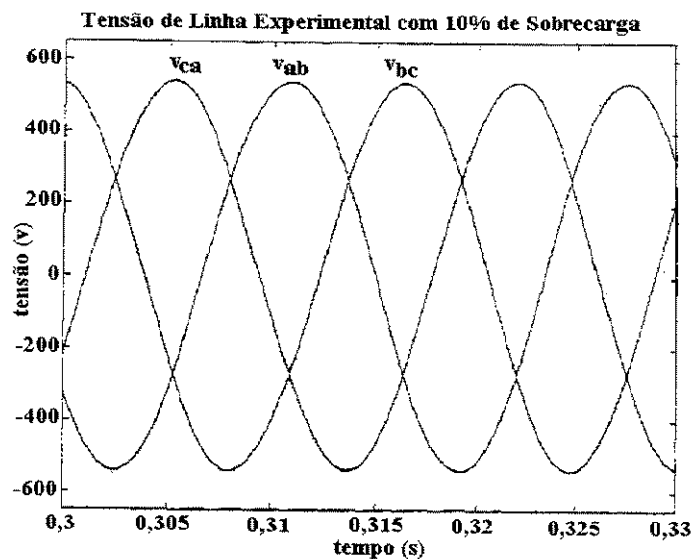


Figura (6.27) – Tensões de linha aplicadas à máquina com 10% de sobrecarga.

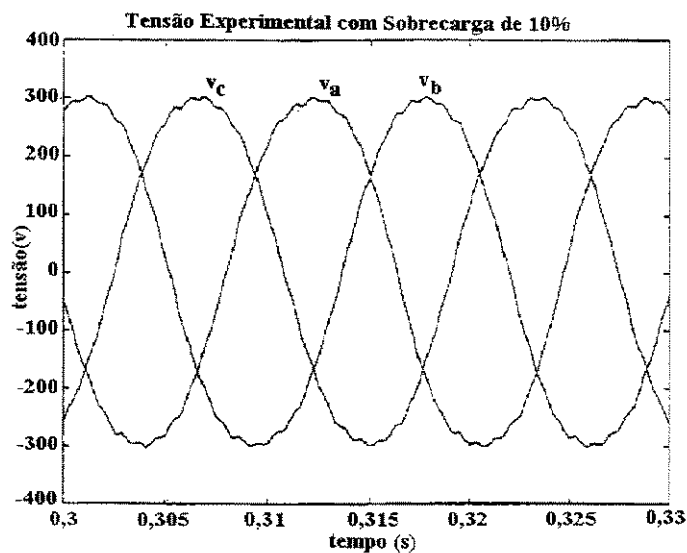


Figura (6.28) – Tensões de fase aplicadas à máquina com 10% sobrecarga.

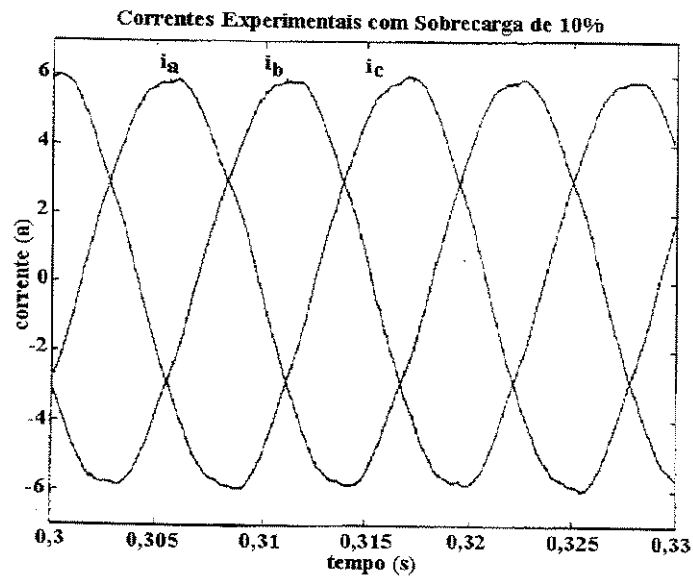


Figura (6.29) – Correntes de linha aplicada à máquina com 10% sobrecarga.

6.8 – Ensaio com Sobrecarga de 10% para a Máquina Ligada em (Δ)

6.8.1 – Formas de Onda Obtidas na Simulação

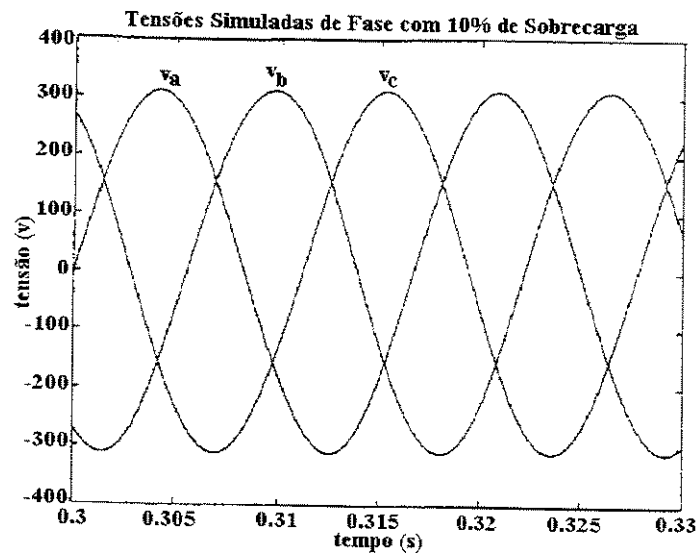


Figura (6.30) – Tensões simuladas na fase com 10% de sobrecarga.

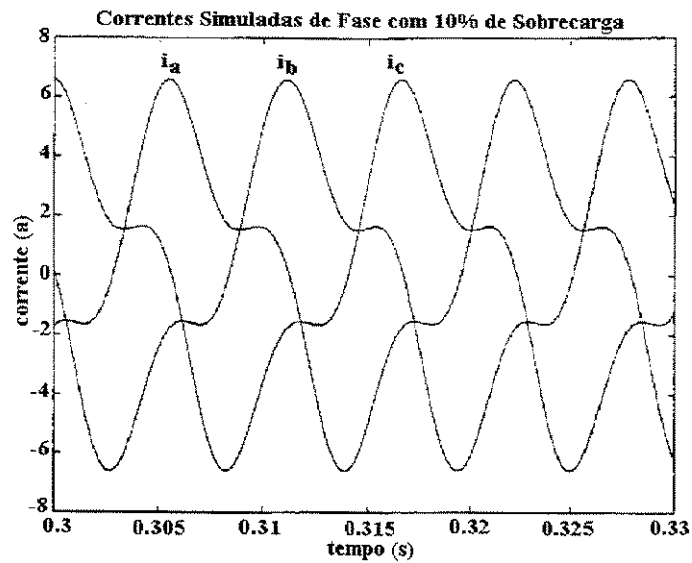


Figura (6.31) – Correntes na fase simuladas com 10% sobrecarga.

6.8.2 – Valores Medidos em Laboratório

- Tensões com sobrecarga de 10% V_a , V_b , $V_c = 220$ V
- Correntes com sobrecarga de 10% I_a , I_b , $I_c = 7,59$ A
- Velocidade com sobrecarga de 10% 1718 rpm.

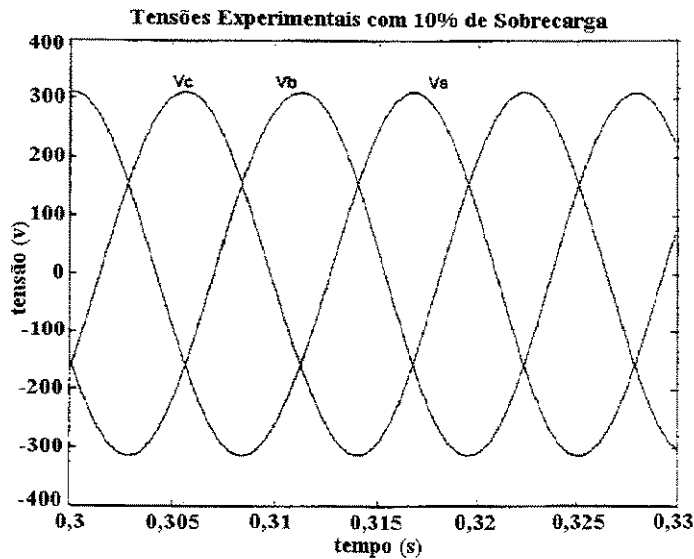


Figura (6.32) – Tensões de linha aplicada à máquina com 10% de sobrecarga.

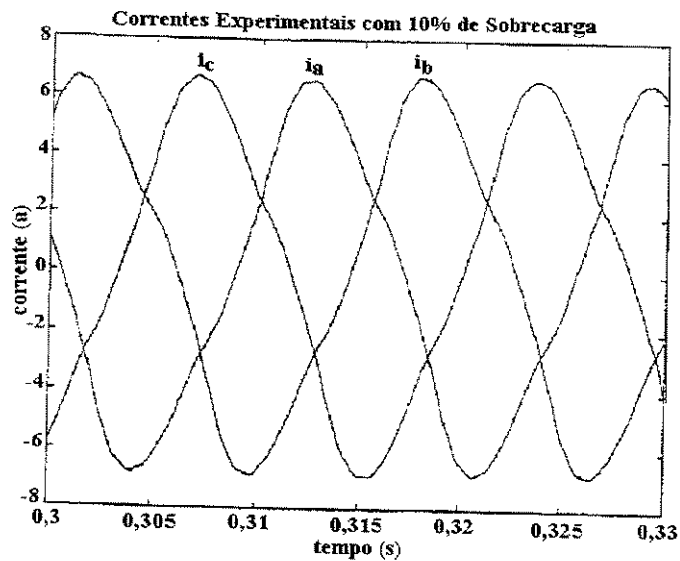


Figura (6.33) – Correntes de fase aplicadas à máquina com 10% de sobrecarga.

6.9 – Análise dos Resultados

Utilizando-se de uma fonte equilibrada para alimentação do motor que está sendo ensaiado, bem como de um sistema de aquisição de dados conectados a sensores de efeito Hall para aquisição das formas de onda de tensão e corrente aplicada aos terminais da máquina, verifica-se que os resultados obtidos em laboratório e na simulação se aproximam principalmente para ligação em estrela, e mesmo não acontece para ligação em delta onde as correntes nas fases apresentam distorções mais acentuadas nas formas de ondas simuladas, em relação as obtidas nos ensaios em laboratório.

CAPÍTULO VII

7.1 – Conclusões

Através do levantamento dos parâmetros do transformador utilizando os ensaios em vazio e curto-circuito, e com a obtenção da curva de saturação a partir da determinação dos laços de histerese, retirando a componente de perda no ferro do núcleo, e utilizando a função linear obtida no desenvolvimento matemático do modelo que também relaciona fluxo de magnetização (λ_m) e corrente de magnetização (i_m), conjuntamente com as equações diferenciais, soluciona-se o modelo não linear do transformador. Verifica-se que os resultados obtidos através da simulação digital do modelo não linear, apresentam resultados muito próximo, aos obtidos em laboratório.

Utilizando-se da mesma sistemática aplicada ao transformador, agora incluindo os conceitos da função acúmulo e distribuição de espiras, aplicados ao modelo não linear do motor de indução trifásico balanceado, desenvolve-se um modelo matemático incluindo a saturação magnética, considerando o harmônico fundamental e o terceiro harmônico espacial. A partir do desenvolvimento do equacionamento do fluxo concatenado na máquina (λ_{mi}), obtém-se a função linear que relaciona a força magnetomotriz (FFM), com o máximo desta força (FM), verificando no desenvolvimento que somente o harmônico fundamental prevalece já que o terceiro harmônico se cancela. Desenvolve-se também as funções força magnetomotriz (FFM) e o máximo desta força magnetomotriz (FM) a partir do equacionamento de (λ_{mi}), utilizando a curva segmentada obtida a partir da união dos extremos dos laços que relacionam tensão e corrente do ramo de magnetização retirada as perdas no ferro, através do ensaio a vazio síncrona da máquina. De posse da reta e das funções desenvolvidas soluciona-se parte das equações diferenciais. A solução das equações diferenciais de conjugado e velocidade é necessário o desenvolvimento matemático do conjugado eletromagnético incluindo os harmônicos espaciais, desenvolvimento este utilizado na simulação do modelo proposto. Com as funções obtidas e o modelo matemático completo tem-se a solução das equações diferenciais da máquina.

Os resultados obtidos para simulação a vazio e a plena carga para velocidade, conjugado e corrente aproximam-se dos dados de placa.

Na ligação em estrela isolada as simulações realizadas para as condições em vazio figura (6.3), a plena carga figura (6.14), e com sobrecarga de 10%, figura (6.15), não apresentam as oscilações observadas na parte superior das formas de onda de tensão, para os mesmos ensaios obtidos experimentalmente apresentados respectivamente nas figuras (6.8), (6.19), (6.28).

Para ligação em triângulo as diferenças são notadas nas formas de onda das correntes de fases. Na ligação em vazio a deformação no meio da onda apresentada na figura (6.11), é mais profunda do que a obtida experimentalmente apresentada na figura (6.13). Nos ensaios a plena carga e com sobrecarga de 10%, as formas de onda de corrente

obtidas na simulação também apresentam maiores deformações do que as obtidas experimentalmente.

Uma análise através da transformada da série de Fourier da forma de onda de corrente experimental, verifica-se a presença da quinta e sétima harmônica, portanto uma forma de minimizar os efeitos das distorções, seria o desenvolvimento do modelo incluindo a quinta e sétima harmônica, pois o apresentado no trabalho inclui somente a terceira harmônica.

Estas deformações poderiam ser reduzidas incluindo no modelo outras representações de perdas na máquina que não foram incluídas, no desenvolvimento do modelo apresentado.

7.2 – Estudos Propostos

- Estudo de outras perdas além das consideradas no modelo do transformador e motor, para verificação da melhoria das distorções das formas de onda.
- Estudo para incluir no modelo do motor de indução trifásico, da quinta e sétima harmônica espacial, verificando se há melhora nas formas de onda da tensão e corrente.

Referências Bibliográficas

- [1] Bispo, D.; Neto, L.M.; Miskulin, M.S.; Simoni, F.A. - "Single - Phase Transformers. A Non-linear Analysis". COBEP'91 1st Brazilian Power Eletronics Conference. December 1991 - pp. 327-332.
- [2] Neto, L.M.; Salerno, C.H.; Bispo, D.; Alvarenga, B.P. - "Introduction Motor Torque: An Approach Including Windings and Saturation Effects" - ICEMA - International Conference Electrial Machines, September 1993 - Adelaide Austrália, pp. 117 - 116.
- [3] Neto, L.M.; Bispo, D.; Miskulin, M.S.; Resende, J.T.; Camacho, J.R.; - "A Field Procedure to include the Magnetic Saturation Effect on a three-phase Induction Machine" SDEMPED – The IEEE International Symposium on Diagnostics for Electrical Machines Power Electronics and Drives, September 99 – Gijon, Espanha.
- [4] Bispo, D.**; Martins Neto, L.**; Resende, J.T.*; Andrade, D. A. "A New Strategy for Induction Machine Modeling Taking into Account the Magnetic Saturation" – IAS 2000 Annual Meeting and World Conference on Industrial Application of Electrical Energy to be Held in Roma Italy, October 8-12, 2000, Paper Number 44-3.
- [5] A.E. Fitzgerald,; Charles Kings Ley, Jr. "Electric Machinery" – An Integrated Treatment of ^aC. and D.C. Machines – New York, Toronto London McGraw-Hill Book Company, INC, 1952 . Chapter 9.
- [6] Spadin, Oswaldir; Um Modelo da Máquina Assíncrona e Síncrona incluindo a Saturação Magnética, Rio de Janeiro; Universidade Federal do Rio de Janeiro UFRJ/COPPE, 1984, 190 p.
- [7] Greene, J. D.; Gross, C.A. - "Nonlinear Modeling of Transformer" - IEEE Transactions on Industry Applications. Vol. IA-24 n^o 3 may/june 1988 - pp. 434-438.
- [8] Makran, E.B.; Thompson,, R.L.; Gergis, A.A. - "A New Laboratory Experiment for Transformer Modelling in the Presence of Harmonic Distortion using a Computer Controlled Harmonic Generator" - IEEE Transaction on Power Systems. Vol. 3 n^o 4, november 1988 - pp. 1857-1863.
- [9] Rosales, S.A.; Alvorado, F.L. - "Non-linear Frequency Dependent Transformer Model for Electromagnetic Transient Studies in Power Systems" - IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Vol. Pas 100 n^o 1, january 1981 - pp. 409-419.

- [10] Prusty, S.; Rao, M.V.S. - "New Method for Predetermination of there Saturation Characteristics of Transformers and Nonlinear Reators" - IEEE Proc., vol. 127 Ptc, nº 2, March 1990 - pp. 106-110.
- [11] A.V. Ivanov - Smolenski, - "Eletrical Machines", - Moscow: Mir Editorial, 1980, volume 1, chapter 22.
- [12] S.A. Nasar, - "Handbook of Electric Machines" - New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1987, pp. 3-20.
- [13] G.R. Slemon, - "Magnetoclectric Divices - Transducers, Transformers and Devices", - New York: John Wiley and Sons, Inc., 1966, pp. 111.

Bibliografia

- [14] Murthy, S. S. Nagamani, C.; Satyanarayana, K.V.V.; Studies on the use of Conversion Induction Motors as Self-Excited Induction Generators, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 3, N^o 4, p.842-847, December 1988.
- [15] Alan, I.; Lipo, T.A.; Control of a Polyphase Induction Generator / Induction Motor Power Conversion Sytem Completely Isolated from the Utility, IEEE Transaction on Industry Aplication, Vol. 30, N^o 3, p. 636-647, May/June 1994.
- [16] Kerkman, R.J.; Steady-State and Transient Analysis of an Induction Machine with Saturation of the Magnetizing Branch, IEEE Transaction on Industry Application, Vol. IA-21, N^o 1, p. 226-234, January/February 1985.
- [17] Moreira, J. C.; Lipo, T.A.; Modeling of Saturated ac Machines Including Air Gap Flux Harmonic Components, IEEE Transactions on Industry Application, Vol. 28, N^o 2, p. 343-349, March/April 1992.
- [18] Melkebeek, J.A.A.; Magnetizing-Field Saturation and Dynamic Behaviour of Induction Machines Part 1: Improved Calculation Method for Induction Machine Dynamics, IEE Proceedings, Vol. 130, Pt B, N^o 1, p. 1-9 January 1983.
- [19] Melkebeek, J.A.A.; Magnetizing-Field Saturation and Dynamic Behaviour of Induction Machines Part 2:Stabillity limits of a Voltage-Fed Induction Motor and of a Self-excited Induction Generator IEE Proceedings, Vol. 130, Pt B, N^o 1, p. 10-17, January 1983.
- [20] Sullivan, C. R.; Sanders, S.R.; Models for Induction Machines with Magnetics Saturation of the Main Flux Path, IEEE Transactions on Industry Application, Vol. 31, N^o 4, p. 907-917, July/August 1995.
- [21] Brown, J.E.; Kovacs, K.P.; Vas, P.; A Method of Including the Effects of Main Flux Path Saturation in the Generalized Equations of ac Machines, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, N^o 1, p. 96-102, January 1983.
- [22] Melkebeek, J.A.A.; Novotny, D.W.; The Influence of Saturation on Induction Machine Drive Dynamics, IEEE Transactions on Industry Applications Vol. IA-19, N^o 5, p. 671-681, September/October 1993.

- [23] Lipo, T.A.; Yi-Kang He.; Computer Simulation of an Induction Machine with Spatially Dependent Saturation, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103, N^o 4, p. 707-713, April 1984.
- [24] Levi, E.; General Method of Magnetising Flux Saturation Modelling in d-q, axis Models of Double-Cage Induction Machines, IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol. 144, N^o 2, p. 101-109, March 1997.
- [25] Slemon, G.R.; Modelling of Induction Machines for Electric Drives, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 25, N^o 6, p. 1126-1131, November/December 1985.
- [26] Mahmoud, A.M.A.; Menzies, R.W.; A Complete time Domain Model of the Induction Motor for Efficiency Evaluation, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-1, N^o 1, p. 68-75, March 1986.
- [27] Jesus, J.M.F.; A Model for Saturation in Induction Machines, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 3, N^o 3, p. 682-687, September 1988.
- [28] Lipo, T.A.; Consoli, A.; Modelling and Simulation of Induction Motors with Saturable Leakage Reactances, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. IA-20, N^o 1, p. 180-189, January/February 1984.
- [29] Ostovic, V.; A Method for Evaluation of Transient and Steady State Performance in Saturated Squirrel Cage Induction Machines, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-1, N^o 3, p. 190-196, September 1986.
- [30] Sauer, P. W.; Constraints on Saturation Modeling in ac Machines, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 7, N^o 1, p.161-167, March 1992.
- [31] Reynaud, J.; Pillay, P.; Reclosing Transients in Induction Machines Including the Effects of Saturation of the Magnetizing Branch and a Practical case Study, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 9, N^o 2, p. 383-389, June 1994.
- [32] Smith, A.C.; Healey, R.C.; Williamson, S.; A transient Induction Motor Model Including Saturation and Deep-Bar Effect, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 11, N^o 1, p.8-15, March 1996.
- [33] Vas, P.; Hallenius, K.E.; Brown, J.E.; Cross-Saturation in Smooth Air-Gap Electrical Machines, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. EC-1, N^o 1, p. 103-112, 1986.

- [34] Hallenius, K.E.; Contributions the Theory of Saturated Electrical Machines, D. Sc. Thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 1982.
- [35] Vas, P.; Li, J.; Effects of Saturation in Double-Cage Induction Machines, Proceedings of the International Conference on Electrical Machines ICEM, Manchester, UK, p. 662-664, 1992.
- [36] Vas, P.; Li, J.; Digital Simulation of Saturated Double-Cage Induction Machines, Proceedings Machines, Proceedings of IMACS TCT, 93 Montreal, Canada, p.591-596, 1993.
- [37] Depenbrock, M.; Klaes, N.R.; Determination of the Induction Machine Parameters and their Dependencies on Saturation, In Conference Rec. 1989, IEEE IAS Annual Meeting, Pt 1, San Diego, p. 17-22, 1989.
- [38] Grellet, Martaux, L.; Saturation Factors for Leakage Reactances of Cage Induction Motors, IEEE Industry Application, Vol. 79, Pt. III, p. 1037-1042, 1960.
- [39] Qishan, G.; Shuhong, H.; Analytic Approach to Magnetic Circuit for Saturated Axial-Field Induction Machines, IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol. 141, N^o 1, p. 27-32, January 1994.
- [40] Oraee, H.; Simulation of Induction Machines Including non-linear Effects, Proceedings of the American Power Conference, Vol. 55, Pt 1, p. 385-390, 1993.
- [41] Liao, Y.; Lipo, T.A.; Effect of Saturation third Harmonic on the Performance of Squirrel-Cage Induction Machines, Electric Machines and Power Systems, Vol. 22, N^o 2, p.155-171, March/April 1994.
- [42] Levi, E.; Applications of the Current State Space Model in Analysis of Saturated Induction Machines, Electric Power Systems Research, Vol. 31, N^o 3, p. 203-216, December 1994.
- [43] Charett, A.; Xu, J.; Lakhsasi, A.; Yao, Z.; Rajagopalan, V.; Modeling and Validation of Asynchronous Machine Taking into Account the Saturation Effects, Conference Record-IAS Annual Meeting, San Diego, CA, USA, Vol. 3, p. 1538-1541, 1996.
- [44] Moreira, J.C.; A Study of Saturation Harmonics with Applications in Induction Motors Drives, Madison: The University of Wisconsin, 1990, 382 p.

- [45] Chalmers, B.J.; Dodgson, R.; Waveshapes of Flux Density in Polyphase Induction Motors under Saturated Conditions, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS - 90, Nº 2, p. 564-569, March/April 1971.
- [46] Ojo, O.; Vipin, M.; Bhat, I.; Steady-State Performance Evaluation of Saturated Field-Oriented Induction Motors, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 30, Nº 6, p. 1638-1647, November/December 1993.
- [47] Klaes, N.R.; Parameter Identification of an Induction Machine with Regard to Dependencies on Saturation, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 29, Nº 6, p. 1135-1140, November/December 1993.
- [48] Alvarenga, B. P.; Modelo para o Cálculo do Conjugado de uma Máquina de Indução Incluindo os Efeitos de Enrolamento e Saturação Magnética, Tese de Mestrado, Uberlândia, MG, Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Agosto de 1993, 115 p.

ANEXO 1

CONCEITUAÇÃO DA FUNÇÃO ACÚMULO DE ESPIRAS E FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE ESPIRAS APLICADO AO CÁLCULO DO FLUXO CONCATENADO POR UM ENROLAMENTO

A1.1. Introdução

A superposição dos efeitos individuais das entradas não são válidas para sistemas não lineares, devido a não linearidade física do circuito magnético.

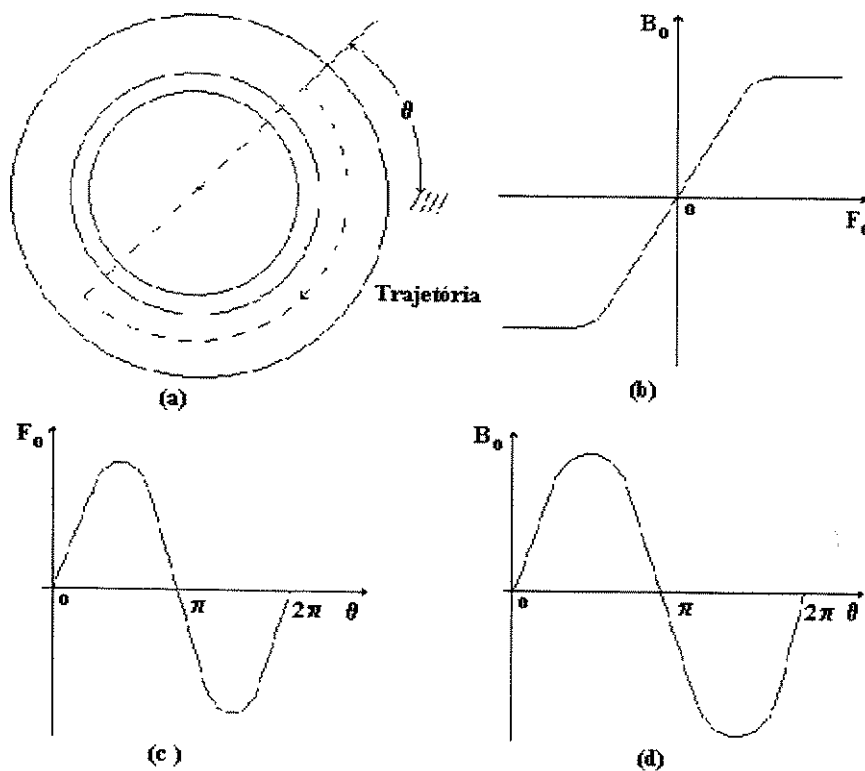


Figura (A1.1) - (a) trajetória numa estrutura magnética com ranhuras; (b) Densidade média (B_0) de fluxo de entreferro como função da força magnetomotriz (F_0); (c) Distribuição senoidal de (F_0) com o ângulo (θ); (d) Distribuição da densidade (B_0) do fluxo com (θ).

Na figura (A1.1a), está representada uma estrutura magnética com ranhuras, representando a máquina de indução trifásica balanceada. Na figura (A.1.1b) está representada a densidade média (B_0), que é a distribuição do fluxo magnético normal à superfície do entreferro, em função da força magnetomotriz (F_0), resultante dos vetores intensidade de campo magnetizante, caracterizando a curva de magnetização da máquina. Também na figura (A.1.1c, d), está representada a força magnetomotriz (F_0) e a distribuição da densidade (B_0) de fluxo em função da posição angular (θ).

A partir da densidade do fluxo magnético no entreferro, obtém-se os fluxos concatenados pelos enrolamentos.

A1.2. Função Distribuição de Espiras

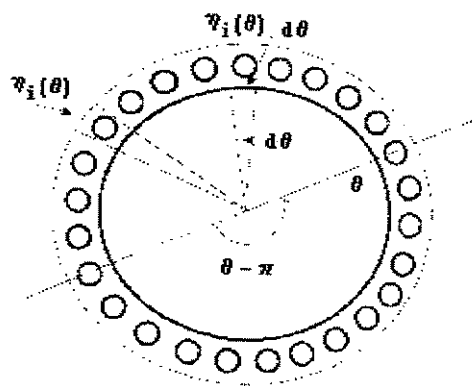


Figura (A1.2) - Representação da distribuição de fmm.

Na qual:

$\eta_i(\theta)$ - nº de condutores por unidade de ângulo (nº cond/grau)

Portanto:

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = FM \cdot \cos(\theta - \alpha) = \int_{\theta}^{\theta - \pi} \eta_i(\theta) \cdot i_i \cdot d\theta = N \cdot i_i \int_{\theta}^{\theta - \pi} \eta_i(\theta) \cdot d\theta \quad [A1.1]$$

Na qual:

$$\eta_i(\theta) = N \cdot \eta'_i(\theta) \quad [A1.2]$$

$$\eta'_i(\theta) = \text{sen}(\theta - \alpha) \quad [A1.3]$$

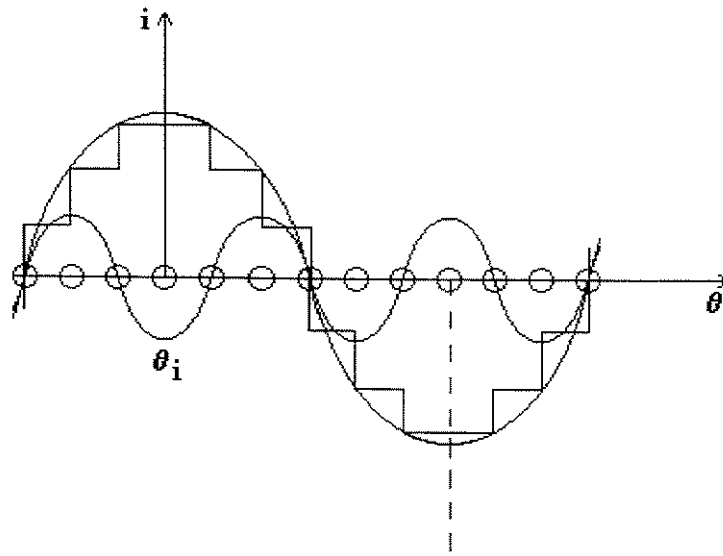


Figura (A1.3) - Representação da distribuição de fmm.

Portanto:

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = N \cdot i_i \cdot \int_{\theta}^{\theta - \pi} \text{sen}(\theta - \alpha) = -N \cdot i_i \cdot \cos(\theta - \alpha) \Bigg|_{\theta}^{\theta - \pi}$$

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = -N \cdot i_i \cdot [\cos(\theta - \pi - \alpha) - \cos(\theta - \alpha)] \cos(\theta - \pi - \alpha) = -\cos(\theta - \alpha)$$

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = -N \cdot i_i \cdot [-\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta - \alpha)] = 2 \cdot N \cdot i_i \cos(\theta - \alpha)$$

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = FM \cdot \cos(\theta - \alpha)$$

Portanto tem-se:

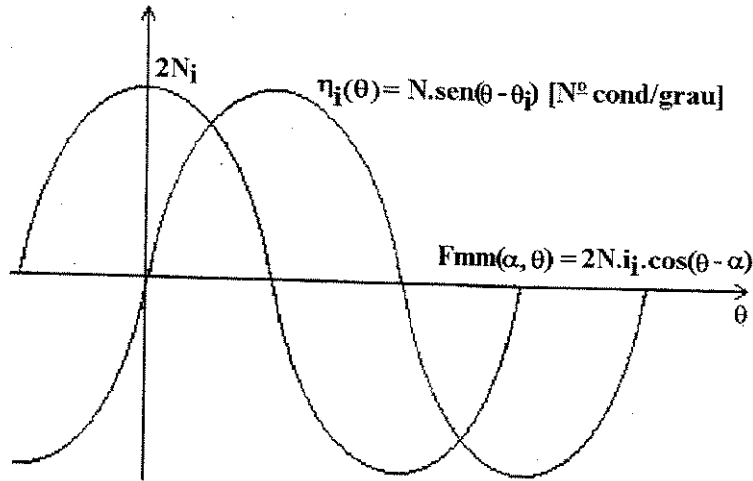


Figura (A1.4) - Representação de $\eta_i(\theta)$ e fmm.

Conceituando melhor a função distribuição de condutores tanto para o fundamental como para alguns harmônicos a partir de um ângulo θ_i , tem-se:

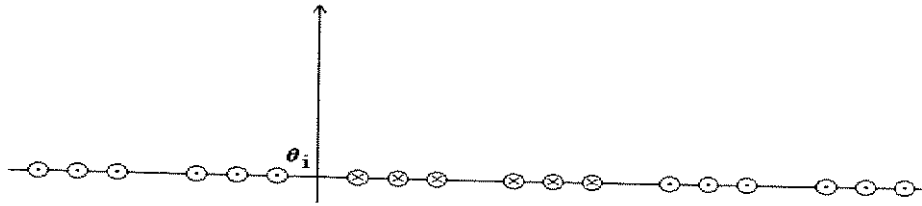


Figura (A1.5) - Limites para fmm a partir de θ_i .

$$\eta_i(\theta) = K_1.\text{sen}(\theta - \theta_i) + K_3.\text{sen}(\theta - \theta_i) + \dots$$

$$\eta_i(\theta) = \sum K_h.\text{sen}(h.(\theta - \theta_i)) \quad [A1.4]$$

portanto a integral para determinação de $Fmm(\alpha, \theta)$:

$$Fmm(\alpha, \theta) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} \sum K_h.i_i \text{sen}[h.(\theta - \theta_i)]d\theta$$

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = -i_i \cdot \sum K_h \cdot \int_{\theta}^{\theta - \pi} \sin[h(\theta - \theta_i)] d\theta = -i_i \cdot \sum \frac{K_h}{h} \cdot \cos[h(\theta - \theta_i)] \Big|_{\theta}^{\theta - \pi}$$

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = -i_i \cdot \sum \frac{K_h}{h} \cdot [\cos[h(\theta - \theta_i - \pi)] - \cos[h(\theta - \theta_i)]]$$

$$\cos[h(\theta - \theta_i - \pi)] = -\cos[h(\theta - \theta_i)]$$

Portanto:

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = -i_i \cdot \sum \frac{K_h}{h} \cdot [-\cos[h(\theta - \theta_i)] - \cos[h(\theta - \theta_i)]]$$

$$F_{mm}(\alpha, \theta) = 2 \cdot i_i \cdot \sum \frac{K_h}{h} \cdot \cos[h(\theta - \theta_i)] \quad [A1.5]$$

Concluindo a função distribuição de condutores será avaliada através de:

$$\eta_i(\theta) = \sum K_h \cdot \sin[h(\theta - \theta_i)] \quad [A1.6]$$

para $h = 1$ - primeiro harmônico
 $h = 3$ - terceiro harmônico

A1.3. Função Acúmulo de Espiras

$$f_A = \int_{\psi_i - \pi/2}^{\theta} \eta_i(\theta) \cdot d\theta \quad [A1.7]$$

Na qual:

$$\eta_i(\theta) = \sum K_h \cdot \sin[h(\theta - \theta_i)]$$

$(\psi_i - \pi/2)$ - é a posição do primeiro condutor do enrolamento.

Para determinação de f_A necessita-se definir corretamente os limites de integração.

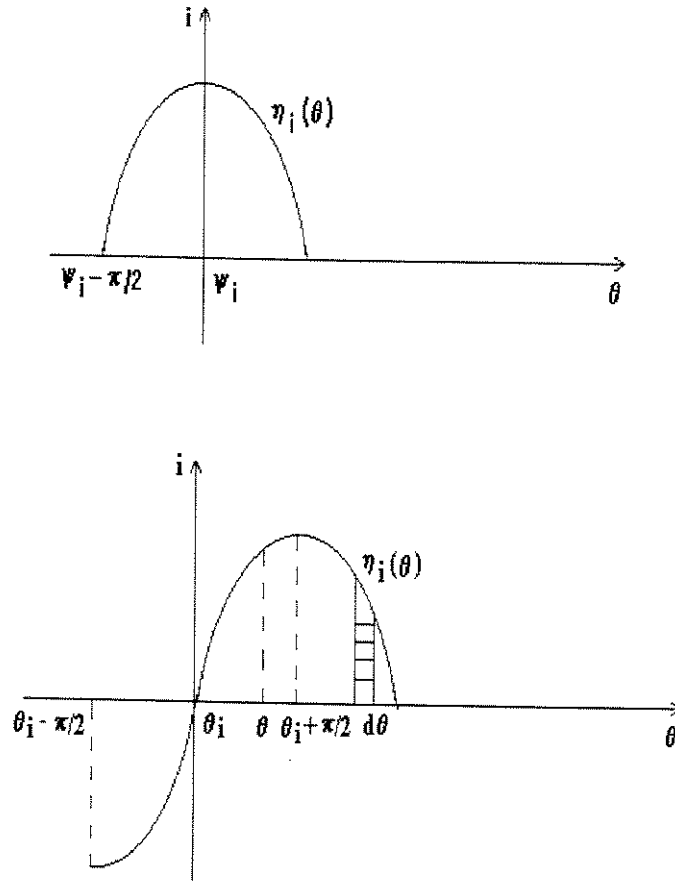


Figura (A1.6) - Definição dos limites de integração.

$$f_A = \int_{\theta_i}^{\theta} \eta_i(\theta) \cdot d\theta = \sum K h \cdot \int_{\theta_i}^{\theta} \sin[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta = - \sum \frac{K h}{h} \cdot \left[\cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] \right] \Bigg|_{\theta_i}^{\theta}$$

$$f_A = - \sum \frac{K h}{h} \cdot \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] - 1 = \sum \frac{K h}{h} \cdot [1 - \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)]]$$

Portanto a partir de θ_i a função acúmulo de espiras será:

$$f_A = \sum \frac{K h}{h} \cdot [1 - \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)]] \quad [A1.8]$$

ANEXO 2

AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS DAS EQUAÇÕES [3.19], [3.20], [3.21], [3.22], [3.23]

A2.1. Avaliação da Integral da Equação [3.19] para λ_{mi1}

$$\lambda_{mi1} = r \cdot \ell \cdot \sum_h \frac{K_h}{h} \cdot \int_{\alpha - \pi/2}^{\alpha + 3\pi/2} a_j \cdot d\theta$$

Os valores de a_j são constantes dentro da integral acima, desta forma tem-se:

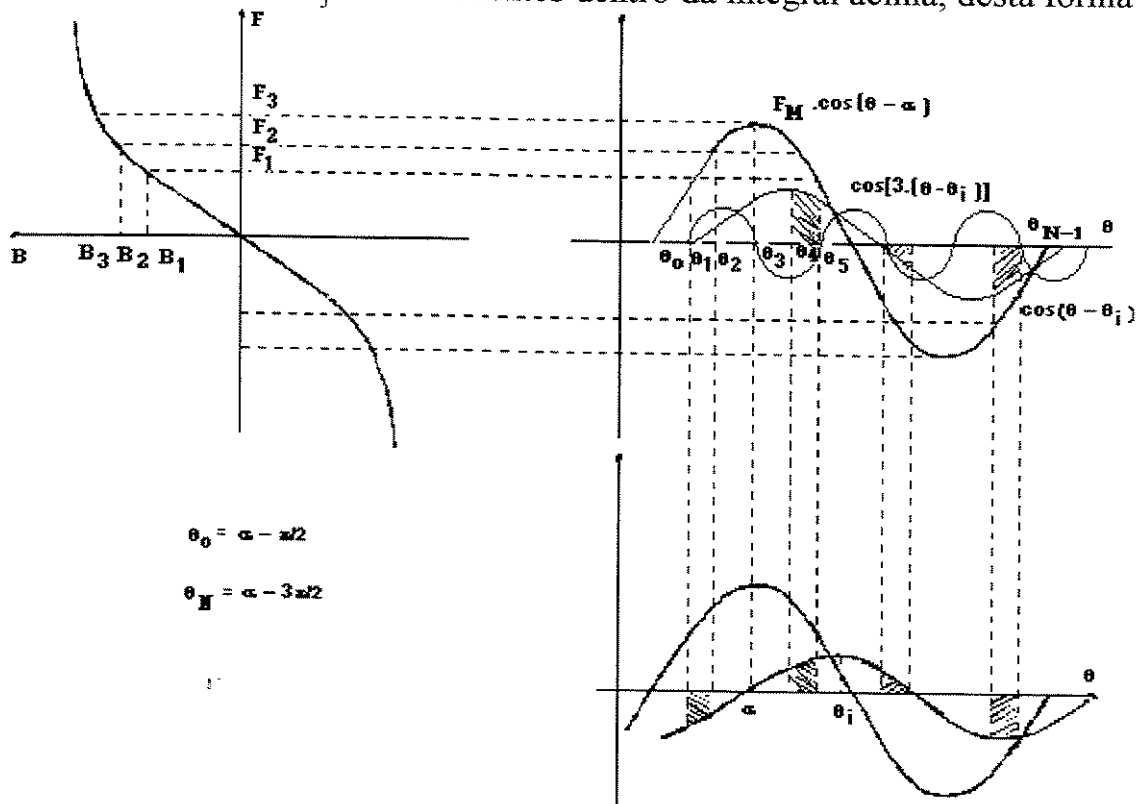


Figura (A2.1) - Posição das áreas da integral da equação [3.19].

Observando as curvas da figura (A2.1) plotadas para diferentes valores de θ_i , conclui-se que no intervalo $(\theta = \alpha - \pi/2)$ até $(\theta = \alpha + \pi/2)$ tem-se áreas iguais às áreas da curva entre $(\theta = \alpha - \pi/2)$ até $(\theta = \alpha + \pi/2)$. Porém os valores dos a_j são de sinais opostos nestes intervalos. Isto pode ser comprovado da seguinte forma.

Seja:

$$a_j^+ = \left(\frac{-B_j + B_{j+1}}{F_j - F_{j-1}} \right) \cdot F_{j-1} + B_{j-1} \quad [A2.1]$$

Para $(\alpha + \pi/2 < \theta < \alpha + 3\pi/2)$, os valores de (B) e (F) são substituídos por (-B) e (-F), na curva de magnetização. Assim tem-se (a_j) dado por:

$$a_j^- = \frac{-(-B_j) + (-B_{j-1})}{(-F_j) - (-F_{j-1})} \cdot (-F_{j-1}) + (-B_{j-1})$$

$$a_j^- = - \left[\frac{-B_j + B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} \cdot F_{j-1} + B_{j-1} \right]$$

$$a_j^- = -a_j^+ \quad [A2.2]$$

Partindo da equação [3.19] e da simetria verificada na figura (A2.1), tem-se para os quatro trechos genéricos identificando o seguinte comportamento.

$$\begin{aligned} \text{Trecho I} & \quad \theta_{j-1} < \theta < \theta_j \\ \text{Trecho II} & \quad 2.\alpha - \theta_j < \theta < 2.\alpha + \theta_{j-1} \\ \text{Trecho III} & \quad \pi + \theta_{j-1} < \theta < \pi + \theta_j \\ \text{Trecho IV} & \quad \pi + 2.\alpha - \theta_j < \theta < \pi + 2.\alpha - \theta_{j-1} \end{aligned} \quad [A2.3]$$

Observa-se nas relações [A2.3] que:

$$\alpha - \pi/2 < \theta_{j-1} < \alpha$$

$$\alpha - \pi/2 < \theta_j < \alpha$$

Voltando a avaliar as integrais nos quatro trechos tem-se:

$$\text{Trecho I} \quad a_j \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} d\theta$$

$$\text{Trecho II } a_j \cdot \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} d\theta$$

$$\text{Trecho III } -a_j^+ \cdot \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} d\theta$$

$$\text{Trecho IV } -a_j^+ \cdot \int_{\pi-\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} d\theta$$

O valor total para os quatro trechos fazendo $a_j^+ = a_j$, pode ser agora obtido.

$$\begin{aligned} \lambda_{mi1} = r \cdot \ell \cdot & \left[K_1 \cdot a_{j1} \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} d\theta + \frac{K_3}{3} \cdot a_{j1} \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} d\theta + K_1 \cdot a_{j1} \cdot \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} d\theta + \right. \\ & \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} d\theta - K_1 \cdot a_{j1} \cdot \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} d\theta - \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} d\theta - K_1 \cdot a_{j1} \cdot \int_{\pi+2\alpha-\theta_j}^{\pi+2\alpha-\theta_{j-1}} d\theta \\ & \left. - \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot \int_{\pi+2\alpha-\theta_j}^{\pi+2\alpha-\theta_{j-1}} d\theta \right] = r \cdot \ell \cdot \left[K_1 \cdot a_{j1} \cdot (\theta - \theta_{j-1}) + \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} (\theta_j - \theta_{j-1}) \right. \\ & + K_1 \cdot a_{j1} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) + \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) + K_1 \cdot a_{j1} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) + \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \\ & \left. - K_1 \cdot a_{j1} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) - K_1 \cdot a_{j1} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{K_3}{3} \cdot a_{j3} \cdot (\theta_j - \theta_{j-1}) \right] = 0 \end{aligned}$$

A2.2. Avaliação da Integral da Equação [3.20] para λ_{mi2}

$$\lambda_{mi2} = -r \cdot \ell \cdot \sum_h \frac{Kh}{h} \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} a_j \cdot \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta$$

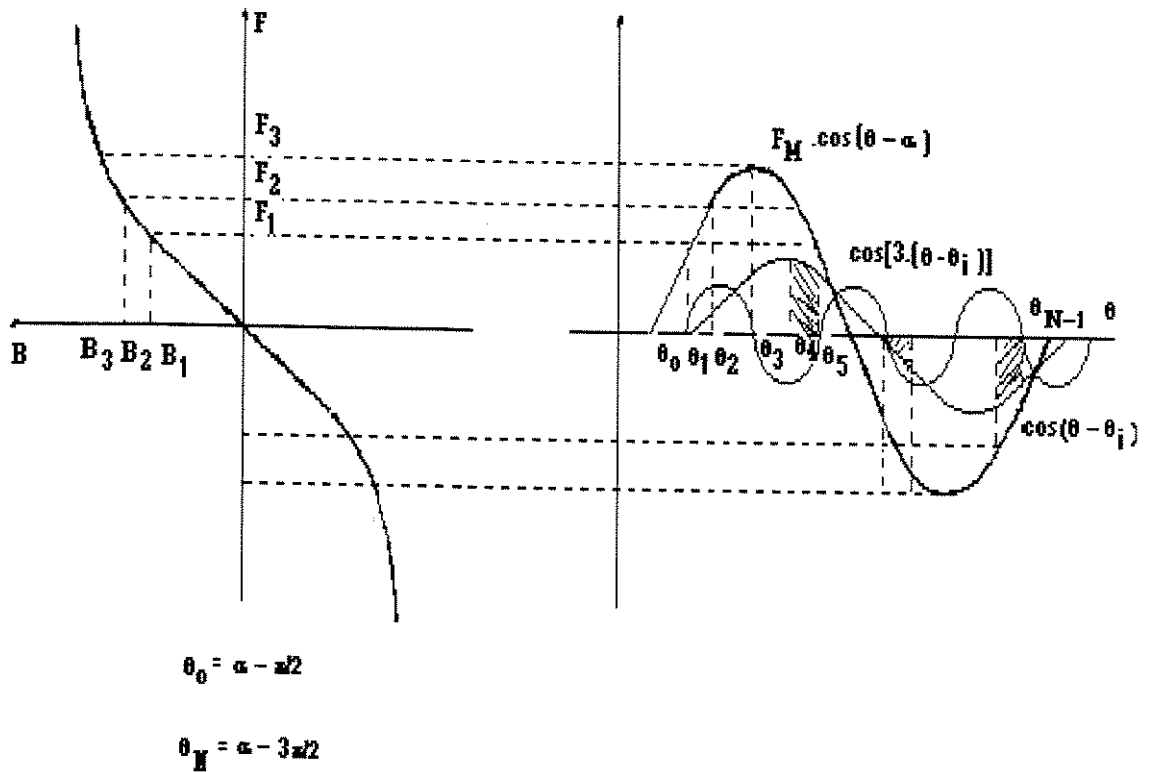


Figura (A2.2) - Posição das áreas da equação [3.20].

Os valores de a_j não são constante dentro da integral acima pois assume valores diferentes para cada intervalo de integração, como verificado na equação [A2.1].

$$\begin{aligned}
 \lambda_{mi2} = & -r \cdot \ell \cdot \sum_h \frac{Kh}{h} \cdot \left[\int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \left(\frac{-B_1 + B_0}{F_1 - F_0} \cdot F_0 + B_0 \right) \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right. \\
 & + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{-B_2 + B_1}{F_2 - F_1} \cdot F_1 + F_2 \right) \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta + \dots \\
 & \left. + \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \left(\frac{-B_N + B_{N-1}}{F_N - F_{N-1}} \cdot F_{N-1} + B_{N-1} \right) \cdot \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right]
 \end{aligned}$$

[A2.4]

Podendo chegar a:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{mi2} = & -r \cdot \ell \cdot \sum_h \frac{Kh}{h} \cdot \left[a_1 \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta + a_2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right. \\
 & + \dots + a_j \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta + \dots + a_N \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta
 \end{aligned}$$

[A2.5]

A figura (A2.2) mostra a posição das áreas da integral da equação [4.21].

$$\begin{aligned} \lambda_{mi2} = & -r.\ell.\sum_h \frac{Kh}{h} \cdot \left[\int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \left(\frac{-B_1+B_0}{F_1-F_0} \cdot F_0 + B_0 \right) \cos[h.(\theta-\theta_j)] d\theta \right. \\ & + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{-B_2+B_1}{F_2-F_1} \cdot F_1 + B_1 \right) \cos[h.(\theta-\theta_i)] d\theta + \dots \\ & \left. + \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \left(\frac{-B_N+B_{N-1}}{F_N-F_{N-1}} \cdot F_{N-1} + B_{N-1} \right) \cdot \cos[h.(\theta-\theta_i)] d\theta \right] \end{aligned} \quad [A2.6]$$

ou

$$\begin{aligned} \lambda_{mi2} = & -r.\ell. \left[K_1 \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \left(\frac{-B_1+B_0}{F_1-F_0} \cdot F_0 + B_0 \right) \cdot \cos[\theta-\theta_i] d\theta + \right. \\ & \frac{K_3}{3} \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \left(\frac{-B_1+B_0}{F_1+F_0} \cdot F_0 + B_0 \right) \cdot \cos[3.(\theta-\theta_i)] d\theta \\ & + K_1 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{-B_2+B_1}{F_2-F_1} \cdot F_1 + B_1 \right) \cdot \cos[\theta-\theta_i] d\theta \\ & + \frac{K_3}{3} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{-B_2+B_1}{F_2-F_1} \cdot F_1 + B_1 \right) \cdot \cos[3.(\theta-\theta_i)] d\theta + \dots \\ & + K_1 \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \left(\frac{-B_N+B_{N-1}}{F_N-F_{N-1}} \cdot F_{N-1} + B_{N-1} \right) \cdot \cos[\theta-\theta_i] d\theta \\ & \left. + \frac{K_3}{3} \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \left(\frac{-B_N+B_{N-1}}{F_N-F_{N-1}} \cdot F_{N-1} + B_{N-1} \right) \cdot \cos[3.(\theta-\theta_i)] d\theta \right] \end{aligned} \quad [A2.7]$$

pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} \lambda_{m12} = -r.\ell. & \left[K_1.a_1.\int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos[\theta - \theta_i].d\theta + \frac{K_3}{3}.a_1.\int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos[3.(\theta - \theta_i)].d\theta \right. \\ & + K_1.a_2.\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos[\theta - \theta_i].d\theta + \frac{K_3}{3}.a_2.\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos[3.(\theta - \theta_i)].d\theta + \dots \\ & \left. + K_1.a_N.\int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos[\theta - \theta_i].d\theta + \frac{K_3}{3}.a_N.\int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos[3.(\theta - \theta_i)].d\theta \right] \end{aligned}$$

[A2.8]

Considerando a simetria na figura (A2.2), e os quatro trechos genéricos tanto para a fundamental como para o terceiro harmônico, bem como o sinal de a_j , tem-se:

$$\text{Trecho I} \quad K_1.a_{j1}^+.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \theta_i).d\theta$$

$$\frac{K_3}{3}.a_{j3}^+.\int \cos[3.(\theta - \theta_i)].d\theta$$

$$\text{Trecho II} \quad K_1.a_{j1}^+.\int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(\theta - \theta_i).d\theta$$

$$\frac{K_3}{3}.a_{j3}^+.\int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(\theta - \theta_i).d\theta$$

$$\text{Trecho III} \quad K_1.a_{j1}^+.\int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos(\theta - \theta_i).d\theta$$

$$-\frac{K_3}{3}.a_{j3}^+.\int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos[3.(\theta - \theta_i)].d\theta$$

$$\text{Trecho IV} \quad -K_1.a_{j1}^+.\int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos(\theta - \theta_i).d\theta$$

$$-\frac{K_3}{3}.a_{j3}^+.\int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos[3.(\theta - \theta_i)].d\theta$$

[A2.9]

O valor dos oito trechos fazendo $a_j^+ = a_j$ pode ser obtido:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi2} = & -r.\ell. \left[K_1.a_{j1} \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \theta_i).d\theta + \frac{K_3}{3}.a_{j3} \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos[3.(\theta - \theta_i)]d\theta \right. \\
& + K_1.a_{j1} \cdot \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta - \theta_i).d\theta + \frac{K_3}{3}.a_{j3} \cdot \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \cos[3.(\theta - \theta_i)]d\theta \\
& - K_1.a_{j1} \cdot \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos(\theta - \theta_i).d\theta - \frac{K_3}{3}.a_{j3} \cdot \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos[3.(\theta - \theta_i)]d\theta \\
& \left. - K_1.a_{j1} \cdot \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta - \theta_i).d\theta - \frac{K_3}{3}.a_{j3} \cdot \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos[3.(\theta - \theta_i)]d\theta \right] = \\
& -r.\ell. \left[K_1.a_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \theta_i) \right]_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} + \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot \left[\text{sen}[3.(\theta - \theta_i)] \right]_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \right. \\
& + K_1.a_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \theta_i) \right]_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} + \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot \left[\text{sen}[3.(\theta - \theta_i)] \right]_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \\
& - K_1.a_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \theta_i) \right]_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} - \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot \left[\text{sen}[3.(\theta - \theta_i)] \right]_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \\
& \left. - K_1.a_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \theta_i) \right]_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} - \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot \left[\text{sen}[3.(\theta - \theta_i)] \right]_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \right] = \\
& -r.\ell. \left[K_1.a_{j1} \cdot [\text{sen}(\theta_j - \theta_i) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \theta_i)] + \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot [\text{sen } 3.(\theta_j - \theta_i)] \right. \\
& - \text{sen}[3.(\theta_{j-1} - \theta_i)] \cdot K_1.a_{j1} \cdot [\text{sen}(2\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) - \text{sen}(2\alpha - \theta_j - \theta_i)] \\
& \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot [\text{sen } [3.(2\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] - \text{sen}[3.(2\alpha - \theta_j - \theta_i)]] - K_1.a_{j1} \cdot [\text{sen}(\pi + \theta_j - \theta_i) \\
& - \text{sen}(\pi + \theta_{j-1} - \theta_i)] - \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot [\text{sen}[3.(\pi + \theta_j - \theta_i)] - \text{sen}[3.(\pi + \theta_{j-1} - \theta_i)]] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K_1.a_{ji}[\text{sen}(\pi + 2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) - \text{sen}(\pi + 2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] \\
& - \frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}[\text{sen}[3.(\pi + 2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] - \text{sen}[3.(\pi + 2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]] = \\
& -r.\ell.[K_1.a_{ji}[\text{sen}(\theta_j - \theta_i) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \theta_i) + \text{sen}(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - \text{sen}(2.\alpha - \theta_j - \theta_i) - \text{sen}(\pi + \theta_j - \theta_i) + \text{sen}(\pi + \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - \text{sen}(\pi + 2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) + \text{sen}(\pi + 2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]] \\
& \frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}[\text{sen}[3.(\theta_j - \theta_i)] - \text{sen}[3.(\theta_{j-1} - \theta_i)] + \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] - \text{sen}[3.(\pi + \theta_j - \theta_i)] + \text{sen}[3.(\pi + \theta_{j-1} - \theta_i)] \\
& - \text{sen}[3.(\pi + 2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] + \text{sen}[3.(\pi + 2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]] = \\
& -r.\ell.[K_1.a_{ji}[\text{sen}(\theta_j - \theta_i) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \theta_i) + \text{sen}(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - \text{sen}(2.\alpha - \theta_j - \theta_i) + \text{sen}(\theta_j - \theta_i) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \theta_i) + \text{sen}(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - \text{sen}(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] + \frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}.\text{sen}[3.(\theta_j - \theta_i)] - \text{sen}[3.(\theta_{j-1} - \theta_i)] \\
& + \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] - \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] + \text{sen}[3.(\theta_j - \theta_i)] \\
& - \text{sen}[3.(\theta_{j-1} - \theta_i)] + \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] - \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] = \\
& r.\ell.[K_1.a_{ji}[2.\text{sen}(\theta_j - \theta_i) - 2.\text{sen}(\theta_{j-1} - \theta_i) + 2.\text{sen}(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - 2.\text{sen}(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] + \frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}[2.\text{sen}[3.(\theta_j - \theta_i)] - 2.\text{sen}[3.(\theta_{j-1} - \theta_i)] \\
& 2.\text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] - 2.\text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]] = \\
& r.\ell.[2.K_1.a_{ji}[\text{sen}(\theta_j - \theta_i) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \theta_i) + \text{sen}(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) \\
& - \text{sen}(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)] + 2.\frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}[\text{sen}[3.(\theta_j - \theta_i)] - \text{sen}[3.(\theta_{j-1} - \theta_i) \\
& \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i)] - \text{sen}[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]]
\end{aligned}$$

[A2.10]

Através dos resultados obtidos na equação [A2.10], pode-se retornar as integrais.

$$\begin{aligned}
& 2.K_1.a_{j1}.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta_j - \theta_i).d\theta - \int_{\theta_j}^{\theta_{j-1}} \cos(2.\alpha - \theta_j - \theta_i).d\theta\right. \\
& 2.K_1.a_{j1}.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [\cos(\theta_j - \theta_i) + \cos(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]d\theta \\
& 4.K_1.a_{j1}.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [\cos(\alpha - \theta_i).\cos(\theta_j - \alpha)]d\theta \\
& \left. \right]d\theta
\end{aligned}
\tag{A2.11}$$

$$\begin{aligned}
& 2.\frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos[3.(\theta_j - \theta_i)]d\theta - \int_{\theta_j}^{\theta_{j-1}} \sin[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]d\theta\right. \\
& 2.K_1.a_{j1}.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [\cos[3.(\theta_j - \theta_i)] + \cos[3.(2.\alpha - \theta_j - \theta_i)]]d\theta \\
& 4.\frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [\cos[3.(\alpha - \theta_i)].\cos[3.(\theta_j - \alpha)]]d\theta \\
& \left. \right]d\theta
\end{aligned}
\tag{A2.12}$$

Na equação [A2.11] e [A2.12] os valores de θ_{j-1} e θ_j são limitados conforme as relações [4.34]

$$\begin{aligned}
& \alpha - \pi/2 < \theta_{j-1} < \alpha \\
& \alpha - \pi/2 < \theta_j < \alpha
\end{aligned}
\tag{A2.13}$$

Finalizando a avaliação das integrais tem-se:

$$\begin{aligned}
& 4.K_1.a_{j1}.\cos(\alpha - \theta_i).\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta = \\
& 4.a_{j1}.\cos(\alpha - \theta_i)[\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha)]
\end{aligned}$$

Portanto generalizando

$$\begin{aligned}
& 4.\cos(\alpha - \theta_i).\sum_{j=1}^N a_{j1}.[\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha)] \\
& 4.\frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}.\cos[3.(\alpha - \theta_i)].\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos[3.(\theta_j - \alpha)]d\theta = \\
& 4.\cos(\alpha - \theta_i).\sum_{j=1}^N a_{j1}[\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha)] \\
& 4.\frac{K_3}{3}.\frac{a_{j3}}{3}.\cos[3.(\alpha - \theta_i)][\sin[3.(\theta_j - \alpha)] - \sin[3.(\theta_{j-1} - \alpha)]]
\end{aligned}
\tag{A2.14}$$

Portanto generalizando

$$4 \cdot \frac{K_3}{3} \cdot \frac{a_{j3}}{3} \cdot \cos[3 \cdot (\alpha - \theta_i)] [\sin[3 \cdot (\theta_j - \alpha)] - \sin[3 \cdot (\theta_{j-1} - \alpha)]]$$

Finalizando:

$$\begin{aligned} \lambda_{mi2} = & -4 \cdot r \cdot \ell \cdot K_1 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N a_{j1} \cdot [\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha)] + \\ & -4 \cdot r \cdot \ell \cdot \frac{K_3}{3} \cdot \cos[3 \cdot (\alpha - \theta_i)] \cdot \sum_{j=1}^N a_{j3} \cdot [\sin[3 \cdot (\theta_j - \alpha)] - \sin[3 \cdot (\theta_{j-1} - \alpha)]] \end{aligned}$$

[A2.15]

onde:

$$\theta_0 = \alpha - \pi/2$$

$$\theta_N = \alpha$$

A2.3. Avaliação da Integral da Equação [3.21] para λ_{mi3}

$$\lambda_{mi3} = r \cdot \ell \cdot \sum \frac{Kh}{h} \cdot \int_{\alpha - \pi/2}^{\alpha + 3\pi/2} b_j \cdot FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot d\theta$$

Observando as curvas da figura (A2.2) plotadas para diferentes valores de θ_i , conclui-se que no intervalo $(\theta = \alpha - \pi/2)$ até $(\theta = \alpha + \pi/2)$ tem-se área iguais as áreas da curva entre $(\theta = \alpha + \pi/2)$ até $(\theta = \alpha - \pi/2)$. Porém os valores do b_j são constantes e de mesmo sinal nestes mesmos intervalos. Isto pode ser comprovado da seguinte forma: Seja:

$$b_j^+ = \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}$$

Para $(\alpha + \pi/2 < \theta < \alpha + 3\pi/2)$, os valores de (B) e (F) são substituídos por (-B) e (-F), na curva de magnetização. Assim tem-se (b_j^-) dado por:

$$b_j^- = \frac{(-B_j) - (-B_{j-1})}{(-F_j) - (-F_{j-1})} = \frac{-[B_j - B_{j-1}]}{-[F_j - F_{j-1}]} = \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}$$

$$b_j^- = b_j^+$$

[A2.16]

Partindo da equação [3.21] e da simetria verificada na figura (A2.2), tem-se quatro trechos para o primeiro harmônico e quatro para o terceiro harmônico, com o seguinte comportamento.

$$\text{Trecho I} \quad \theta_{j-1} < \theta < \theta_j$$

$$\text{Trecho II} \quad 2.\alpha - \theta_j < \theta < 2.\alpha + \theta_{j-1}$$

$$\text{Trecho III} \quad \pi + \theta_{j-1} < \theta < \pi + \theta_j$$

$$\text{Trecho IV} \quad \pi + 2.\alpha - \theta_j < \theta < \pi + \alpha - \theta_{j-1}$$

Avaliando as integrais nos trechos tem-se:

$$\text{Trecho I} \quad K_1.b_{j1}^+ \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\frac{K_3}{3}.b_{j3}^+ \cdot \int \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\text{Trecho II} \quad K_1.b_{j1}^+ \cdot \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\frac{K_3}{3}.b_{j3}^+ \cdot \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\text{Trecho III} \quad K_1.b_{j1}^+ \cdot \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\frac{K_3}{3}.b_{j3}^+ \cdot \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\text{Trecho IV} \quad K_1.b_{j1}^+ \cdot \int_{\pi+2\alpha-\theta_j}^{\pi+2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta$$

$$\frac{K_3}{3}.b_{j3}^+ \cdot \int_{\pi+2\alpha-\theta_j}^{\pi+2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta \quad [A2.17]$$

O valor total para as oito integrais fazendo $b_j^+ = b_j$, pode ser calculado:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi3} = r.\ell. & \left[K_1.b_{j1} \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta \right. \\
& + K_1.b_{j1} \cdot \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta \\
& + K_1.b_{j1} \cdot \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta \\
& \left. + K_1.b_{j1} \cdot \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta - \alpha).d\theta \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi3} = r.\ell. & \left[K_1.b_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \right. \\
& K_1.b_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \\
& \left. K_1.b_{j1} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\theta - \alpha) \Big|_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \left[\text{sen}(\theta - \alpha) \right]_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} = \\
& r.\ell. \left[K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\theta_j - \alpha) - K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha) + K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_{j-1}) + K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_j) \right. \\
& - K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\theta_j - \alpha) - K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha) - K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_{j-1}) - K_1.b_{j1} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_j) \\
& + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\theta_j - \alpha) - \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha) + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_{j-1}) - \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_j) \\
& \left. - \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\theta_j - \alpha) + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha) - \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_{j-1}) + \frac{K_3}{3}.b_{j3} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_j) \right]
\end{aligned}$$

Conclui-se pois que $\lambda_{mi3} = 0$

A2.4. Avaliação da Integral da Equação [3.22] para λ_{mi4}

$$\lambda_{mi4} = -r.\ell.\sum \frac{Kh}{h} \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} \frac{b_j.FM}{2} \cdot \cos(\theta.(1-h) - \alpha + h.\theta_i).d\theta$$

Novamente, b_j não é constante em todo o intervalo de integração. Divide-se a integral em vários termos.

$$\begin{aligned} \lambda_{mi4} = & -\frac{r.\ell}{2} \cdot \left[FM_1.K_1 \cdot \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \frac{B_1 - B_0}{F_1 - F_0} \cdot \cos(\theta_i - \alpha).d\theta + \right. \\ & \frac{1}{3} \cdot FM_3.K_3 \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \frac{B_1 - B_0}{F_1 - F_0} \cdot \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta + \dots + FM_1.K_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} \cdot \cos(\theta_i - \alpha).d\theta + \\ & \frac{1}{3} \cdot FM_3.K_3 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} \cdot \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta + \dots + FM_1.K_1 \int_{\theta_N}^{\theta_{j-1}} \frac{B_N - B_{N-1}}{F_N - F_{N-1}} \cdot \cos(\theta_i - \alpha).d\theta \\ & \left. FM_3.K_3 \int_{\theta_N}^{\theta_{j-1}} \frac{B_N - B_{N-1}}{F_N - F_{N-1}} \cdot \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta \right] \end{aligned} \quad [A2.18]$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \lambda_{mi4} = & -\frac{r.\ell}{2} \cdot \left[b_1.FM_1.K_1 \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos(\theta_i - \alpha).d\theta + \frac{b_1}{3} \cdot FM_3.K_3 \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta \right. \\ & + \dots + b_2.FM_1.K_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta_i - \alpha).d\theta + \frac{b_2}{3} \cdot FM_3.K_3 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta + \dots + \\ & b_j.FM_1.K_1 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta_i - \alpha).d\theta + \frac{b_j}{3} \cdot FM_3.K_3 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta + \dots + \\ & \left. b_N.FM_1.K_1 \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos(\theta_i - \alpha).d\theta + \frac{b_N}{3} \cdot FM_3.K_3 \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i).d\theta \right] \end{aligned} \quad [A2.19]$$

A figura (A2.3) mostra a posição das áreas da integral acima:

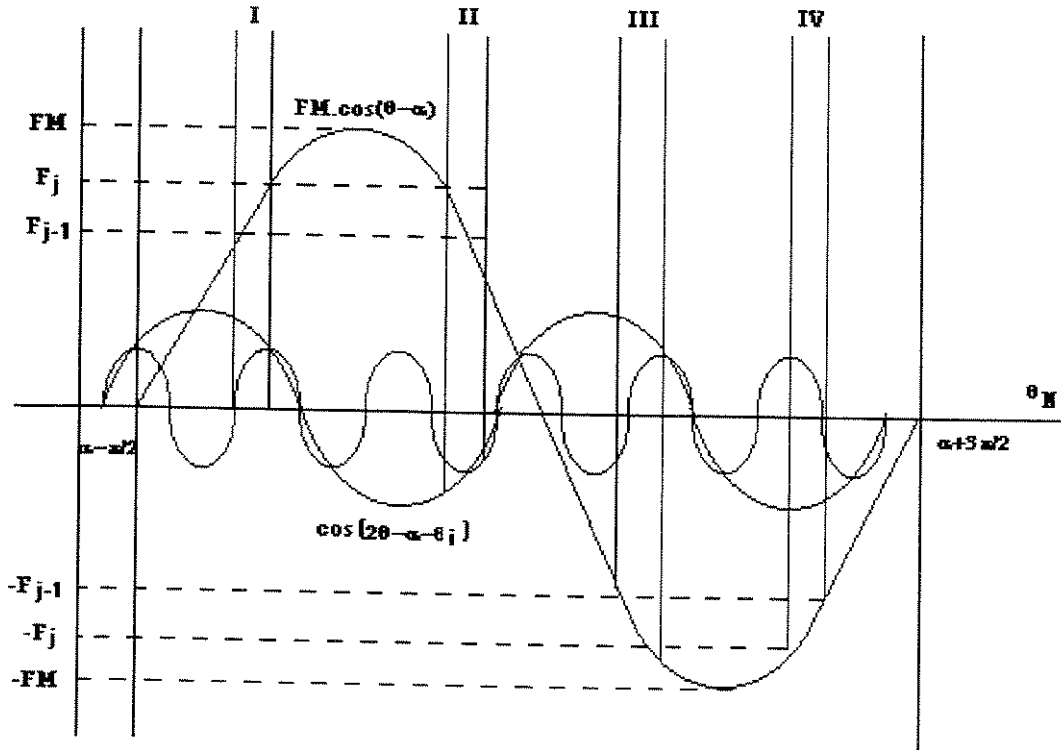


Figura (A2.3) - Posição das áreas da integral da equação [3.22].

Considerando os limites de integração para os quatro trechos da figura (A2.3) como:

Trecho I $\theta_{j-1} < \theta < \theta_j$

Trecho II $2\alpha - \theta_j < \theta < 2\alpha - \theta_{j-1}$

Trecho III $\pi + \theta_{j-1} < \theta < \pi + \theta_j$

Trecho IV $\pi + 2\alpha - \theta_j < \theta < \pi + 2\alpha - \theta_{j-1}$

Avaliando os coeficientes b_j para os trechos I e II, tem-se, a partir da figura (A2.3), um valor de b_j^+ dado pela relação.

$$b_j^+ = \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}}$$

Para os trechos III e IV, tem-se o valor de b_j calculados como valores de B e F substituídos por $(-B)$ e $(-F)$, assim:

$$b_j^- = \frac{(-B_0) - (-B_{j-1})}{(-F_j) - (-F_{j-1})} = \frac{-(B_j - B_{j-1})}{-(F_j - F_{j-1})}$$

Portanto:

$$b_j^- = b_j^+ = b_j$$

Então os valores de b_j são idênticos nos semicírculos positivo e negativo.

Seja agora a avaliação das integrais nos trechos de I e IV da figura (A2.3) para um determinado θ_j .

$$\begin{aligned} \lambda_{mi4} = & -\frac{r\ell}{2} \cdot \left[b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta_i - \alpha) \cdot d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \right. \\ & + b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta_i - \alpha) \cdot d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \\ & + b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos(\theta_i - \alpha) \cdot d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \\ & \left. + b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(\theta_i - \alpha) \cdot d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \right] = \\ & -\frac{r\ell}{2} \cdot \left[b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \cdot \cos(\theta_i - \alpha) \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta + \right. \\ & b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \cdot \cos(\theta_i - \alpha) \cdot \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \\ & + b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \cdot \cos(\theta_i - \alpha) \cdot \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \\ & \left. + b_{j1} \cdot FM_1 \cdot K_1 \cdot \cos(\theta_i - \alpha) \cdot \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} d\theta + \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \cos(-2\theta - \alpha + 3\theta_i) \cdot d\theta \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{r.\ell}{2} \left[b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3 \left[\text{sen}(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i) \right]_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \right] + \\
& b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3 \left[\text{sen}(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i) \right]_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \\
& + b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3 \left[\text{sen}(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i) \right]_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \\
& + b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3 \left[\text{sen}(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i) \right]_{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}}^{\pi + 2\alpha - \theta_j} = \\
& -\frac{r.\ell}{2} .b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(-2.\theta - \alpha + 3.\theta_i) + \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(-2.\theta_{j-1} - \alpha + 3.\theta_i) \\
& + b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(+2.\theta_{j-1} - 5.\alpha + 3.\theta_i) + \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(2.\theta_j - 5.\alpha + 3.\theta_i) \\
& + b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(-2.\theta_j - \alpha + 3.\theta_i) + \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(-2.\theta_{j-1} - \alpha + 3.\theta_i) \\
& + b_{j1}.FM_1.K_3.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] - \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(+2.\theta_{j-1} - 5.\alpha + 3.\theta_i) + \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3.\text{sen}(+2.\theta_j - 5.\alpha + 3.\theta_i) = \\
& -\frac{r.\ell}{2} .[4.b_{j1}.FM_1.K_1.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}] = -2.r.\ell.FM_1.K_1.b_{j1}.\cos(\theta_i - \alpha)[\theta_j - \theta_{j-1}]
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
& b_{j1}.FM_1.K_1 \left[\cos(\alpha - \theta_i) [\theta_j - \theta_{j-1}] \right] + \frac{b_{j3}}{6}.FM_3.K_3 \left[-2.\text{sen}(-2.\theta_j - \alpha + 3.\theta_i) \right. \\
& \left. + 2.\text{sen}(-2.\theta_{j-1} - \alpha + 3.\theta_i) - 2.\text{sen}(2.\theta_{j-1} - 5.\alpha + 3.\theta_i) + 2.\text{sen}(2.\theta_j - 5.\alpha + 3.\theta_i) \right]
\end{aligned}$$

Aplicando identidade trigonométrica

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2.\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \left[\sin(-2.\theta_{j-1} - \alpha + 3.\theta_i) - \sin(2.\theta_j - \alpha + 3.\theta_i) + \sin(2.\theta_j - 5.\alpha + 3.\theta_i) \right. \\
& \left. - \sin(2.\theta_{j-1} - 5.\alpha + 3.\theta_i) \right] = \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \left[2 \cdot \cos(-\theta_{j-1} - \alpha + 3.\theta_i) \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) + \right. \\
& \left. \cos(\theta_{j-1} - \theta_j - 5.\alpha + 3.\theta_i) \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \right] = \\
& 2 \cdot \frac{b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \left[\sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \left[\cos(-\theta_{j-1} - \theta_j - \alpha + 3.\theta_i) + \cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 5.\alpha + 3.\theta_i) \right] \right]
\end{aligned}$$

Aplicando identidade trigonométrica

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B &= 2 \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\frac{4.b_{j3}}{3} \cdot FM_3 \cdot K_3 \cdot \left[\sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(3.\theta_i - 3.\alpha) \cdot \cos(-\theta_{j-1} - \theta_j + 2.\alpha) \right]
\end{aligned}$$

Generalizando tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi4} &= -2.r.\ell.FM_1.K_1 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N b_{j1} \cdot [\theta_j - \theta_{j-1}] \\
&- \frac{2.r.\ell.FM_3}{3} \cdot K_3 \cdot \cos(3.\alpha - 3.\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \cos(\theta_{j-1} - \theta_j + 2.\alpha)
\end{aligned}$$

$$\theta_j = \alpha - \pi/2$$

$$\theta_N = \alpha$$

[A2.20]

A2.5. Avaliação da Integral da Equação [3.23] para λ_{mi5}

$$\lambda_{mi5} = -r.\ell. \sum \frac{Kh}{h} \int_{\alpha-\pi/2}^{\alpha+3\pi/2} \frac{b_j.FM}{2} \cdot \cos[\theta.(1+h) - \alpha - h.\theta_i] d\theta$$

Considerando que, b_j não é constante em todo o intervalo de integração. Divide-se a integral em vários termos.

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi5} = & -\frac{r.\ell}{2} .K_1 .FM_1 \left[\int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \frac{B_1 - B_0}{F_1 - F_0} .\cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \right. \\
& \frac{1}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \frac{B_1 - B_0}{F_1 - F_0} .\cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta + \dots + K_1 .FM_1 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} .\cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \\
& \frac{1}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{B_j - B_{j-1}}{F_j - F_{j-1}} .\cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta + \dots + K_1 .FM_1 \int_{\theta_N}^{\theta_{j-1}} \frac{B_N - B_{N-1}}{F_N - F_{N-1}} .\cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \\
& \left. \frac{1}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\theta_N}^{\theta_{j-1}} \frac{B_N - B_{N-1}}{F_N - F_{N-1}} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta \right]
\end{aligned}
\tag{A2.21}$$

Passando para:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi5} = & -\frac{r.\ell}{2} \left[b_1 .K_1 .FM_1 \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{1}{3} .b_3 .K_3 .FM_3 \int_{\alpha-\pi/2}^{\theta_1} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta \right. \\
& + b_{j1} .K_1 .FM_1 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{b_{j3}}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta + \dots + \\
& \left. b_{N1} .K_1 .FM_1 \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{b_{N3}}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\theta_{N-1}}^{\alpha+3\pi/2} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta \right]
\end{aligned}
\tag{A2.22}$$

Considerando a figura (A2.3) do item anterior e as mesmas considerações de b_j feita no item anterior com os mesmos limites de integração tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi5} = & -\frac{r.\ell}{2} \left[b_{j1} .K_1 .FM_1 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{b_{j3}}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta \right. \\
& b_{j1} .K_1 .FM_1 \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{b_{j3}}{3} .K_3 .FM_3 \int_{2\alpha-\theta_j}^{2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta + \\
& b_{j1} .K_1 .FM_1 \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{b_{j3}}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\pi+\theta_{j-1}}^{\pi+\theta_j} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta + \\
& \left. b_{j1} .K_1 .FM_1 \int_{\pi+2\alpha-\theta_j}^{\pi+2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(2.\theta - \alpha - \theta_i) .d\theta + \frac{b_{j3}}{3} .K_3 .FM_3 \int_{\pi+2\alpha-\theta_j}^{\pi+2\alpha-\theta_{j-1}} \cos(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) .d\theta \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{r.\ell}{2} \left[\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 \operatorname{sen}(2.\theta - \alpha - \theta_i) \right]_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} + \frac{b_{j3}}{12} .K_3.FM_3 \operatorname{sen}(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) \Big|_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \\
&\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 \operatorname{sen}(2.\theta - \alpha - \theta_i) \Big|_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} + \frac{b_{j3}}{12} .K_3.FM_3 \operatorname{sen}(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) \Big|_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} + \\
&\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 \operatorname{sen}(2.\theta - \alpha - \theta_i) \Big|_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} + \frac{b_{j3}}{12} .K_3.FM_3 \operatorname{sen}(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) \Big|_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \\
&\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 \operatorname{sen}(2.\theta - \alpha - \theta_i) \Big|_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} + \frac{b_{j3}}{12} .K_3.FM_3 \operatorname{sen}(4.\theta - \alpha - 3.\theta_i) \Big|_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \Big] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 [\operatorname{sen}(2.\theta_j - \alpha - \theta_i) - \operatorname{sen}(2.\theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) + \operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_{j-1} - \theta_i) \\
&- \operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_j - \theta_i) + \operatorname{sen}(2.\pi + 2.\theta_j - \alpha - \theta_i) - \operatorname{sen}(2.\pi + 2.\theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) \\
&+ \operatorname{sen}(2.\pi + 3.\alpha - 2.\theta_{j-1} - \theta_i) - \operatorname{sen}(2.\pi + 3.\alpha - 2.\theta_j - \theta_i)] + \\
&\frac{b_{j3}}{12} .K_3.FM_3 [\operatorname{sen}(4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i) - \operatorname{sen}(4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) + \operatorname{sen}(8.\alpha - 4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) \\
&- \operatorname{sen}(8.\alpha - 4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i) + \operatorname{sen}(4.\pi + 4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i) - \operatorname{sen}(4.\pi + 4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) \\
&+ \operatorname{sen}(4.\pi + 8.\alpha - 4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) - \operatorname{sen}(4.\pi + 8.\alpha - 4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i)] = \\
&\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 [\operatorname{sen}(2.\theta_j - \alpha - \theta_i) - \operatorname{sen}(2.\theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) + \operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_{j-1} - \theta_i) \\
&- \operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_j - \theta_i) + \operatorname{sen}(2.\theta_j - \alpha - \theta_i) + \operatorname{sen}(2.\theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) \\
&+ \operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_{j-1} - \theta_i) - \operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_j - \theta_i)] + \\
&\frac{b_{j3}}{12} .K_3.FM_3 [\operatorname{sen}(4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i) - \operatorname{sen}(4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) + \operatorname{sen}(-4.\theta_{j-1} + 7.\alpha - 3.\theta_i) \\
&- \operatorname{sen}(-4.\theta_{j-1} + 7.\alpha - 3.\theta_i) + \operatorname{sen}(4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i) - \operatorname{sen}(4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) \\
&+ \operatorname{sen}(-4.\theta_{j-1} + 7.\alpha - 3.\theta_i) - \operatorname{sen}(-4.\theta_{j-1} + 7.\alpha - 3.\theta_i)] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{b_{j1}}{2} .K_1.FM_1 [2.\operatorname{sen}(2.\theta_j - \alpha - \theta_i) - 2.\operatorname{sen}(2.\theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) - 2.\operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_{j-1} - \theta_i) \\
&- 2.\operatorname{sen}(3.\alpha - 2.\theta_j - \theta_i)] + \frac{b_{j3}}{12} [2.\operatorname{sen}(4.\theta_j - \alpha - 3.\theta_i) - 2.\operatorname{sen}(4.\theta_{j-1} - \alpha - 3.\theta_i) \\
&+ 2.\operatorname{sen}(-4.\theta_{j-1} + 7.\alpha - 3.\theta_i) - 2.\operatorname{sen}(-4.\theta_j + 7.\alpha - 3.\theta_i)]
\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2.\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& b_{ji} \cdot K_1 \cdot FM_1 \left[\sin(2\theta_j - \alpha - \theta_i) - \sin(2\theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) + \sin(3\alpha - 2\theta_{j-1} - \theta_i) \right. \\
& \left. - \sin(3\alpha - 2\theta_j - \theta_i) \right] + \frac{b_j}{6} \left[\sin(4\theta_j - \alpha - 3\theta_i) - \sin(4\theta_{j-1} - \alpha - 3\theta_i) \right. \\
& \left. + \sin(-4\theta_j + 7\alpha - 3\theta_i) - \sin(-4\theta_{j-1} + 7\alpha - 3\theta_i) \right] = \\
& b_{ji} \cdot K_1 \cdot FM_1 \left[2 \cdot \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \right. \\
& \left. + 2 \cdot \cos(-\theta_{j-1} - \theta_j + 3\alpha - \theta_i) \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \right] \\
& \frac{b_{ji}}{6} \cdot K_1 \cdot FM_1 \left[2 \cdot \cos(2\theta_j + 2\theta_{j-1} - \alpha - 3\theta_i) \sin(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \right. \\
& \left. + 2 \cdot \cos(-2\theta_{j-1} - 2\theta_j + 7\alpha - 3\theta_i) \sin(2\theta_{j-1} - 2\theta_j) \right] = \\
& + 2b_{ji} \cdot K_1 \cdot FM_1 \left[\sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \left[\cos(\theta_j + \theta_{j-1} - \alpha - \theta_i) + \cos(-\theta_{j-1} - \theta_j + 3\alpha - \theta_i) \right] \right] + \\
& \frac{b_{j3}}{3} \cdot K_3 \cdot FM_3 \left[\sin(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \left[\cos(2\theta_j - 2\theta_{j-1} - \alpha - 3\theta_i) + \cos(-2\theta_{j-1} - 2\theta_j + 7\alpha - 3\theta_i) \right] \right] =
\end{aligned}$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& 2b_{ji} \cdot K_1 \cdot FM_1 \left[2 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \right] \\
& \frac{b_{j3}}{3} \cdot K_3 \cdot FM_3 \left[2 \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \cos(2\theta_{j-1} + 2\theta_j - 4\alpha) \sin(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \right]
\end{aligned}$$

Generalizando tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi5} = & -2r\ell K_1 \cdot FM_1 \cdot \cos(\alpha - \theta_i) \sum_{j=1}^N b_{ji} \cdot \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2\alpha) \\
& - \frac{2r\ell FM}{3} \cdot K_3 \cdot FM_1 \cdot \cos(3\alpha - 3\theta_i) \sum_{j=1}^N b_{j3} \cdot \sin(2\theta_j - 2\theta_{j-1}) \cos(2\theta_j + 2\theta_{j-1} - 4\alpha)
\end{aligned}$$

onde:

$$\theta_j = \alpha - \pi/2$$

$$\theta_N = \alpha$$

[A2.23]

A2.6. Valor Final de λ_{mi}

$$\lambda_{mi} = \lambda_{mi1} + \lambda_{mi2} + \lambda_{mi3} + \lambda_{mi4} + \lambda_{mi5}$$

[A2.24]

$$\begin{aligned}
\lambda_{mi} = & -4.r.\ell.K_1.\cos(\alpha - \theta_i) \sum_{j=1}^N a_{j1} \left[\sin(\theta_j - \alpha) - \sin(\theta_{j-1} - \alpha) \right] \\
& - 2.r.\ell.K_1.FM_1.\cos(\alpha - \theta_i) \sum_{j=1}^N b_{j1} \left[\theta_j - \theta_{j-1} \right] \\
& - 2.r.\ell.FM_1.K_1.\cos(\alpha - \theta_i) \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_{j-1}) \cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2.\alpha) \\
& - r.\ell.\frac{K_3}{9}.\cos(3.\alpha - 3.\theta_i) \sum_{j=1}^N a_{j3} \left[\sin 3.(\theta_j - \alpha) - \sin 3.(\theta_{j-1} - \alpha) \right] \\
& - \frac{2.r.\ell.FM_3.K_3}{3}.\cos(3.\alpha - 3.\theta_i) \sum_{j=1}^N b_{j3} \sin(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1}) \cos(2.\theta_{j-1} - 2.\theta_j - 2.\alpha) \\
& - \frac{2.r.\ell.FM_3.K_3}{3}.\cos(3.\alpha - 3.\theta_i) \sum_{j=1}^N b_{j3} \sin(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1}) \cos(2.\theta_{j-1} + 2.\theta_j - 4.\alpha) \\
\theta_j = & \alpha - \pi/2 \\
\theta_N = & \alpha
\end{aligned} \tag{A2.25}$$

ANEXO 3

DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DO CONJUGADO

A3.1. Elementos do Equacionamento

Tomando como base a equação abaixo

$$T_i \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} dT_i$$

tem-se

$$T_i = r.l.i_i(t) \left[\int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} a_j \cdot \eta_i(\theta) d\theta + \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} b_j \cdot FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot \eta_i(\theta) d\theta \right]$$

Dividindo a equação anterior em duas equações tem-se:

$$I_1 = \sum Kh \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} a_j \cdot \text{sen}[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \quad [A3.1]$$

$$I_2 = \sum Kh \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_R + 2\pi} b_j \cdot FM \cdot \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}[h \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \quad [A3.2]$$

Pode-se reescrever I_1 como:

$$\begin{aligned} I_1 = K_1 & \left[a_1 \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_1} \text{sen}(\theta - \theta_i) d\theta + a_2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_R + 2\pi} \text{sen}(\theta - \theta_i) d\theta + \dots \right. \\ & a_j \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \text{sen}(\theta - \theta_i) d\theta + \dots + a_N \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\theta_R + 2\pi} \text{sen}(\theta - \theta_i) d\theta \left. \right] + K_3 \cdot \left[a_1 \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_1} \text{sen}[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right. \\ & + a_2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_R + 2\pi} \text{sen}[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta + \dots + a_j \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \text{sen}[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \\ & \left. + \dots + a_N \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\theta_R + 2\pi} \text{sen}[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right] \end{aligned} \quad [A3.3]$$

Para os quatro trechos definidos nas relações [A.2.3] considerando $(a_j^+ = -a_j^- = a_j)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
I_1 = & K_1 \left[a_{j1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \sin(\theta - \theta_i) \cdot d\theta + a_{j1} \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \sin(\theta - \theta_i) \cdot d\theta - a_{j1} \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \sin(\theta - \theta_i) \cdot d\theta \right. \\
& \left. - a_{j1} \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \sin(\theta - \theta_i) \cdot d\theta \right] + K_3 \left[a_{j3} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \sin[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta + a_{j3} \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \sin[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right. \\
& \left. - a_{j3} \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \sin[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta - a_{j3} \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \sin[3 \cdot (\theta - \theta_i)] d\theta \right] = \\
& a_{j1} \cdot K_1 \cdot \left[-\cos(\theta - \theta_i) \Big|_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} - \cos(\theta - \theta_i) \Big|_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} + \cos(\theta - \theta_i) \Big|_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \right. \\
& \left. \cos(\theta - \theta_i) \Big|_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \right] + \frac{a_{j3} \cdot K_3}{3} \cdot \left[\cos[3 \cdot (\theta - \theta_i)] \Big|_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} - \cos[3 \cdot (\theta - \theta_i)] \Big|_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \right. \\
& \left. + \cos[3 \cdot (\theta - \theta_i)] \Big|_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} + \cos[3 \cdot (\theta - \theta_i)] \Big|_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \right] = a_{j1} \cdot K_1 \cdot [-\cos(\theta_j - \theta_i) \\
& + \cos(\theta_{j-1} - \theta_i) - \cos(-\theta_{j-1} + 2\alpha - \theta_i) + \cos(-\theta_j + 2\alpha - \theta_i) + \cos(\pi + \theta_j - \theta_i) \\
& - \cos(\pi + \theta_{j-1} - \theta_i) + \cos(\pi + 2\alpha - \theta_{j-1} - \theta_i) - \cos(\pi + 2\alpha - \theta_j - \theta_i)] \\
& + \frac{a_{j3} \cdot K_3}{3} \cdot [-\cos(3\theta_j - 3\theta_i) + \cos(3\theta_{j-1} - 3\theta_i) - \cos(6\alpha - 3\theta_{j-1} - 3\theta_i) \\
& + \cos(6\alpha - 3\theta_j - 3\theta_i) + \cos(3\pi + 3\theta_j - 3\theta_i) \\
& - \cos(3\pi + 3\theta_{j-1} - 3\theta_i) + \cos(3\pi + 6\alpha - 3\theta_{j-1} - 3\theta_i) \\
& - \cos(6\alpha - 3\theta_{j-1} - 3\theta_i) + \cos(6\alpha - 3\theta_j - 3\theta_i)] = a_{j1} \cdot K_1 \cdot -2 \cdot \cos(\theta_j - \theta_i) \\
& + \cos(\theta_j - \theta_i) - 2 \cdot \cos(-\theta_{j-1} + 2\alpha - \theta_i) + 2 \cdot \cos(-\theta_j + 2\alpha - \theta_i)] \\
& + \frac{a_{j3} \cdot K_3}{3} \cdot [-2 \cdot \cos(3\theta_j - 3\theta_i) + 2 \cdot \cos(3\theta_{j-1} - 3\theta_i) \\
& - 2 \cdot \cos(-3\theta_{j-1} + 6\alpha - 3\theta_i) + 2 \cdot \cos(-3\theta_j + 6\alpha - 3\theta_i)] = \\
& -2 \cdot a_{j1} \cdot K_1 \cdot \cos(\theta_j - \theta_i) - \cos(\theta_{j-1} - \theta_i) + \cos(-\theta_{j-1} + 2\alpha - \theta_i) \\
& - \cos(-\theta_j + 2\alpha - \theta_i)] \frac{2 \cdot a_{j3} \cdot K_3}{3} \cdot [\cos(3\theta_j - 3\theta_i) - \cos(3\theta_{j-1} - 3\theta_i) + \\
& + \cos(-3\theta_{j-1} + 6\alpha - 3\theta_i) - \cos(-3\theta_j + 6\alpha - 3\theta_i)]
\end{aligned}$$

[A3.4]

Através dos resultados obtidos na equação [A3.4] pode-se retomar as integrais.

$$\begin{aligned}
&= -2.a_{j1}.K_1.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \theta_i).d\theta - \int_{\theta_j}^{\theta_{j-1}} \cos(2.\alpha - \theta - \theta_i).d\theta + \\
&- \frac{2.a_{j3}.K_3}{3}.\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(3.\theta - 3.\theta_i).d\theta - \int_{\theta_j}^{\theta_{j-1}} \cos(-3.\theta + 6.\alpha - 3.\theta_i).d\theta = \\
&- 2.a_{j1}.K_1.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [\cos(\theta - \theta_i) + \cos(2.\alpha - \theta - \theta_i)]d\theta\right] + \\
&- \frac{2.a_{j3}.K_3}{3}.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} [\cos(3.\theta - 3.\theta_i) + \cos(6.\alpha - 3.\theta - 3.\theta_i)]d\theta\right] + \\
&- 2.a_{j1}.K_1.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} 2.\cos(\alpha - \theta_i).\cos(\theta - \alpha).d\theta\right] + \\
&- \frac{2.a_{j3}.K_3}{3}.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} 2.\cos(3.\alpha - 3.\theta_i).\cos(3.\alpha - 3.\theta_i).d\theta\right] = \\
&- 4.a_{j1}.K_1.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \text{sen}(\alpha - \theta_i).\cos(\theta - \alpha).d\theta\right] \\
&- \frac{2.a_{j3}.K_3}{3}.\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(3.\alpha - 3.\theta_i).\cos(3.\theta - 3.\alpha).d\theta\right] \\
&= -4.a_{j1}.K_1.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha).d\theta \\
&- \frac{4.a_{j3}.K_3}{3}.\cos(3.\alpha - 3.\theta_i).\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} (3.\theta - 3.\alpha).d\theta \\
&= -4.a_{j1}.K_1.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\left[\text{sen}(\theta_j - \alpha) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha)\right] - \\
&- \frac{4.a_{j3}.K_3}{3}.\left[\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\text{sen}(3.\theta_j + 3.\alpha) - \text{sen}(3.\theta_{j-1} + 3.\alpha)\right]
\end{aligned}$$

[A3.5]

Generalizando a equação [A3.5] tem-se:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -4.K.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\sum_{j=1}^N a_{j1}.\left[\text{sen}(\theta_j - \alpha) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha)\right] \\
&- \frac{4.K_3}{3}.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\sum_{j=1}^N a_{j3}.\left[\text{sen}(3.\theta_j - 3.\alpha) - \text{sen}(3.\theta_{j-1} - 3.\alpha)\right]
\end{aligned}$$

[A3.6]

onde:

$$\theta_0 = \theta_R$$

$$\theta_N = \theta_R + \pi/2$$

Avaliando a equação [A3.2] tem-se:

$$\begin{aligned}
I_2 = & FM.K_1 \left[b_1 \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}(\theta - \theta_i) \cdot d\theta + b_2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}(\theta - \theta_i) \cdot d\theta + \dots + \right. \\
& b_j \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}(\theta - \theta_i) \cdot d\theta + \dots + b_N \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\theta_R} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}(\theta - \theta_i) \cdot d\theta \left. \right] + \\
& + FM.K \left[b_1 \cdot \int_{\theta_R}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta + b_2 \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta + \dots + \right. \\
& b_j \cdot \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta + \dots + b_N \cdot \int_{\theta_{N-1}}^{\theta_R} \cos(\theta - \alpha) \cdot \text{sen}[h \cdot (\theta - \theta_i)] \cdot d\theta \left. \right]
\end{aligned}$$

[A3.7]

Considerando os trechos de I_2 em que b_j é o mesmo tem-se:

$$\begin{aligned}
I_2 = & FM_1.K_1 \cdot b_{j1} \cdot \left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta - \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \right] \cdot d\theta \right] + \\
& \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta - \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \right] \cdot d\theta + \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \theta - \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \right] \cdot d\theta \\
& \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta - \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \right] \cdot d\theta \left. \right] + FM_3.K_3 \cdot b_{j3} \cdot \left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) + \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(4 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) \right] \cdot d\theta + \int_{2\alpha - \theta_j}^{2\alpha - \theta_{j-1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(4 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) \right] \cdot d\theta + \\
& \int_{\pi + \theta_{j-1}}^{\pi + \theta_j} \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(4 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) \right] \cdot d\theta + \\
& \left. \int_{\pi + 2\alpha - \theta_j}^{\pi + 2\alpha - \theta_{j-1}} \left[\frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(4 \cdot \theta - 3 \cdot \theta_i - \alpha) \right] \cdot d\theta \right] = \\
& \frac{b_{j1}}{2} \cdot FM_1.K_1 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot [\cos(2 \cdot \theta_j - \theta_i - \alpha) - \cos(2 \cdot \theta_{j-1} - \theta_i - \alpha)] + (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \right. \\
& - \frac{1}{2} \cdot [\cos(4 \cdot \alpha - 2 \cdot \theta_j - \theta_i - \alpha) - \cos(4 \cdot \alpha - \theta_j - \theta_i - \alpha)] + (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \\
& - \frac{1}{2} \cdot [\cos(2 \cdot \pi + 2 \cdot \theta_j - \theta_j - \alpha) - \cos(2 \cdot \pi + 2 \cdot \theta_{j-1} - \theta_j - \alpha)] + (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) \\
& - \frac{1}{2} \cdot [\cos(2 \cdot \pi + 4 \cdot \alpha - 2 \cdot \theta_{j-1} - \alpha) - \cos(2 \cdot \pi + 4 \cdot \alpha - \theta_i - \alpha)] + (\theta_j - \theta_{j-1}) \cdot \text{sen}(\alpha - \theta_i) + \\
& \left. \frac{b_{j3}}{2} \cdot K_3 \cdot FM_3 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot [\cos(2 \cdot \theta_j - 3 \cdot \theta_i + \alpha) - \cos(2 \cdot \theta_{j-1} - 3 \cdot \theta_i + \alpha)] - \frac{1}{4} \cdot [\cos(4 \cdot \theta_j - 3 \cdot \theta_i - \alpha) - \right. \right. \\
& - \cos(4 \cdot \theta_{j-1} - 3 \cdot \theta_i - \alpha)] - \frac{1}{2} \cdot [\cos(4 \cdot \alpha - 2 \cdot \theta_{j-1} - 3 \cdot \theta_i + \alpha) - \cos(4 \cdot \alpha - 2 \cdot \theta_j - 3 \cdot \theta_i + \alpha)] \\
& \left. - \frac{1}{4} \cdot [\cos(8 \cdot \alpha - 4 \cdot \theta_{j-1} - 3 \cdot \theta_i - \alpha) - \cos(8 \cdot \alpha - 4 \cdot \theta_j - 3 \cdot \theta_i - \alpha)] - \frac{1}{2} \cdot [\cos(2 \cdot \pi + 2 \cdot \theta_j - 3 \cdot \theta_i + \alpha) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos(2.\pi + 2.\theta_{j-1} - 3.\theta_i + \alpha) \Big] - \frac{1}{4} [\cos(4.\pi + 4.\theta_j - 3.\theta_i - \alpha) - \cos(4.\pi + 4.\theta_j - 3.\theta_i - \alpha)] \\
& - \frac{1}{2} [\cos(2.\pi + 4.\alpha - 2.\theta_{j-1} - 3.\theta_i + \alpha) - \cos(2.\pi + 4.\alpha - 2.\theta_j - 3.\theta_i + \alpha)] - \\
& - \frac{1}{4} [\cos(4.\pi + 8.\alpha - 4.\theta_{j-1} - 3.\theta_i - \alpha) - \cos(4.\pi + 8.\alpha - 4.\theta_{j-1} - 3.\theta_i - \alpha)] = \\
& - \frac{b_j.FM_1.K_1}{2} \cdot \{ -\cos(2.\theta_j - \theta_i - \alpha) + \cos(2.\theta_{j-1} - \theta_i - \alpha) - \cos(3.\alpha - 2.\theta_{j-1} - \theta_i) + \\
& + \cos(3.\alpha - 2.\theta_j - \theta_i) + 4.(\theta_j - \theta_{j-1})\text{sen}(\alpha - \theta_i) \} \\
& - \frac{b_j.K_1.FM_1}{2} \cdot \left\{ -\cos(2.\theta_j - 3.\theta_i + \alpha)\cos(2.\theta_{j-1} - 3.\theta_i + \alpha) - \frac{1}{2}.\cos(4.\theta_j - 3.\theta_i - \alpha) \right. \\
& + \frac{1}{2}.\cos(4.\theta_{j-1} - 3.\theta_i - \alpha) - \cos(4.\alpha - 2.\theta_{j-1} - 3.\theta_i + \alpha) + \cos(4.\alpha - 2.\theta_j - 3.\theta_i + \alpha) \\
& \left. - \frac{1}{2}.\cos(8.\alpha - 4.\theta_{j-1} - 3.\theta_i + \alpha) + \frac{1}{2}.\cos(8.\alpha - 4.\theta_j - 3.\theta_i + \alpha) \right\}
\end{aligned}$$

Retornando as integrais tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{b_{j1}.FM_1.K_1}{2} \cdot \left\{ -\int_{\theta_j}^{\theta_{j-1}} \text{sen}(2.\theta - \theta_i - \alpha).d\theta \int_{\theta_j}^{\theta_{j-1}} (-2.\theta - \theta_i + 3.\alpha)d\theta + \right. \\
& 4.(\theta_j - \theta_{j-1})\text{sen}(\alpha - \theta_i) + \frac{b_{j3}.K_3.FM_3}{2}.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\text{sen}(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1})\cos(-2.\theta_j - 2.\theta_{j-1} + \alpha) + \\
& \left. + -4.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 2.\alpha) \right\} \\
& = -\frac{b_{j1}.FM_1.K_1}{2} \cdot \{ 2.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\text{sen}(2.\theta_j - 2.\alpha) + 2.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\text{sen}(2.\alpha - 2.\theta_{j-1}) \\
& + 4.(\theta_j - \theta_{j-1})\text{sen}(\alpha - \theta_i) \} + \frac{b_{j3}.K_3.FM_3}{2} \cdot \{ \text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\text{sen}(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1})\cos(-2.\theta_j - 2.\theta_{j-1} + 4.\alpha) \\
& + 4.\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 2.\alpha) \} \\
& = +b_{j1}.FM_1.K_1 \cdot \{ \text{sen}(\alpha - \theta_i) [2.\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2.\alpha) + 2.(\theta_j - \theta_{j-1})] \} + \\
& + \frac{b_{j3}.K_3.FM_3}{2} \cdot \{ 2.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\text{sen}(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1})\cos(-2.\theta_j - 2.\theta_{j-1} + 4.\alpha) + \\
& 4.\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 2.\alpha) \}
\end{aligned}$$

Portanto I_2 será:

$$\begin{aligned} I_2 = & +2.FM_1.K_1.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\sum_{j=1}^N b_{j1}.\left[\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2.\alpha)\right. \\ & \left.+ 2(\theta_j - \theta_{j-1})\right] - \frac{K_3.FM_3}{2}.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\sum_{j=1}^N b_{j3}.\left[2.\text{sen}(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1})\cos(-2.\theta_j - 2.\theta_{j-1} + 4.\alpha)\right. \\ & \left.+ 4.\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2.\alpha)\right] \end{aligned}$$

[A3.9]

tem-se então que:

$$T_i = I_1 + I_2$$

Portanto tem-se:

$$\begin{aligned} T_i = & K_1.r.\ell.i_i(t)\left\{-4.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\sum_{j=1}^N a_{j1}.\left[\text{sen}(\theta_j - \alpha) - \text{sen}(\theta_{j-1} - \alpha)\right]\right. \\ & \left.- 2.FM_1.\text{sen}(\alpha - \theta_i).\sum_{j=1}^N b_{j1}.\left[\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_j + \theta_{j-1} - 2.\alpha) + 2(\theta_j - \theta_{j-1})\right]\right. \\ & \left.+ K_3.r.\ell.i_i(t)\left\{-\frac{4}{3}.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\sum_{j=1}^N a_{j3}.\left[\text{sen}(3.\theta_j - 3.\alpha) - \text{sen}(3.\theta_{j-1} - 3.\alpha)\right]\right.\right. \\ & \left.- \frac{FM_3}{2}.\text{sen}(3.\alpha - 3.\theta_i).\sum_{j=1}^N b_{j3}.\left[2.\text{sen}(2.\theta_j - 2.\theta_{j-1})\cos(-2.\theta_j - 2.\theta_{j-1} + 4.\alpha)\right]\right. \\ & \left.\left.+ -4.\text{sen}(\theta_j - \theta_{j-1})\cos(\theta_{j-1} + \theta_j - 2.\alpha)\right\}\right\} \end{aligned}$$

[A3.10]