



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Osmar Tormena Júnior

Exploração da Diversidade de Polarização por meio da Álgebra de Quatérnions na Melhoria de Sistemas MIMO-OFDM

Campinas

2020

Osmar Tormena Júnior

Exploração da Diversidade de Polarização por meio da Álgebra de Quatérnions na Melhoria de Sistemas MIMO-OFDM

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, na Área de Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Geraldo Pedroso Meloni

Este trabalho corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Osmar Tormena Júnior, e orientada pelo Prof. Dr. Luís Geraldo Pedroso Meloni.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

T632e Tormena Júnior, Osmar, 1986-
Exploração da diversidade de polarização por meio de álgebra de quatérnions na melhoria de sistemas MIMO-OFDM / Osmar Tormena Júnior. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Luís Geraldo Pedroso Meloni.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Multiplexação por divisão de frequência ortogonal. 2. Sistema de posicionamento global. 3. Polarização (Eletricidade). 4. Quatérnions. I. Meloni, Luís Geraldo Pedroso, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Exploiting polarization diversity through quaternion algebra for improving MIMO-OFDM systems

Palavras-chave em inglês:

Orthogonal frequency division multiplexing

Global positioning system

Polarization (Electricity)

Quaternions

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

Luís Geraldo Pedroso Meloni [Orientador]

Paulo Cardieri

Reginaldo Palazzo Júnior

Rui Seara

Cristiano Akamine

Data de defesa: 30-10-2020

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-5975-6000>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4000544340307774>

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Osmar Tormena Júnior RA: 180863

Data de defesa: 30 de OUTUBRO de 2020

Título da Tese: “Exploração da Diversidade de Polarização por meio da Álgebra de Quatérnions na Melhoria de Sistemas MIMO-OFDM”

Prof. Dr. Luís Geraldo Pedroso Meloni (Presidente)

Prof. Dr. Paulo Cardieri

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior

Prof. Dr. Rui Seara

Prof. Dr. Cristiano Akamine

A Ata de Defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no SIGA (Sistema de Fluxo de Tese) e na Secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

*Este trabalho é dedicado à minha família, de quem sem o apoio,
ele jamais teria sido concluído. Também o dedico a todos os meus
educadores, que juntos, construímos uma jornada de 25 anos de formação.*

Agradecimentos

Agradeço primeiro a Deus, cuja fé me manteve firme nos propósitos que tracei para minha vida, mesmo nos momentos de maior dúvida e adversidade.

Agradeço também minha família: minha esposa Marcela, que por 13 anos caminha ao meu lado em nossa história, e meus filhos, Pedro Lucas e Heitor, que foram muito além do que é razoável esperar, para crianças de suas idades, na contribuição com os compromissos de trabalho e estudo do seu pai.

Agradeço aos meus pais, Osmar e Maria Aparecida, por um apoio e incentivo que me acompanham desde o berço. Dentro de suas possibilidades, me deram tudo que eu precisei, para minha construção pessoal e profissional.

Agradeço ao meu Orientador, o Prof. Meloni, com quem planejo manter uma relação de produtividade acadêmica muito além do fim deste doutoramento. Com ele, aperfeiçoei uma ferramenta que define a vida de um professor-pesquisador, que é a habilidade de dividir meu tempo entre uma pluralidade de tarefas. Aproveito fazer menção ao meu colega de doutorado, no mesmo grupo de pesquisa, José Luis, cuja sinergia e suporte mútuo foram muito importantes para o bom andamento das atividades de pesquisa.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de agradecer a todos os meus pares na UTFPR, em especial, meus amigos do DAELN. Sem o apoio e a compreensão de cada um deles, não seria possível desenvolver as atividades deste doutoramento, ao mesmo tempo que mantendo em dia meus compromissos laborais. Também estendo meus agradecimentos especiais ao Prof. Roberto Neli, que de livre iniciativa, foi o catalisador para o programa DINTER que estou incluso. Também faço menção ao Prof. Heron, gestor de nosso campus, cujo apoio foi certo desde o primeiro momento.

*“The aim of science is to make difficult things
understandable in a simpler way;
the aim of poetry is to state simple things
in an incomprehensible way.
The two are incompatible.”
Paul Dirac*

Resumo

Neste trabalho é explorada uma expansão de sistemas de comunicação *Multiple-Input and Multiple-Output Orthogonal Frequency-Division Multiplexing* — Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas Multiplexação por Divisão Ortogonal em Frequência (MIMO-OFDM), incluindo a diversidade de polarização, através da álgebra de quatérnions. A utilização da álgebra de quatérnions permite melhorias no desempenho em diversas métricas do sistema de comunicações. Sistemas *Multiple-Input and Multiple-Output* — Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas (MIMO) baseados em *Space-Time Block Code* — Código de Bloco Espaço-Temporal (STBC) tradicionais, i.e. projetos ortogonais complexos, possuem seu desempenho limitado quando são usadas mais de duas antenas transmissoras. O mesmo não ocorre em projetos ortogonais quaterniônicos, permitindo ganhos de diversidade maiores, sem comprometer a complexidade do receptor. A exploração da diversidade de polarização também se mostrou benéfica na estimação da *Symbol Time Offset* — Deslocamento do Tempo de Símbolo (STO) e *Carrier Frequency Offset* — Deslocamento da Frequência de Portadora (CFO), para sincronismo *Orthogonal Frequency-Division Multiplexing* — Multiplexação por Divisão Ortogonal em Frequência (OFDM). Nesta pesquisa, dois métodos de sincronismo, um baseado em símbolo de treinamento, o outro, em prefixo cíclico, são generalizados para a álgebra de quatérnions, atingindo vantagens significativas em relação ao caso complexo. Finalmente, é estudada a melhoria na precisão obtida para serviços de localização, no modelo *Observed Time Difference of Arrival* — Diferença Observada no Tempo de Chegada (OTDoA), conforme implementado pelo *Positioning Reference Signal* — Sinal para Referência de Posicionamento (PRS) nos padrões *Long Term Evolution* — Evolução de Longo Prazo (LTE), para um sistema generalizado para sinais polarizados. Para condições de boa *Signal-to-Noise Ratio* — Razão Sinal-Ruído (SNR), é observado uma melhoria de 2,5 m no desvio padrão da estimação, entre o sistema proposto, e a implementação proposta no padrão LTE e *5G New Radio* — Novo Rádio 5G (5G NR).

Palavras-chaves: Multiplexação por divisão de frequência ortogonal. Sistema de posicionamento global. Polarização (Eletricidade). Quatérnions.

Abstract

An expansion of [MIMO-OFDM](#) in communication systems, including polarization diversity, is explored in this work through the use of quaternion algebra. The use of quaternion algebra allows improvements over a number of performance figures. Traditional [STBC](#) based [MIMO](#) communication systems, based on orthogonal designs, have some inherent limitations, apparent when more than two transmitting antennas are in use. The same caveats are not present for quaternion orthogonal designs, allowing greater diversity gains, without compromising the receiver complexity. The use of polarization diversity presents benefits for [STO](#) and [CFO](#) estimation on [OFDM](#) synchronization also. This research presents two approaches for synchronism estimation, one based on training symbols and the other based on cyclic prefix. Both of them are generalized to quaternion algebra, attaining substantive improvements over the complex case. Lastly, the accuracy of [OTDoA](#) based location estimation, through the use of [PRS](#) in [LTE](#) systems is also compared to a proposed polarized system. An improvement of up to 2.5 m is observed, in good [SNR](#) conditions, between the proposed generalization, and the current [LTE](#) and [5G NR](#) approaches.

Keywords: Orthogonal frequency division multiplexing. Global positioning system. Polarization (Electricity). Quaternions.

Lista de ilustrações

Figura 2.1 – Exemplos de <i>probability density function</i> — função densidade de probabilidade (p.d.f.) ilustrando os conceitos de propriedade e circularidade. Os gráficos foram calculados com $\sigma_Y = 1,0$, nas seguintes situações: (a) $\rho = 0,6$ e $\sigma_X = 1,2$; (b) $\rho = 0,0$ e $\sigma_X = 1,2$; (c) $\rho = 0,6$ e $\sigma_X = 1,0$; (a) $\rho = 0,0$ e $\sigma_X = 1,0$. As curvas de nível representam valores da $f_{XY}(x, y)$ de 0,01, 0,03, ..., 0,15.	42
Figura 3.1 – Sistema de comunicação <i>Single-Input and Multiple-Output</i> — Única-Entrada e Múltiplas-Saídas (SIMO) com uma antena transmissora e N_R antenas receptoras.	53
Figura 3.2 – Sistema de comunicação <i>Multiple-Input and Single-Output</i> — Múltiplas-Entradas e Única-Saída (MISO) com N_T antenas transmissoras e uma antena receptora.	54
Figura 3.3 – Sistema de comunicação MIMO com N_T antenas transmissoras e N_R antenas receptoras.	55
Figura 3.4 – Diagrama de blocos representando um modulador OFDM simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.	64
Figura 3.5 – Diagrama de blocos representando um demodulador OFDM simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.	65
Figura 3.6 – Inserção de <i>Cyclic Prefix</i> — Prefixo Cíclico (CP) nos símbolos para modulação OFDM.	67
Figura 3.7 – Sistema OFDM com $N = 32$ subportadoras, das quais $N_{VC} = 10$ são <i>Virtual Carriers</i> — Portadoras Virtuais (VC)s. As VCs são representadas pelos pulsos pontilhados, enquanto as $N - N_{VC} = 22$ portadoras úteis são representadas pelas linhas sólidas.	68
Figura 3.8 – Possíveis efeitos da falta de sincronismo na STO. As regiões cinza representam CPs de símbolos subsequentes. O triângulo preto representa a duração da resposta ao impulso do canal.	70
Figura 3.9 – Efeito da <i>Inter-Carrier Interference</i> — Interferência Entre Portadoras (ICI) sobre as subportadoras, causada pela falta de sincronismo da CFO.	72
Figura 3.10–Sequência de símbolos OFDM de duração $N + N_G$ com CP. Os primeiros símbolos de cada <i>frame</i> y_0 e y_1 são símbolos de treinamento idênticos, conhecidos no receptor.	75
Figura 3.11–Intervalo de observação para sincronismo OFDM da STO e CFO baseado em CP.	76

Figura 4.1 – Organização temporal de um <i>frame</i> LTE Tipo 1 (para <i>Frequency-Division Duplexing</i> — Duplexagem por Divisão em Frequência (FDD)) com <i>slots</i> enumerados de 0 a 19, evidenciando a hierarquia de <i>subframes</i> .	80
Figura 4.2 – Organização temporal de um <i>frame</i> LTE Tipo 2 (para <i>Time-Division Duplexing</i> — Duplexagem por Divisão no Tempo (TDD)) com <i>slots</i> enumerados de 0 a 19, evidenciando a hierarquia de <i>subframes</i> .	81
Figura 4.3 – Mapa de recursos para um único <i>slot</i> LTE, considerando CP normal.	83
Figura 4.4 – Disposição dos símbolos OFDM com CP (preenchidos de cinza) de comprimento normal em um <i>slot</i> .	84
Figura 4.5 – Disposição dos símbolos OFDM com CP (preenchidos de cinza) de comprimento estendido e separação de subportadoras de 15 kHz em um <i>slot</i> .	84
Figura 4.6 – Disposição dos símbolos OFDM com CP (preenchidos de cinza) de comprimento estendido e separação de subportadoras de 7,5 kHz em um <i>slot</i> .	85
Figura 4.7 – Constelações <i>Binary Phase-Shift Keying</i> — Modulação por Deslocamento Binário de Fase (BPSK) (a) e <i>Quadrature Phase-Shift Keying</i> — Chaveamento por Deslocamento de Fase em Quadratura (QPSK) (b) com valores binários representados para os componentes em fase e em quadratura.	86
Figura 4.8 – Constelação 16- <i>Quadrature Amplitude Modulation</i> — Modulação de Amplitude em Quadratura (QAM) com valores binários representados em hexadecimal nos componente em fase e quadratura.	86
Figura 4.9 – Constelação 64-QAM com valores binários representados em hexadecimal nos componente em fase e quadratura.	87
Figura 4.10 – Exemplo de mapeamento do PRS e <i>Cell-specific Reference Signal</i> — Sinal de Referência Específico da Célula (CRS) para um <i>subframe</i> de localização. Apenas dois blocos de recursos são exibidos (um para cada <i>slot</i>).	89
Figura 4.11 – Mapa de recursos para o <i>downlink</i> LTE, <i>Reference Measurement Channel</i> — Canal de Referência de Medidas (RMC) R.4 FDD.	90
Figura 4.12 – Hipérbole definida por uma medida de OTDoA. Devido a incertezas nas medidas, o <i>User Equipment</i> — Equipamento de Usuário (UE) pode estar localizado em qualquer ponto no plano nas vizinhanças da hipérbole.	93
Figura 5.1 – Diagrama de blocos representando um modulador <i>Quaternionic Orthogonal Frequency-Division Multiplexing</i> — Multiplexação por Divisão Ortogonal Quaterniônica em Frequência (QOFDM) simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.	95

Figura 5.2 – Diagrama de blocos representando um demodulador QOFDM simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos. . . .	95
Figura 5.3 – Sequência de símbolos QOFDM de duração $N + N_G$ com CP. Os primeiros símbolos de cada <i>frame</i> y_0 e y_1 são símbolos de treinamento idênticos, conhecidos no receptor.	97
Figura 5.4 – Intervalo de observação para sincronismo QOFDM da STO e CFO baseado em CP.	99
Figura 6.1 – Comparação de desempenho entre sistemas MIMO-OFDM em relação ao sistema <i>Multiple-Input and Multiple-Output Quaternion Orthogonal Frequency-Division Multiplexing</i> — Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas Multiplexação por Divisão Ortogonal Quaterniônica em Frequência (MIMO-QOFDM) proposto. Foi considerado um canal Rayleigh com símbolos QPSK.	104
Figura 6.2 – Comparação de desempenho do sistema MIMO-QOFDM proposto para um canal COST207 <i>Typical Urban</i> — Urbano Típico (TU), com diferentes níveis de seletividade no tempo e na frequência.	106
Figura 6.3 – Comparação de desempenho do sistema MIMO-QOFDM proposto para um canal COST207 TU, comparando a seletividade em frequência e a seletividade no tempo para desvios Doppler típicos para veículos em alta velocidade.	107
Figura 6.4 – <i>Mean Squared Error</i> — Erro Quadrático Médio (MSE) da estimação da CFO pelo método de Moose comparada à sua generalização para sinais polarizados quaterniônicos.	108
Figura 6.5 – Variância da estimação da STO, em função da SNR, para OFDM complexa e quaterniônica. As marcas preenchidas representam os pontos de Monte Carlo escolhidos para a obtenção do ajuste linear.	110
Figura 6.6 – Variância da estimação da CFO, em função da SNR, para OFDM complexa e quaterniônica. As marcas preenchidas representam os pontos de Monte Carlo escolhidos para a obtenção do ajuste linear.	111
Figura 6.7 – Variância da estimativa do OTDoA, escalada pela velocidade da luz no vácuo, em função da SNR, para sinais polarizados e não-polarizados, em canal <i>Additive White Gaussian Noise</i> — Ruído Aditivo Branco Gaussiano (AWGN). A SNR é relativa à <i>E-UTRAN Node B</i> — Nó B E-UTRAN (eNodeB) próxima, enquanto a eNodeB remota possui uma SNR 10 dBs abaixo.	112
Figura 6.8 – Desvio padrão da estimativa do OTDoA, escalada pela velocidade da luz no vácuo, em função da SNR, para sinais polarizados e não-polarizados em canal AWGN. A SNR é relativa a eNodeB próxima, enquanto a eNodeB remota possui uma SNR 10 dB abaixo.	113

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – CFO normalizada para desvios Doppler. Foi utilizada, em todos os casos, uma velocidade de 100 km/h do terminal móvel.	74
Tabela 4.1 – Sentido de comunicação para <i>frame</i> LTE Tipo 2, em TDD. Os campos marcados como ‘D’ representam <i>downlink</i> , ‘U’ representam <i>uplink</i> e ‘S’ representam <i>subframes</i> especiais.	81
Tabela 4.2 – Relação de <i>Bandwidth</i> — Largura de Banda (BW) total do canal e número de <i>Resource Block</i> — Bloco de Recurso (RB)s permissíveis para LTE.	82
Tabela 4.3 – Parâmetros de configuração dos RBs físicos.	82
Tabela 4.4 – Comprimento (em unidades de T_s) do CP.	84
Tabela 4.5 – Configuração do <i>subframe</i> PRS.	88

Lista de abreviaturas e siglas

2G Segunda Geração.

3G Terceira Geração.

3GPP *3rd Generation Partnership Project* — Projeto de Parceria de 3ª Geração.

4G Quarta Geração.

5G Quinta Geração.

5G NR *5G New Radio* — Novo Rádio 5G.

A-GPS *Assisted GPS* — GPS Assistido.

ACI *Adjacent Channel Interference* — Interferência em Canal Adjacente.

AD Analógico-Digital.

ANATEL Agência Nacional de Telecomunicações.

AWG *Additive White Gaussian* — Aditivo Branco Gaussiano.

AWGN *Additive White Gaussian Noise* — Ruído Aditivo Branco Gaussiano.

BER *Bit Error Rate* — Taxa de Erro de Bit.

BPSK *Binary Phase-Shift Keying* — Modulação por Deslocamento Binário de Fase.

BW *Bandwidth* — Largura de Banda.

CD Cayley-Dickson.

CDMA *Code-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão de Código.

CFO *Carrier Frequency Offset* — Deslocamento da Frequência de Portadora.

COD *Complex Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Complexo.

CP *Cyclic Prefix* — Prefixo Cíclico.

CRS *Cell-specific Reference Signal* — Sinal de Referência Específico da Célula.

DA Digital-Analógico.

DCI *Downlink Control Information* — Informação de Controle do *Downlink*.

DFT *Discrete Fourier Transform* — Transformada Discreta de Fourier.

DwPTS *Downlink Pilot Time Slot* — Slot no Tempo do Piloto de *Downlink*.

E-UTRA *Evolved UMTS Terrestrial Radio Access* — Acesso Terrestre de Rádio UMTS Evoluído.

E911 *Enhanced 911* — 911 Aprimorado.

eNodeB *E-UTRAN Node B* — Nó B E-UTRAN.

EUTRAN *Evolved UMTS Terrestrial Radio Access Network* — Rede de Acesso Terrestre de Rádio UMTS Evoluído.

FCC *Federal Communications Commission* — Comissão Federal de Comunicações.

FDD *Frequency-Division Duplexing* — Duplexagem por Divisão em Frequência.

FDM *Frequency-Division Multiplexing* — Multiplexação por Divisão na Frequência.

FDMA *Frequency-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão na Frequência.

FFT *Fast Fourier Transform* — Transformada Rápida de Fourier.

FIR *Finite Impulse Response* — Resposta Impulsiva Finita.

GB *Guard Band* — Banda de Guarda.

GCOD *Generalized Complex Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Complexo Generalizado.

GI *Guard Interval* — Intervalo de Guarda.

GLONASS *Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema* — Sistema de Navegação Global por Satélite.

GNSS *Global Navigation Satellite System* — Sistema Global de Navegação por Satélite.

GP *Guard Period* — Período de Guarda.

GPS *Global Positioning System* — Sistema de Posicionamento Global.

HARQ *Hybrid Automatic Repeat Request* — Repetição de Requisição Automática Híbrida.

i.i.d. *independent and identically distributed* — independente e distribuídas identicamente.

ICI *Inter-Carrier Interference* — Interferência Entre Portadoras.

ID *Identifier* — Identificação.

IDFT *Inverse Discrete Fourier Transform* — Transformada Discreta de Fourier Inversa.

IEEE *Institute of Electrical and Electronics Engineers* — Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos.

IFFT *Inverse Fast Fourier Transform* — Transformada Rápida de Fourier Inversa.

IoT *Internet of Things* — Internet das Coisas.

IQFT *Inverse Quaternion Fourier Transform* — Transformada Quaterniônica de Fourier Inversa.

ISI *Inter-Symbol Interference* — Interferência Entre os Símbolos.

LAN *Local Area Network* — Rede de Área Local.

LCS *Location Services* — Serviços de Localização.

LoS *Line-of-Sight* — Com Linha de Visada.

LPP *LTE Positioning Protocol* — Protocolo de Posicionamento para LTE.

LTE *Long Term Evolution* — Evolução de Longo Prazo.

MAN *Metropolitan Area Network* — Rede de Área Metropolitana.

MIMO *Multiple-Input and Multiple-Output* — Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas.

MIMO-OFDM *Multiple-Input and Multiple-Output Orthogonal Frequency-Division Multiplexing* — Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas Multiplexação por Divisão Ortogonal em Frequência.

MIMO-QOFDM *Multiple-Input and Multiple-Output Quaternion Orthogonal Frequency-Division Multiplexing* — Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas Multiplexação por Divisão Ortogonal Quaterniônica em Frequência.

MIMO-STBC *Multiple-Input and Multiple-Output Space-Time Block Code* — Código de Bloco Espaço-Temporal para Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas.

MISO *Multiple-Input and Single-Output* — Múltiplas-Entradas e Única-Saída.

mMTC *Massive Machine Type Communications* — Comunicação Massiva entre Máquinas.

MRRC *Maximal Rate Receiver Combining* — Combinação de Máxima Razão na Recepção.

MSE *Mean Squared Error* — Erro Quadrático Médio.

MU-MIMO *Multi-User MIMO* — MIMO Multi-Usuário.

NLoS *Non Line-of-Sight* — Sem Linha de Visada.

OFDM *Orthogonal Frequency-Division Multiplexing* — Multiplexação por Divisão Ortogonal em Frequência.

OFDMA *Orthogonal Frequency Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão de Frequências Ortogonais.

OTDoA *Observed Time Difference of Arrival* — Diferença Observada no Tempo de Chegada.

p.d.f. *probability density function* — função densidade de probabilidade.

PAPR *Peak-to-Average Power Ratio* — Razão da Potência de Pico pela Média.

PBCH *Physical Broadcast Channel* — Canal Físico de *Broadcast*.

PCFICH *Physical Control Format Indicator Channel* — Canal Físico Indicador do Formato de Controle.

PDCCH *Physical Downlink Control Channel* — Canal Físico de Controle do *Downlink*.

PDSCH *Physical Downlink Shared Channel* — Canal Físico Compartilhado no *Downlink*.

PHICH *Physical HARQ Indicator Channel* — Canal Físico Indicador HARQ.

PRS *Positioning Reference Signal* — Sinal para Referência de Posicionamento.

PSK *Phase Shift Keying* — Chaveamento de Fase.

PSS *Primary Synchronization Signal* — Sinal de Sincronização Primária.

QAM *Quadrature Amplitude Modulation* — Modulação de Amplitude em Quadratura.

QFT *Quaternion Fourier Transform* — Transformada Quaterniônica de Fourier.

QOD *Quaternion Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Quaterniônico.

QOFDM *Quaternionic Orthogonal Frequency-Division Multiplexing* — Multiplexação por Divisão Ortogonal Quaterniônica em Frequência.

QoS *Quality of Service* — Qualidade do Serviço.

QPSK *Quadrature Phase-Shift Keying* — Chaveamento por Deslocamento de Fase em Quadratura.

RB *Resource Block* — Bloco de Recurso.

RE *Resource Element* — Elemento de Recurso.

RMC *Reference Measurement Channel* — Canal de Referência de Medidas.

ROD *Real Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Real.

RT-DSP Laboratório de Processamento Digital de Sinais em Tempo Real.

SC-OFDM *Single Carrier-OFDM* — OFDM de Portadora Única.

SDMA *Space-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão no Espaço.

SFBC *Space-Frequency Block Code* — Código de Bloco Espaço-Frequência.

SIMO *Single-Input and Multiple-Output* — Única-Entrada e Múltiplas-Saídas.

SISO *Single-Input and Single-Output* — Única-Entrada e Única-Saída.

SNR *Signal-to-Noise Ratio* — Razão Sinal-Ruído.

SQNR *Signal-to-Quantization Noise Ratio* — Razão Sinal-Ruído de Quantização.

SSS *Secondary Synchronization Signal* — Sinal de Sincronização Secundário.

STBC *Space-Time Block Code* — Código de Bloco Espaço-Temporal.

STO *Symbol Time Offset* — Deslocamento do Tempo de Símbolo.

STPBC *Space-Time-Polarization Block Code* — Código de Bloco Espaço-Temporal-Polarização.

TDD *Time-Division Duplexing* — Duplexagem por Divisão no Tempo.

TDMA *Time-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão no Tempo.

ToA *Time of Arrival* — Tempo de Chegada.

TU *Typical Urban* — Urbano Típico.

UE *User Equipment* — Equipamento de Usuário.

UMTS *Universal Mobile Telecommunications System* — Sistema Universal de Comunicações Móveis.

UpPTS *Uplink Pilot Time Slot* — Slot no Tempo do Piloto de *Uplink*.

VA Variáveis Aleatórias.

VC *Virtual Carriers* — Portadoras Virtuais.

WLAN *Wireless Local Area Network* — Rede de Área Local Sem Fio.

XPD *Cross-Polarization Discrimination* — Discriminação de Polarização Cruzada.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	Justificativa e Motivação	26
1.2	Metodologia	26
2	QUATÉRNIONS	28
2.1	Álgebra de quatérnions	29
2.2	Propriedades de quatérnions	30
2.3	Exponencial de um quatérnion	31
2.4	Logaritmos de quatérnions	32
2.5	Representações	33
2.5.1	Forma polar	33
2.5.2	Decomposição de Cayley-Dickson	33
2.5.3	Forma polar de Cayley-Dickson	34
2.6	Potências de quatérnions	34
2.7	Subcorpos e a relação com números complexos	34
2.8	Análise de Fourier quaterniônica	35
2.9	Variáveis aleatórias	37
2.9.1	Variáveis aleatórias reais	38
2.9.2	Variáveis aleatórias complexas	39
2.9.3	Variáveis aleatórias quaterniônicas	45
3	SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES	52
3.1	MIMO	52
3.1.1	Diversidade de receptor	52
3.1.2	Diversidade de transmissor	53
3.1.3	Diversidade de transmissor e receptor	54
3.2	Projetos ortogonais	56
3.2.1	Projetos ortogonais reais	56
3.2.2	Projetos ortogonais complexos	56
3.2.2.1	STBC de Alamouti	57
3.2.3	Projetos ortogonais complexos generalizados	57
3.2.4	Projetos ortogonais quaterniônicos	59
3.3	Canais polarizados	59
3.4	OFDM	61
3.4.1	Ortogonalidade	62
3.4.2	Modulação OFDM	63

3.4.3	Demodulação OFDM	63
3.4.4	Intervalo de guarda	65
3.4.5	Banda de guarda	67
3.5	Sincronismo OFDM	68
3.5.1	Efeitos da STO	69
3.5.2	Efeitos da CFO	71
3.5.3	Técnicas de sincronismo	74
3.5.3.1	Sincronismo baseado em símbolo de treinamento	75
3.5.3.2	Sincronismo baseado em prefixo cíclico	76
4	LONG TERM EVOLUTION	79
4.1	Estrutura tempo-frequência da camada física de downlink LTE	80
4.2	Constelação dos símbolos modulados para LTE	85
4.3	Serviços de Localização	87
4.3.1	PRS	88
4.3.2	RMC	89
4.3.3	LPP	91
5	MELHORIAS EM SISTEMAS MIMO-OFDM	94
5.1	MIMO-QOFDM	94
5.2	Sincronismo QOFDM	97
5.2.1	Sincronismo baseado em símbolo de treinamento	97
5.2.2	Sincronismo baseado em prefixo cíclico	98
5.3	Localização por OTDoA	100
5.3.1	Sem polarização	100
5.3.2	Com polarização	101
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	103
6.1	MIMO-QOFDM	103
6.2	Sincronismo QOFDM	107
6.2.1	Sincronismo baseado em símbolo de treinamento	107
6.2.2	Sincronismo baseado em prefixo cíclico	109
6.3	Localização por OTDoA	111
7	CONCLUSÕES	115
	REFERÊNCIAS	118
	APÊNDICE A – PUBLICAÇÕES DESTA PESQUISA	127

1 Introdução

Serviços de comunicações sem fio, móveis e digitais estão em acelerado processo de maturação desde a década de 1990. Embora inicialmente voltados à comunicação por voz, eles evoluíram com o tempo, para comunicações mais genéricas de dados, abrangendo uma miríade de serviços. Porém, apesar de avanços vertiginosos nas tecnologias empregadas, os desafios para novos progressos permanecem os mesmos, podendo ser sumarizados em três pontos: restrições de potência; restrições de espectro; e restrições de múltiplo acesso (BHANDARI; JADHAV, 2019; DU et al., 2019; PATTANAYAK; KUMAR, 2019; VAEZI; DING; POOR, 2019; SAHU; SHRIVASTAVA; AGWEKAR, 2020). Sendo que o *throughput* não é o único fator a ser considerado. Confiabilidade, expressada em métricas de *Quality of Service* — Qualidade do Serviço (QoS) e baixa latência também são fatores relevantes nos padrões atuais, bem como nas expectativas para futuros padrões (CHOWDHURY et al., 2020).

A qualidade de recepção e alcance de transmissão estão diretamente relacionadas à potência de transmissão. Porém o aumento da potência de transmissão não é, de fato, uma solução. Unidades móveis, alimentadas por baterias, têm um baixo envelope de potência que não pode ser excedido, ao menos sem comprometer outras métricas importantes, tais como tempo de uso e vida útil da bateria ou tensão nominal (THANTHARATE; BEARD; MARUPADUGA, 2019). Mesmo para estações rádio base fixas, conectadas à rede elétrica, há limites regulatórios acerca da máxima potência de transmissão. Esses limites são oriundos de preocupações de caráter técnico, como a interferência entre equipamentos próximos, e também ambientais, como a questão da exposição prolongada à radiação eletromagnética não-ionizante e seus potenciais efeitos à saúde (JAMSHED; HELIOT; BROWN, 2020).

A quantidade de espectro disponível, para comunicação sem fio, é a métrica mais diretamente relacionada ao *throughput* atingível por uma dada tecnologia. Porém, a crescente demanda por aumento do último não é refletida na maior disponibilidade do primeiro. Tão logo um avanço tecnológico permita a utilização de uma faixa até então inutilizada do espectro eletromagnético, como a recente expansão de serviços para a banda de ondas milimétricas acima de 6 GHz, agências reguladoras ao redor do mundo subdividem e licenciam o uso das novas bandas. Operadoras pagam grandes fortunas pelo privilégio de explorar estreitas faixas de espectro em seus serviços de comunicação móvel. A re-oferta de bandas utilizadas por serviços obsoletos desativados, como o excedente do espectro original da banda de televisão analógica, embora ajude a mitigar os efeitos de espectro limitado à disposição, é apenas uma solução temporária e de escopo limitado (MATINMIKKO-BLUE et al., 2019).

A crescente demanda por *throughput*, face à escassez de oferta de espectro, possui, de fato, apenas uma solução sustentável: continuados esforços na melhoria da eficiência espectral, em sistemas de comunicação sem fio, através da exploração de diversidades além do espectro de frequência. Embora a melhoria da eficiência espectral seja muitas vezes atrelada a um aumento na complexidade dos sistemas de comunicação, as realidades da economia de escala na produção de equipamentos de comunicação absorvem muito do custo associado ao desenvolvimento desses avanços, viabilizando sua ampla disponibilidade (NAGAPUSHPA; Chitra Kiran, 2019).

Por fim, a necessidade de múltiplo acesso tem crescido tão rápido quanto à demanda por *throughput*, agravada pelo fato de que a densidade de usuários nas redes móveis cresceu vertiginosamente na última década. Tecnologias como: *Time-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão no Tempo (TDMA); *Frequency-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão na Frequência (FDMA); e *Code-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão de Código (CDMA), utilizadas nos padrões de Segunda Geração (2G) e Terceira Geração (3G) de comunicações celulares móveis foram suplantadas pelo *Orthogonal Frequency Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão de Frequências Ortogonais (OFDMA), com a adoção do LTE na Quarta Geração (4G) das comunicações móveis, logrando êxito em fornecer maiores capacidades ainda que mantendo a flexibilidade na alocação de limitados recursos de espectro e potência (VAEZI; DING; POOR, 2019).

Porém, as tecnologias de Quinta Geração (5G), como o 5G NR, em especial seu modo de operação *Massive Machine Type Communications* — Comunicação Massiva entre Máquinas (mMTC), relevante para aplicações de *Internet of Things* — Internet das Coisas (IoT), trarão uma inédita densidade de usuários com características de baixas taxas de dados (i.e. baixa demanda de *throughput* por conexão), baixo custo e longa operação em bateria (CHOWDHURY et al., 2020). Para tanto, complementando a técnica de OFDMA, também são usadas técnicas MIMO, *Space-Division Multiple Access* — Múltiplo Acesso por Divisão no Espaço (SDMA) tal como *Multi-User MIMO* — MIMO Multi-Usuário (MU-MIMO), conhecida por *beamforming*. Além de mitigar os efeitos do desvanecimento do canal, através da exploração da diversidade espacial, essas técnicas também permitem o reuso de espectro dentro do alcance de uma única estação rádio base, contribuindo para um aumento ainda maior da eficiência do sistema como um todo (NADEEM; KAMMOUN; ALOUINI, 2019).

O *beamforming* é uma das tecnologias chave do 5G NR. Implementada através de *Massive MIMO* (MIMO Massivo), ela permite superar o desvanecimento mais severo na propagação de ondas milimétricas (NADEEM; KAMMOUN; ALOUINI, 2019; ZHOU; LIU; LAU, 2019; MISMAR; EVANS; ALKHATEEB, 2020). Sua utilização permitirá melhorias nos três fatores citados inicialmente: eficiência de potência, eficiência espectral e múltiplo

acesso, através da exploração eficiente da diversidade espacial (AL-OBIEDOLLAH et al., 2019; ABOHAMRA; SOLEYMANI; SHAYAN, 2019).

Até este momento, foram discutidas tecnologias estabelecidas e emergentes, em padrões de comunicação móvel, que exploraram várias diversidades: tempo, frequência, código e espaço. Porém há uma diversidade que tem sido negligenciada pelas comunicações móveis: a polarização (PARCHIN et al., 2019). Embora utilizada há décadas em aplicações como *backhauling* por enlace de micro-ondas (SJODIN et al., 2019), comunicação por satélites (ZHU et al., 2019), dentre outras, a polarização não é explorada em sistemas móveis de comunicação. Isso é devido ao fato de que a discriminação de polarização cruzada diminuía, conforme aumentava a distância da estação rádio base ao dispositivo de usuário nos canais móveis.

Porém nos cenários atuais da próxima geração de redes móveis, ocorrerá a penetração de sistemas móveis com o emprego de células menores, como pico-células ou femto-células. Além do mais, por mais de uma década, *smartphones* têm ganhado espaço no mercado de aparelhos celulares. Hoje, eles são a vasta maioria dos terminais móveis conectados à rede celular. A grande maioria dos *smartphones* possuem sensores capazes de resolver sua atitude¹ (i.e., orientação no espaço tridimensional) em relação ao sistema de coordenadas horizontal local. Isso permite resolver a ambiguidade na identificação e separação dos componentes de uma onda polarizada (VAUGHAN, 1990). Além disto, há a possibilidade de se estimar a atitude a partir dos sinais duplamente polarizados transmitidos e, ao mesmo tempo, realizar a discriminação. Com isso, é possível explorar a diversidade de polarização e as vantagens que ela traz nos sistemas tradicionais de comunicações móveis (SJODIN et al., 2019; YAMADA et al., 2019). Limitações de tamanho da unidade móvel também são um fator limitante para aplicações *Massive MIMO*, que podem ser melhor atendidas através do uso de antenas polarizadas, capazes de manter a decorrelação dos canais espaciais mesmo com um espaçamento menor entre os elementos (PARCHIN et al., 2019).

Tem havido pressões, por parte de agências reguladoras ao redor do mundo e também por órgãos de segurança pública, acerca da oferta e melhoria da qualidade de serviços de localização. Especialmente para serviços de emergência, onde a pessoa em necessidade de auxílio, muitas vezes, por uma variedade de razões, é incapaz de fornecer as informações necessárias. Além disso, a navegação por áreas desconhecidas da cidade, ou mesmo o turismo, tem tido uma crescente dependência no uso de *smartphones* como a única ferramenta disponível (ZANDBERGEN, 2009). Infelizmente em muitas situações *Global Navigation Satellite System* — Sistema Global de Navegação por Satélite (GNSS), como o *Global Positioning System* — Sistema de Posicionamento Global (GPS) ou o *Globalnaya*

¹ Incidentalmente, essa é a aplicação de quatérnions que precipitou sua ressurgência na segunda metade do século XX.

Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema — Sistema de Navegação Global por Satélite (GLONASS), não estão disponíveis, como em centros urbanos altamente verticalizados ou em ambientes *indoors*. Auxílio de localização baseado em redes Wi-Fi, normalmente, não são disponíveis em regiões ermas. Assim, faz-se necessária a contínua melhoria dos serviços de localização oferecidos pelas operadoras de redes celulares (ABDALLAH; SHAMAEI; KASSAS, 2019; GHOSH et al., 2019).

Os desenvolvimentos tecnológicos do *Universal Mobile Telecommunications System* — Sistema Universal de Comunicações Móveis (UMTS), a tecnologia 3G mais difundida mundialmente foram aprimorados para a nova tecnologia 4G: o LTE. A interface aérea do LTE é chamada de *Evolved UMTS Terrestrial Radio Access* — Acesso Terrestre de Rádio UMTS Evoluído (E-UTRA) é baseada em OFDMA, assim como sua sucessora para o 5G NR. Na última década a *Evolved UMTS Terrestrial Radio Access Network* — Rede de Acesso Terrestre de Rádio UMTS Evoluído (EUTRAN) tem suplantado as instalações de tecnologia 2G e 3G mundialmente. Desde a publicação do *Release 9* dos padrões LTE, pelo *3rd Generation Partnership Project* — Projeto de Parceria de 3ª Geração (3GPP), *Location Services* — Serviços de Localização (LCS) se tornaram parte integrante do funcionamento da rede celular 4G. O princípio básico de funcionamento dos LCS foi mantido para o padrão 5G (ZANDBERGEN, 2009; ZARRINKOUB, 2014; XU et al., 2016; ABDALLAH; SHAMAEI; KASSAS, 2019).

Desde 2015, a *Federal Communications Commission* — Comissão Federal de Comunicações (FCC) (o “equivalente” estadunidense da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL), no Brasil) tem adotado a *Enhanced 911* — 911 Aprimorado (E911), como um marco para serviços de localização em chamadas de emergência. Isso pressionou as operadoras a oferecer serviços de localização mais confiáveis e capazes. Até 2024, espera-se que, ao receber uma chamada, os serviços de urgência e emergência devam receber uma localização da origem da chamada, com precisão de três metros, incluindo altitude (no intuito de resolver a posição dentro dos andares de um edifício), para pelo menos 80 % de todas as chamadas (FCC, 2015).

Nesta pesquisa, é estudada a aplicação da álgebra hipercomplexa de quatérnions na representação de sinais duplamente polarizados. Particularmente, em sistemas de comunicação OFDM, as métricas de desempenho são severamente afetadas pelo sincronismo no tempo e na frequência entre transmissor e receptor (OMRI et al., 2019; JEON; PARK; CHOI, 2019). Serão apresentados resultados demonstrando a vantagem de expandir o sistema MIMO-OFDM para sinais polarizados através da álgebra de quatérnions, obtendo-se assim maiores ganhos de diversidade. Como citado acima, em razão da criticalidade do sincronismo, no desempenho de sistemas de comunicação OFDM, resultados específicos das vantagens no sincronismo, assumindo sinais polarizados com representação quaterniônica, também serão apresentados. Por fim, são apresentadas vantagens da utilização de sinais

duplamente polarizados quaterniônicos na resolução espacial de serviços de localização, através de OTDoA, em uma abordagem baseada na solução atualmente implementada no LTE, e em breve, no 5G NR.

As publicações e submissões, tanto na literatura especializada quanto em eventos como simpósios ou seminários, resultantes da pesquisa aqui apresentada estão listadas no Apêndice A.

1.1 Justificativa e Motivação

O padrão LTE adotado para o 4G, diferente das gerações anteriores, se baseia em uma interface de rádio MIMO-OFDM. A interface MIMO-OFDM tem se mostrado robusta e adaptável às crescentes demandas de *throughput* e múltiplo acesso, tendo sido mantida para o ciclo 5G NR (RIBEIRO et al., 2020).

Em um de seus modos de transmissão, o sistema MIMO-OFDM implementado pelo LTE utiliza STBC explora a diversidade no espaço e no tempo para melhorar o desempenho e confiabilidade dos sistemas de comunicação (ZARRINKOUB, 2014). Sistemas MIMO-OFDM que exploram a diversidade espacial o fazem através de um *Complex Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Complexo (COD). Infelizmente, há sérias limitações no desempenho de CODs com mais de duas antenas no transmissor (TAROKH; JAFARKHANI; CALDERBANK, 1999; LIANG; XIA, 2003). Porém, as mesmas restrições não se aplicam para *Quaternion Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Quaterniônico (QOD) (SEBERRY; SPENCE; WYSOCKI, 2005; SEBERRY et al., 2008; ADAMS, 2009). Como sinais polarizados são prontamente representados através de um quatérnio (ISAEVA; SARYTCHEV, 1995), a exploração de sistemas MIMO-OFDM, generalizados para a álgebra de quatérnions, se apresentou como um campo promissor para novas pesquisas.

O objeto global desta pesquisa consiste de generalizar a modulação OFDM de sinais não-polarizados para uma modulação QOFDM para sinais polarizados no intuito de buscar maiores eficiências espectral e de potência. Isso foi feito com estudos dirigidos acerca do: ganho de diversidade possível para sistemas MIMO-QOFDM, baseados em projetos ortogonais; desempenho de sincronismo QOFDM no tempo e na frequência, comparado ao desempenho do OFDM tradicional; e por fim, do desempenho de serviços de localização OTDoA, presentes no LTE e 5G NR, para sinalização OFDM e QOFDM.

1.2 Metodologia

Todos os ensaios foram obtidos através de simulações computacionais no MATLAB, versão R2018a (ou anterior), conforme a licença disponível (à época da obtenção)

no Laboratório de Processamento Digital de Sinais em Tempo Real (RT-DSP). As generalizações quaterniônicas são implementadas através do *toolbox* `qtfm` (SANGWINE; LE BIHAN, 2015), livremente distribuído.

2 Quatérnions

Os quatérnions (\mathbb{H}) foram propostos originalmente por Sir William Rowan Hamilton¹ em 1843. Historicamente, sua relevância se provou cíclica nos últimos dois séculos, tendo sido “redescoberto” pelo menos uma vez. Embora desconhecido por boa parte da comunidade científica, exceto nas especialidades específicas, em que se destaca, os quatérnions já tiveram um papel mais fundamental no desenvolvimento científico. A análise vetorial tem suas raízes na álgebra de quatérnions, tendo sido popularizada por Gibbs e Heaviside, na reformulação das chamadas Equações de Maxwell da teoria eletromagnética, que foram originalmente desenvolvidas através de quatérnions (HORN, 2020).

A representação da física de translações é simples no espaço Euclidiano (\mathbb{R}^n) ou mesmo no espaço unitário (\mathbb{C}^n), sendo realizada por vetores desde sua inserção, há mais de um século. Porém, há uma verdadeira diversidade na representação de rotações: matrizes ortonormais, ângulos de Euler, eixo e ângulo, vetor de Gibbs, matrizes de spin de Pauli, parâmetros de Cayley-Klein, parâmetros de Euler-Rodrigues e quatérnions de Hamilton (SHUSTER, 1993; HORN, 2020).

Os quatérnions possuem várias vantagens que os tornam atrativos para representação de rotações, permitindo clara visualização de rotações sobre uma esfera unitária no espaço quadridimensional. É possível diferenciar uma expressão em função da rotação, quando representada em quatérnions, simplificando o cálculo de pontos estacionários (i.e., primeira derivada nula). A composição de rotações é simples, realizada através da simples multiplicação de quatérnions. A representação de rotações por quatérnions não sofrem de singularidades e são a representação redundante, porém linear, mais simples possíveis para rotações (STUELPNAGEL, 1964; HORN, 2020).

Quatérnions também se mostraram úteis na representação de sinais polarizados (ISAEVA; SARYTCHEV, 1995), o que motiva uma descrição mais completa de suas propriedades matemáticas discutidas no que segue. As Seções subsequentes almejam fazer uma apresentação sucinta, sem provas matemáticas, da álgebra, propriedades, representações e análise quaterniônica, baseadas em (ELL, 1992; SANGWINE; LE BIHAN, 2010; LOOTS et al., 2013; ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014; SANGWINE; LE BIHAN, 2015; LE BIHAN, 2017). O leitor é remetido a essas referências, para uma abordagem mais compreensiva.

¹ Matemático irlandês do século XIX com contribuições no desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra, em particular, no descobrimento da álgebra de quatérnions. Seu trabalho foi significativo no desenvolvimento da mecânica quântica (WILKINS, 2020).

2.1 Álgebra de quatérnions

A álgebra de quatérnions não é a única álgebra hipercomplexa conhecida, na verdade, ela é um caso particular das álgebras de Clifford², que incluem complexos, quatérnions e biquatérnions, por exemplo. Os quatérnions se destacam dentre as álgebras de Clifford por possuírem inversos multiplicativos, assim como reais e complexos não-nulos. A escolha dos quatérnions evita alguns problemas numéricos comuns existentes nas outras álgebras hipercomplexas. Muitas dessas contém valores idempotentes (i.e., $x^2 = x$) e nilpotentes (i.e., $x^2 = 0$), enquanto para os quatérnions, os únicos valores idempotente e nilpotente são 1 e 0, respectivamente.

Um quatérnion $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ é um número hipercomplexo quadridimensional (4D) (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014), cuja decomposição cartesiana é dada por

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad (2.1)$$

sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ os componentes do quatérnion \mathbf{q} . As quantidades imaginárias $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}$ são raízes de -1 , respeitando as relações descobertas por Hamilton:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\mathbf{j}\mathbf{k} &= -1, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} &= -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}\mathbf{i} &= -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\mathbf{k} &= -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Baseado nas relações básicas das Eqs. (2.1) e (2.2), é possível desenvolver de forma mais abrangente a estrutura algébrica dos quatérnions. Um quatérnion pode ser decomposto em suas partes escalar $S(\mathbf{q})$ e vetorial $\mathbf{V}(\mathbf{q})$ da seguinte forma

$$\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + \mathbf{V}(\mathbf{q}), \quad (2.3)$$

sendo $S(\mathbf{q}) = a \in \mathbb{R}$ a parte real do quatérnion \mathbf{q} , também denotada por $\Re(\mathbf{q}) = a$ e $\mathbf{V}(\mathbf{q}) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

Quatérnions que possuam parte escalar nula são chamados de *quatérnions puros*, ficando denotados por $\mathbf{V}(\mathbb{H})$. É possível identificar os componentes imaginárias na parte vetorial do quatérnion através da seguinte notação:

$$\Im_{\mathbf{i}}(\mathbf{q}) = b \quad \Im_{\mathbf{j}}(\mathbf{q}) = c \quad \Im_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = d, \quad (2.4)$$

redefinindo a decomposição cartesiana para

$$\mathbf{q} = \Re(\mathbf{q}) + \Im_{\mathbf{i}}(\mathbf{q})\mathbf{i} + \Im_{\mathbf{j}}(\mathbf{q})\mathbf{j} + \Im_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})\mathbf{k}. \quad (2.5)$$

As Eqs. (2.1) e (2.5) expressam o quatérnion $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ através da base $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, que é a mais comumente utilizada em notação quaterniônica.

² William Kingdon Clifford, matemático e filósofo inglês do século XIX (WILKINS, 2020).

2.2 Propriedades de quatérnions

Dados dois quatérnions $\mathbf{q} = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$ e $\mathbf{p} = e + \mathbf{i}f + \mathbf{j}g + \mathbf{k}h$, a soma de ambos é, simplesmente, dada por

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = (a + e) + (b + f)\mathbf{i} + (c + g)\mathbf{j} + (d + h)\mathbf{k}. \quad (2.6)$$

O produto dos quatérnions \mathbf{q} e \mathbf{p} pode ser obtido, através das relações na Eq. (2.2), como

$$\begin{aligned} \mathbf{qp} = (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)\mathbf{i} + \\ (ag + ce + df - bh)\mathbf{j} + (ah + de + bg - cf)\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

ou, alternativamente,

$$\mathbf{qp} = S(\mathbf{q})S(\mathbf{p}) - \mathbf{V}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{p}) + S(\mathbf{q})\mathbf{V}(\mathbf{p}) + S(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{q}) + \mathbf{V}(\mathbf{q}) \times \mathbf{V}(\mathbf{p}), \quad (2.8)$$

sendo que \cdot denota o produto interno vetorial e \times o produto externo vetorial. É possível notar que o produto quaterniônico é *não-comutativo* (i.e., $\mathbf{qp} \neq \mathbf{pq}$), porém ele é *associativo* (i.e., $(\mathbf{qp})\mathbf{r} = \mathbf{q}(\mathbf{pr})$, para $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$).

A *norma* de um quatérnion \mathbf{q} é dada por

$$|\mathbf{q}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad (2.9)$$

sendo possível demonstrar que $|\mathbf{qp}|^2 = |\mathbf{q}|^2|\mathbf{p}|^2$ e $|\mathbf{qp}|^2 = |\mathbf{pq}|^2$. Um *quatérnion unitário* $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ possui norma unitária (i.e., $|\mathbf{q}|^2 = 1$). O *módulo* do quatérnion, definido por sua distância euclidiana, está estreitamente relacionado à sua norma, sendo definido por

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad (2.10)$$

sendo também possível demonstrar que $|\mathbf{qp}| = |\mathbf{q}||\mathbf{p}| = |\mathbf{pq}|$. Claramente $|\mathbf{q}| \in \mathbb{R}^+$ e $|\mathbf{q}| = 0$ apenas se $\mathbf{q} = 0$.

De forma análoga aos números complexos (\mathbb{C}), o *quatérnion conjugado* é definido por

$$\bar{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q}) - \mathbf{V}(\mathbf{q}) = a - \mathbf{b}\mathbf{i} - \mathbf{c}\mathbf{j} - \mathbf{d}\mathbf{k}, \quad (2.11)$$

de maneira que suas partes escalar e vetorial podem ser decompostas através de

$$S(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}}}{2} \quad \mathbf{V}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}}{2}, \quad (2.12)$$

Muito embora $\bar{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}$, no caso quaterniônico a conjugação não é uma *involução*, mas uma *anti-involução*, pois $\overline{\mathbf{qp}} = \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}$. Através da conjugação, a norma pode ser mais sucintamente definida como $|\mathbf{q}|^2 = \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}$, enquanto seu módulo pode ser obtido através de $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}$.

Involuções sobre \mathbb{H} são definidas para um quatérnion puro e unitário μ ($\mu \in V(\mathbb{H})$ e $|\mu| = 1$), de forma que

$$\bar{q}^\mu = -\mu q \mu. \quad (2.13)$$

Há três casos especiais sobre as bases imaginárias de \mathbb{H} chamados de involuções *canônicas*, dados por:

$$\begin{aligned} \bar{q}^i &= a + bi - cj - dk = -iqi \\ \bar{q}^j &= a - bi + cj - dk = -jqj \\ \bar{q}^k &= a - bi - cj + dk = -kqk. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Involuções quaterniônicas possuem as seguintes propriedades (assumindo μ unitário e puro):

$$\overline{qp}^\mu = \bar{q}^\mu \bar{p}^\mu, \quad \overline{\bar{q}^\mu} = q, \quad \overline{\bar{q}^{ij}} = \bar{q}^k. \quad (2.15)$$

Qualquer quatérnion $q \in \mathbb{H}$ não-nulo possui um *inverso*, dado por

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \quad (2.16)$$

sendo simples provar que $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Para um quatérnion puro e unitário μ , a inversão fica simplificada para $\mu^{-1} = -\mu$.

Dois quatérnions puros e unitários μ e η são ortogonais entre si (i.e. $\mu \perp \eta$) se $S(\mu\eta) = 0$. Constata-se que os componentes imaginários $\{i, j, k\}$ da base de \mathbb{H} são ortogonais entre si. Porém, qualquer par μ e η , puros, unitários e ortogonais entre si, pode formar uma base $\{\mu, \eta, \mu\eta\}$ para \mathbb{H} .

2.3 Exponencial de um quatérnion

A função exponencial para um quatérnion puro e não-nulo ζ pode ser definida através da série de potências

$$\exp(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\zeta|^n \eta^n}{n!} \quad (2.17)$$

sendo $\zeta = |\zeta|\eta$, com η puro e unitário. A potência inteira de um quatérnion puro e unitário é dada por

$$\eta^n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 2k; \\ (-1)^k \eta & \text{se } n = 2k + 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

de maneira que a exponencial pode ser reescrita como

$$\exp(\zeta) = \sum_{\substack{n=0 \\ n=2k}}^{\infty} (-1)^k \frac{|\zeta|^{2k}}{(2k)!} + \eta \sum_{\substack{n=0 \\ n=2k+1}}^{\infty} (-1)^k \frac{|\zeta|^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (2.19)$$

onde os somatórios individuais são facilmente reconhecidos como as expansões das funções cosseno e seno, respectivamente, de maneira que

$$\exp(\zeta) = \exp(|\zeta|\eta) = \cos |\zeta| + \eta \sin |\zeta|, \quad (2.20)$$

o que demonstra que a exponencial de um quatérnion puro e unitário é um quatérnion unitário, porém não puro, por possuir parte escalar. O resultado recíproco, no entanto, é bem mais relevante: qualquer quatérnion unitário pode ser representado como a exponencial de um quatérnion puro, o que será útil na representação polar e na generalização da relação de Euler, que será apresentada a seguir.

Uma distinção importante da exponencial complexa é que, para dois reais positivos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ e dois quatérnions puros, unitários e distintos μ, η , de uma forma geral

$$\exp(\alpha\mu + \beta\eta) \neq \exp(\alpha\mu) \exp(\beta\eta). \quad (2.21)$$

Embora sendo um caso particular, a exponencial de um quatérnion puro é de grande relevância, por sua utilização na generalização da transformada de Fourier para quatérnions, a qual será apresentada na sequência.

Como um quatérnion não nulo pode ser dado por $\mathbf{q} = S(\mathbf{q}) + \mathbf{V}(\mathbf{q})$, sua exponencial pode ser escrita por

$$\exp(\mathbf{q}) = \exp(S(\mathbf{q})) \exp(\mathbf{V}(\mathbf{q})) \quad (2.22)$$

de maneira que

$$\exp(\mathbf{q}) = \exp(S(\mathbf{q})) \left(\cos |\mathbf{V}(\mathbf{q})| + \frac{\mathbf{V}(\mathbf{q})}{|\mathbf{V}(\mathbf{q})|} \sin |\mathbf{V}(\mathbf{q})| \right). \quad (2.23)$$

2.4 Logaritmos de quatérnions

A definição dos logaritmos para quatérnions pode se valer do desenvolvimento já realizado para a exponencial, uma vez que

$$\mathbf{q} = \exp(\mathbf{p}) \iff \mathbf{p} = \ln \mathbf{q}, \quad (2.24)$$

lembrando que um quatérnion pode ser escrito como $\mathbf{q} = |\mathbf{q}|\eta_{\mathbf{q}}$, onde $|\mathbf{q}|$ é o módulo de \mathbf{q} e $\eta_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ é sua versão normalizada (i.e., módulo unitário), a propriedade dos logaritmos permite escrever

$$\ln \mathbf{q} = \ln |\mathbf{q}| + \ln \eta_{\mathbf{q}}, \quad (2.25)$$

onde o primeiro termo à direita da igualdade é real. O segundo termo depende de um quatérnion unitário, que como visto na seção anterior, pode ser representado como a exponencial de um quatérnion puro e unitário. Assim, $\eta_{\mathbf{q}} = \exp(\zeta) = \exp(\mu_{\mathbf{q}}\phi_{\mathbf{q}})$, com

$\mu_q \in V(\mathbb{H})$ e $\phi_q \in \mathbb{R}^+$. Assim, finalmente, a função logarítmica, sobre os quatérnions, fica definida por

$$\ln \mathbf{q} = \ln |\mathbf{q}| + \mu_q \phi_q, \quad (2.26)$$

com ϕ_q no intervalo de 0 a 2π radianos.

2.5 Representações

Até o momento, apenas a forma cartesiana de representar um quatérnion $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ (Eq. (2.1)) foi abordada. A seguir serão apresentadas outras representações úteis.

2.5.1 Forma polar

Seguindo da definição da exponencial para quatérnions, a célebre identidade de Euler pode ser generalizada para quatérnions, da forma (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014)

$$\mathbf{q} = |\mathbf{q}| \exp(\pm \mu \phi) = |\mathbf{q}| (\cos \phi \pm \mu \sin \phi), \quad (2.27)$$

onde $|\mathbf{q}|$, já definido, é o módulo, μ é o eixo, e ϕ é a fase (ou argumento) de \mathbf{q} . O eixo μ é um quatérnion puro unitário, definido por

$$\mu = \frac{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}, \quad (2.28)$$

e a fase ϕ é real, dada por

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{a}. \quad (2.29)$$

Essa notação implica que quatérnions puros possuem fase $\pi/2$ radianos. As formas alternativas da identidade de Euler podem ser redefinidas por

$$\cos \phi = \frac{\exp(\mu \phi) + \exp(-\mu \phi)}{2}, \quad (2.30)$$

$$\sin \phi = -\mu \frac{\exp(\mu \phi) - \exp(-\mu \phi)}{2}. \quad (2.31)$$

2.5.2 Decomposição de Cayley-Dickson

Uma aplicação útil do homomorfismo dos subcorpos de \mathbb{H} é a decomposição (ou construção) de Cayley-Dickson (CD) (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014). Por essa representação, um quatérnion $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{q} = z_s + z_p \mathbf{j}, \quad (2.32)$$

onde $z_s = a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C}_i$ é a parte *simplexa* e $z_p = c + d\mathbf{i} \in \mathbb{C}_i$ é a parte *perplexa* do quatérnion (ambas homomorfas ao corpo \mathbb{C}). Vale notar que a decomposição CD não é

unicamente definida³, como na Eq. (2.32), muito embora essa seja a forma mais largamente utilizada.

É interessante notar que, na notação de CD, o conjugado quaterniônico fica definido por

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{z}_s - z_p \mathbf{j}, \quad (2.33)$$

onde \bar{z}_s representa a conjugação complexa usual.

2.5.3 Forma polar de Cayley-Dickson

A forma polar de Cayley-Dickson é dada por (SANGWINE; LE BIHAN, 2010)

$$\mathbf{q} = \rho \exp(\Phi \mathbf{j}) \quad (2.34)$$

onde $\rho, \Phi \in \mathbb{C}$ representam o *módulo complexo* e a *fase complexa*, respectivamente. Sendo definidos, de acordo com a decomposição CD (Eq. (2.32)), como

$$\rho = z_s \frac{|\mathbf{q}|}{|z_s|}, \quad (2.35)$$

$$\Phi = -\ln \left(\frac{\bar{z}_s \mathbf{q}}{\|z_s\|} \mathbf{j} \right). \quad (2.36)$$

2.6 Potências de quatérnions

Através das representações já definidas para os quatérnions, em especial as formas polares, a n -ésima potência de um quatérnion pode ser calculada por

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^n &= |\mathbf{q}|^n \exp(n\boldsymbol{\mu}\phi) \\ &= |\mathbf{q}|^n \left(\cos(n\phi) + \boldsymbol{\mu} \sin(n\phi) \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde vale lembrar que um quatérnion \mathbf{q} comuta com ele próprio. O resultado é uma generalização do teorema de Moivre, que apesar de simples em seu formato e interpretação, traz vantagens computacionais na manipulação da álgebra quaterniônica (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014).

2.7 Subcorpos e a relação com números complexos

Como afirmado no início deste capítulo, os quatérnions \mathbb{H} caracterizam uma álgebra 4D sobre os reais \mathbb{R} . Assim, um quatérnion com parte vetorial nula (i.e. $\mathbf{V}(\mathbf{q}) = 0$) é homomorfo ao corpo dos reais \mathbb{R} .

³ Como não há uma decomposição canônica, o formalismo matemático não define uma decomposição simplética, porém, apesar do abuso da definição, seu uso é corrente na literatura.

Partindo do mesmo conceito, um quatérnion que possuir apenas duas partes imaginárias nulas é homomorfo ao corpo dos complexos \mathbb{C} . Tomando $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, o quatérnion

$$\mathbf{q} = a + b\boldsymbol{\mu} \quad (2.38)$$

é equivalente a um número complexo. Nesse caso, diz-se que $\mathbf{q} \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{\mu}}$. Assim, pode-se interpretar $\mathbb{C}_{\boldsymbol{\mu}}$ como uma restrição de \mathbb{H} a um plano, gerado por $\{1, \boldsymbol{\mu}\}$, no espaço 4D. Esse subcorpo é homomorfo ao corpo dos complexos \mathbb{C} , que é o plano de Argand, gerado por $\{1, j\}$, com $j^2 = -1$ (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014).

Em razão da escolha feita na decomposição CD, neste trabalho, os valores complexos serão generalizados através do subcorpo \mathbb{C}_i .

2.8 Análise de Fourier quaterniônica

A *Discrete Fourier Transform* — Transformada Discreta de Fourier (DFT) para um sinal discreto, unidimensional e de suporte finito $x(n) : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{C}$, pode ser definida, sem perda de generalidade, por

$$\mathcal{F}[z(n)](k) = Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.39)$$

com N o comprimento do sinal. Por outro lado, a *Inverse Discrete Fourier Transform* — Transformada Discreta de Fourier Inversa (IDFT) é dada por

$$\mathcal{F}^{-1}[Z(k)](n) = z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.40)$$

Para expandir as definições das Eqs. (2.39) e (2.40) para o domínio quaterniônico \mathbb{H} , deve-se lembrar que, diferentemente do caso complexo, onde as raízes de -1 são $\pm j$, na álgebra de quatérnions há uma maior riqueza de escolhas. Isso, adicionado ao fato do produto entre quatérnions não ser comutativo, é possível definir a *Quaternion Fourier Transform* — Transformada Quaterniônica de Fourier (QFT) e a *Inverse Quaternion Fourier Transform* — Transformada Quaterniônica de Fourier Inversa (IQFT) de quatro maneiras distintas (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014).

As definições da QFT direita⁴ do sinal quaterniônico discreto unidimensional e de suporte finito $\mathbf{q}(n) : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{H}$ são

$$\mathcal{F}_{\mp\boldsymbol{\mu}}^R[\mathbf{q}(n)](k) = \mathbf{Q}^R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{q}(n) \exp\left(\mp \boldsymbol{\mu} \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.41)$$

onde, novamente, N representa o comprimento do sinal. A versão $-\boldsymbol{\mu}$ é chamada de transformada progressiva e a versão $+\boldsymbol{\mu}$ é chamada de transformada regressiva, que são

⁴ Em relação à posição da exponencial multiplicando o sinal no integrando.

distintas de suas correspondentes *inversas*, dadas por

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^{-R}[\mathbf{Q}^R(k)](n) = \mathbf{q}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{Q}^R(k) \exp\left(\pm \mu \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.42)$$

De forma análoga, a **QFT** esquerda progressiva ($-\mu$) ou regressiva ($+\mu$) são dadas por

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^L[\mathbf{q}(n)](k) = \mathbf{Q}^L(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\mp \mu \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{q}(n), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.43)$$

e suas respectivas inversas, definidas como

$$\mathcal{F}_{\mp\mu}^{-L}[\mathbf{Q}^L(k)](n) = \mathbf{q}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\pm \mu \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{Q}^L(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.44)$$

Neste trabalho de pesquisa, será usada apenas a versão progressiva. Essa escolha é por simples conveniência de notação, uma vez que ela mais se assemelha à representação da **DFT** clássica, comumente encontrada na literatura. Também será feita a opção pela forma esquerda, por razões que ficarão claras na sequência. Assim, o par **QFT** \leftrightarrow **IQFT** fica definido por

$$\mathbf{Q}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\mu \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{q}(n), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.45)$$

$$\mathbf{q}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\mu \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{Q}(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.46)$$

Como a decomposição **CD** simplética é feita sobre \mathbf{j} , a base μ deve ser ortogonal à \mathbf{j} para garantir a separabilidade (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014). Usando $\mu = \mathbf{i}$, a decomposição da **QFT** fica definida por

$$\mathbf{Q}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{q}(n), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.47)$$

Como $\mathbf{q}(n) = z_s(n) + z_p(n)\mathbf{j}$, pela Eq. (2.32), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{q}(n); \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) (z_s(n) + z_p(n)\mathbf{j}); \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) z_s(n) + \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) z_p(n)\mathbf{j}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

como $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$, é possível passar o \mathbf{j} para fora (porém ainda à direita)⁵ do segundo somatório. Lembrando que $\mathbb{C}_i \equiv \mathbb{C}$ e comparando os somatórios individuais à Eq. (2.39), finalmente é possível escrever

$$\mathbf{Q}(k) = Z_s(k) + Z_p(k)\mathbf{j}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.49)$$

⁵ Em razão de ter sido utilizada a forma esquerda da transformada.

Construindo um argumento análogo para a IQFT, pode-se escrever

$$\mathbf{q}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) \mathbf{Q}(k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.50)$$

que pode ser decomposta como

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) (Z_s(k) + Z_p(k)\mathbf{j}); \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) Z_s(k) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(\mathbf{i} \frac{2\pi}{N} kn\right) Z_p(k)\mathbf{j}, \\ &= z_s(n) + z_p(n)\mathbf{j}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Assim, uma QFT pode ser decomposta como duas DFTs, da mesma forma que uma IQFT pode ser decomposta por duas IDFTs. Assim, desde que os pares $z_s(n) \leftrightarrow Z_s(k)$ e $z_p(n) \leftrightarrow Z_p(k)$ existam, conforme definido nas Eqs. (2.39) e (2.40), a QFT e a IQFT existem, conforme a definição das Eqs. (2.47) e (2.50), podendo ser calculadas por

$$\mathbf{Q}(k) = Z_s(k) + Z_p(k)\mathbf{j}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{q}(n) = z_s(n) + z_p(n)\mathbf{j}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.53)$$

Isto é vantajoso pois rotinas otimizadas da *Fast Fourier Transform* — Transformada Rápida de Fourier (FFT) e *Inverse Fast Fourier Transform* — Transformada Rápida de Fourier Inversa (IFFT) podem ser prontamente utilizadas na implementação da QFT e IQFT.

2.9 Variáveis aleatórias

Assim como a generalização de Variáveis Aleatórias (VA) de reais para complexos trouxe alguns conceitos inéditos, como propriedade e circularidade, também na generalização para VAs quaterniônicas esses conceitos são expandidos. A sucinta apresentação desses conceitos, nesta seção, é baseada no desenvolvimento de (LOOTS et al., 2013; LE BIHAN, 2017; KRUPINSKI, 2018; JAVED et al., 2020). Ao leitor interessado, recomenda-se (JAVED et al., 2020) para uma revisão bastante compreensiva das representações, conceitos de propriedade e circularidade em VAs complexas e quaterniônicas, incluindo aplicações.

A modelagem em VAs, apresentada nesta seção, é motivada pela modelagem de um canal AWGN⁶, de maneira que, mantendo simplicidade na notação, sem maior comprometimento da generalidade, o primeiro momento estatístico será tido como nulo nos desenvolvimentos a seguir.

⁶ Por ser branco, o ruído *Additive White Gaussian* — Aditivo Branco Gaussiano (AWG) implica distribuição com média nula.

2.9.1 Variáveis aleatórias reais

Uma VA real X , com distribuição normal, de forma que $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$, pode ser representada pela p.d.f.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right), \quad (2.54)$$

onde o parâmetro σ_X^2 representa a variância de X , que é real e estritamente positiva. Para simplicidade de notação, σ_X^2 pode ser definido através do operador esperança $E[\cdot]$. Assim,

$$\sigma_X^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx. \quad (2.55)$$

Generalizando agora para um problema multivariado, onde um vetor \mathbf{x} ($N \times 1$) representa N VAs individuais, da forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

com sua matriz covariâncias $\mathbf{K}_{\mathbf{xx}}$ ($N \times N$) definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{xx}} &= E[\mathbf{xx}^T] \\ &= \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1X_2] & \cdots & E[X_1X_N] \\ E[X_2X_1] & E[X_2X_2] & \cdots & E[X_2X_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_NX_1] & E[X_NX_2] & \cdots & E[X_NX_N] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_N} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_NX_1} & \sigma_{X_NX_2} & \cdots & \sigma_{X_N}^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

sendo que $(\cdot)^T$ representa a transposição matricial. Os elementos da matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{xx}} = [\sigma_{i,j}]$ representam a variação conjunta de X_i com X_j . Na diagonal principal, a variação de um elemento com ele próprio $\sigma_{i,i} = \sigma_i^2$ é a variância de X_i . Como $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$, a matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{xx}}$ é simétrica (i.e., $\mathbf{K}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{K}_{\mathbf{xx}}^T$).

A p.d.f. para VAs com distribuição normal multivariada $\mathbf{x} \sim \mathcal{MN}(0, \mathbf{K}_{\mathbf{xx}})$ é dada por

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\mathbf{K}_{\mathbf{xx}})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\mathbf{xx}}^{-1} \mathbf{x}\right), \quad (2.58)$$

onde $\det(\cdot)$ e $(\cdot)^{-1}$ denotam, respectivamente, o determinante e inversão matricial.

Para sinalização real, os efeitos de um canal [AWGN](#) podem ser representados por uma variável aleatória como descrita acima. Assim, para N amostras de um sinal recebido $r(n)$ dado por

$$r(n) = \alpha s(n) + x(n), \quad (2.59)$$

onde $s(n)$ é o sinal transmitido, $x(n)$ é o ruído [AWG](#) e α representa a atenuação do sinal transmitido na propagação entre antena transmissora e receptora.

Comumente, assume-se que os N valores individuais do ruído [AWG](#) são *independent and identically distributed* — independente e distribuídas identicamente (i.i.d.), com distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$. Isso implica uma matriz covariância diagonal

$$\mathbf{K}_{\mathbf{xx}} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_X^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_X^2 \end{bmatrix} = \sigma_X^2 \mathbf{I}_N, \quad (2.60)$$

de maneira que $\det(\mathbf{K}_{\mathbf{xx}}) = \sigma_X^{2N}$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{xx}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_X^2} \mathbf{I}_N$. Assim, o vetor \mathbf{x} com as [VAs](#) de ruído fica distribuído como $\mathbf{x} \sim \mathcal{MN}(0, \sigma_X^2 \mathbf{I})$, cuja [p.d.f.](#) é simplificada para

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_X^2)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_X^2} \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_X^2)^N}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_X^2}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

A energia do sinal transmitido $s(n)$ pode ser calculada por

$$E_s = \|s(n)\| = \sum_{n=0}^{N-1} |s(n)|^2, \quad (2.62)$$

enquanto a potência do ruído $x(n)$ é dada por σ_X^2 . Assim a [SNR](#) no receptor é dada por

$$\text{SNR} = \frac{\alpha^2 E_s}{\sigma_X^2}, \quad (2.63)$$

sendo ela comumente expressa em decibéis, através de $10 \log \text{SNR}$. Métricas de qualidade em sistemas de comunicação são comumente relacionadas à [SNR](#).

2.9.2 Variáveis aleatórias complexas

A representação de sistemas de comunicação em banda base, comumente, faz uso de sinalização complexa. Aqui será feita uma generalização do desenvolvimento anterior, para [VAs](#) complexas.

Uma única [VA](#) complexa Z pode ser expressa como a soma de duas [VAs](#) reais X e Y , como $Z = X + jY$. Lembrando que o primeiro momento estatístico é considerado

nulo, o segundo momento estatístico possui duas formas possíveis:

$$\begin{aligned}
 E[Z\bar{Z}] &= E[(X + jY)(\overline{X + jY})] \\
 &= E[(X + jY)(X - jY)] \\
 &= E[X^2] - jE[XY] + jE[YX] + E[Y^2] \\
 &= E[X^2] + E[Y^2] \\
 \sigma_Z^2 &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2,
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

sendo $\sigma_Z^2 \in \mathbb{R}$ a variância de Z ; enquanto

$$\begin{aligned}
 E[ZZ] &= E[(X + jY)(X + jY)] \\
 &= E[X^2] + jE[XY] + jE[YX] - E[Y^2] \\
 &= E[X^2] + j2E[XY] - E[Y^2] \\
 &= E[X^2] + j2E[XY] - E[Y^2] \\
 \tilde{\sigma}_Z^2 &= \sigma_X^2 + j2\sigma_{XY} - \sigma_Y^2,
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

sendo $\tilde{\sigma}_Z^2 \in \mathbb{C}$ a pseudo-variância de Z e σ_{XY} a covariância de XY , dada por

$$\sigma_{XY} = E[XY] = \iint_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) \, dx dy, \tag{2.66}$$

e a [p.d.f.](#) conjunta de XY , para uma distribuição normal bivariada, é

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right), \tag{2.67}$$

com o coeficiente de correlação ρ dado por

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}. \tag{2.68}$$

Observa-se, para uma única variável complexa $Z = X + jY$, o segundo momento depende de uma variância real σ_Z^2 e de uma pseudo-variância complexa $\tilde{\sigma}_Z^2$, sendo que esta última depende da covariância entre as partes real e imaginária de Z . Assim, para uma [VA](#) Z , com distribuição normal complexa, pode-se escrever $Z \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_Z^2, \tilde{\sigma}_Z^2)$.

Uma [VA](#) complexa é considerada *própria* se a covariância entre as partes real e imaginária é nula (i.e., $\sigma_{XY} = 0$). Por outro lado, se existir uma covariância entre X e Y , então diz-se que Z é *imprópria*. Isso define, de forma sucinta, o conceito de *propriedade* em uma [VA](#) complexa.

É prática comum, em aplicações de telecomunicações, considerar que o ruído adicionado aos componentes em fase (i.e., parte real) e quadratura (i.e., parte imaginária) são descorrelacionados, de maneira que $\rho = 0$. Isso implica, analisando a Eq. (2.68), que a covariância σ_{XY} também é nula. Isso reduz a pseudo-variância para um valor real

$\tilde{\sigma}_Z^2 = \sigma_X^2 - \sigma_Y^2$, enquanto a p.d.f. conjunta de XY , fica simplificada para

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_Y^2}\right) \\ &= f_X(x)f_Y(y), \end{aligned} \quad (2.69)$$

de onde é possível interpretar que, para VAs com distribuição normal, a descorrelação de X e Y , implica independência das VAs.

A ideia de *circularidade* em uma VA complexa própria está diretamente relacionada à forma como as partes real e imaginária são distribuídas. Caso as variáveis reais X e Y sejam i.i.d., de modo que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, diz-se que a distribuição de $Z = X + jY$ é *circular*, caso contrário, com $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$, a distribuição de Z é *não-circular*. A combinação de propriedade e circularidade faz com que a pseudo-variância se anule e que a variância se reduza a $\sigma_Z^2 = 2\sigma_X^2$.

A Figura 2.1 representa quatro exemplos de p.d.f. com distribuição normal e complexa. A Figura 2.1(a) traz o exemplo de uma p.d.f. imprópria, pois há correlação entre X e Y , de maneira que as distribuições não são i.i.d.; na Figura 2.1(b), embora não haja mais correlação, a distribuição de X e Y não é i.i.d., de maneira que ela também representa uma VA complexa normal e imprópria; na Figura 2.1(c), apesar de X e Y terem a mesma variância, a correlação não-nula entre eles mantém a VA imprópria; por fim, na Figura 2.1(d), com ambas as variáveis X e Y i.i.d., obtém-se uma VA complexa circularmente distribuída, como indicado pelas curvas de nível.

Retomando o exemplo de transmissão em canal AWGN

$$r(n) = \alpha s(n) + z(n), \quad (2.70)$$

porém agora com sinalização complexa (i.e., $r(n), s(n), z(n) \in \mathbb{C}$), o ruído Z deve possuir distribuição normal complexa, própria e circular $Z \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_Z^2, 0)$ ⁷. Comparado ao caso real, para uma mesma SNR, agora dada por

$$\text{SNR} = \frac{\alpha^2 E_s}{\sigma_Z^2} \quad (2.71)$$

percebe-se pela razão da potência do ruído complexo com a potência do ruído real, como definida na Eq. (2.63), que

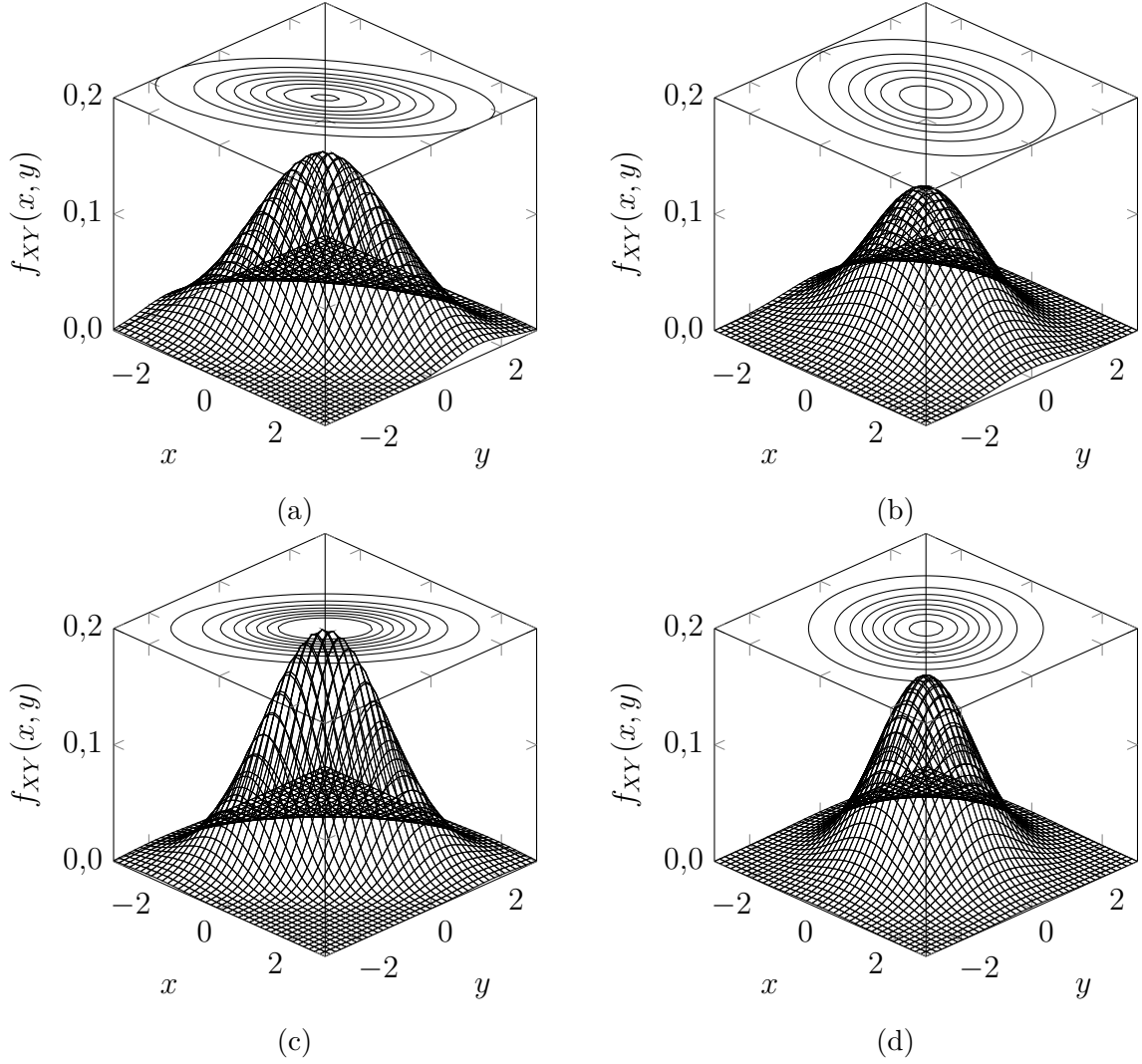
$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{\sigma_Z^2}{2} = \left(\frac{\sigma_Z}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad (2.72)$$

de maneira que

$$\text{SNR} = \frac{2\alpha^2 E_s}{\sigma_X^2}. \quad (2.73)$$

⁷ Comumente, o termo nulo da pseudo-variância fica implícito.

Figura 2.1 – Exemplos de [p.d.f.](#) ilustrando os conceitos de propriedade e circularidade. Os gráficos foram calculados com $\sigma_Y = 1,0$, nas seguintes situações: (a) $\rho = 0,6$ e $\sigma_X = 1,2$; (b) $\rho = 0,0$ e $\sigma_X = 1,2$; (c) $\rho = 0,6$ e $\sigma_X = 1,0$; (a) $\rho = 0,0$ e $\sigma_X = 1,0$. As curvas de nível representam valores da $f_{XY}(x, y)$ de $0,01, 0,03, \dots, 0,15$.



Fonte: Autoria própria.

Isso implica, em comparação à Eq. (2.63), potencial vantagem de 3 decibéis para o mesmo valor de [SNR](#) entre a sinalização real e complexa, desde que a ortogonalidade entre os componentes em fase e em quadratura seja mantida.

Generalizando para o problema complexo multivariado, com N valores de

$\mathbf{z} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$, representados por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + j \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}, \quad (2.74)$$

a estatística de segunda ordem possui duas representações: $\mathbf{K}_{\mathbf{zz}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{zz}}$.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{zz}} = E[\mathbf{zz}^H] \quad (2.75)$$

$$= \begin{bmatrix} E[Z_1 \bar{Z}_1] & E[Z_1 \bar{Z}_2] & \cdots & E[Z_1 \bar{Z}_N] \\ E[Z_2 \bar{Z}_1] & E[Z_2 \bar{Z}_2] & \cdots & E[Z_2 \bar{Z}_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[Z_N \bar{Z}_1] & E[Z_N \bar{Z}_2] & \cdots & E[Z_N \bar{Z}_N] \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

$$= \begin{bmatrix} E[|Z_1|^2] & E[Z_1 \bar{Z}_2] & \cdots & E[Z_1 \bar{Z}_N] \\ E[Z_2 \bar{Z}_1] & E[|Z_2|^2] & \cdots & E[Z_2 \bar{Z}_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[Z_N \bar{Z}_1] & E[Z_N \bar{Z}_2] & \cdots & E[|Z_N|^2] \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{Z_1}^2 & \sigma_{Z_1 Z_2} & \cdots & \sigma_{Z_1 Z_N} \\ \sigma_{Z_2 Z_1} & \sigma_{Z_2}^2 & \cdots & \sigma_{Z_2 Z_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{Z_N Z_1} & \sigma_{Z_N Z_2} & \cdots & \sigma_{Z_N}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

sendo que $(\cdot)^H$ representa a transposição Hermitiana e $\mathbf{K}_{\mathbf{zz}}$ a matriz covariância de \mathbf{z} , com elementos $[\sigma_{Z_i Z_j}]$. Note que $\sigma_{Z_i Z_j} = \bar{\sigma}_{Z_j Z_i}$ e que os elementos da diagonal principal $\sigma_{Z_i Z_i} = \sigma_{Z_i}^2$ são reais, de maneira que $\mathbf{K}_{\mathbf{zz}}$ é Hermitiana.

Alternativamente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} &= E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] \\
&= \begin{bmatrix} E[Z_1 Z_1] & E[Z_1 Z_2] & \cdots & E[Z_1 Z_N] \\ E[Z_2 Z_1] & E[Z_2 Z_2] & \cdots & E[Z_2 Z_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[Z_N Z_1] & E[Z_N Z_2] & \cdots & E[Z_N Z_N] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E[Z_1^2] & E[Z_1 Z_2] & \cdots & E[Z_1 Z_N] \\ E[Z_2 Z_1] & E[Z_2^2] & \cdots & E[Z_2 Z_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[Z_N Z_1] & E[Z_N Z_2] & \cdots & E[Z_N^2] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{Z_1}^2 & \tilde{\sigma}_{Z_1 Z_2} & \cdots & \tilde{\sigma}_{Z_1 Z_N} \\ \tilde{\sigma}_{Z_2 Z_1} & \tilde{\sigma}_{Z_2}^2 & \cdots & \tilde{\sigma}_{Z_2 Z_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}_{Z_N Z_1} & \tilde{\sigma}_{Z_N Z_2} & \cdots & \tilde{\sigma}_{Z_N}^2 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.79}$$

onde $\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}$ é a matriz de pseudo-covariância de \mathbf{z} , simétrica e com todos seus elementos complexos. Uma VA multivariada complexa gaussiana e de média nula pode então ser caracterizada através da distribuição $\mathcal{CN}(0, \mathbf{K}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}\mathbf{z}})$.

Através da notação real composta

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}, \tag{2.80}$$

pode-se chegar a uma representação simplificada da p.d.f. complexa normal multivariada, sem uma matriz de pseudo-covariância. Nesse caso, a matriz covariância pode ser redefinida por

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} &= E[\mathbf{u}\mathbf{u}^T] \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} & \mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}^T & \mathbf{K}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.81}$$

com $\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$, $\mathbf{K}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = E[\mathbf{x}\mathbf{y}^T]$, como definidas para VAs reais, na seção anterior. Com essa notação, a p.d.f. normal, complexa, multivariada e de média nula $\mathcal{CN}(0, \mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}})$ pode ser simplesmente dada por

$$f_U(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2N} \det \mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{u} \right). \tag{2.82}$$

Assumindo que as VAs são próprias e circulares, a matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$ se anula e as matrizes $\mathbf{K}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ se tornam diagonais e idênticas ($\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$). Assim, a

matriz $\mathbf{K}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}$ se reduz para $\mathbf{K}_{\mathbf{U}\mathbf{U}} = \sigma_X^2 \mathbf{I}_{2N}$. Dessa forma, a p.d.f. $\mathbf{u} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_X^2 \mathbf{I}_{2N})$ pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} f_U(\mathbf{u}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2N} \sigma_X^{2N}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_X^2} \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{u}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_X)^N} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2\sigma_X^2}\right), \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana. Vale ressaltar, da discussão anterior, que a variância para uma VA complexa \mathbf{z} , dada por σ_Z^2 , está relacionada à variância da parte real (ou imaginária) por $\sigma_Z^2 = 2\sigma_X^2$.

2.9.3 Variáveis aleatórias quaterniônicas

Em razão da não-comutatividade da álgebra de quaternions, a generalização dos momentos estatísticos para uma única variável quaterniônica deve ser desenvolvida em maior detalhe.

Uma única VA quaterniônica Q pode ser expressa como a soma de quatro VAs reais A , B , C e D , como $Q = A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k}$. Mais uma vez, considerando que a VA quaterniônica será utilizada para modelar o ruído AWG, pode-se escrever $E[A] = \mu_A = 0$, $E[B] = \mu_B = 0$, $E[C] = \mu_C = 0$ e $E[D] = \mu_D = 0$ de maneira que

$$\begin{aligned} E[Q] &= E[A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k}] \\ &= E[A] + E[B]\mathbf{i} + E[C]\mathbf{j} + E[D]\mathbf{k} \\ \mu_Q &= \mu_A + \mu_B\mathbf{i} + \mu_C\mathbf{j} + \mu_D\mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

O segundo momento estatístico quaterniônico possui quatro formas distintas, baseadas na conjugação quaterniônica e em suas três involuções canônicas, como desenvolvido a seguir:

$$\begin{aligned} E[Q\bar{Q}] &= E[\bar{Q}Q] = E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A - B\mathbf{i} - C\mathbf{j} - D\mathbf{k})] \\ &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A - B\mathbf{i} - C\mathbf{j} - D\mathbf{k})] \\ &= E[A^2 + B^2 + C^2 + D^2] \\ &= E[A^2] + E[B^2] + E[C^2] + E[D^2] \\ \sigma_Q^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 + \sigma_D^2, \end{aligned} \quad (2.85)$$

sendo $\sigma_Q^2 \in \mathbb{R}$ a variância de Q .

Para a involução canônica \bar{Q}^i

$$\begin{aligned}
E[Q\bar{Q}^i] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})\overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^i}] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A - B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + 2(AC - BD)\mathbf{j} + 2(AD + BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] + E[B^2] - E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AC] - E[BD])\mathbf{j} + 2E[AD + BC]\mathbf{k} \\
\sigma_{1i} &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AC} - \sigma_{BD})\mathbf{j} + 2(\sigma_{AD} + \sigma_{BC})\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

e

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^i Q] &= E[\overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^i}(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[(A - B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + 2(AC + BD)\mathbf{j} + 2(AD - BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] + E[B^2] - E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AC] + E[BD])\mathbf{j} + 2E[AD - BC]\mathbf{k} \\
\sigma_{i1} &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AC} + \sigma_{BD})\mathbf{j} + 2(\sigma_{AD} - \sigma_{BC})\mathbf{k},
\end{aligned} \tag{2.87}$$

em razão da não comutatividade dos quatérnions, existem duas covariâncias para a involução em \mathbf{i} , sendo $\sigma_{1i}, \sigma_{i1} \in \mathbb{H}$, ambas quatérnions degenerados, sem o componente \mathbf{i} .

Para a involução canônica \bar{Q}^j

$$\begin{aligned}
E[Q\bar{Q}^j] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})\overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^j}] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 + C^2 - D^2 + 2(AB + CD)\mathbf{i} + 2(AD - BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] + E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AB] + E[CD])\mathbf{i} + 2E[AD - BC]\mathbf{k} \\
\sigma_{1j} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 + \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AB} + \sigma_{CD})\mathbf{i} + 2(\sigma_{AD} - \sigma_{BC})\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

e

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^j Q] &= E[\overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^j}(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 + C^2 - D^2 + 2(AB - CD)\mathbf{i} + 2(AD + BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] + E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AB] - E[CD])\mathbf{i} + 2E[AD + BC]\mathbf{k} \\
\sigma_{j1} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 + \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AB} + \sigma_{CD})\mathbf{i} + 2(\sigma_{AD} + \sigma_{BC})\mathbf{k},
\end{aligned} \tag{2.89}$$

com as duas covariâncias, para a involução em \mathbf{j} , $\sigma_{1j}, \sigma_{j1} \in \mathbb{H}$ quatérnions degenerados, i.e., sem o componente \mathbf{j} .

Por fim, para a involução canônica \bar{Q}^k

$$\begin{aligned}
E[Q\bar{Q}^k] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})\overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^k}] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} - D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 - C^2 + D^2 + 2(AB - CD)\mathbf{i} + 2(AC + BD)\mathbf{j}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] - E[C^2] + E[D^2] + 2(E[AB] - E[CD])\mathbf{i} + 2E[AC + BD]\mathbf{j} \\
\sigma_{1k} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 - \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AB} - \sigma_{CD})\mathbf{i} + 2(\sigma_{AC} + \sigma_{BD})\mathbf{j}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

e

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^k Q] &= E[\overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^k}(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} - D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 - C^2 + D^2 + 2(AB + CD)\mathbf{i} + 2(AC - BD)\mathbf{j}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] + E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AB] + E[CD])\mathbf{i} + 2E[AC - BD]\mathbf{j} \\
\sigma_{k1} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 + \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AB} + \sigma_{CD})\mathbf{i} + 2(\sigma_{AC} - \sigma_{BD})\mathbf{j},
\end{aligned} \tag{2.91}$$

com as duas covariâncias, para a involução em \mathbf{k} , $\sigma_{1k}, \sigma_{k1} \in \mathbb{H}$ quatérnions degenerados, sem o componente \mathbf{k} .

Considerando agora os termos cruzados das involuções: para \mathbf{i} e \mathbf{j}

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^i \bar{Q}^j] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^i \overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^j}] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} - C\mathbf{j} - D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 - C^2 + D^2 + 2(AB - CD)\mathbf{i} - 2(AC + BD)\mathbf{j}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] - E[C^2] + E[D^2] + 2(E[AB] - E[CD])\mathbf{i} \\
&\quad - 2(E[AC] + E[BD])\mathbf{j} \\
\sigma_{ij} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 - \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AB} - \sigma_{CD})\mathbf{i} - 2(\sigma_{AC} + \sigma_{BD})\mathbf{j}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

e

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^j \bar{Q}^i] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^j \overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^i}] \\
&= E[(A - B\mathbf{i} + C\mathbf{j} - D\mathbf{k})(A - B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 - C^2 + D^2 + 2(CD - AB)\mathbf{i} + 2(AC + BD)\mathbf{j}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] - E[C^2] + E[D^2] + 2(E[CD] - E[AB])\mathbf{i} \\
&\quad + 2(E[AC] + E[BD])\mathbf{j} \\
\sigma_{ji} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 - \sigma_C^2 + \sigma_D^2 + 2(\sigma_{CD} - \sigma_{AB})\mathbf{i} + 2(\sigma_{AC} + \sigma_{BD})\mathbf{j};
\end{aligned} \tag{2.93}$$

para \mathbf{i} e \mathbf{k}

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^i \bar{Q}^k] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^i \overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^k}] \\
&= E[(A + B\mathbf{i} - C\mathbf{j} - D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} - D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 + C^2 - D^2 + 2(AB + CD)\mathbf{i} + 2(BC - AD)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] + E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AB] + E[CD])\mathbf{i} \\
&\quad + 2(E[BC] - E[AD])\mathbf{k} \\
\sigma_{ik} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 + \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AB} + \sigma_{CD})\mathbf{i} + 2(\sigma_{BC} - \sigma_{AD})\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

e

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^k \bar{Q}^i] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^k \overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^i}] \\
&= E[(A - B\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A - B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 - B^2 + C^2 - D^2 - 2(AB + CD)\mathbf{i} + 2(AD - BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] - E[B^2] + E[C^2] - E[D^2] - 2(E[AB] + E[CD])\mathbf{i} \\
&\quad + 2(E[AD] - E[BC])\mathbf{k} \\
\sigma_{ki} &= \sigma_A^2 - \sigma_B^2 + \sigma_C^2 - \sigma_D^2 - 2(\sigma_{AB} + \sigma_{CD})\mathbf{i} + 2(\sigma_{AD} - \sigma_{BC})\mathbf{k};
\end{aligned} \tag{2.95}$$

finalmente, para \mathbf{j} e \mathbf{k}

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^j \bar{Q}^k] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^j \overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^k}] \\
&= E[(A - B\mathbf{i} + C\mathbf{j} - D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} - D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + 2(AC - BD)\mathbf{j} - 2(AD + BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] + E[B^2] - E[C^2] - E[D^2] + 2(E[AC] - E[BD])\mathbf{j} \\
&\quad - 2(E[AD] + E[BC])\mathbf{k} \\
\sigma_{jk} &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{AC} - \sigma_{BD})\mathbf{j} - 2(\sigma_{AD} + \sigma_{BC})\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

e

$$\begin{aligned}
E[\bar{Q}^k \bar{Q}^j] &= E[(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^k \overline{(A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k})^j}] \\
&= E[(A - B\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D\mathbf{k})(A + B\mathbf{i} - C\mathbf{j} + D\mathbf{k})] \\
&= E[A^2 + B^2 - C^2 - D^2 + 2(BD - AC)\mathbf{j} + 2(AD + BC)\mathbf{k}] \\
&= E[A^2] + E[B^2] - E[C^2] - E[D^2] + 2(E[BD] - E[AC])\mathbf{j} \\
&\quad + 2(E[AD] + E[BC])\mathbf{k} \\
\sigma_{kj} &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - \sigma_C^2 - \sigma_D^2 + 2(\sigma_{BD} - \sigma_{AC})\mathbf{j} + 2(\sigma_{AD} + \sigma_{BC})\mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Por fim, após esse longo desenvolvimento algébrico, a matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}$ é dada por

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \sigma_Q^2 & \sigma_{1i} & \sigma_{1j} & \sigma_{1k} \\ \sigma_{i1} & \sigma_Q^2 & \sigma_{ij} & \sigma_{ik} \\ \sigma_{j1} & \sigma_{ji} & \sigma_Q^2 & \sigma_{jk} \\ \sigma_{k1} & \sigma_{ki} & \sigma_{kj} & \sigma_Q^2 \end{bmatrix}, \tag{2.98}$$

sendo possível verificar, através de todas as covariâncias desenvolvidas, que essa matriz possui simetria conjugada quaterniônica (i.e., $\mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} = \mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^Q$), de maneira que a transposição seguida da conjugação quaterniônica resulta na mesma matriz.

A p.d.f. de uma distribuição normal quaterniônica $Q \sim \mathcal{QN}(0, \mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}})$ é então definida por (LE BIHAN, 2017)

$$f_Q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}}} \exp \left(-\frac{1}{2} q^Q \mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}^{-1} q \right). \quad (2.99)$$

Uma VA de distribuição normal quaterniônica, assim como no caso complexo, será própria se sua matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}$ for diagonal, o que será possível se os diferentes componentes com base $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ forem descorrelacionados entre si. Garantindo também a circularidade, de maneira que os componentes sejam i.i.d. ($\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_D^2$), de maneira que $\sigma_Q^2 = 4\sigma_A^2$, a p.d.f. para uma única variável, com distribuição $\mathcal{QN}(0, \sigma_A^2 \mathbf{I})$, pode ser reduzida para

$$\begin{aligned} f_Q(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(4\sigma_A^2)^4}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_A^2} q^Q \mathbf{I} q \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} 16\sigma_A^4} \exp \left(-\frac{\|q\|}{2\sigma_A^2} \right). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Assim, analisando o canal AWGN mais uma vez, porém agora considerando sinalização quaterniônica,

$$r(n) = \alpha s(n) + q(n), \quad (2.101)$$

onde $r(n), s(n), q(n) \in \mathbb{H}$, com $q \sim \mathcal{QN}(0, \sigma_q^2)$. Comparado aos casos real e complexo, para uma mesma SNR, agora dada por

$$\text{SNR} = \frac{\alpha^2 E_s}{\sigma_Q^2} \quad (2.102)$$

percebe-se pela razão das potência de ruído quaterniônico e real, esta última definida na Eq. (2.63) e relacionadas por

$$\sigma_X^2 = \sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma_C^2 = \sigma_D^2 = \frac{\sigma_Q^2}{4} = \left(\frac{\sigma_Q}{2} \right)^2 \quad (2.103)$$

de maneira que, para o caso quaterniônico

$$\text{SNR} = \frac{4\alpha^2 E_s}{\sigma_X^2}. \quad (2.104)$$

Isso implica uma potencial vantagem de 6 decibéis, para o mesmo valor de SNR entre a sinalização real e quaterniônica. Por sua vez, isso implica uma potencial vantagem de 3 decibéis na SNR entre a sinalização complexa e quaterniônica. Porém, para essa vantagem ser mantida, é necessário manter a ortogonalidade dos componentes em fase e em quadratura, bem como o isolamento dos componentes polarizadas.

Uma VA quaterniônica pode ser generalizada para o problema multivariado, com N valores de $\mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i} + \mathbf{c}\mathbf{j} + \mathbf{d}\mathbf{k}$, representados por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \mathbf{i} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \mathbf{j} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \mathbf{k}, \quad (2.105)$$

Usando a representação real composta \mathbf{v} , de dimensão $4N \times 1$, para VAs quaterniônicas

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

sua matriz covariância $4N \times 4N$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] &= \begin{bmatrix} E[\mathbf{a}\mathbf{a}^T] & E[\mathbf{a}\mathbf{b}^T] & E[\mathbf{a}\mathbf{c}^T] & E[\mathbf{a}\mathbf{d}^T] \\ E[\mathbf{b}\mathbf{a}^T] & E[\mathbf{b}\mathbf{b}^T] & E[\mathbf{b}\mathbf{c}^T] & E[\mathbf{b}\mathbf{d}^T] \\ E[\mathbf{c}\mathbf{a}^T] & E[\mathbf{c}\mathbf{b}^T] & E[\mathbf{c}\mathbf{c}^T] & E[\mathbf{c}\mathbf{d}^T] \\ E[\mathbf{d}\mathbf{a}^T] & E[\mathbf{d}\mathbf{b}^T] & E[\mathbf{d}\mathbf{c}^T] & E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{K}_{AC} & \mathbf{K}_{AD} \\ \mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BC} & \mathbf{K}_{BD} \\ \mathbf{K}_{CA} & \mathbf{K}_{CB} & \mathbf{K}_{CC} & \mathbf{K}_{CD} \\ \mathbf{K}_{DA} & \mathbf{K}_{DB} & \mathbf{K}_{DC} & \mathbf{K}_{DD} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{K}_{AC} & \mathbf{K}_{AD} \\ \mathbf{K}_{AB}^T & \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BC} & \mathbf{K}_{BD} \\ \mathbf{K}_{AC}^T & \mathbf{K}_{BC}^T & \mathbf{K}_{CC} & \mathbf{K}_{CD} \\ \mathbf{K}_{AD}^T & \mathbf{K}_{BD}^T & \mathbf{K}_{DC}^T & \mathbf{K}_{DD} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

sendo simétrica e ficando definida em termos das matrizes covariância dos componentes \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e \mathbf{d} da notação real composta.

A p.d.f. multivariada quaterniônica na representação polar composta é então dada por

$$f_V(\mathbf{v}) = \frac{1}{(\pi/2)^{2N} \sqrt{\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{v} \right), \quad (2.108)$$

conforme descrito em (JAVED et al., 2020). Assim como discutido acima, para uma única VA na notação quaterniônica com distribuição i.i.d. será própria e circular. Isso garante

que a matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ é bloco diagonal

$$\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathbf{C}\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\mathbf{D}\mathbf{D}} \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

De maneira similar, também é simples verificar que as matrizes $\mathbf{K}_{\mathbf{A}\mathbf{A}}$, $\mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}$, $\mathbf{K}_{\mathbf{C}\mathbf{C}}$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{D}\mathbf{D}}$ são diagonais, da forma $\sigma_A^2 \mathbf{I}_N$. Assim, a matriz covariância $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \sigma_A^2 \mathbf{I}_{4N}$ fica também definida. Como $\det \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}} = \det \sigma_A^2 \mathbf{I}_{4N} = (\sigma_A^2)^{4N}$ e $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{-1} = \frac{1}{\sigma_A^2} \mathbf{I}_{4N}$, a p.d.f. pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f_V(\mathbf{v}) &= \frac{2^{2N}}{(\pi\sigma_A^2)^{2N}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_A^2} \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{v}\right) \\ &= \frac{4^N}{(\pi\sigma_A^2)^{2N}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2\sigma_A^2}\right). \end{aligned} \quad (2.110)$$

3 Sistemas de comunicações

Neste capítulo, são revisitados alguns aspectos teóricos, já estabelecidos na literatura especializada, relevantes a esta pesquisa. O intuito do texto que segue não é apresentar uma revisão exaustiva ou mesmo estritamente completa dos conteúdos abordados, mas apenas discorrer acerca do embasamento teórico utilizado através de uma única notação concisa. O leitor interessado é convidado a explorar as referências citadas.

3.1 MIMO

Técnicas de múltiplas antenas podem ser classificadas de maneira ampla em duas categorias: esquemas de multiplexação ou sistemas de diversidade. Apenas a última é de interesse para a pesquisa aqui desenvolvida. A diversidade de antenas pode ser categorizada em três subáreas (CHO et al., 2010):

Diversidade no espaço — múltiplas antenas, separadas de pelo menos dez comprimentos de onda, são usadas na implementação de canais sem fio independentes;

Diversidade na polarização — canais independentes são implementados através da polarização horizontal e vertical;

Diversidade de ângulo — múltiplas antenas direcionais receptoras, com diferentes apontamentos, são usadas para receber sinais de diferentes ângulos.

Nesta pesquisa, serão considerados sistemas MIMO tradicionais que aplicam a primeira, generalizando-os para também utilizar a segunda.

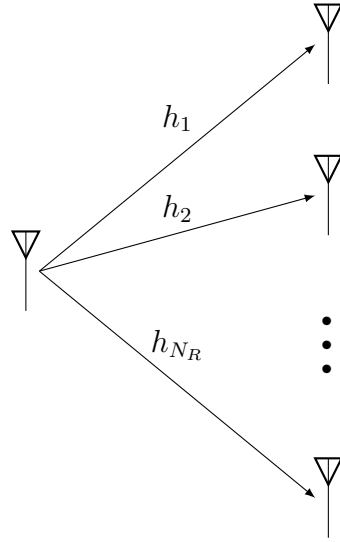
3.1.1 Diversidade de receptor

Tomando um sistema com N_R antenas receptoras e apenas uma antena transmissora, designado SIMO, representado na Figura 3.1, que possui canal expresso por

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N_R} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

para N_R canais independentes h_i .

Figura 3.1 – Sistema de comunicação **SIMO** com uma antena transmissora e N_R antenas receptoras.



No sistema **SIMO**, uma única sequência transmitida $x(n)$ é detectada por N_R receptores, o que pode ser descrito, matematicamente, através de

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{h}x(n) + \mathbf{z}(n);$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_{N_R}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{N_R} \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_{N_R}(n) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

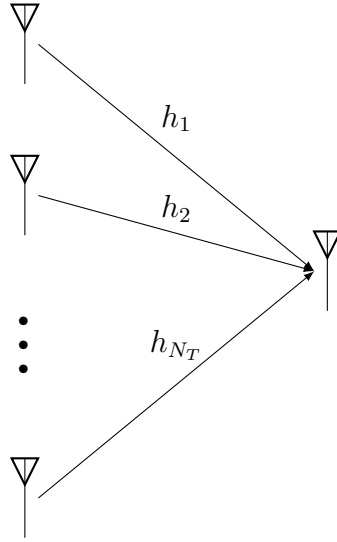
onde $\mathbf{y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_{N_R}(n)]^T$ representa cada um dos N_R sinais recebidos e $\mathbf{z}(n) = [z_1(n), z_2(n), \dots, z_{N_R}(n)]^T$, os termos de ruído **i.i.d.** $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. O operador $(\cdot)^T$ denota a transposição matricial.

Usualmente, os sinais recebidos são combinados no receptor através de *Maximal Rate Receiver Combining* — *Combinação de Máxima Razão na Recepção* (MRRC) (CHO et al., 2010), o que oferece alto ganho de diversidade, porém com duas limitações importantes: no *downlink* de um sistema móvel de comunicações, a complexidade fica na unidade móvel; adicionalmente, por suas dimensões reduzidas, há limitações práticas do número de antenas receptoras que podem ser construídas no terminal móvel.

3.1.2 Diversidade de transmissor

As limitações de diversidade no receptor podem ser mitigadas através do uso da diversidade no transmissor, como o sistema **MISO** com N_T antenas transmissoras (Figura 3.2). O ganho de diversidade pode ser atingido através de **STBC** no transmissor, o que permite ter um detector com processamento linear no receptor (CHO et al., 2010). **STBCs** são baseados em projetos ortogonais, discutidos subsequentemente.

Figura 3.2 – Sistema de comunicação **MISO** com N_T antenas transmissoras e uma antena receptora.



Em um sistema **MISO**, várias sequências transmitidas $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_{N_T}(n)]^T$ são detectadas por um único receptor, o que pode ser descrito, matematicamente, através de

$$y(n) = \mathbf{h}\mathbf{x}(n) + z(n);$$

$$y(n) = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{N_T}] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_{N_T}(n) \end{bmatrix} + z(n), \quad (3.3)$$

onde $y(n)$ representa o sinal recebido, $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \dots, h_{N_T}]$ representam os canais e $z(n)$ o termo de ruído $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

3.1.3 Diversidade de transmissor e receptor

Ambas as diversidades de transmissor e receptor podem ser exploradas simultaneamente, através de um sistema **MIMO**, com N_T antenas transmissoras e N_R antenas receptoras, conforme ilustra a Figura 3.3. Isso ajuda a equilibrar a complexidade para o *downlink* e o *uplink* entre os terminais móveis e a estação rádio base.

Tomando uma sequência de N_S símbolos transmitidos, um sistema **MIMO** com N_R antenas receptoras e N_T antenas transmissoras pode ser representado sucintamente na forma matricial como

Figura 3.3 – Sistema de comunicação MIMO com N_T antenas transmissoras e N_R antenas receptoras.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(1) & y_1(2) & \cdots & y_1(N_S) \\ y_2(1) & y_2(2) & \cdots & y_2(N_S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N_R}(1) & y_{N_R}(2) & \cdots & y_{N_R}(N_S) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,N_T} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,N_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_R,1} & h_{N_R,2} & \cdots & h_{N_R,N_T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \cdots & x_1(N_S) \\ x_2(1) & x_2(2) & \cdots & x_2(N_S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N_T}(1) & x_{N_T}(2) & \cdots & x_{N_T}(N_S) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} z_1(1) & z_1(2) & \cdots & z_1(N_S) \\ z_2(1) & z_2(2) & \cdots & z_2(N_S) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N_R}(1) & z_{N_R}(2) & \cdots & z_{N_R}(N_S) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}}, \quad (3.4)$$

analisando as dimensões das matrizes

$$\mathbf{Y}_{N_R \times N_S} = \mathbf{H}_{N_R \times N_T} \mathbf{X}_{N_T \times N_S} + \mathbf{Z}_{N_R \times N_S}, \quad (3.5)$$

define-se a matriz $\mathbf{Y}_{N_R \times N_S}$ dos N_S sinais recebidos para cada uma das N_R antenas receptoras, a matriz $\mathbf{X}_{N_T \times N_S}$ dos N_S sinais transmitidos para cada uma das N_T antenas transmissoras, a matriz $\mathbf{Z}_{N_R \times N_S}$ dos N_S termos i.i.d. de ruído $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ em cada uma das N_R antenas receptoras e, por fim, a matriz $\mathbf{H}_{N_R \times N_T}$ dos canais independentes entre os pares de antenas transmissoras e receptoras.

A notação $\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}$ representa uma generalização dos casos *Single-Input and Single-Output — Única-Entrada e Única-Saída (SISO)*, *SIMO*, *MISO* e *MIMO*, dependendo da escolha de N_T e N_R . Reescrevendo-a, isolando \mathbf{X} , assumindo elementos complexos

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z} \\ \mathbf{H}^H \mathbf{Y} &= \mathbf{H}^H \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo que $(\cdot)^H$ denota a transposição Hermitiana. Desde que \mathbf{H} seja unitária (i.e., $\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H}^H = \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a matriz identidade), a estimação dos símbolos transmitidos pode ser feita com processamento linear através de

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{H}^H \mathbf{Y} + \mathbf{H}^H \mathbf{Z}. \quad (3.7)$$

A próxima seção trata em maior detalhe as restrições do produto matricial $\mathbf{H} \mathbf{X}_{N_R \times N_S}$, para detecção ótima, com processamento linear, em sistemas MIMO.

3.2 Projetos ortogonais

Nesta seção será apresentada apenas uma introdução ao assunto. Uma revisão abrangente de projetos ortogonais pode ser encontrada em (SEBERRY; SPENCE; WYSOCKI, 2005; SEBERRY et al., 2008).

3.2.1 Projetos ortogonais reais

Uma *Real Orthogonal Design* — Projeto Ortogonal Real (ROD) de ordem n e tipo (s_1, s_2, \dots, s_k) , nas variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_k , é uma matriz \mathbf{A} $n \times n$, tal que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \sum_{l=1}^k s_l x_l^2 \mathbf{I}_n, \quad (3.8)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade de ordem n .

Projetos ortogonais reais foram estudados em (GERAMITA; GERAMITA; WALLIS, 1976; GERAMITA; WALLIS, 1975a; GERAMITA; SEBERRY, 1974; GERAMITA; WALLIS, 1975b). É possível obter ROD para qualquer ordem n , porém isso limita bastante a constelação de símbolos que deve ser real (e.g., BPSK). Como exemplo de um ROD(2, 2), tem-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

sendo simples demonstrar, neste caso, que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) \mathbf{I}_2. \quad (3.10)$$

3.2.2 Projetos ortogonais complexos

A generalização de COD foi um passo natural. O COD foi estudado originalmente em (GERAMITA; GERAMITA, 1978). Um COD pode ser representado por uma matriz \mathbf{C} , $n \times n$, de tipo (s_1, s_2, \dots, s_k) , nas variáveis complexas z_1, z_2, \dots, z_k (suas conjugadas e multiplicações por j), satisfazendo

$$\mathbf{C}^H \mathbf{C} = \sum_{l=1}^k s_l |z_l|^2 \mathbf{I}_n. \quad (3.11)$$

Um COD, como definido na Eq. (3.11), possui a vantagem de permitir símbolos complexos, possibilitando o uso de *Phase Shift Keying — Chaveamento de Fase (PSK)* e QAM.

3.2.2.1 STBC de Alamouti

O primeiro sistema *Multiple-Input and Multiple-Output Space-Time Block Code — Código de Bloco Espaço-Temporal para Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas (MIMO-STBC)*¹, baseado no COD

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

em que $(\bar{\cdot})$ representa a conjugação complexa, foi capaz de oferecer um ganho de diversidade (*full diversity*), usando um detetor ótimo relativamente simples e processamento linear. O código também é *full-rate*, i.e., dois símbolos (z_1 e z_2) são transmitidos a cada dois tempos de símbolo. Devido à baixa ordem ($n = 2$), o atraso do bloco não traz efeitos significantes ao sistema de transmissão (ALAMOUTI, 1998).

O COD da Eq. (3.12) não está restrito a explorar as diversidades de espaço e tempo (STBC), sendo possível, se conveniente, explorar outras diversidades, tais como espaço e frequência (*Space-Frequency Block Code — Código de Bloco Espaço-Frequência (SFBC)*). Porém, sua proposta STBC é mais interessante no tocante à eficiência espectral (ALAMOUTI, 1998).

3.2.3 Projetos ortogonais complexos generalizados

É interessante notar que um projeto ortogonal (seja ROD, COD, etc.) não precisa ser, necessariamente, uma matriz quadrada. Um *Generalized Complex Orthogonal Design — Projeto Ortogonal Complexo Generalizado (GCOD)* é uma matriz \mathbf{G} de ordem n , dimensão $r \times n$, de tipo (s_1, s_2, \dots, s_k) , nas variáveis complexas z_1, z_2, \dots, z_k (suas conjugadas e multiplicações por j), tal que

$$\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \sum_{l=1}^k s_l |z_l|^2 \mathbf{I}_n. \quad (3.13)$$

Por sua assimetria, o GCOD se presta a uma definição prática mais simples de alguns conceitos importantes, já citados, porém ainda não elaborados de forma precisa:

- A ordem n , definida pelo número de colunas do STBC, representa o número de antenas do sistema MIMO;
- O atraso de código r , definido pelo número de linhas do STBC, representa o número de símbolos da transmissão;

¹ O termo STBC foi cunhado posteriormente em (TAROKH; JAFARKHANI; CALDERBANK, 1999).

- O número k das variáveis complexas utilizadas no código, sendo que a razão k/r representa a taxa do código.

Em (TAROKH; JAFARKHANI; CALDERBANK, 1999), foram generalizados e formalizados muitos dos conceitos introduzidos em (ALAMOUTI, 1998). Infelizmente, as diversas vantagens do STBC de Alamouti não puderam ser reproduzidas para ordens superiores:

- Em (LIANG; XIA, 2003), foi provado não existir GCODs com ordem maior que 2, *full-rate*, com processamento linear. Isso significa que, para buscar um maior ganho de diversidade com múltiplas antenas ($n > 2$), deve haver um compromisso entre taxa e complexidade do receptor.
- Em (CHUNG TRAN et al., 2004; LIANG, 2003; WANG; XIA, 2003; XU; GONG; LETAIEF, 2004), foram explorados GCODs de ordem superior a dois, com taxas próximas da unidade, porém mantendo a ortogonalidade e, conseqüentemente, a simplicidade no receptor. Particularmente em (LIANG, 2003), fica provado que a taxa máxima é $(n + 1)/2n$, para ordem $n > 2$.
- Em (JAFARKHANI, 2001), optou-se por sacrificar a ortogonalidade e por conseguinte, a simplicidade do receptor para manter a taxa unitária. Seu código quasi-ortogonal permite a detecção ótima de pares de símbolos. Os resultados apresentaram, aproximadamente, 2 dB de *coding advantage*, quando comparado ao código de Alamouti para SNR menores do que 20 dB.

Ilustrando esses conceitos, toma-se por exemplo o COD(4, 4) proposto em (LIANG, 2003), dado por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} z_3 & 0 & z_2 & z_1 \\ 0 & z_3 & \bar{z}_1 & -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_2 & z_1 & -\bar{z}_3 & 0 \\ \bar{z}_1 & -z_2 & 0 & -\bar{z}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Cada coluna representa uma antena transmissora, enquanto cada linha representa os quatro períodos de símbolo do bloco. Porém, só há três símbolos sendo transmitidos: z_1 , z_2 e z_3 , resultando em uma taxa $3/4$. Como o código não alcança a taxa máxima atingível de $5/8$, não se trata de um código *high-rate*.

Em comparação a este último, o código de ordem quatro, proposto em (JA-

FARKHANI, 2001), dado por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 & -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \\ -\bar{z}_3 & -\bar{z}_4 & \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \\ z_4 & -z_3 & -z_2 & z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

apesar de possuir taxa unitária, não é ortogonal.

3.2.4 Projetos ortogonais quaterniônicos

Dentre as álgebras hipercomplexas, os quatérnions \mathbb{H} , definidos no capítulo anterior, podem ser um caminho não apenas para vencer as limitações dos GCODs, mas também, por sua dimensão superior, permitir a exploração de outras diversidades (MUSHTAQ; ALI; HASSAN, 2017; ALI, 2020).

Pela construção de CD, um quatérnion pode ser decomposto em duas quantidades complexas (parte simplexa e parte perplexa). Essas variáveis complexas podem representar os componentes de polarização horizontal e vertical da onda eletromagnética (ISAEVA; SARYTCHEV, 1995; WYSOCKI; WYSOCKI; SEBERRY, 2006). Assim, os quatérnions constituem um campo útil para basear sistemas *Space-Time-Polarization Block Code* — Código de Bloco Espaço-Temporal-Polarização (STPBC), ou outras alternativas de diversidade.

Um QOD pode ser definido pela matriz \mathbf{D} de ordem n , dimensão $r \times n$, do tipo (s_1, s_2, \dots, s_k) nas variáveis quaterniônicas não-comutativas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ (e suas involuções canônicas, definidas pela Eq. (2.14)), satisfazendo

$$\mathbf{D}^Q \mathbf{D} = \sum_{l=1}^k s_l |\mathbf{a}_l|^2 \mathbf{I}_n, \quad (3.16)$$

onde $(\cdot)^Q$ denota a transposição conjugada quaterniônica.

3.3 Canais polarizados

Para poder explorar o ganho de diversidade espacial em um sistema MIMO deve ser garantido um espaçamento mínimo (de aproximadamente dez comprimentos de onda) entre os elementos irradiantes e receptores, o que não é simples em terminais móveis (BENGTSSON; TUFVESSON; EDFORS, 2015; SANGUINETTI; BJORNSSON; HOYDIS, 2020; TEMIZ et al., 2020). O uso de ondas polarizadas não somente oferece as vantagens da exploração de uma nova diversidade, mas também mitiga os problemas de integrar um *array* de antenas em um dispositivo móvel (JEON et al., 2012; PARCHIN et al., 2019; ZHANG et al., 2019).

Em razão de não idealidades do meio de propagação, dos elementos irradiantes e das antenas receptoras, não é possível garantir o isolamento entre os componentes polarizados. A *Cross-Polarization Discrimination* — *Discriminação de Polarização Cruzada (XPD)*, comumente dada em decibéis, representa uma relação de isolamento entre os sinais polarizados, combinando os efeitos do canal e das antenas (YAMADA et al., 2019).

Dois sinais transmitidos $x^{(h)}(n)$ e $x^{(v)}(n)$ nas polarizações horizontal e vertical, respectivamente, quando detectados em um receptor remoto através dos sinais recebidos $y^{(h)}(n)$ e $y^{(v)}(n)$, também nas polarizações horizontal e vertical, respectivamente, podem ser relacionados através de (JEON et al., 2012)

$$y^{(h)}(n) = h^{(hh)}x^{(h)}(n) + h^{(hv)}x^{(v)}(n) \quad (3.17)$$

$$y^{(v)}(n) = h^{(vh)}x^{(h)}(n) + h^{(vv)}x^{(v)}(n), \quad (3.18)$$

que em notação matricial, pode ser reescrita mais convenientemente por

$$\begin{bmatrix} y^{(h)}(n) \\ y^{(v)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^{(hh)} & h^{(hv)} \\ h^{(vh)} & h^{(vv)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(h)}(n) \\ x^{(v)}(n) \end{bmatrix}; \quad (3.19)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{H}\mathbf{x}(n).$$

Embora a notação represente a matriz \mathbf{H} como constante, não há restrições para deixá-la variante no tempo (i.e., $\mathbf{H}(n)$) se necessário.

Para um canal *AWGN*, a matriz \mathbf{H} pode ser simplificada como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

sendo que α está relacionado ao *XPD*, em decibéis, por

$$\alpha = 10^{-\text{XPD}/10}, \quad (3.21)$$

com medidas experimentais do *XPD* médio de 5,8 dB e desvio padrão de 5,4 dB para canais *Non Line-of-Sight* — *Sem Linha de Visada (NLoS)*. Para canais *Line-of-Sight* — *Com Linha de Visada (LoS)*, o *XPD* médio foi medido em 14 dB, com desvio padrão de 4,8 dB (JEON et al., 2012).

Através da construção de *CD* (Eq. (2.32)), os componentes dos sinais polarizados podem ser representados por um único sinal quaterniônico da forma

$$\mathbf{x}(n) = x^{(h)}(n) + x^{(v)}(n)\mathbf{j}; \quad (3.22)$$

$$\mathbf{y}(n) = y^{(h)}(n) + y^{(v)}(n)\mathbf{j}. \quad (3.23)$$

Isso permite que dois sinais complexos de polarização cruzada sejam representados através de um único sinal quaterniônico. As vantagens matemáticas dessa abordagem serão discutidas a seguir.

3.4 OFDM

A modulação OFDM tem se mostrado uma escolha usual em padrões de comunicação sem fio. O *Institute of Electrical and Electronics Engineers* — Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (IEEE), em sua família IEEE 802 de padrões para *Local Area Network* — Rede de Área Local (LAN) e *Metropolitan Area Network* — Rede de Área Metropolitana (MAN) padronizou duas redes sem fio: o padrão IEEE 802.11 para *Wireless Local Area Network* — Rede de Área Local Sem Fio (WLAN), comercialmente conhecido como Wi-Fi, que se tornou o padrão *de facto* para WLANs globalmente; e o padrão IEEE 802.16 para MANs sem fio, comercialmente conhecido como WiMAX. Inicialmente um concorrente do padrão LTE, para redes móveis 4G, o WiMAX não atingiu a penetração de mercado do Wi-Fi e LTE. Porém, essas tecnologias Wi-Fi, WiMAX, LTE e inclusive o 5G NR possuem um ponto em comum: sua camada física é implementada através de modulação OFDM (CHO et al., 2010; SAHU; SHRIVASTAVA; AGWEKAR, 2020).

A modulação OFDM possui várias vantagens em relação a outras modulações utilizadas em sistemas de transmissão. Para uma mesma banda de transmissão, comparado a sistemas de uma única portadora, a subdivisão das bandas permite a utilização de equalizadores simples, mesmo em canais seletivos em frequência. Como as subportadoras são separadas por ortogonalidade, ficando sobrepostas em frequência, a modulação OFDM possui maior eficiência em banda quando comparada a outros esquemas multi-portadoras, tal como *Frequency-Division Multiplexing* — Multiplexação por Divisão na Frequência (FDM) sem a necessidade de filtros abruptos entre as subdivisões da banda (CHO et al., 2010; SAHU; SHRIVASTAVA; AGWEKAR, 2020).

Porém, sem a filtragem, sinais OFDM podem produzir *Adjacent Channel Interference* — Interferência em Canal Adjacente (ACI) substancial, o que deve ser mitigado através de VC, que são subportadoras não utilizadas nos extremos da banda ocupada, como uma *Guard Band* — Banda de Guarda (GB). Também é necessário, como será discutido a seguir, um *Guard Interval* — Intervalo de Guarda (GI), normalmente implementado como um CP. Porém, mesmo com essas complexidades adicionais, para um alto número de subportadoras (pelo menos 64), é possível manter alta eficiência espectral na transmissão OFDM (CHO et al., 2010; SAHU; SHRIVASTAVA; AGWEKAR, 2020).

Na verdade, o aspecto mais pobre de um sistema OFDM é a sua alta *Peak-to-Average Power Ratio* — Razão da Potência de Pico pela Média (PAPR). Isso diminui a *Signal-to-Quantization Noise Ratio* — Razão Sinal-Ruído de Quantização (SQNR) dos conversores Digital-Analógico (DA) e Analógico-Digital (AD), no transmissor e receptor, respectivamente. A alta PAPR também é responsável pela degradação da eficiência nos amplificadores de potência do transmissor em razão das suas não-linearidades (CHO et al., 2010; SAHU; SHRIVASTAVA; AGWEKAR, 2020).

3.4.1 Ortogonalidade

Tomando um sinal exponencial complexo contínuo $\varphi_k(t)$, de suporte compacto, definido por

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \exp(j2\pi f_k t), & 0 \leq t \leq T_{\text{sym}} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.24)$$

onde $f_k = k/T_{\text{sym}}$, para $k = 0, 1, \dots, N-1$, são N frequências (em Hz) harmonicamente relacionadas e T_{sym} é a duração (em s) do sinal. É simples demonstrar que $\varphi_k(t)$ é ortogonal

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} \varphi_k(t) \bar{\varphi}_l(t) dt &= \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} \exp(j2\pi f_k t) \exp(-j2\pi f_l t) dt \\ &= \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} \exp\left(j2\pi \frac{k}{T_{\text{sym}}} t\right) \exp\left(-j2\pi \frac{l}{T_{\text{sym}}} t\right) dt \\ &= \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} \exp\left(j2\pi \frac{k-l}{T_{\text{sym}}} t\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi(k-l)} \left[\exp\left(j2\pi \frac{k-l}{T_{\text{sym}}} t\right) \right]_0^{T_{\text{sym}}} \\ &= \frac{\exp(j2\pi(k-l)) - 1}{j2\pi(k-l)} \\ &= \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.25)$$

sendo $\delta_{k,l}$ o delta de Kronecker. Discretizando $\varphi_k(t)|_{t=nT} = \varphi_k(n)$, para $n \in \mathbb{Z}$ e T , o período de amostragem (em s), dado por $T = T_{\text{sym}}/N$, também demonstra-se que, para o caso discreto, a ortogonalidade é mantida

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k(n) \bar{\varphi}_l(n) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi f_k nT) \exp(-j2\pi f_l nT) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j2\pi \frac{k}{T_{\text{sym}}} nT\right) \exp\left(-j2\pi \frac{l}{T_{\text{sym}}} nT\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j2\pi \frac{k-l}{N} n\right) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - \exp(j2\pi(k-l))}{1 - \exp(j2\pi(k-l)/N)} \\ &= \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.26)$$

A ortogonalidade é uma condição necessária, porém não suficiente, para que, mesmo sem a aplicação de filtros, o sinal **OFDM** seja livre de **ICI**.

3.4.2 Modulação OFDM

Uma fonte de bits é mapeada para uma sequência de símbolos a_k (e.g., BPSK, QAM, etc.), onde a_k representa o k -ésimo símbolo para $k = 0, 1, 2, \dots$ e usando como filtro de conformação (*pulse shaping*) as exponenciais complexas harmonicamente relacionadas, deslocadas no tempo, segundo a definição

$$g_{m,k}(t) = \begin{cases} \exp(j2\pi f_k(t - mT_{\text{sym}})) & 0 \leq t \leq T_{\text{sym}} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.27)$$

É possível agrupar N símbolos a_k , cada um com duração T , para cada sub-portadora $k = 0, 1, \dots, N-1$ de $X_m(k)$, com $m = 0, 1, 2, \dots$. A separação entre as subportadoras pode ser escrita como $\Delta f = 1/T_{\text{sym}}$. Assim, para cada índice m , o sinal $X_m(k)$ possui duração $T_{\text{sym}} = NT$. O sinal OFDM contínuo $x_m(t)$, em banda base, pode ser expressado como

$$x_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi f_k(t - mT_{\text{sym}})). \quad (3.28)$$

Amostrando o sinal $x_m(t)|_{t=mT_{\text{sym}}+nT} = x_m(n)$, chega-se à seguinte definição do sinal OFDM banda base discreto $x_m(n)$. Assim,

$$\begin{aligned} x_m(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi f_k(mT_{\text{sym}} + nT - mT_{\text{sym}})) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi f_k nT) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi k nT/T_{\text{sym}}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi k n/N). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Exceto pelo fator de escala $1/N$, a Eq. (3.29) é idêntica a IDFT, na Eq. (2.40). Assim, a modulação OFDM pode ser eficientemente realizada através de algoritmos de IFFT. A Figura 3.4 ilustra o diagrama de blocos de um modulador OFDM.

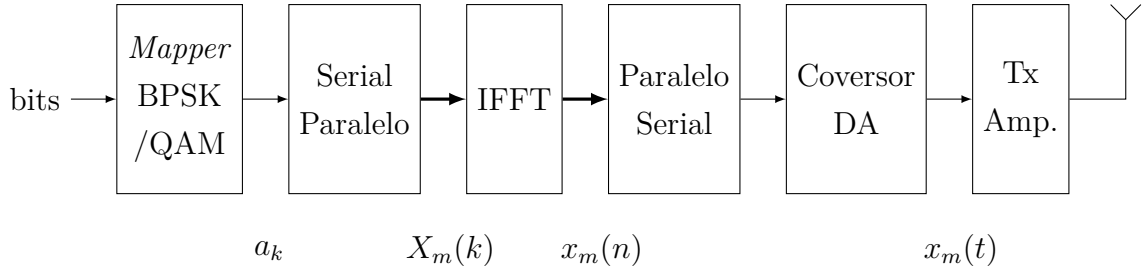
3.4.3 Demodulação OFDM

O sinal OFDM transmitido $x_m(t)$, ao passar por um canal de resposta ao impulso $h_m(t)$ e adicionando corrupção por AWGN, produzirá no receptor um sinal $y_m(t)$ da forma

$$y_m(t) = \int_0^{\infty} h_m(\tau) x_m(t - \tau) d\tau + z_m(t), \quad (3.30)$$

onde $z_m(t)$ é uma variável aleatória complexa de distribuição $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$, sendo σ^2 a potência média do ruído. Desconsiderando, por hora, os efeitos do canal e do ruído (i.e.,

Figura 3.4 – Diagrama de blocos representando um modulador OFDM simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.



Fonte: Autoria própria.

$h_m(t) = \delta(t)$ e $\sigma^2 = 0$), o sinal banda base recebido, no intervalo $mT_{\text{sym}} < t \leq mT_{\text{sym}} + nT$, descrito por

$$y_m(t) = \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi f_k(t - mT_{\text{sym}})), \quad (3.31)$$

que demodulado, com o pulso $\bar{g}_{m,k}(t) =$, complexo conjugado da Eq. (3.27), resulta em

$$\begin{aligned}
 Y_m(k) &= \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} y_m(t) \exp(-j2\pi f_k(t - mT_{\text{sym}})) dt \\
 &= \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi f_l(t - mT_{\text{sym}})) \right] \exp(-j2\pi f_k(t - mT_{\text{sym}})) dt \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \frac{1}{T_{\text{sym}}} \int_0^{T_{\text{sym}}} \exp(j2\pi(f_l - f_k)(t - mT_{\text{sym}})) dt \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \delta_{l,k} = X_m(k),
 \end{aligned} \quad (3.32)$$

ou seja, o símbolo transmitido $X_m(k)$ é recuperado através da ortogonalidade das subportadoras. Considerando agora as amostras do sinal $y_m(t)|_{t=mT_{\text{sym}}+nT} = y_m(n)$, que fica da forma

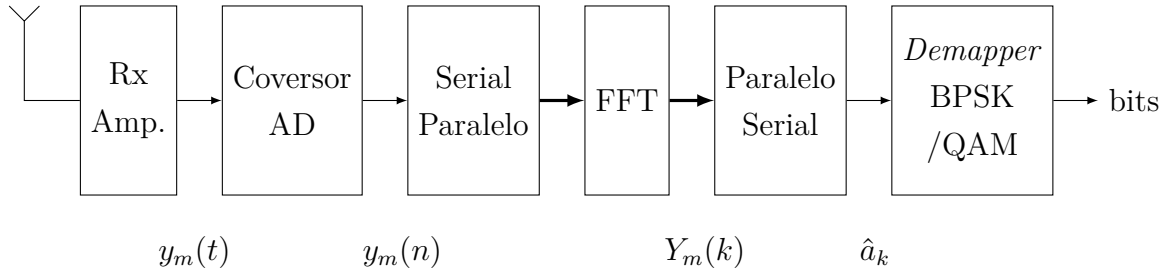
$$\begin{aligned}
 y_m(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi f_k nT) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi kn/N),
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 Y_m(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_m(n) \exp(-j2\pi kn/N) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi ln/N) \right] \exp(-j2\pi kn/N) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi(l-k)n/N) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \delta_{l,k} = X_m(k).
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

A Eq. (3.34), por sua vez, é idêntica a **DFT** na Eq. (2.39). Dado que a demodulação **OFDM** pode ser realizada através dos algoritmos de **FFT**. A Figura 3.5 ilustra o diagrama de blocos de um demodulador **OFDM**.

Figura 3.5 – Diagrama de blocos representando um demodulador **OFDM** simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.



Fonte: Autoria própria.

Em uma transmissão sem erros, espera-se que os símbolos detectados \hat{a}_k no receptor (Figura 3.5) sejam iguais aos símbolos transmitidos a_k no transmissor (Figura 3.4).

3.4.4 Intervalo de guarda

Infelizmente os modelos simplificados do modulador e demodulador **OFDM** não são capazes de lidar com canais $h_m(t)$ seletivos na frequência (i.e., dispersivos no tempo) ou com a falta de sincronismo entre transmissor e receptor. Para isso, faz-se necessário incluir um **GI**.

Retomando da Eq. (3.30), o sinal recebido, em banda base no intervalo $mT_{\text{sym}} < t \leq mT_{\text{sym}} + nT$, dado por

$$y_m(t) = \int_0^\infty h_m(\tau) x_m(t - \tau) d\tau + z_m(t), \tag{3.35}$$

se amostrados por $t = nT$, pode ser representado por

$$y_m(n) = \sum_{r=0}^{\infty} h_m(r) x_m(n - r) + z_m(n). \tag{3.36}$$

O efeito da convolução é sobrepor cópias deslocadas de $x_m(n - r)$, cada uma multiplicada por seu coeficiente correspondente $h_m(r)$, de maneira a causar *Inter-Symbol Interference* — *Interferência Entre os Símbolos (ISI)*, removendo a ortogonalidade entre as subportadoras e assim degradando severamente a *Bit Error Rate* — *Taxa de Erro de Bit (BER)* no receptor.

Re-escrevendo o demodulador *OFDM*, a partir da Eq. (3.34), considerando agora os efeitos do canal, obtém-se

$$\begin{aligned}
 Y_m(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_m(n) \exp(-j2\pi kn/N) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^{\infty} h_m(r) x_m(n - r) + z_m(n) \right] \exp(-j2\pi kn/N) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{r=0}^{\infty} h_m(r) \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi l(n - r)/N) \right] \exp(-j2\pi kn/N) + Z_m(k) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{\infty} h_m(r) \exp(-j2\pi lr/N) X_m(l) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi(l - k)n/N) + Z_m(k) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{\infty} h_m(r) \exp(-j2\pi lr/N) X_m(l) \delta_{l,k} + Z_m(k) \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} h_m(r) \exp(-j2\pi kr/N) X_m(k) + Z_m(k) \\
 &= H_m(k) X_m(k) + Z_m(k), \quad \text{se } h_m(n) = 0, \text{ para } n \geq N.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Assim, desconsiderando o ruído, $Y_m(k) = H_m(k) X_m(k)$, o que permite a simples equalização dos efeitos do canal, no domínio da frequência. Isso também traz a interpretação que a relação entre $y_m(n)$, $h_m(n)$ e $x_m(n)$ é uma convolução circular, o que por hora, não é garantida.

Aproximando o canal $h_m(n)$ por um sistema *Finite Impulse Response* — *Resposta Impulsiva Finita (FIR)*, com suporte no intervalo $n = 0, 1, \dots, R$, com $R \in \mathbb{N}$, sendo que tipicamente $R \ll N$, haverá sobreposição temporal entre o final de $y_m(n)$ e o início de $y_{m+1}(n)$, dada por

$$y_m(n) = \sum_{r=0}^R h_m(r) x_m(n - r) + z_m(n). \tag{3.38}$$

Para manter a separação entre os m -ésimos símbolos *OFDM*, o *GI* deve ter duração $N_G \geq R$.

O *GI* é tipicamente implementado como um *CP*, o que permite redefinir a convolução linear da Eq. (3.38), para uma convolução circular, como

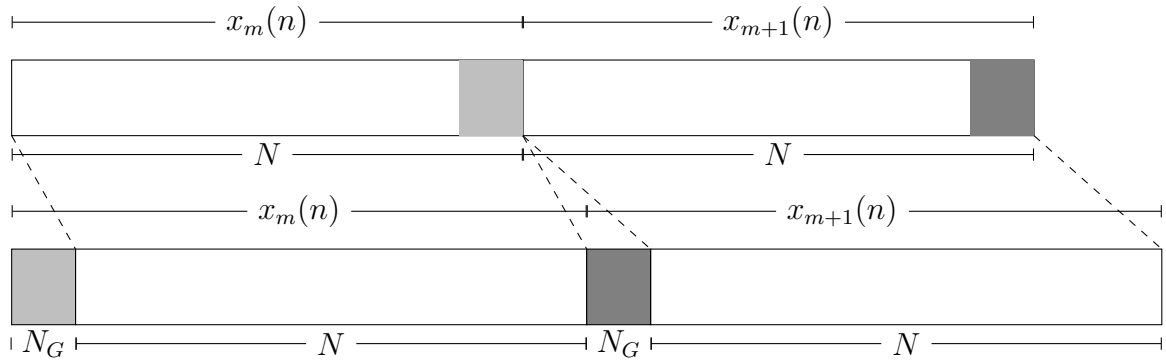
$$y_m(n) = \sum_{r=0}^R h_m(r) x'_m((n - r))_{N+N_G} + z_m(n), \tag{3.39}$$

para o mesmo resultado $y_m(n)$. A notação $((n - r))_{N+N_G}$ representa o operador modulo (i.e. $n - r \bmod (N + N_G)$). O sinal $x'_m(n)$ representa a extensão do sinal $x_m(n)$ original, com CP, que pode ser descrito por

$$x'_m(n) = \{x_m(N - N_G), x_m(N - N_G + 1), \dots, x_m(N - 1), x_m(0), x_m(1), \dots, x_m(N - 1)\}, \quad (3.40)$$

e representado graficamente na Figura 3.6.

Figura 3.6 – Inserção de CP nos símbolos para modulação OFDM.



Fonte: Autoria própria.

Embora necessário para a correta operação de um sistema de comunicação OFDM, a inclusão do CP traz impactos à sua eficiência. Como a informação no CP é redundante, sua eficiência espectral e de potência ficam corrigidas pelo fator $N/(N + N_G)$. Agora, o período de símbolo T_{sym} fica estendido pelo GI, dado por $T_G = N_G T$, somando ao período de transmissão das subportadoras $T_{\text{sub}} = NT$, de forma que $T_{\text{sym}} = T_{\text{sub}} + T_G$. A separação entre as subportadoras fica redefinida para $\Delta f = 1/T_{\text{sub}}$. Alternativamente, pode-se escrever que a frequência de amostragem é dada por

$$f_s = N\Delta f. \quad (3.41)$$

3.4.5 Banda de guarda

Tomando um único símbolo OFDM (e.g., $m = 0$), para uma única sub-portadora k , resultando em um componente de duração T_{sym} , pode-se escrever

$$y(t) = X(k) \exp(j2\pi f_k t) w(t), \quad (3.42)$$

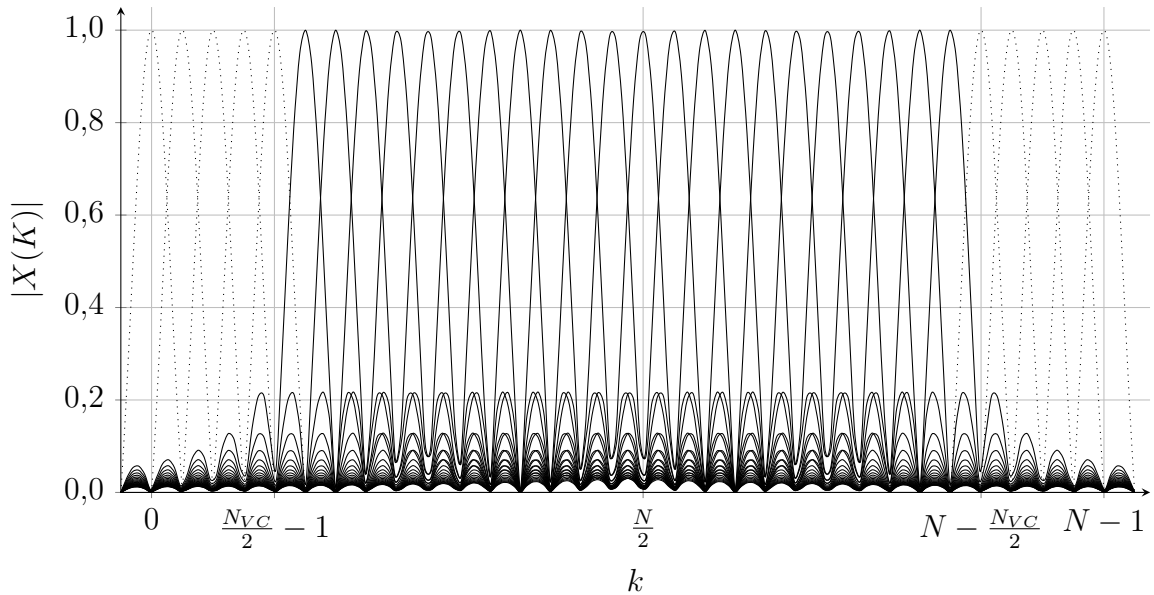
sendo que $w(t)$ é uma janela retangular de duração T_{sub} . O espectro da janela retangular possui formato sinc, com cruzamentos por zero em frequências dadas por múltiplos não-nulos de $2/T_{\text{sub}}$. Outro fato notório do espectro sinc é a baixa atenuação, de apenas 13,46 dB entre o lóbulo principal e o lóbulo secundário, o que implica severa ACI.

A janela cosseno levantando é uma melhor escolha, oferecendo maior atenuação fora de banda do que a janela retangular. A inclusão de VC, fazendo $X(k) = 0$ nas

vizinhanças de $k = 0$ e $k = N - 1$, atrelada ao uso da janela cosseno levantado, oferece uma melhor solução ao problema da ACI, atenuando a emissão fora de banda em várias dezenas de decibéis, para um número de VCs relativamente baixo.

Assim como o GI, a utilização da GB traz impacto à eficiência espectral. Tomando N_{VC} como o número de VCs usada na GB, a eficiência espectral fica corrigida por um fator de $(N - N_{VC})/N$. A Figura 3.7 ilustra a distribuição das subportadoras e VCs para um sistema OFDM implementado por uma IFFT de comprimento N par e N_{VC} VCs na GB.

Figura 3.7 – Sistema OFDM com $N = 32$ subportadoras, das quais $N_{VC} = 10$ são VCs. As VCs são representadas pelos pulsos pontilhados, enquanto as $N - N_{VC} = 22$ portadoras úteis são representadas pelas linhas sólidas.



Fonte: Autoria própria.

3.5 Sincronismo OFDM

Conforme discutido anteriormente, o sistema OFDM é criticamente dependente da ortogonalidade entre suas subportadoras. Caso essa ortogonalidade não seja mantida, o desempenho do sistema será severamente degradado em razão da ocorrência de ICI e ISI. No entanto, o canal sem fio $h_m(t)$ não é a única fonte de desvios da ortogonalidade. A STO e a CFO são efeitos da falta de sincronismo entre transmissor e receptor. É necessário utilizar técnicas de sincronismo para impedir que a STO e CFO degradem o desempenho do sistema OFDM (SHI; SERPEDIN, 2004; CHO et al., 2010; SINGH; RATHKANTHIWAR; GANDHI, 2017).

Como será ilustrado no próximo capítulo, acerca de LTE, os aspectos do sincronismo OFDM não estão restritos apenas a STO e CFO, embora esse seja o escopo

dessa pesquisa. Dentro da estrutura temporal da transmissão **OFDM**, o sincronismo de quadro é de fundamental importância ao estabelecer um sincronismo temporal entre a estação base e o terminal móvel. Esses pontos, e demais aspectos, não serão aqui abordados.

Assumindo um comprimento N_{CP} suficiente para que a dispersão temporal de $h_m(n)$ esteja contida na duração de **CP** e tomando a **IFFT** de $Y_m(k) = H_m(k)X_m(k) + Z_m(k)$ é válido escrever

$$\begin{aligned} y_m(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (H_m(k)X_m(k) + Z_m(k)) \exp(j2\pi kn/N) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_m(k)X_m(k) \exp(j2\pi kn/N) + z_m(n). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Considerando os efeitos da **STO** normalizada θ e da **CFO** normalizada ε , esta última pode ser re-escrita como (CHO et al., 2010)

$$y_m(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_m(k)X_m(k) \exp(j2\pi(k + \varepsilon)(n + \theta)/N) + z_m(n). \quad (3.44)$$

3.5.1 Efeitos da STO

Por simplicidade, os efeitos da **STO** e **CFO** serão analisados separadamente e sem a influência do canal. Assim, a análise da **STO** se reduz, no domínio da frequência, para um desvio de fase

$$Y_m(k) = X_m(k) \exp(j2\pi k\theta/N), \quad (3.45)$$

enquanto no domínio do tempo, assumindo um $\theta \in \mathbb{Z}$ (i.e., assumindo que o desvio de sincronismo seja um múltiplo do período de amostragem T), se reduz para um deslocamento

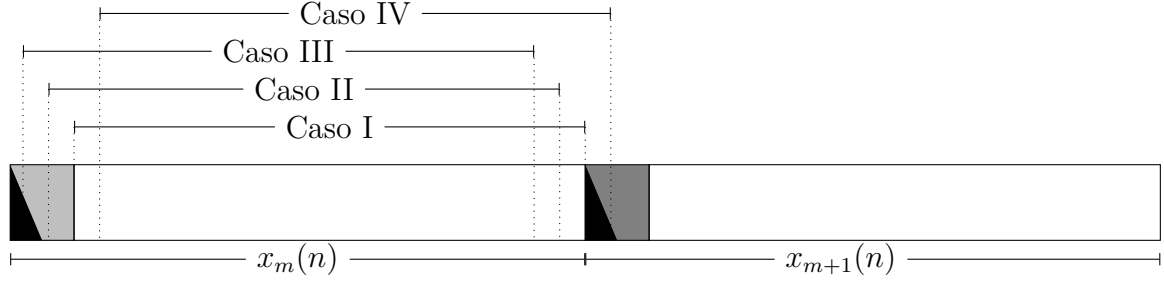
$$y_m(n) = x_m(n + \theta). \quad (3.46)$$

Os efeitos de uma **STO** fracionária são indistinguíveis aos de um canal seletivo em frequência, podendo ser mitigados pelo equalizador de canal. Porém uma falha de sincronismo da parte inteira da **STO**, como ilustrado na Figura 3.8, pode causar perda de ortogonalidade, causando degradação severa na **BER**.

Os casos ilustrados na Figura 3.8 são descritos a seguir (CHO et al., 2010):

Caso I — Neste caso, o sincronismo no tempo coincide exatamente com o ponto de início do símbolo **OFDM**, preservando a ortogonalidade das subportadoras e evitando a **ISI** entre os símbolos adjacentes.

Figura 3.8 – Possíveis efeitos da falta de sincronismo na **STO**. As regiões cinza representam **CPs** de símbolos subsequentes. O triângulo preto representa a duração da resposta ao impulso do canal.



Fonte: Autoria própria.

Caso II — Neste caso, o sincronismo está um pouco avançado em relação ao início do símbolo **OFDM**.

$$\begin{aligned}
 y_m(n) &= x_m(n + \theta) + z_m(n) \\
 Y_m(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_m(n + \theta) \exp(-j2\pi nk/N) + Z_m(k) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi(n + \theta)l/N) \right) \exp(-j2\pi nk/N) + Z_m(k) \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi\theta l/N) \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi n(l - k)/N)}_{\delta_{k,l}} + Z_m(k) \\
 &= X_m(k) \exp(j2\pi\theta k/N) + Z_m(k).
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Porém, como não há sobreposição com a resposta ao impulso atrasada do símbolo anterior, não há **ISI**. A ortogonalidade é preservada como demonstra o equacionamento acima, e a fase inserida pelo mau sincronismo pode ser compensada no equalizador.

Caso III — Neste caso, há um maior avanço do sincronismo, em relação ao início do símbolo **OFDM**. Com o avanço sobre a cauda da resposta ao impulso atrasada do símbolo anterior ocorrerá **ISI** pela perda da ortogonalidade das subportadoras, causando também **ICI**.

Caso IV — Por fim, um atraso do sincronismo, em relação ao início do símbolo **OFDM**, causará sobreposição com o próximo símbolo, incorrendo em **ISI** e **ICI**.

$$y_m(n) = \begin{cases} x_m(n + \theta), & 0 \leq n \leq N - 1 - \theta; \\ x_{m+1}(n + 2\theta - N_G), & N - \theta \leq n \leq N - 1. \end{cases} \tag{3.48}$$

Demodulando o sinal **OFDM** recebido

$$y_m(n) = x_m(n + \theta) + x_{m+1}(n + 2\theta - N_G) \quad (3.49)$$

$$Y_m(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\theta} x_m(n + \theta) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (3.50)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} x_{m+1}(n + 2\theta - N_G) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (3.51)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\theta} \left(\sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi(n + \theta)l/N) \right) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (3.52)$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} X_{m+1}(l) \exp(j2\pi(n + 2\theta - N_G)l/N) \right) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (3.53)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi\theta l/N) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\theta} \exp(j2\pi n(l - k)/N) \quad (3.54)$$

$$+ \sum_{l=0}^{N-1} X_{m+1}(l) \exp(j2\pi(2\theta - N_G)l/N) \frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} \exp(j2\pi n(l - k)/N), \quad (3.55)$$

Considerando as igualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-\theta} \exp(j2\pi n(l - k)/N) &= \frac{1}{N} \frac{1 - \exp(j2\pi(N - \theta)(l - k)/N)}{1 - \exp(j2\pi(l - k)/N)} \\ &= \begin{cases} \frac{N-\theta}{N} & l = k \\ \text{não-nulo} & l \neq k, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.56)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=N-\theta}^{N-1} \exp(j2\pi n(l - k)/N) &= \frac{1}{N} \frac{\exp(j2\pi(N - \theta)(l - k)/N) - \exp(j2\pi(l - k)/N)}{1 - \exp(j2\pi(l - k)/N)} \\ &= \begin{cases} \frac{N-\theta}{N} - 1 & l = k \\ \text{não-nulo} & l \neq k, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Percebe-se, através do equacionamento, que a ortogonalidade entre as portadoras foi destruída. Esse caso representa uma degradação ainda mais severa do que a obtida no Caso III (**CHO et al., 2010**).

3.5.2 Efeitos da CFO

Complementarmente, a análise isolada da **CFO** (i.e., desconsiderando os efeitos da **STO** e do canal), no domínio da frequência, se reduz a um deslocamento sobre o índice

das subportadoras

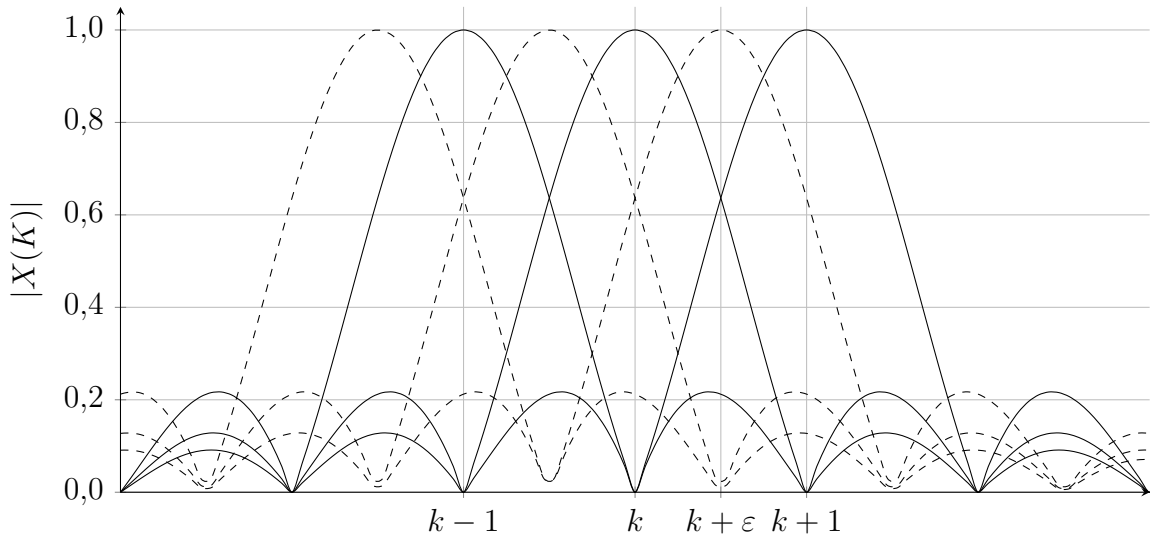
$$Y_m(k) = X_m(k + \varepsilon), \quad (3.58)$$

porém essa modelagem exige $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, o que nesse caso é demasiadamente limitante. Embora algumas causas da CFO produzam valores inteiros, de maneira que a CFO pode ser decomposta em parte inteira e fracionária, nesta pesquisa o escopo está limitado a CFO fracionária, causada principalmente pelo desvio Doppler e pela falta de sincronismo entre os osciladores do transmissor e receptor. Para tal, o efeito da CFO fracionária fica melhor definido através de uma modelagem no tempo, como um desvio de fase, dado por

$$y_m(n) = x_m(n) \exp(j2\pi n\varepsilon/N), \quad (3.59)$$

e ilustrado na Figura 3.9.

Figura 3.9 – Efeito da ICI sobre as subportadoras, causada pela falta de sincronismo da CFO.



Fonte: Autoria própria.

O efeito de uma CFO fracionária ε , para um canal AWGN, pode ser desenvolvido por

$$\begin{aligned} Y_m(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_m(n) \exp(-j2\pi kn/N) + Z_m(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_m(n) \exp(j2\pi n\varepsilon/N) \exp(-j2\pi kn/N) + Z_m(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_m(n) \exp(-j2\pi(k - \varepsilon)n/N) + Z_m(k), \end{aligned} \quad (3.60)$$

lembrando que a modulação OFDM é definida por $x_m(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_m(k) \exp(j2\pi kn/N)$,

e substituindo nesta última igualdade

$$\begin{aligned} Y_m(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \exp(j2\pi ln/N) \right) \exp(-j2\pi(k-\varepsilon)n/N) + Z_m(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_m(l) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi(l-k+\varepsilon)n/N) + Z_m(k), \end{aligned} \quad (3.61)$$

separando em dois termos, para $l = k$ e para $l \neq k$

$$\begin{aligned} Y_m(k) &= \frac{1}{N} X_m(k) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi\varepsilon n/N) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} X_m(l) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j2\pi(l-k+\varepsilon)n/N) + Z_m(k) \\ &= X_m(k) \frac{1}{N} \frac{1 - \exp(j2\pi\varepsilon)}{1 - \exp(j2\pi\varepsilon/N)} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} X_m(l) \frac{1}{N} \frac{1 - \exp(j2\pi(l-k+\varepsilon))}{1 - \exp(j2\pi(l-k+\varepsilon)/N)} + Z_m(k). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Desenvolvendo a igualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \frac{1 - \exp(j\phi)}{1 - \exp(j\phi/N)} &= \frac{1}{N} \frac{\exp(-j\phi/2) - \exp(j\phi/2)}{\exp(-j\phi/2N) - \exp(j\phi/2N)} \frac{\exp(j\phi/2)}{\exp(j\phi/2N)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\exp(j\phi/2) - \exp(-j\phi/2)}{\exp(j\phi/2N) - \exp(-j\phi/2N)} \exp\left(j\frac{\phi(N-1)}{2N}\right) \\ &= \frac{\text{sen}(\phi/2)}{N \text{sen}(\phi/2N)} \exp\left(j\frac{\phi(N-1)}{2N}\right), \end{aligned} \quad (3.63)$$

inserindo a solução da Eq. (3.63) na (3.62), pode-se escrever

$$\begin{aligned} Y_m(k) &= X_m(k) \frac{\text{sen}(\pi\varepsilon)}{N \text{sen}(\pi\varepsilon/N)} \exp(j\pi\varepsilon(N-1)/N) \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{N-1} X_m(l) \frac{\text{sen}(\pi(l-k+\varepsilon))}{N \text{sen}(\pi(l-k+\varepsilon)/N)} \exp(j\pi(l-k+\varepsilon)(N-1)/N)}_{\text{ICI}} + Z_m(k). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Assim, observa-se que o efeito da CFO fracionária não só distorce a amplitude e a fase da k -ésima sub-portadora, mas também inclui ICI das outras subportadoras distorcidas.

Ambos STO inteiro e CFO fracionário, em razão da perda de ortogonalidade entre as subportadoras, causando ISI e/ou ICI, podem degradar severamente a BER de um sistema de comunicações OFDM. Tomando σ_θ^2 como a variância de estimação da STO, uma variância $\sigma_\theta^2 = 4$ amostras², para sinalização QPSK em canal AWGN, restringe a BER a 10^{-4} , mesmo para uma SNR de 20 dB. Nas mesmas condições, uma variância de $\sigma_\theta^2 = 8$ amostras², limita a BER em 10^{-3} . Usando as mesmas condições, para um canal

desvanecido, a BER fica limitada às vizinhanças de 10^{-2} (ATHAUDAGE, 2002). Limites de BER entre 10^{-2} e 10^{-1} foram encontrados em (ZHAO; HAGGMAN, 1996), para $\varepsilon \approx 0,1$.

Para ilustrar, o desvio Doppler f_d , dado por

$$f_d = \frac{vf_c}{c} \quad (3.65)$$

onde $c = 299\,792\,458$ m/s é a velocidade da luz (no vácuo), v é a velocidade (em m/s) da unidade móvel e f_c é a frequência da portadora (em Hz). Assumindo o desvio Doppler como a única fonte de CFO, ela pode ser escrita por

$$\varepsilon = \frac{f_d}{\Delta f} = \frac{vf_c}{c\Delta f}, \quad (3.66)$$

sendo Δf a separação (em Hz) das subportadoras. A Tabela 3.1 traz alguns valores da CFO normalizada, para tecnologias atuais e emergentes.

Tabela 3.1 – CFO normalizada para desvios Doppler. Foi utilizada, em todos os casos, uma velocidade de 100 km/h do terminal móvel.

Tecnologia	f_c	Δf	ε
LTE	700 MHz	15 kHz	0,004
	5 900 MHz	15 kHz	0,036
5G NR	7 125 MHz	15 kHz	0,044
	52 600 MHz	15 kHz	0,325
	7 125 MHz	240 kHz	0,003
	52 600 MHz	240 kHz	0,020

Como ilustra a Tabela 3.1, o desvio da CFO se agrava muito para portadoras de maior frequência, em especial na banda de ondas milimétricas a serem exploradas pelo 5G NR. Embora o efeito possa ser mitigado por uma maior separação das subportadoras, essa escolha incorre em outros compromissos de complexidade e comprometimento da eficiência espectral.

3.5.3 Técnicas de sincronismo

Para um canal AWGN, os efeitos combinados da STO e CFO no sinal discreto banda base recebido podem ser representados por

$$y_m(n) = x_m(n + \theta) \exp(j2\pi n\varepsilon/N) + z_m(n), \quad (3.67)$$

onde $x_m(n)$ é o sinal banda base transmitido e $z_m(n)$ é o ruído AWG, com distribuição $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

3.5.3.1 Sincronismo baseado em símbolo de treinamento

Após a recepção, uma sequência de símbolos $y(n)$ pode ser construída

$$y(n) = \{y_0(n), y_1(n), y_2(n), \dots\}, \quad (3.68)$$

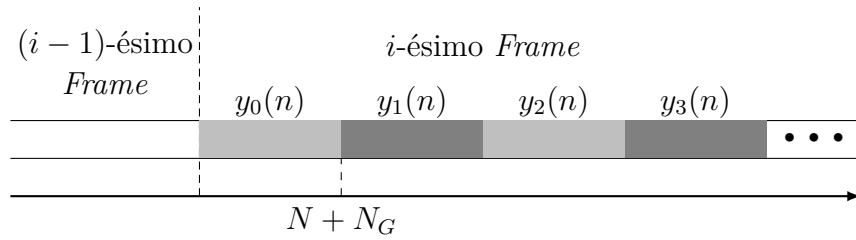
onde cada termo $y_m(n)$ corresponde a N amostras recebidas (após remoção do CP).

Para uma sequência de l símbolos recebidos, assumindo que os primeiros símbolos transmitidos ($x_0(n)$ e $x_1(n)$, sem CP) são símbolos de treinamento repetidos (i.e., $x_0(n) = x_1(n)$) conhecidos pelo receptor, como ilustra a Figura 3.10, a STO pode ser estimada através de um filtro casado (KRISHNAN, 2006) da forma

$$R_{x,y}(r) = \sum_{n=0}^{lN-1} x(n)\bar{y}(n+r), \quad (3.69)$$

onde $x(n) = \{x_0(n), x_1(n)\}$.

Figura 3.10 – Sequência de símbolos OFDM de duração $N + N_G$ com CP. Os primeiros símbolos de cada *frame* y_0 e y_1 são símbolos de treinamento idênticos, conhecidos no receptor.



Fonte: Autoria própria.

A STO pode ser estimada através de

$$\hat{\theta} = \arg \max_r (|R_{yx}(r)|). \quad (3.70)$$

Uma vez corrigida a STO, é possível escrever, ignorando o termo de ruído

$$y_1(n) = y_0(n) \exp(j2\pi\epsilon(N + N_G)/N), \quad (3.71)$$

lembrando que N_G é o comprimento do CP. Através das propriedades da DFT

$$Y_1(k) = Y_0(k) \exp(j2\pi\epsilon(N + N_G)/N). \quad (3.72)$$

Exceto pela corrupção do canal AWGN, os sinais OFDM demodulados $Y_0(k)$ e $Y_1(k)$ são iguais. Isso permite escrever (MOOSE, 1994)

$$\begin{aligned} Y_0(k)\bar{Y}_1(k) &= |Y_0(k)| \exp(-j2\pi\epsilon(N + N_G)/N) \\ \sum_{k=0}^{N-1} Y_0(k)\bar{Y}_1(k) &= \|Y_0(k)\| \exp(-j2\pi\epsilon(N + N_G)/N), \end{aligned} \quad (3.73)$$

de onde é possível reconhecer que o expoente complexo é a fase de $\sum_{k=0}^{N-1} Y_0(k) \bar{Y}_1(k)$. Assim, é possível escrever

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{N + N_G}{N} \varepsilon &= \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \Im[Y_0(k) \bar{Y}_1(k)]}{\sum_{k=0}^{N-1} \Re[Y_0(k) \bar{Y}_1(k)]} \right) \\ \hat{\varepsilon} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{N}{N + N_G} \tan^{-1} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \Im[Y_0(k) \bar{Y}_1(k)]}{\sum_{k=0}^{N-1} \Re[Y_0(k) \bar{Y}_1(k)]} \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Analisando a última igualdade, percebe-se que a faixa dinâmica para detecção da CFO fracionária é dependente de N_G . De forma geral, o valor estimado da CFO fica limitado por $\hat{\varepsilon} < 0,5$ para o caso de dois símbolos de treinamento idênticos.

3.5.3.2 Sincronismo baseado em prefixo cíclico

Como o CP já é um *overhead* necessário ao bom funcionamento da modulação OFDM, seu uso para sincronismo é fortuito, não incluindo maiores perdas de eficiência de potência. Uma técnica de sincronismo conjunto da STO e CFO foi proposta em (VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON, 1997) e refinada em (VAN DE BEEK et al., 1999), utilizando o prefixo cíclico será apresentada na sequência.

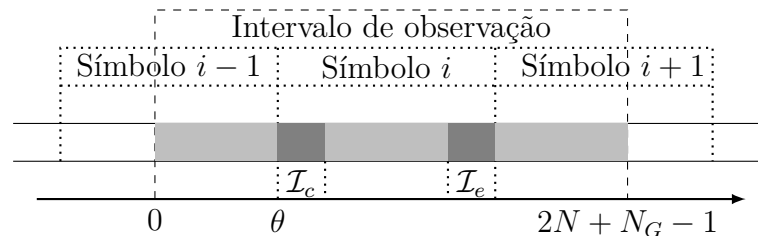
Como feito na seção anterior, concatenando os símbolos $x_m(n)$ em uma única sequência $x(n) = \{x_0(n), x_1(n), \dots\}$ de transmissão, o sinal recebido, após a aplicação de um canal AWGN, pode ser escrito por

$$y(n) = x(n - \theta) \exp(j2\pi\varepsilon n/N) + z(n), \quad (3.75)$$

onde $z(n)$ representa o ruído AWG de distribuição $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

No receptor, como ilustra a Figura 3.11, uma janela de observação de comprimento $2N + N_G$ é utilizada para encontrar o início do símbolo OFDM (com CP).

Figura 3.11 – Intervalo de observação para sincronismo OFDM da STO e CFO baseado em CP.



Fonte: Autoria própria.

A Figura 3.11 também ilustra os grupos de índices correspondendo ao CP, $\mathcal{I}_c = \{\theta, \theta + 1, \dots, \theta + N_G - 1\}$, e à região ao final do símbolo OFDM (últimas N_G amostras, de onde o CP é copiado) $\mathcal{I}_e = \{\theta + N - 1, \dots, \theta + N + N_G - 1\}$.

A função log-likelihood para os parâmetros θ e ε (**STO** e **CFO**, respectivamente), é

$$\Lambda(\theta, \varepsilon) = \log f(y(n)/\theta, \varepsilon). \quad (3.76)$$

Como as amostras do símbolo **OFDM** fora da região $\mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_e$ são independentes, a função log-likelihood pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta, \varepsilon) &= \log \left[\prod_{n \in \mathcal{I}_c} f(y(n), y(n+N)) \prod_{n \notin \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_e} f(y(n)) \right]; \\ &= \log \left[\prod_{n \in \mathcal{I}_c} \frac{f(y(n), y(n+N))}{f(y(n))f(y(n+N))} \prod_{n \notin \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_e} f(y(n)) \right]; \\ &= C + \sum_{n \in \mathcal{I}_c} \log \left[\frac{f(y(n), y(n+N))}{f(y(n))f(y(n+N))} \right], \end{aligned} \quad (3.77)$$

sendo $f(y(n), y(n+N))$ a **p.d.f.** conjunta de $y(n)$ e $y(n+N)$. A constante C é independente de θ and ε , podendo então ser ignorada na maximização da função log-likelihood, que pode então ser reescrita como

$$\Lambda(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=\theta}^{\theta+N_G-1} \log \left[\frac{f(y(n), y(n+N))}{f(y(n))f(y(n+N))} \right] \quad (3.78)$$

Avaliando a covariância de $(y(n), y(n+N))$, nota-se que para $n \in \mathcal{I}_c$

$$\mathbb{E}[y(n)\bar{y}(n+m)] = \begin{cases} \sigma_y^2 + \sigma_z^2 & \text{se } l = 0 \\ \sigma_y^2 \exp(-j2\pi\varepsilon) & \text{se } l = N \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.79)$$

onde $\sigma_y^2 = \mathbb{E}[|y(n)|^2]$ e $\sigma_z^2 = \mathbb{E}[|z(n)|^2]$ são as potências do sinal recebido e do ruído, respectivamente. Definindo

$$\rho = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2 + \sigma_z^2} = \frac{\text{SNR}}{\text{SNR} + 1}, \quad (3.80)$$

pode-se escrever o numerador da função log-likelihood como uma distribuição normal complexa bivariada, com coeficiente de correlação ρ , dada por

$$\begin{aligned} f(y(n), y(n+N)) &= \frac{1}{\pi^2(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)^2(1 - \rho^2)} \times \\ &\exp \left(- \frac{|y(n)|^2 - 2\rho\Re(\exp(j2\pi\varepsilon)y(n)\bar{y}(n+N)) + |y(n+N)|^2}{(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)(1 - \rho^2)} \right), \end{aligned} \quad (3.81)$$

enquanto a **p.d.f.** do denominador é obtida por

$$f(y(n)) = \frac{1}{\pi(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)} \exp \left(- \frac{|y(n)|^2}{(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)} \right), \quad (3.82)$$

$$f(y(n+N)) = \frac{1}{\pi(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)} \exp \left(- \frac{|y(n+N)|^2}{(\sigma_y^2 + \sigma_z^2)} \right). \quad (3.83)$$

Ignorando os termos constantes, após manipulações algébricas, a maximização da função log-likelihood pode ser dada por

$$\Lambda(\theta, \varepsilon) = |\gamma(n)| \cos(2\pi\theta + \angle\gamma(\theta)) - \rho\Phi(n), \quad (3.84)$$

sendo que $\angle(\cdot)$ representa o argumento de uma quantidade complexa, enquanto $\gamma(n)$ e $\Phi(n)$ são definidas por

$$\gamma(n) = \sum_{m=0}^{2N+N_G-1} y(n+m)\bar{y}(n+m+N), \quad (3.85)$$

$$\Phi(n) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2N+N_G-1} (|y(n+m)|^2 + |y(n+m+N)|^2). \quad (3.86)$$

A estimativa de máxima verossimilhança da **STO** pode então ser obtida por

$$\hat{\theta} = \arg \max_n (|\gamma(n)| - \rho\Phi(n)), \quad (3.87)$$

enquanto a estimativa, também de máxima verossimilhança, da **CFO** é dada por

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2\pi} \angle\gamma(\hat{\theta}). \quad (3.88)$$

4 Long Term Evolution

O **3GPP** é um consórcio de organizações que desenvolvem padrões para tecnologias de telecomunicações. Ele usa um sistema paralelo de *Releases* na publicação de seus padrões.

A tecnologia **LTE**, cujo padrão foi publicado originalmente em 2008, como o **3GPP Release 8**, foi adotado em escala global como a tecnologia celular de **4G**. Os principais pontos dessa tecnologia são (ETSI, 2009):

- Camada física de múltiplo acesso baseada em **OFDMA**;
- Modulação **OFDM** com **CP** no *downlink*;
- Modulação *Single Carrier-OFDM* — **OFDM de Portadora Única (SC-OFDM)** com **CP** no *uplink*;
- Suporte de transmissões de espectro pareado e não pareado, com suporte para **FDD**, com operação *full-duplex* ou *half-duplex*, e **TDD**;
- Suporte para **MIMO**, com *downlink* de duas ou quatro, antenas transmissoras, bem como duas ou quatro antenas receptoras, para modos de transmissão com ganho de multiplexagem ou ganho de diversidade. **MU-MIMO** suportado no *downlink* e *uplink*;
- Modulações **QPSK**, **16-QAM** e **64-QAM** suportadas no *downlink* e *uplink*;
- Codificação de canal Turbo, para detecção e correção de erros, com taxa 1/3 (a taxa efetiva é dinâmica, dependendo de métricas da qualidade do canal e da **BER** no receptor).

A partir do **3GPP Release 10**, publicado originalmente em 2011, a denominação evoluiu para **LTE-Advanced**. Alguns dos avanços mais significativos do **LTE-Advanced** são: no *downlink*, o suporte **MIMO** passou para até oito antenas no transmissor e 8 antenas no receptor com suporte **MU-MIMO**; agregação de até cinco células no *downlink* e *uplink* (ETSI, 2011a).

Entre o **3GPP Release 13** e o **3GPP Release 14**, originalmente publicado em 2016 e 2017, respectivamente, maiores refinamentos trouxeram a denominação **LTE-Advanced Pro**, o ciclo final da tecnologia **4G**. Dentre seus refinamentos, destacam-se: suporte para comunicações **IoT** de banda estreita, com modulações **QPSK**, **16-QAM**, **64-QAM**, $\frac{\pi}{2}$ -**BPSK** e $\frac{\pi}{4}$ -**QPSK**; suporte **MIMO**, para o *downlink*, de até dezesseis antenas transmissoras e oito receptoras, suportando *beamforming* vertical e horizontal; agregação de até 32 células

no *downlink* e *uplink*; modulação no *downlink* de QPSK, 16-QAM, 64-QAM e 256-QAM (ETSI, 2017a).

Com o 3GPP Release 15, é dado início ao ciclo 5G NR, porém ainda são propostas melhorias aos padrões LTE, como a expansão do MIMO para até 32 antenas transmissoras e 8 receptoras, para o *downlink* (ETSI, 2017b).

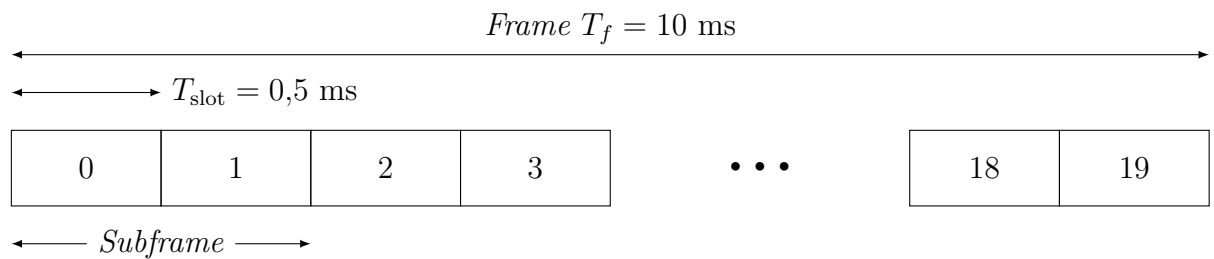
4.1 Estrutura tempo-frequência da camada física de downlink LTE

Uma apresentação completa da camada física LTE está fora do escopo deste texto. Ao leitor interessado, são indicadas (ETSI, 2010c; ZARRINKOUB, 2014). As descrições a seguir são suficientes para uma primeira aproximação de como o sistema MIMO-OFDM é estruturado no LTE. A menos que indicado o contrário, todas as especificações apresentadas são em relação ao 3GPP Release 8 do LTE.

A estrutura temporal LTE é baseada em uma unidade básica de tempo $T_s = 1/(15\,000 \times 2\,048)$ s ($\approx 32,55$ ns). Transmissões de *downlink* são organizadas em *frames* com duração $T_f = 307\,200T_s = 10$ ms. Há duas estruturas suportadas: Tipo 1 (para FDD) e Tipo 2 (para TDD).

No *frame* Tipo 1, o T_f é subdividido em 20 *slots* de duração $T_{\text{slot}} = 15\,360T_s = 0,5$ ms, enumerados de 0 a 19. Um *subframe* é definido como dois *slots* consecutivos, no qual o *subframe* i consiste dos *slots* $2i$ e $2i + 1$. A Figura 4.1 ilustra a estrutura temporal do *frame* Tipo 1.

Figura 4.1 – Organização temporal de um *frame* LTE Tipo 1 (para FDD) com *slots* enumerados de 0 a 19, evidenciando a hierarquia de *subframes*.



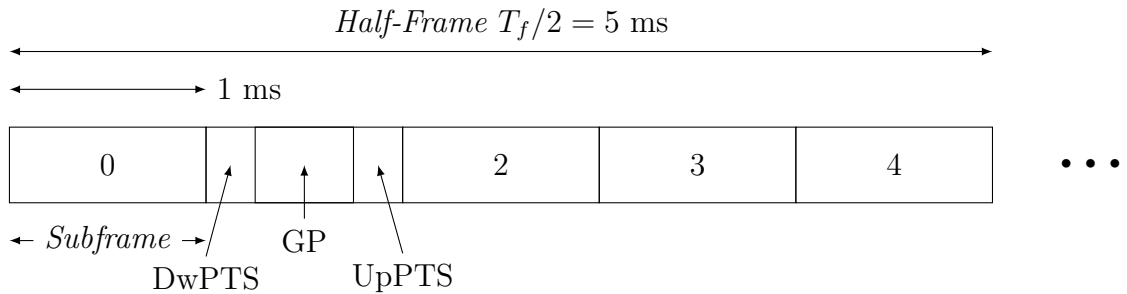
Fonte: Autoria própria.

No *frame* Tipo 2, o T_f é subdividido em 2 *half-frames* de comprimento $153\,600T_s = 5$ ms. Cada *half-frame* consiste de 5 *subframes* de $30\,720T_s = 1$ ms. Por fim, cada *subframe* i consiste dos *slots* $2i$ e $2i + 1$ de duração $T_{\text{slot}} = 15\,360T_s = 0,5$ ms. A troca entre *downlink* e *uplink* pode ocorrer com periodicidade de 5 ms ou 10 ms. No caso de periodicidade de 5 ms, os *subframes* 1 e 6 são especiais, enquanto para periodicidade de 10 ms, apenas o *subframe* 1 é especial.

O *subframe* especial é composto por três campos: *Downlink Pilot Time Slot — Slot no Tempo do Piloto de Downlink* (DwPTS), *Guard Period — Período de Guarda* (GP) e *Uplink Pilot Time Slot — Slot no Tempo do Piloto de Uplink* (UpPTS). Os sinais pilotos DwPTS e UpPTS, com o GP entre eles, são responsáveis por evitar o conflito entre *downlink* e *uplink*.

A Figura 4.2 ilustra a estrutura temporal do *half-frame* Tipo 2. Os *subframes* 0 e 5 bem como o DwPTS são sempre reservados para *downlink*, enquanto o *subframe* que sucede o especial e o UpPTS são sempre reservados para *uplink*. A Tabela 4.1 reúne todas as configurações possíveis (ETSI, 2010c).

Figura 4.2 – Organização temporal de um *frame* LTE Tipo 2 (para TDD) com *slots* enumerados de 0 a 19, evidenciando a hierarquia de *subframes*.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 4.1 – Sentido de comunicação para *frame* LTE Tipo 2, em TDD. Os campos marcados como ‘D’ representam *downlink*, ‘U’ representam *uplink* e ‘S’ representam *subframes* especiais.

Configuração	Periodicidade	<i>Subframe</i>									
<i>Downlink-Uplink</i>	<i>Downlink-Uplink</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5 ms	D	S	U	U	U	D	S	U	U	U
1	5 ms	D	S	U	U	D	D	S	U	U	D
2	5 ms	D	S	U	D	D	D	S	U	D	D
3	10 ms	D	S	U	U	U	D	D	D	D	D
4	10 ms	D	S	U	U	D	D	D	D	D	D
5	10 ms	D	S	U	D	D	D	D	D	D	D
6	5 ms	D	S	U	U	U	D	S	U	U	D

O canal físico de *downlink* é composto por um conjunto de *Resource Element — Elemento de Recurso* (RE), transportando informações de camadas superiores em seis canais distintos, dentre os quais, destaca-se o *Physical Downlink Shared Channel — Canal Físico Compartilhado no Downlink* (PDSCH).

Alguns REs do canal físico não são usados para transportar informações das camadas superiores, mas sim para transportar sinais da camada física. Os sinais da camada

física são classificados em: sinais de referência e sinais de sincronismo. Os *subframes* 0 e 5 são especiais para **FDD** e **TDD** (este último, assumindo uma periodicidade de 10 ms), sendo usados na transmissão de sinais de sincronismo e controle.

O sinal transmitido em cada *slot* é descrito por um *grid* de subportadoras por símbolos **OFDM**. As subportadoras são organizadas em **RB**. O número de **RBs** é dado por N_{RB} . A Tabela 4.2 enumera os valores permitidos de N_{RB} , de acordo com a **BW** do canal (ETSI, 2010a).

Tabela 4.2 – Relação de **BW** total do canal e número de **RBs** permissíveis para **LTE**.

BW (em MHz)	1,4	3	5	10	15	20
N_{RB}	6	15	25	50	75	100

O número de subportadoras N_{sc} em um **RB** bem como o número de símbolos **OFDM** N_{symb} em um *slot* depende do comprimento do **CP** e do espaçamento entre as subportadoras (Δf). A Tabela 4.3 reúne os valores possíveis.

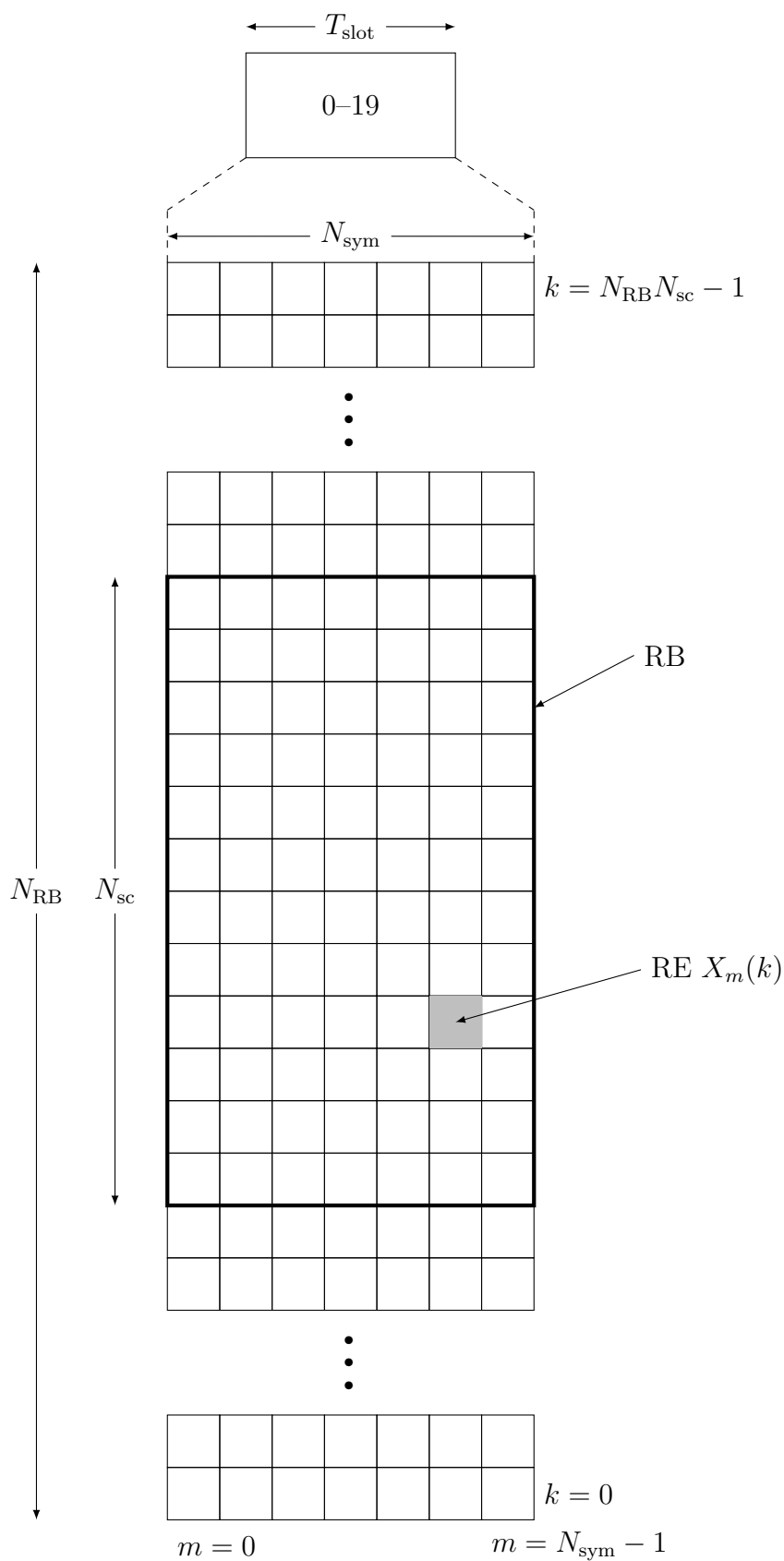
Tabela 4.3 – Parâmetros de configuração dos **RBs** físicos.

CP	Δf (kHz)	N_{sc}	N_{symb}
Normal	15	12	7
Estendido	15	12	6
	7,5	24	3

Em caso de transmissão **MIMO**, define-se um grid de recursos por camada (*layer coding*). O mapeamento dos grids de recursos das diferentes camadas nas antenas físicas depende do tipo de transmissão **MIMO**: multiplexação ou diversidade. Por simplicidade e expediência, a exposição a seguir será limitada para um sistema **SISO** com **CP** de comprimento normal. Nesse caso, um **RB** com 12 subportadoras, espaçadas de 15 kHz, representa uma banda ocupada de 180 kHz. Revendo os dados da Tabela 4.2, é possível averiguar que todas as configurações correspondem a uma ocupação de banda de 90 %, exceto a **BW** de 1,4 MHz, que possui apenas 77,14 % de ocupação.

Como definido na Eq. (3.29), a modulação **OFDM** é aplicada sobre símbolos $X_m(k)$, onde m é o índice do m -ésimo símbolo **OFDM** e k indica a sub-portadora. A Figura 4.3 ilustra graficamente a organização dos símbolos **OFDM** e subportadoras em **REs** dentro de um **RB**, para o *downlink* **LTE** (**CP** normal). Nela, fica clara a organização de um **RB** como um grupo de $N_{\text{symb}} \times N_{\text{sc}}$ **REs**, cada **RE** representando $X_m(k)$, para um único índice m e k . Para o *downlink*, a sub-portadora central é tomada como a frequência zero, em banda base, não sendo utilizada na transmissão de símbolos.

O comprimento do **CP** (N_G), para cada símbolo **OFDM**, é dado na Tabela 4.4. Relembrando que cada *slot* tem duração $T_{\text{slot}} = 15\,360T_s = 0,5$ ms. A Figura 4.4 representa

Figura 4.3 – Mapa de recursos para um único *slot* LTE, considerando CP normal.

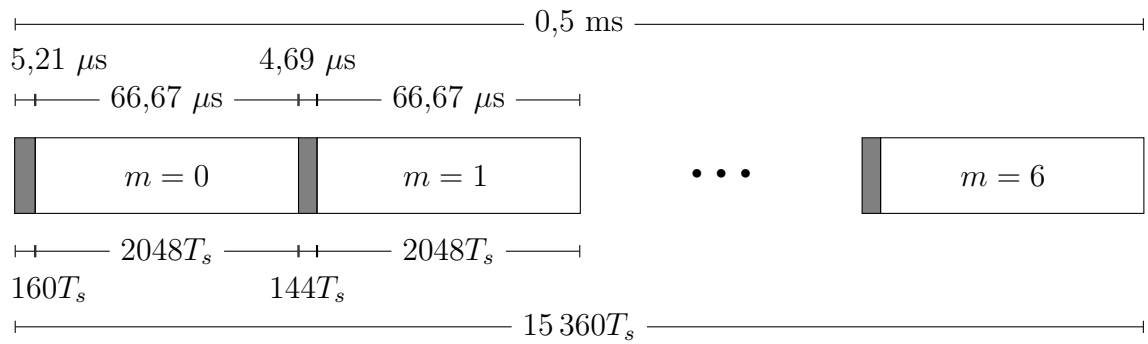
Fonte: Autoria própria.

a subdivisão dos símbolos OFDM com CP normal. A Figura 4.5 representa a subdivisão dos símbolos para comprimento estendido do CP e separação de 15 kHz entre as subportadoras. Por fim, a Figura 4.6 representa a subdivisão dos símbolos para comprimento estendido do CP e separação de 7,5 kHz entre as subportadoras.

Tabela 4.4 – Comprimento (em unidades de T_s) do CP.

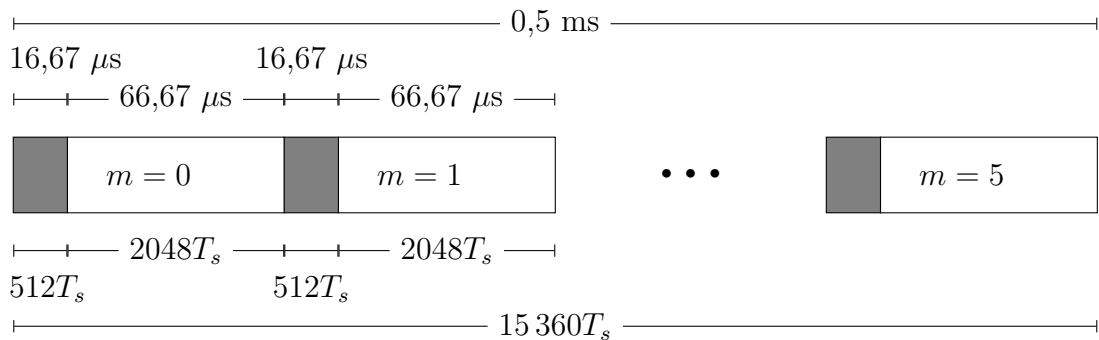
CP	Δf (kHz)	N_G
Normal	15	160, para $m = 0$
		144, para $m = 1, 2, \dots, 6$
Estendido	15	512, para $m = 0, 2, \dots, 5$
	7,5	1024, para $m = 0, 1, 2$

Figura 4.4 – Disposição dos símbolos OFDM com CP (preenchidos de cinza) de comprimento normal em um slot.



Fonte: Autoria própria.

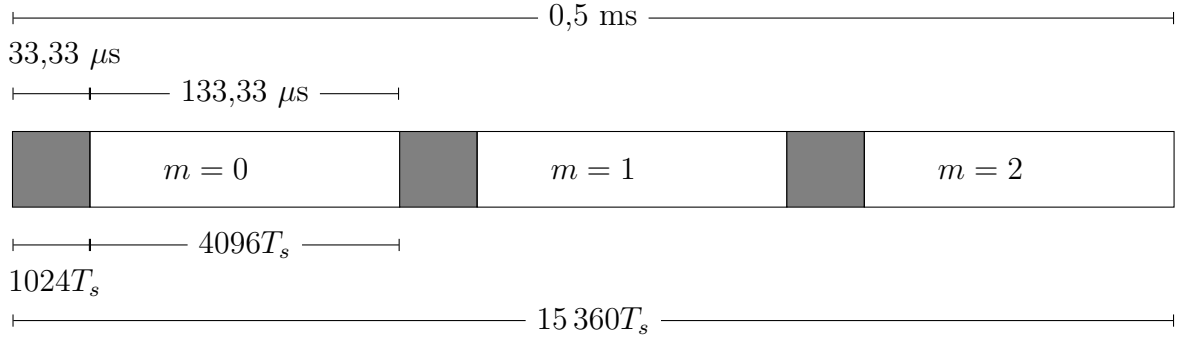
Figura 4.5 – Disposição dos símbolos OFDM com CP (preenchidos de cinza) de comprimento estendido e separação de subportadoras de 15 kHz em um slot.



Fonte: Autoria própria.

Finalmente, para ilustrar os conceitos do *downlink* LTE, até então desenvolvidos, bem como sua inter-relação com o comprimento da FFT/IFFT e a frequência de amostragem, toma-se por exemplo dois casos extremos, em termos de alocação de blocos de recursos:

Figura 4.6 – Disposição dos símbolos OFDM com CP (preenchidos de cinza) de comprimento estendido e separação de subportadoras de 7,5 kHz em um *slot*.



Fonte: Autoria própria.

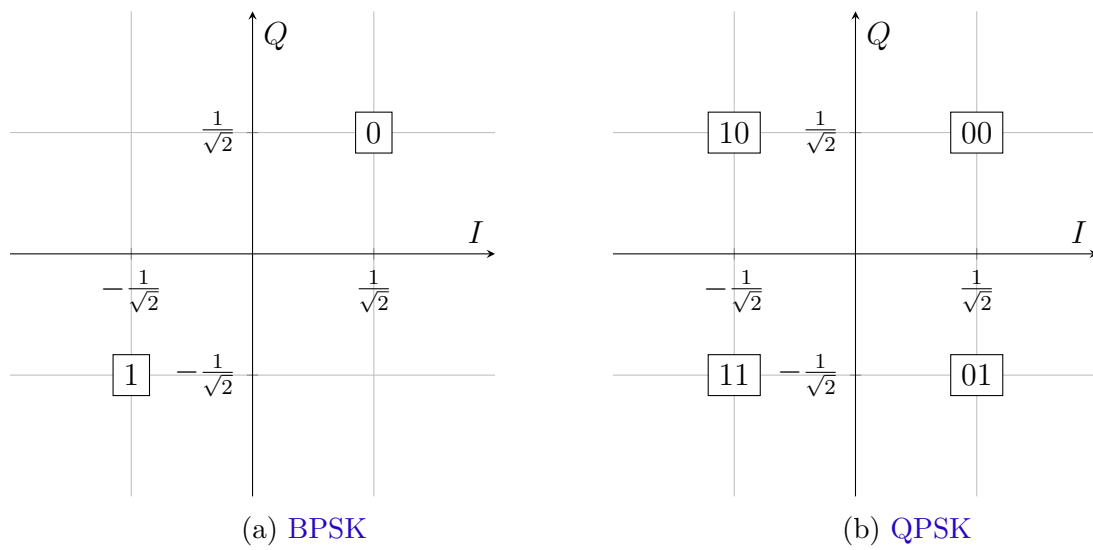
- Para $N_{RB} = 6$, tem-se uma banda total de 1,4 MHz (Tabela 4.2). Para um CP de comprimento normal (Tabela 4.3), o mapa de recursos tem um total de 72 subportadoras, espaçadas de 15 kHz, resultando em uma banda ocupada de 1,08 MHz. A menor IFFT *radix*-2 que suporta 72 subportadoras terá $N = 128$, das quais $N_{VC} = 128 - 72 = 56$ são VCs. A frequência de amostragem é então $f_s = 1,92$ MHz (Eq.(3.41)), ou seja, $T = 16T_s \approx 520,83$ ns.
- Para $N_{RB} = 100$, tem-se uma banda total de 20 MHz (Tabela 4.2). Para um CP de comprimento normal (Tabela 4.3), o mapa de recursos tem um total de 1200 subportadoras, espaçadas de 15 kHz, resultando em uma banda ocupada de 18 MHz. A menor IFFT *radix*-2 que suporta 1200 subportadoras terá $N = 2048$, das quais $N_{VC} = 2048 - 1200 = 848$ são VCs. A frequência de amostragem é $f_s = 30,72$ MHz (Eq.(3.41)), ou seja, $T = T_s \approx 32,55$ ns.

Para ambos os casos, a combinação de VCs, janelamento e filtragem deve garantir que a ACI caia para níveis aceitáveis, nos limites da BW total do canal. Há uma diversidade de métricas de qualidade e interferência na camada de rádio-frequência para o LTE descritas na especificação (ETSI, 2018).

4.2 Constelação dos símbolos modulados para LTE

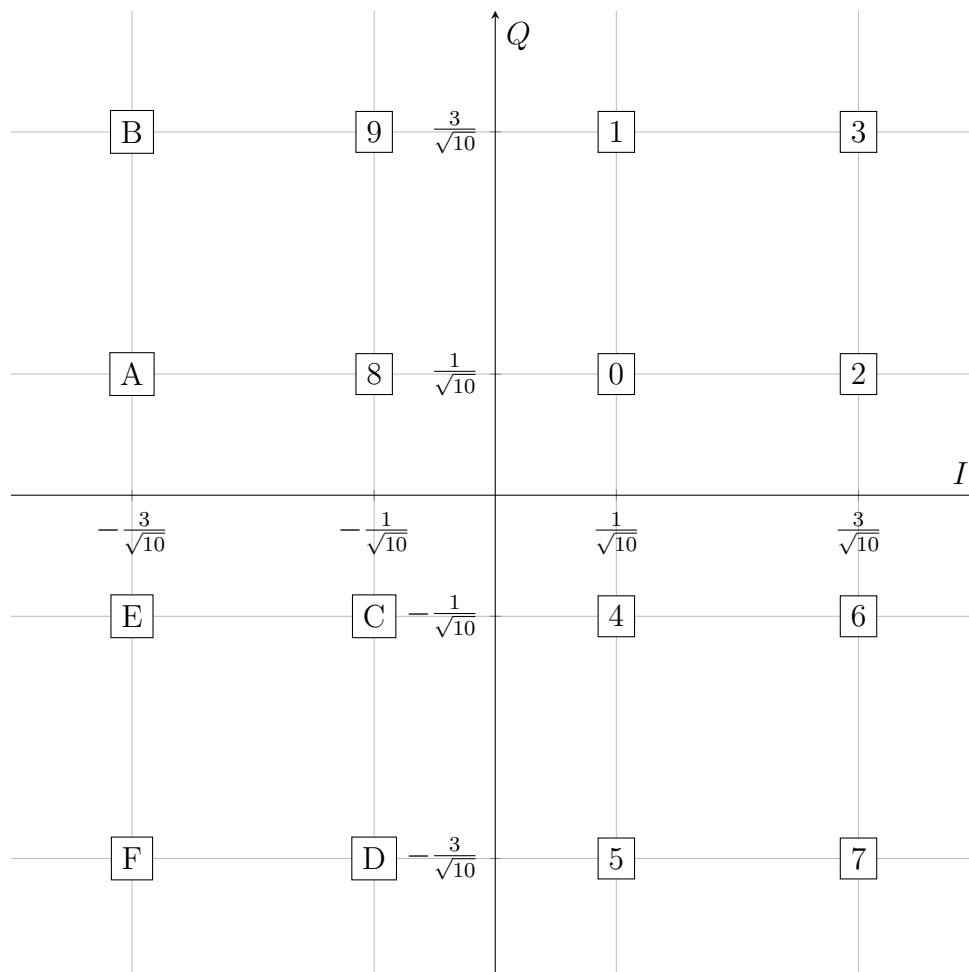
O *mapper* transforma uma sequência de bits em símbolos $x = I + jQ$, onde I é a componente em fase e Q é a componente em quadratura. As Figuras 4.7(a) e (b), 4.8 e 4.9 representam, respectivamente, as constelações para BPSK, QPSK, 16-QAM e 64-QAM, conforme definidas no padrão LTE (ETSI, 2010c). Como pode ser observado em todos os casos, símbolos adjacentes diferem por apenas um bit, o que ajuda a reduzir a BER para canais de transmissão benignos.

Figura 4.7 – Constelações BPSK (a) e QPSK (b) com valores binários representados para os componentes em fase e em quadratura.



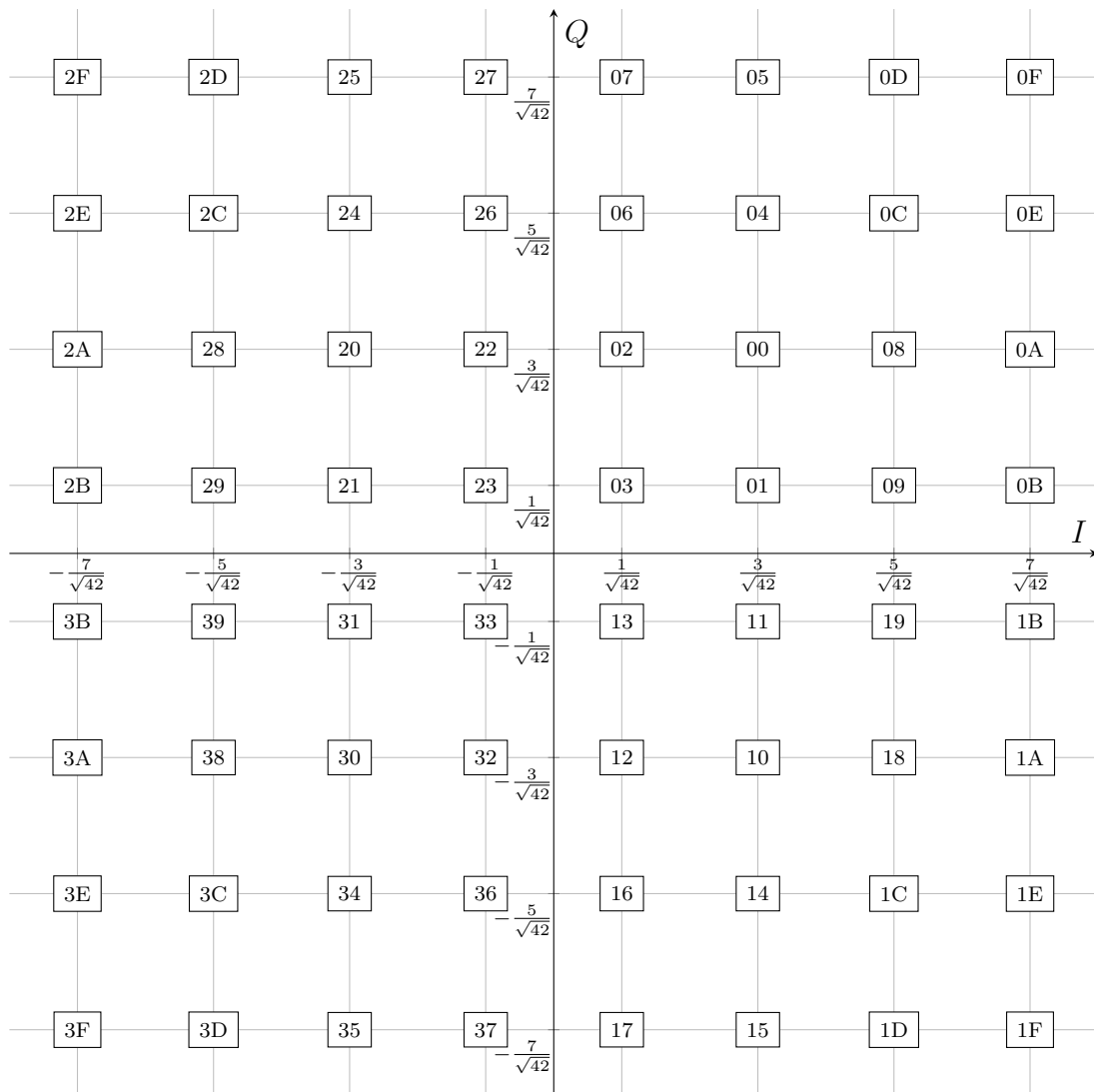
Fonte: Autoria própria.

Figura 4.8 – Constelação 16-QAM com valores binários representados em hexadecimal nos componente em fase e quadratura.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4.9 – Constelação 64-QAM com valores binários representados em hexadecimal nos componente em fase e quadratura.



Fonte: Autoria própria.

4.3 Serviços de Localização

Antes da oferta de serviços de localização através da rede celular, a menos que usuários tivessem investido em equipamentos específicos, suas escolhas eram bastante limitadas. Mesmo os *smartphones* mais avançadas disponíveis até 2009 ofereciam apenas serviços de localização baseado no geo-referenciamento de *WLANs*, cuja abrangência e cobertura são inerentemente limitadas, através de *Assisted GPS* — GPS Assistido (A-GPS), em que o almanaque e efemérides da constelação de satélites são retransmitidos pela rede de dados celulares, diminuindo o tempo¹ necessário para aquisição do posicionamento (ZANDBERGEN, 2009).

¹ A transmissão direta pelo satélite é realizada a uma taxa de 50 bits/s, tomando 12 min 30 s para uma transmissão completa.

4.3.1 PRS

O 3GPP Release 9 do LTE introduziu o PRS como sinal de referência no mapa de recursos. Os REs alocados para PRS devem fazer parte do PDSCH sem conflito com outros sinais de referência. O PRS está definido apenas para $\Delta f = 15$ kHz (ETSI, 2010d).

A configuração de um *subframe* para transmissão do PRS, chamado de ocasião de posicionamento, depende de dois parâmetros, o período do PRS (T_{PRS}) dado em *subframes* e o deslocamento (*offset*) do PRS (Δ_{PRS}), também dado em *subframes*. Ambos os parâmetros são definidos, como mostra a Tabela 4.5, pelo índice PRS I_{PRS} , definido em camadas superiores. O PRS não é transmitido em *subframes* especiais (ETSI, 2010d).

Tabela 4.5 – Configuração do *subframe* PRS.

I_{PRS}	T_{PRS} (<i>subframes</i>)	Δ_{PRS} (<i>subframes</i>)
0 – 159	160	I_{PRS}
160 – 479	320	$I_{\text{PRS}} - 160$
480 – 1119	640	$I_{\text{PRS}} - 480$
1120 – 2399	1280	$I_{\text{PRS}} - 1120$
2400 – 4095	Reservado	

Para um *frame* enumerado n_f e *slot* enumerado n_s (de 0 a 19), os *subframes* PRS devem satisfazer

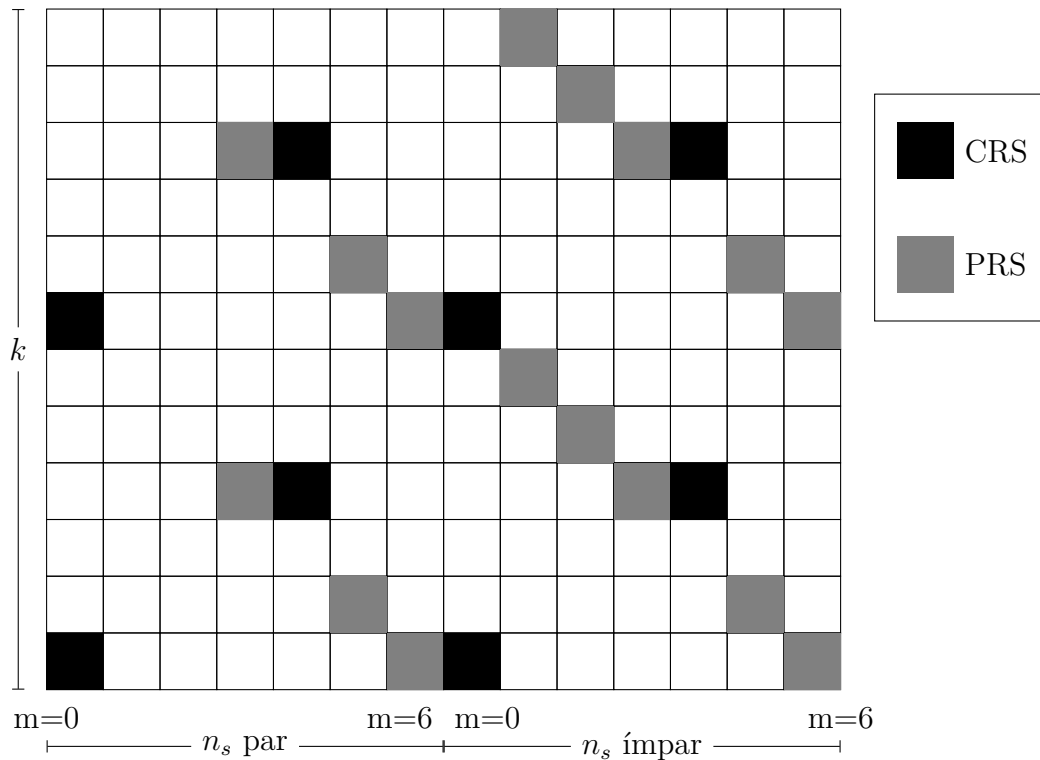
$$(10n_f + \lfloor n_s/2 \rfloor - \Delta_{\text{PRS}}) \bmod T_{\text{PRS}} = 0. \quad (4.1)$$

O mapeamento exato dos símbolos PRS é intrincado para evitar sobreposição com outros sinais que compartilham o PDSCH, como o CRS. O CRS é utilizado no receptor, primariamente, para estimação do canal. Uma referência completa pode ser encontrada em (ETSI, 2010d, p. 72). A Figura 4.10 ilustra um exemplo sobre dois RBs em um *subframe*, discriminando os *slots* de índice par e ímpar.

Nota-se, na Figura 4.10 que os três primeiros símbolos do *subframe* (i.e. *slots* pares) não têm símbolos PRS mapeados. Essas posições não fazem parte do PDSCH, mas sim do *Downlink Control Information* — Informação de Controle do *Downlink* (DCI), sendo utilizada para sinalização de controle.

Ambos CRS e PRS são constituídos por símbolos QPSK através de uma sequência pseudo-aleatória de Gold (GOLD, 1967). A inicialização da sequência é parametrizada pela identidade de célula da rede, um inteiro no alcance $0 \leq N_{\text{ID}}^{\text{cell}} \leq 503$ (ETSI, 2010d). Uma limitação da alocação dos símbolos PRS devido ao fato de ela depender de $N_{\text{ID}}^{\text{cell}} \bmod 6$, ou seja, há apenas seis alocações distintas possíveis (representando deslocamentos verticais circulares na Figura 4.10. Essa baixa diversidade de mapeamento tempo-frequência causa a sobreposição de PRS distintos, empobrecendo a SNR no processo de detecção.

Figura 4.10 – Exemplo de mapeamento do PRS e CRS para um *subframe* de localização. Apenas dois blocos de recursos são exibidos (um para cada *slot*).



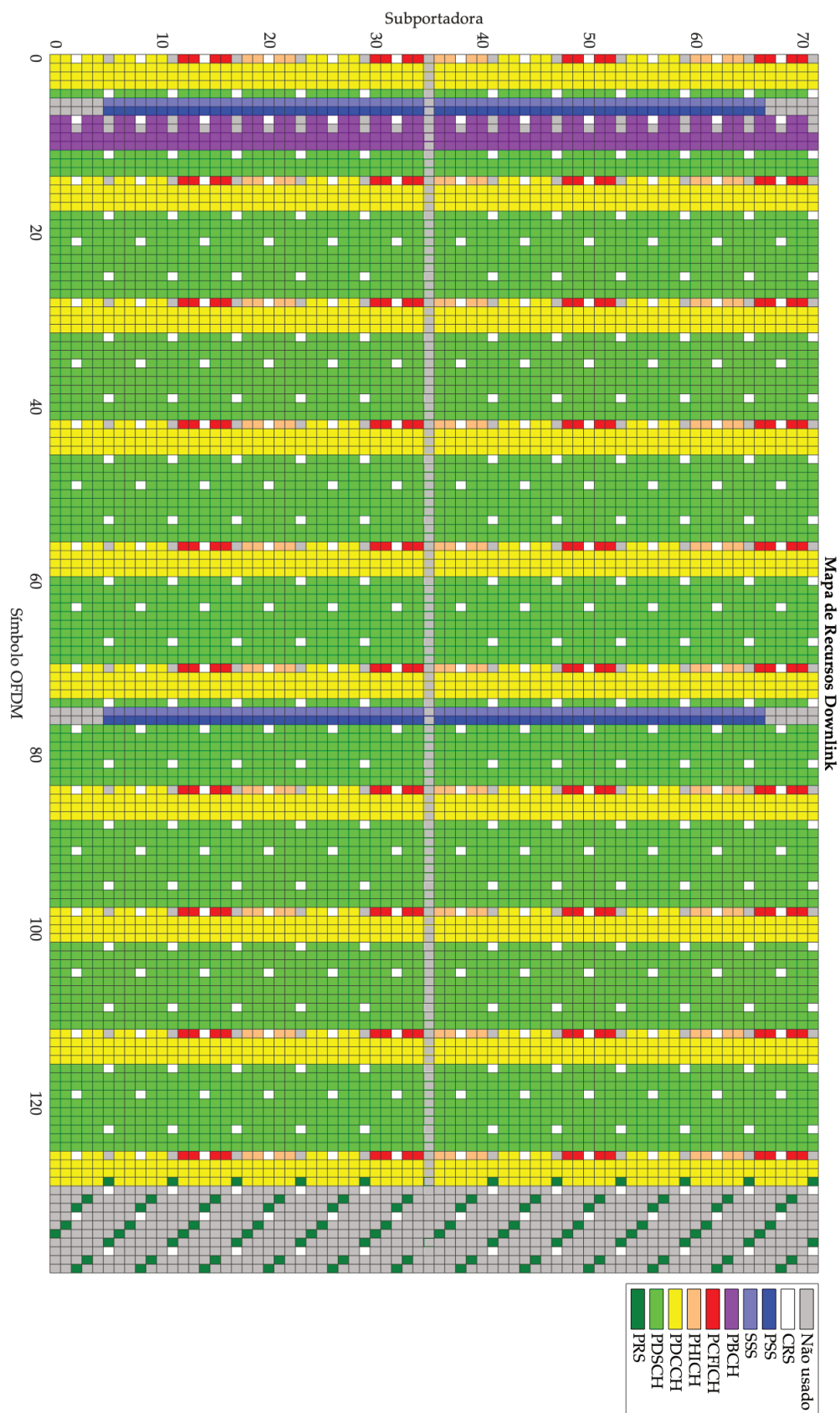
4.3.2 RMC

Em estudos sobre o LTE, é comum a utilização de um RMC (ETSI, 2010e), de maneira a garantir a reprodutibilidade dos resultados. Através de um RMC fica definido se o LTE será FDD ou TDD, bem como a largura de banda utilizada, se haverá algum tipo de implementação MIMO, qual a taxa da codificação Turbo e qual a modulação do PDSCH.

A Figura 4.11 apresenta o mapa de recursos codificado em cores para um *frame* completo, utilizando o RMC R.4 FDD para CP normal, com banda de 1,4 MHz, 12 RBs alocados, com modulação QPSK de taxa 1/3 para o PDSCH (ETSI, 2010e). O último *subframe* foi configurado como uma ocasião de posicionamento.

Dentre os canais e sinais que a Figura 4.11 apresenta, apenas o CRS, PRS e PDSCH já foram apresentados. Os restantes são definidos, em relação ao mapa de recursos RMC R.4 FDD da Figura 4.11, a seguir:

- *Primary Synchronization Signal* — Sinal de Sincronização Primária (PSS), uma sequência Zadoff-Chu, com modulação PSK, que codifica parte do *Identifier* — Identificação (ID) da célula;

Figura 4.11 – Mapa de recursos para o *downlink* LTE, RMC R.4 FDD.

Fonte: Autoria própria.

- *Secondary Synchronization Signal* — Sinal de Sincronização Secundário (SSS), duas sequências de 31 bits concatenados com *interleaving*, modulada para símbolos BPSK, que codifica o ID da célula, bem como estabelece o sincronismo de quadro. Tanto o PSS quanto o SSS são transmitidos apenas no *subframe* 0 e 5;
- *Physical Broadcast Channel* — Canal Físico de Broadcast (PBCH), ocupa apenas as 72 subportadoras centrais de parte do primeiro *subframe*. Transmite informações necessárias para estabelecer uma conexão com a rede, utilizando símbolos QPSK;
- *Physical Control Format Indicator Channel* — Canal Físico Indicador do Formato de Controle (PCFICH), *Physical HARQ Indicator Channel* — Canal Físico Indicador HARQ (PHICH)² e *Physical Downlink Control Channel* — Canal Físico de Controle do Downlink (PDCCH). O PCFICH, primariamente, transmite o número de símbolos que serão utilizados na transmissão do PHICH e PDCCH, utilizando sinalização QPSK. O PHICH é um canal dedicado para mensagens de confirmação de recebimento, moduladas em símbolos BPSK. O PDCCH é utilizado para transmitir a DCI, estabelecendo o agendamento e alocação de recursos, entre os múltiplos usuários, também através de símbolos QPSK.

Para a banda de 1,4 MHz, são alocados 4 símbolos para o PDCCH (ETSI, 2010e), o que ajuda a diminuir muito a eficiência espectral do LTE para pequenas alocações de banda, em razão da diminuição da alocação do PDSCH.

4.3.3 LPP

O 3GPP Release 9 também introduziu o *LTE Positioning Protocol* — Protocolo de Posicionamento para LTE (LPP), para através de uma comunicação entre o servidor de localização e o dispositivo alvo, ser determinada a posição do dispositivo alvo a partir de medidas como OTDoA, cabendo as definições específicas (ETSI, 2010b; XU et al., 2016; ROSADO et al., 2017; RADNOSRATI et al., 2020):

Servidor de localização — é uma entidade física ou lógica que gerencia o posicionamento do dispositivo alvo através de medidas e outras informações de localização disponíveis;

Dispositivo alvo — é o dispositivo sendo localizado, usualmente um terminal móvel na rede celular ou UE no jargão LTE.

OTDoA — o intervalo de tempo observado por um dispositivo alvo entre a recepção de dois PRSs de células distintas. Se o sinal da célula 1 é recebido ao tempo t_1 , e o sinal da célula 2, ao tempo t_2 (assumindo $t_2 \geq t_1$), o OTDoA é $\tau = t_2 - t_1$.

² *Hybrid Automatic Repeat Request* — Repetição de Requisição Automática Híbrida (HARQ), usado na repetição automática eficiente de requisições não respondidas ou confirmadas.

De forma geral³, o procedimento de localização de um UE, na rede celular LTE, pode ser descrito nos seguintes passos:

1. O UE, conectado a um eNodeB da rede, faz uma requisição de assistência ao servidor de localização;
2. O servidor de localização, baseado na geo-referência do eNodeB onde o UE está conectado, reúne o N_{ID}^{cell} e I_{PRS} , dos eNodeBs vizinhos, transmitindo-os para o UE;
3. De posse do N_{ID}^{cell} e I_{PRS} , o UE pode replicar o PRS dos eNodeBs em sua vizinhança;
4. O UE detecta (e.g., por filtro casado) os PRS audíveis dos eNodeBs próximas. Cada par distinto de PRS recebidos gera uma medida de OTDoA;
5. O UE envia ao servidor de localização a coleção de medidas OTDoA realizada;
6. Baseado na localização geo-referenciada de cada eNodeB e nas medidas de OTDoA, o servidor de localização calcula a localização (inclusive incerteza) do UE;
7. Finalmente, o servidor de localização envia a localização resolvida para o UE.

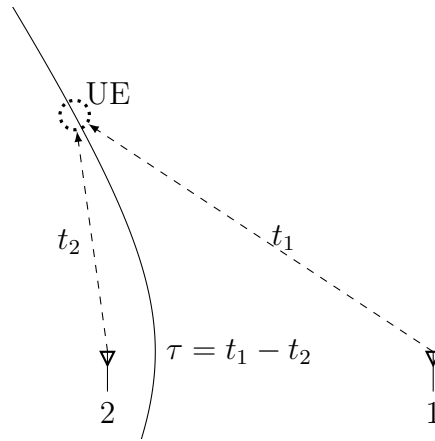
Simplificando para o plano bidimensional, uma medida de OTDoA define uma hipérbole, como a ilustrada na Figura 4.12. São necessárias ao menos três medidas distintas de OTDoA para fixar, sem ambiguidade, a posição do UE. Para várias eNodeBs detectáveis, as OTDoA podem ser definidas por

$$\tau_{i,j} = t_i - t_j, \quad i \neq j. \quad (4.2)$$

Para mitigar o problema da baixa diversidade no mapeamento dos símbolos PRS (apenas seis alocações distintas, como discutido anteriormente), o 3GPP Release 10 (ETSI, 2011b) introduziu o PRS muting. O PRS muting é gerenciado pelo servidor de localização através do LPP. Através do PRS muting, pode ser limitado o número de eNodeBs que transmitem seu PRS, em cada ocasião de posicionamento. Isso permite, caso bem configurado pelo operador da rede, que as transmissões de PRS não sofram conflito de mapeamento dos símbolos, melhorando a SNR de detecção de eNodeBs mais remotas (LIN et al., 2017).

³ Desconsiderando erros de transmissão e requisição de reenvios.

Figura 4.12 – Hipérbole definida por uma medida de OTDoA. Devido a incertezas nas medidas, o UE pode estar localizado em qualquer ponto no plano nas vizinhanças da hipérbole.



Fonte: Autoria própria.

5 Melhorias em sistemas MIMO-OFDM

Nesta pesquisa, a aplicação da álgebra de quatérnions, como forma de explorar a diversidade de polarização, foi aplicada em diferentes contextos de sistemas de comunicação, que são brevemente descritos abaixo:

MIMO-QOFDM — A tecnologia atualmente dominante, baseada em **MIMO-OFDM**, foi generalizada para **QOFDM**. Sua fundamentação matemática, baseada em **CODs** foi re-desenvolvida para **QODs**, de maneira a permitir a exploração das diversidades espacial, temporal e de polarização.

Sincronismo QOFDM — O sincronismo temporal e em frequência em um sistema **OFDM** é um parâmetro crítico ao seu desempenho. O impacto da exploração da diversidade de polarização em um sistema **QOFDM** foi avaliado sobre a variância das estimativas da **STO** e **CFO** por diferentes métodos.

Serviços de Localização — Os serviços de localização, baseados em **OTDoA**, oferecidos pelos operadores de rede celular **LTE** (a partir do *Release* 9), embora limitados, por vezes são a única informação de localização disponível, especialmente em ambientes *indoor* ou centros urbanos altamente verticalizados. Foi estudada a melhoria de desempenho desse tipo de serviço para uma generalização **QOFDM**.

Neste capítulo serão descritas as contribuições obtidas por esta pesquisa para as especificidades supracitadas. Os resultados dessas investigações são apresentados e discutidos no próximo capítulo.

5.1 MIMO-QOFDM

Para a expansão quaterniônica polarizada do **MIMO-OFDM** dois *streams* de bits independentes são mapeados para símbolos (e.g., **QPSK**, **QAM**, etc.) a_k e b_k . Os símbolos a_k e b_k , por sua vez, são alocados para $X^{(h)}(k)$ e $X^{(v)}(k)$, nas subportadoras k do sistema **QOFDM**.

Através da construção **CD**, é possível reunir os símbolos alocados em uma única sequência quaterniônica,

$$\mathbf{X}(k) = X^{(h)}(k) + X^{(v)}(k)\mathbf{j}, \quad (5.1)$$

sendo que a **IQFT** (Eq. (2.50)) pode ser aplicada para obter os símbolos transmitidos **QOFDM**, em banda base,

$$\mathbf{x}(n) = x^{(h)}(n) + x^{(v)}(n)\mathbf{j}, \quad (5.2)$$

como ilustrado graficamente na Figura 5.1. De maneira análoga, a demodulação QOFDM, realizada através da QFT está ilustrada na Figura 5.2.

Figura 5.1 – Diagrama de blocos representando um modulador QOFDM simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.

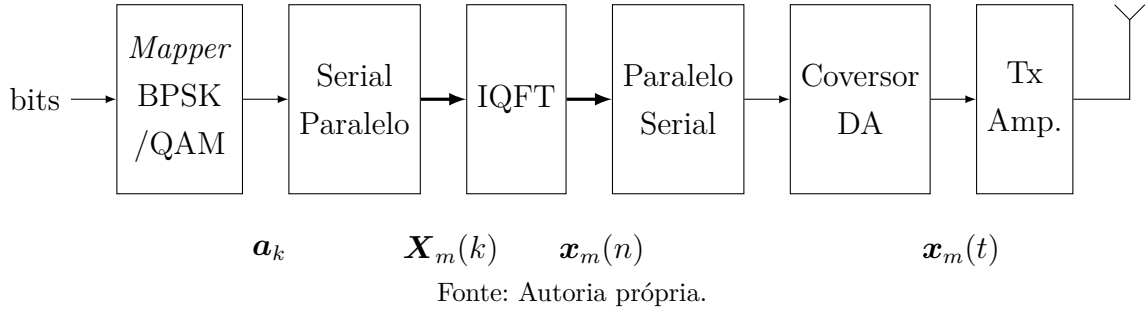
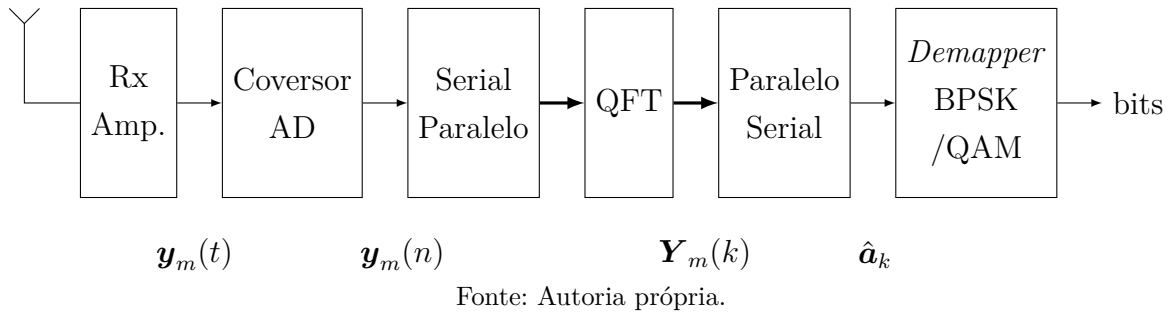


Figura 5.2 – Diagrama de blocos representando um demodulador QOFDM simplificado. As linhas mais espessas representam barramentos paralelos.



Em uma transmissão MIMO, múltiplos *streams* de bits podem ser produzidos desta forma e transmitidos através de multiplexação espacial, aumentando muito o *throughput* do canal. Neste estudo, será analisado apenas a combinação dos *streams* de forma a inserir redundância na transmissão, obtendo ganhos de diversidade e, por conseguinte, reduzindo a BER para uma SNR fixa.

Dois CODs, equivalentes a STBC de Alamouti,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} z_2 & z_1 \\ \bar{z}_1 & -\bar{z}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

podem ser combinados para a produção de um QOD(2,2)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} z_1 + z_2\mathbf{j} & z_2 + z_1\mathbf{j} \\ -\bar{z}_2 + \bar{z}_1\mathbf{j} & \bar{z}_1 - \bar{z}_2\mathbf{j} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

com processamento linear e taxa 1/2.

Por simplicidade, as equações do MIMO-QOFDM serão escritas em termos de apenas dois símbolos complexos: x_0 e x_1 , de maneira que, pelo QOD(2,2) são transmitidos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 = x_0 + x_1\mathbf{j} & \mathbf{s}_2 = x_1 + x_0\mathbf{j} \\ \mathbf{s}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_0\mathbf{j} & \mathbf{s}_3 = \bar{x}_0 - \bar{x}_1\mathbf{j} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Para um simples canal [AWGN](#), no intuito de manter a clareza das equações, os símbolos recebidos \mathbf{r}_0 e \mathbf{r}_1 podem ser definidos por

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 = (x_0 + x_1) + (x_0 + x_1)\mathbf{j} + \boldsymbol{\eta}_0, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_3 = (\bar{x}_0 - \bar{x}_1) + (\bar{x}_0 - \bar{x}_1)\mathbf{j} + \boldsymbol{\eta}_1, \quad (5.7)$$

onde $\boldsymbol{\eta}_0$ e $\boldsymbol{\eta}_1$ são variáveis aleatórias quaterniônicas [i.i.d.](#), com distribuição normal $\mathcal{QN}(0, \sigma^2)$. Nessas equações, fica claro que a escolha do [QOD\(2, 2\)](#) traz redundância ao código, transmitindo o mesmo símbolo na polarização horizontal e vertical.

Por fim, os sinais podem ser decodificados através de

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{r}_0 + \bar{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 + \bar{\mathbf{s}}_1 + \bar{\mathbf{s}}_3 + \boldsymbol{\eta}_0; \quad (5.8)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{r}_0 - \bar{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_2 - \bar{\mathbf{s}}_1 - \bar{\mathbf{s}}_3 + \boldsymbol{\eta}_1, \quad (5.9)$$

sendo que, substituindo as Eqs. (5.6) e (5.7), nestas últimas e resolvendo a álgebra quaterniônica, chega-se a

$$\mathbf{y}_0 = 2x_0 + 2x_1\mathbf{j} + \boldsymbol{\eta}_0, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{y}_1 = 2x_1 + 2x_0\mathbf{j} + \boldsymbol{\eta}_1. \quad (5.11)$$

Assim, o sinal recebido possui duas cópias, com a polarização intercambiada, dos símbolos originalmente transmitidos. Isso permite uma grande diminuição da [BER](#), para uma dada [SNR](#), aumentando a confiabilidade do canal de comunicações.

Remetendo a Eq. (3.5) e explorando a simplicidade da notação na construção [CD](#) (Eq. (2.32)), o sistema [MIMO-QOFDM](#) implementado através do [QOD\(2, 2\)](#), descrito anteriormente, pode ser definido por

$$\mathbf{Y}^{(h)} + \mathbf{Y}^{(v)}\mathbf{j} = \underbrace{\mathbf{H}^{(h)}\mathbf{X}^{(h)}}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\mathbf{H}^{(v)}\mathbf{X}^{(v)}}_{\mathbf{B}}\mathbf{j} + \mathbf{Z}^{(h)} + \mathbf{Z}^{(v)}\mathbf{j}, \quad (5.12)$$

onde as matrizes $\mathbf{Y}^{(h)}$ e $\mathbf{Y}^{(v)}$, de dimensão $N_R \times N_S$, representam os N_S sinais recebidos em cada uma das N_R antenas receptoras, para ambas polarizações. As matrizes $\mathbf{X}^{(h)}$ e $\mathbf{X}^{(v)}$, de dimensão $N_T \times N_S$, representam os N_S sinais transmitidos em cada uma das N_T antenas transmissoras, para cada polarização. As matrizes $\mathbf{Z}^{(h)}$ e $\mathbf{Z}^{(v)}$, de dimensão $N_R \times N_S$, representam os N_S termos [i.i.d.](#) de ruído $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$, em cada uma das N_R antenas receptoras, para cada polarização. Por fim, as matrizes $\mathbf{H}^{(h)}$ e $\mathbf{H}^{(v)}$, de dimensão $N_R \times N_T$, representam os canais independentes, para cada polarização, entre os pares de antenas transmissoras e receptoras.

5.2 Sincronismo QOFDM

Para um canal [AWGN](#) duplamente polarizado, utilizando sinalização quaterniônica, os efeitos combinados da [STO](#) e [CFO](#) no sinal discreto banda base recebido podem ser representados por

$$\mathbf{y}_m(n) = \exp(i2\pi n\varepsilon/N)\mathbf{x}_m(n + \theta) + \mathbf{z}_m(n), \quad (5.13)$$

onde $\mathbf{x}_m(n)$ é o sinal banda base quaterniônico transmitido e $\mathbf{z}_m(n)$ é o ruído aditivo com distribuição normal $\mathcal{QN}(0, \sigma^2)$. Assim como no caso tradicional complexo, o sincronismo de [STO](#) e [CFO](#) é crítico para o desempenho de um sistemas de comunicações polarizado [QOFDM](#). Na sequência são expandidos dois métodos clássicos de sincronismo de [STO](#) e [CFO](#) em sistemas [OFDM](#) para sinalização polarizada [QOFDM](#). O primeiro é baseado em símbolo de treinamento, enquanto o segundo é baseado no [CP](#).

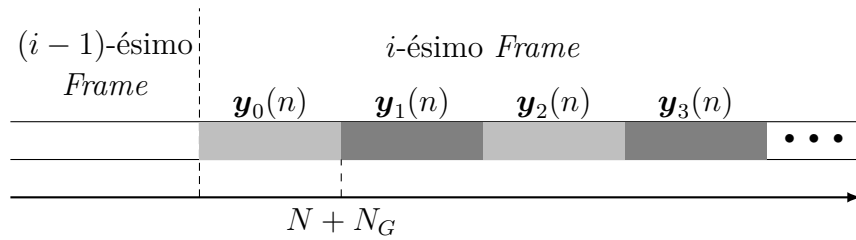
5.2.1 Sincronismo baseado em símbolo de treinamento

Após a recepção, uma sequência de símbolos [QOFDM](#) representados por $\mathbf{y}(n)$ pode ser construída

$$\mathbf{y}(n) = \{\mathbf{y}_0(n), \mathbf{y}_1(n), \mathbf{y}_2(n), \dots\}, \quad (5.14)$$

onde cada termo $\mathbf{y}_m(n)$ corresponde a N amostras recebidas (após remoção do [CP](#)) e concatenadas para construir $\mathbf{y}(n)$, conforme ilustrado graficamente na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Sequência de símbolos [QOFDM](#) de duração $N + N_G$ com [CP](#). Os primeiros símbolos de cada *frame* y_0 e y_1 são símbolos de treinamento idênticos, conhecidos no receptor.



Fonte: Autoria própria.

Para uma sequência de l símbolos recebidos, assumindo que os primeiros símbolos transmitidos ($\mathbf{x}_0(n)$ e $\mathbf{x}_1(n)$, sem [CP](#)) são símbolos de treinamento repetidos (i.e., $\mathbf{x}_0(n) = \mathbf{x}_1(n)$) conhecidos pelo receptor, a [STO](#) pode ser estimada através de um filtro casado quaterniônico ([ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014](#)) da forma

$$\mathbf{R}_{x,y}(r) = \sum_{n=0}^{lN-1} \mathbf{x}(n)\bar{\mathbf{y}}(n+r), \quad (5.15)$$

onde $\mathbf{x}(n) = \{\mathbf{x}_0(n), \mathbf{x}_1(n)\}$ é a concatenação dos símbolos de treinamento idênticos quaterniônicos.

A **STO** pode ser estimada através de

$$\hat{\theta} = \arg \max_r (|\mathbf{R}_{yx}(r)|). \quad (5.16)$$

Uma vez corrigida a **STO**, é possível escrever, ignorando o temo do ruído

$$\mathbf{y}_1(n) = \exp(i2\pi\epsilon(N + N_G)/N) \mathbf{y}_0(n), \quad (5.17)$$

lembrando que N_G é o comprimento do **CP**. Através das propriedades da **DFT**, tem-se

$$\mathbf{Y}_1(k) = \exp(i2\pi\epsilon(N + N_G)/N) \mathbf{Y}_0(k). \quad (5.18)$$

Exceto pela corrupção do canal polarizado **AWGN**, os sinais **QOFDM** demodulados $\mathbf{Y}_0(k)$ e $\mathbf{Y}_1(k)$ são iguais. Isso permite escrever (generalizado para quatérnions a partir de (**MOOSE**, 1994)):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k) &= \exp(i2\pi\epsilon(N + N_G)/N) |\mathbf{Y}_0(k)| \\ \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k) &= \exp(i2\pi\epsilon(N + N_G)/N) \|\mathbf{Y}_0(k)\|, \end{aligned} \quad (5.19)$$

de onde é possível isolar o expoente de fase do quatérnion $\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k)$. Assim, é possível escrever

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{N + N_G}{N} \epsilon &= \tan^{-1} \left(\frac{|\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{V}[\mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k)]|}{\sum_{k=0}^{N-1} S[\mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k)]} \right), \\ \hat{\epsilon} &= \frac{1}{2\pi} \frac{N}{N + N_G} \tan^{-1} \left(\frac{|\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{V}[\mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k)]|}{\sum_{k=0}^{N-1} S[\mathbf{Y}_1(k) \bar{\mathbf{Y}}_0(k)]} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde os operadores $S(\cdot)$ e $\mathbf{V}(\cdot)$ estão definidos em (2.3). Assim como no caso complexo, percebe-se que a faixa dinâmica para detecção da **CFO** fracionária é dependente de N e N_G .

5.2.2 Sincronismo baseado em prefixo cíclico

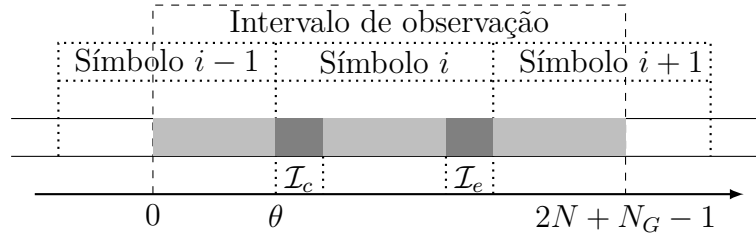
Assim como feito para o sincronismo baseado em símbolo de treinamento, nesta seção, será generalizado para álgebra de quatérnions o método proposto em (**VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON**, 1997) para estimação conjunta da **STO** e **CFO**, baseada em **CP**.

Para uma sequência de símbolos transmitidos **QOFDM** $\mathbf{x}(n)$, o sinal recebido pode ser escrito como

$$\mathbf{y}(n) = \exp(i2\pi\epsilon n/N) \mathbf{x}(n - \theta) + \mathbf{z}(n), \quad (5.21)$$

onde $\mathbf{z}(n)$ representa o ruído **AWG** polarizado com distribuição normal $\mathcal{QN}(0, \sigma^2)$.

Figura 5.4 – Intervalo de observação para sincronismo QOFDM da STO e CFO baseado em CP.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 5.4, uma janela de observação de comprimento $2N + N_G$ é utilizada para encontrar o início do símbolo QOFDM (com CP). Com os grupos de índices \mathcal{I}_c e \mathcal{I}_e , respectivamente correspondendo ao CP, $\mathcal{I}_c = \{\theta, \theta + 1, \dots, \theta + N_G - 1\}$, e à região ao final do símbolo QOFDM (últimas N_G amostras, de onde o CP é copiado, $\mathcal{I}_e = \{\theta + N - 1, \dots, \theta + N + N_G - 1\}$).

A função log-likelihood, para a STO θ , e a CFO ε , é então dada por

$$\Lambda(\theta, \varepsilon) = \log f(\mathbf{y}(n)/\theta, \varepsilon). \quad (5.22)$$

Como as amostras do símbolo QOFDM fora da região $\mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_e$ são independentes, a função log-likelihood pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Lambda(\theta, \varepsilon) &= \log \left[\prod_{n \in \mathcal{I}_c} f(\mathbf{y}(n), \mathbf{y}(n + N)) \prod_{n \notin \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_e} f(\mathbf{y}(n)) \right] \\ &= \log \left[\prod_{n \in \mathcal{I}_c} \frac{f(\mathbf{y}(n), \mathbf{y}(n + N))}{f(\mathbf{y}(n))f(\mathbf{y}(n + N))} \prod_{n \notin \mathcal{I}_c \cup \mathcal{I}_e} f(\mathbf{y}(n)) \right] \\ &= C + \sum_{n \in \mathcal{I}_c} \log \left[\frac{f(\mathbf{y}(n), \mathbf{y}(n + N))}{f(\mathbf{y}(n))f(\mathbf{y}(n + N))} \right], \end{aligned} \quad (5.23)$$

sendo $f(\mathbf{y}(n), \mathbf{y}(n + N))$ a p.d.f. conjunta de $\mathbf{y}(n)$ e $\mathbf{y}(n + N)$. A constante C é independente de θ and ε , podendo então ser ignorada na maximização da função log-likelihood.

Avaliando a covariância de $(\mathbf{y}(n), \mathbf{y}(n + N))$, nota-se que para $n \in \mathcal{I}_c$

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}(n)\bar{\mathbf{y}}(n + m)] = \begin{cases} \sigma_y^2 + \sigma_z^2 & \text{se } l = 0 \\ \sigma_y^2 \exp(-i2\pi\varepsilon) & \text{se } l = N \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.24)$$

sendo $\sigma_y^2 = \mathbb{E}[|\mathbf{y}(n)|^2]$ e $\sigma_z^2 = \mathbb{E}[|\mathbf{z}(n)|^2]$ são as potências do sinal recebido, e do ruído, respectivamente. Definindo

$$\rho = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2 + \sigma_z^2} = \frac{\text{SNR}}{\text{SNR} + 1}, \quad (5.25)$$

a maximização da função log-likelihood pode ser dada por

$$\Lambda(\theta, \varepsilon) = |\gamma(n)| \cos(2\pi\theta + \angle_i \gamma(\theta)) - \rho \Phi(n), \quad (5.26)$$

sendo que $\angle_i(\cdot)$ representa o argumento do quatérnion, em relação ao componente i de seu eixo (Seção 2.5.1), enquanto $\gamma(n)$ e $\Phi(n)$ são definidas por

$$\gamma(n) = \sum_{m=0}^{2N+N_G-1} \mathbf{y}(n+m) \bar{\mathbf{y}}(n+m+N) \quad (5.27)$$

e

$$\Phi(n) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2N+N_G-1} (|\mathbf{y}(n+m)|^2 + |\mathbf{y}(n+m+N)|^2). \quad (5.28)$$

Assim, a estimativa de máxima verossimilhança da **STO** pode então ser obtida por

$$\hat{\theta} = \arg \max_n (|\gamma(n)| - \rho \Phi(n)), \quad (5.29)$$

enquanto a estimativa da **CFO**, também de máxima verossimilhança, é obtida por

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2\pi} \angle_i \gamma(\hat{\theta}), \quad (5.30)$$

onde, assim como no caso complexo tradicional, é possível verificar a dependência da estimação da **STO** na estimação da **CFO**. Também nota-se que o argumento na Eq. (5.30) é tomado sobre o eixo i .

5.3 Localização por OTDoA

Para um *subframe* de posicionamento, apenas o **CRS** e o **PRS** são transmitidos. Os símbolos **QPSK** são mapeados em posições $X_m(k)$ do mapa de recursos, como definido em (ETSI, 2010d). Após modulação **OFDM** e inserção de **CP**, o sinal **OFDM** banda base $x_m(n)$ é concatenado para uma única sequência $x(n) = \{x_0(n), x_1(n), \dots, x_{19}(n)\}$. No caso de um sinal polarizado, duas sequências independentes $x^{(h)}(n)$ e $x^{(v)}(n)$ são produzidas de maneira análoga, sendo então combinadas através da construção **CD** na criação de um sinal quaterniônico. Na sequência são descritos os métodos de estimação do **OTDoA** para comparação de ambos os casos complexo e quaterniônico.

5.3.1 Sem polarização

Tomando L **eNodeBs** cujos sinais de referência são detectáveis pelo **UE**, assumindo que os artefatos de sincronismo já foram sanados, para um simples caso **SISO** e **AWGN**, o sinal recebido pode ser dado por

$$y(n) = \sum_{l=1}^L x_l(n - t_l) + z(n), \quad (5.31)$$

sendo $y_l(n)$ e t_l , respectivamente, o sinal recebido e o *Time of Arrival* — Tempo de Chegada (ToA) da l -ésima eNodeB, e $z(n)$ é ruído aditivo $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

Com o conhecimento do $N_{\text{ID}}^{\text{cell}}$ e do I_{PRS} , o UE é capaz de reconstruir o PRS e CRS da l -ésima eNodeB, $r_l(n)$. Assim, para cada sinal de referência detectável, um filtro casado (KRISHNAN, 2006) pode ser aplicado, e o pico de correlação encontrado (dentro dos limites do período de amostragem). Assim,

$$\hat{t}_l = \max_r \left(\left| \sum_n y(n) \bar{r}_l(n+r) \right| \right), \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (5.32)$$

onde \hat{t}_l é o ToA da l -ésima eNodeB. Por fim, as OTDoAs podem ser calculadas, através da Eq. (4.2), a partir das estimativas do ToA.

5.3.2 Com polarização

No caso polarizado, para um mesmo L número de eNodeB detectáveis, os sinais recebidos para cada polarização são dados por (JEON et al., 2012)

$$y^{(h)}(n) = \sum_{l=1}^L x_l^{(h)}(n - t_l) + \sqrt{\alpha} x_l^{(v)}(n - t_l) \quad (5.33)$$

e

$$y^{(v)}(n) = \sum_{l=1}^L \sqrt{\alpha} x_l^{(h)}(n - t_l) + x_l^{(v)}(n - t_l), \quad (5.34)$$

lembrando que α está relacionado ao XPD, entre os componentes $x^{(h)}$ e $x^{(v)}$, através da Eq. (3.21).

Ambos sinais linearmente polarizados, $y^{(h)}(n)$ e $y^{(v)}(n)$ podem ser combinados em um único sinal polarizado quaterniônico $\mathbf{r}(n)$, através da construção CD, Eq. (2.32), resultando em $\mathbf{y}(n) = y^{(h)}(n) + y^{(v)}(n)\mathbf{j}$.

Levando em conta os efeitos do canal AWGN, o sinal recebido pode ser reescrito como

$$\mathbf{y}(n) = y^{(h)}(n) + y^{(v)}(n)\mathbf{j} + \mathbf{z}(n), \quad (5.35)$$

onde $\mathbf{z}(n)$ é uma variável $\mathcal{QN}(0, \sigma^2)$, representando o ruído AWGN polarizado quaterniônico.

Assim como no caso sem polarização, o conhecimento do $N_{\text{ID}}^{\text{cell}}$ e do I_{PRS} , o UE é capaz de reconstruir o PRS e CRS da l -ésima eNodeB, $\mathbf{r}_l(n)$. Assim, para um sinal recebido $\mathbf{y}(n)$, um filtro casado quaterniônico pode ser aplicado (ELL; LE BIHAN; SANGWINE, 2014), encontrando o pico correlacional.

$$\hat{t}_l = \max_m \left(\left| \sum_n \mathbf{y}(n) \bar{\mathbf{r}}_l(n+r) \right| \right), \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (5.36)$$

sendo que \hat{t}_l é a estimativa de ToA do l -ésimo eNodeB.

Dada a estrutura do PRS apresentada na Seção 4.3.1, melhores resultados são esperados se a ocupação tempo-frequência do PRS entre as polarizações forem distintas. Isso mitiga os efeitos de uma baixa XPD na estimação da localização, tornando o mecanismo proposto robusto às não-idealidades da transmissão polarizada. Para tanto, faz-se necessário garantir que $N_{\text{ID}}^{\text{cell}} \bmod 6$ seja distinto para cada elementos polarizado, reduzindo para três o número de eNodeBs cujo PRS pode ser detetado sem conflito tempo-frequência. Essa falta de variabilidade reitera a importância de técnicas como PRS *muting* na implementação dos serviços de localização.

6 Resultados e discussão

Seguindo os desenvolvimentos percorridos no capítulo anterior, acerca da generalização de sistemas de comunicação polarizados através da álgebra de quatérnions, este capítulo apresenta seus resultados, bem como uma discussão da comparação de desempenho entre os métodos propostos nesta pesquisa e os resultados já estabelecidos na literatura. Ele está organizado nas seções:

MIMO-QOFDM — Uma comparação dos ganhos de diversidade e/ou vantagens de codificação entre tradicionais sistemas **MIMO-OFDM** e o **MIMO-QOFDM** aqui proposto são realizadas. As comparações são feitas considerando uma potência total de transmissão normalizada, para diferentes modelos de canais sem fio, incluindo desvios Doppler.

Sincronismo QOFDM — A estimação dos sincronismos **STO** e **CFO** é um aspecto crítico no desempenho de sistemas de comunicação **OFDM** ou **QOFDM**. O sincronismo temporal e em frequência em um sistema **OFDM** é um parâmetro crítico ao seu desempenho. O impacto da exploração da diversidade de polarização em um sistema **QOFDM** foi avaliado sobre a variância das estimativas da **STO** e **CFO** por diferentes métodos.

Serviços de Localização — São comparados os serviços de localização implementados nos padrões **LTE** e **5G NR** com uma generalização para sinais polarizados quaterniônicos. O desempenho das estimativas de **OTDoA** para ambos os casos, considerando uma potência total de transmissão normalizada, é comparado em termos da capacidade de resolução espacial.

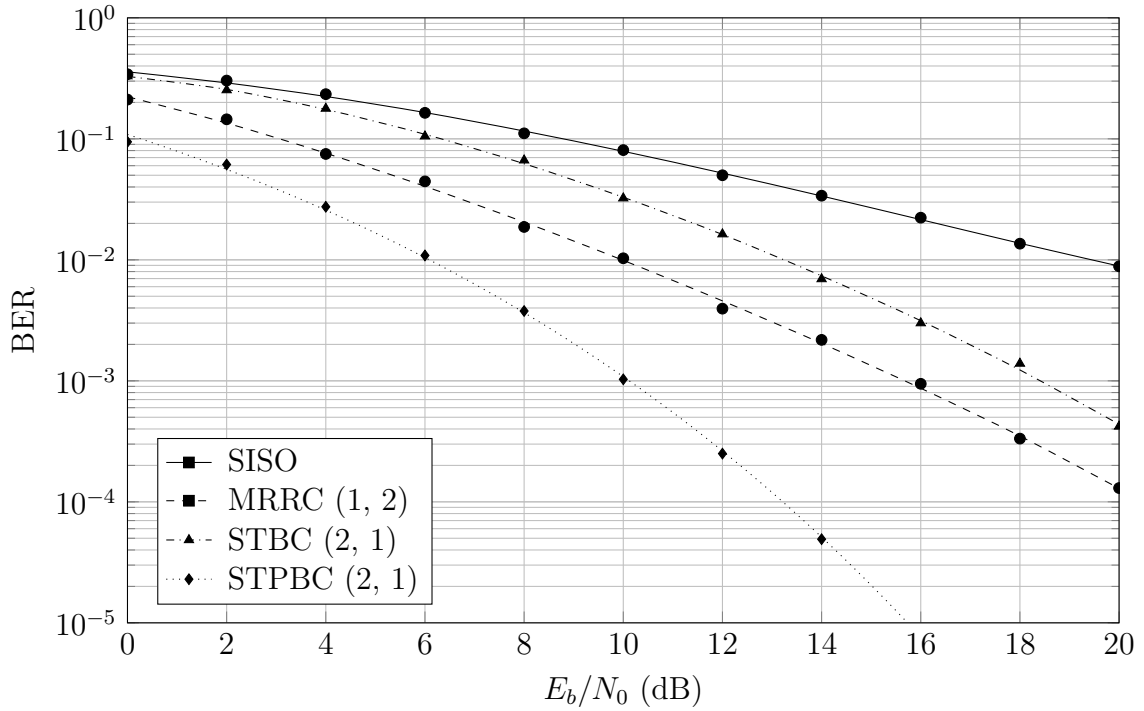
Como será apresentado nas seções subsequentes, foram observadas significativas melhoras em todos os aspectos analisados, em razão da exploração da diversidade de polarização através de uma sinalização quaterniônica.

6.1 MIMO-QOFDM

O desempenho de um sistema **MIMO-QOFDM** foi analisado para um canal Rayleigh, e comparado a sistemas **MIMO-OFDM** tradicionais. A modulação **OFDM** foi realizada sobre símbolos **QPSK**, para um total de 128 subportadoras, com banda de guarda de 28 **VCs** (ocupação de 78,1 %) e prefixo cíclico de 16 amostras. A potência total de transmissão foi normalizada, como feito em (ALAMOUTI, 1998), pelo número de elementos irradiantes (polarizados ou não). Os resultados apresentados na Figura 6.1 são os valores

médios da BER, obtidos a partir de 10 000 iterações, para cada ponto avaliado da SNR por bit E_b/N_0 . Esse foi um dos primeiros resultados desta pesquisa, estando dentre os publicados em (MELONI; HINOSTROZA N.; TORMENA JR., 2017).

Figura 6.1 – Comparação de desempenho entre sistemas MIMO-OFDM em relação ao sistema MIMO-QOFDM proposto. Foi considerado um canal Rayleigh com símbolos QPSK.



Fonte: Autoria própria.

Assumindo equalização perfeita de canal para todos os casos, o sistema SISO, sem qualquer diversidade, é o que apresenta o pior desempenho. O sistema MISO STBC de Alamouti (ALAMOUTI, 1998), com dois transmissores e um receptor, embora assintoticamente próximo do caso SISO, para baixas SNRs, apresenta ganho de diversidade para uma E_b/N_0 crescente. O sistema SIMO MRRC, com uma antena no transmissor e duas no receptor, apesar de consistentemente melhor do que o STBC de Alamouti, possui o mesmo ganho de diversidade. Esses resultados, apresentados na Figura 6.1, já amplamente disponíveis na literatura especializada, serviram como referência na aferição do desempenho do sistema proposto.

O sistema STPBC proposto, realizado através de sinais quaterniônicos polarizados, obteve um desempenho substancialmente melhor do que os outros sistemas representados na Figura 6.1, similar ao desempenho encontrado em (SEBERRY et al., 2008). Analisando para uma BER fixa de 10^{-3} , é possível observar um expressivo ganho de 6 dB, entre o STPBC(2, 1) proposto e o MRRC(1, 2), excedendo 8 dBs, se comparado ao STBC(2, 1) de Alamouti. Vale ressaltar, no entanto, que esses cálculos foram realizados

considerando um XPD infinito nas antenas polarizadas. Porém, outros resultados, também publicados em (MELONI; HINOSTROZA N.; TORMENA JR., 2017), mostraram que a sensibilidade do desempenho a XPD é baixa, mesmo quando são considerados efeitos de desvanecimento rápido.

Destaca-se em seu desempenho superior, o ganho de diversidade possibilitado pelo QOD , ao mesmo tempo que se manteve o processamento linear. Em termos de complexidade, avaliado pelo número de elementos irradiadores no transmissor e no receptor, o $\text{STPBC}(2, 1)$ proposto se compararia a um $\text{STBC}(4, 2)$. A vantagem, no entanto, está no fato de antenas com polarização cruzada não possuírem as mesmas restrições de separação das antenas (de aproximadamente dez comprimentos de onda), para manter baixa correlação espacial em sistemas MIMO tradicionais. Essa restrição é impraticável em terminais móveis, por suas dimensões reduzidas.

Assim, conclui-se que o sistema MIMO-QOFDM proposto não apenas apresenta desempenho e ganho de diversidade superiores aos de sistemas MIMO-OFDM tradicionais, mas também relaxa restrições de construção de *arrays* de antenas, uma restrição importante para garantir que os canais MIMO sejam decorrelacionados — garantindo assim o ganho efetivo de diversidade — nos terminais móveis. Esse é um resultado de particular relevância, em especial para aplicações *Massive MIMO*.

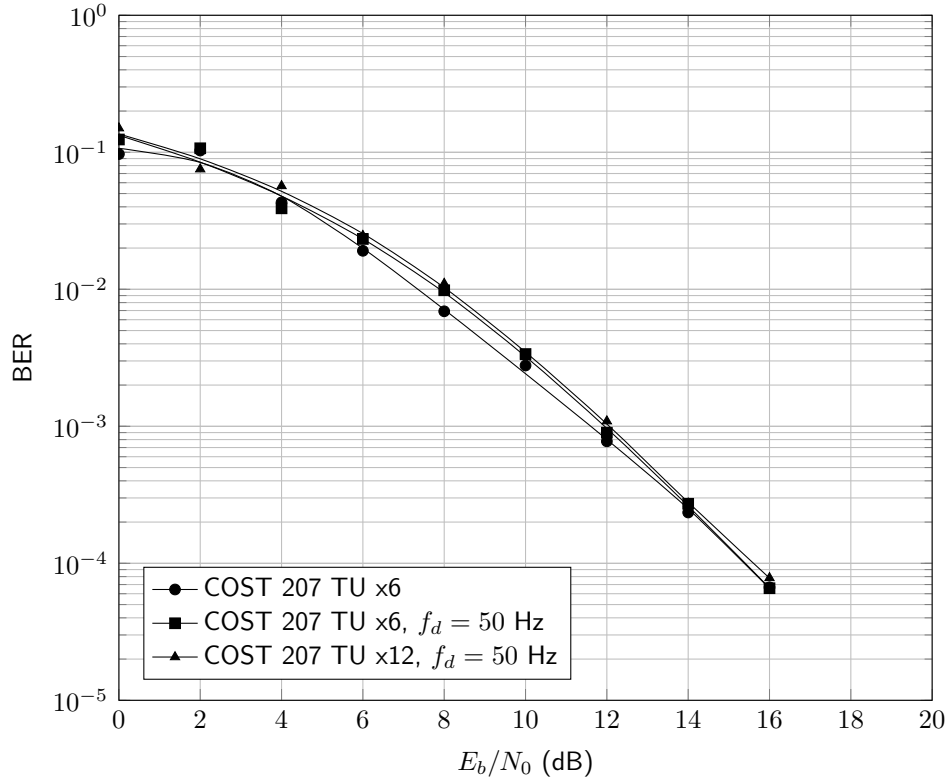
Tomando agora um canal desvanecido COST207 TU , para uma simulação com símbolos QPSK , para um total de 128 subportadoras, com banda de guarda de 28 VCs (ocupação de 78,1 %) e CP com comprimento de 16 amostras (assim como a da Figura 6.1), o desempenho da BER pela SNR também foi estimado através de 10 000 iterações de Monte Carlo para cada ponto da SNR , conforme ilustrado graficamente na Figura 6.2.

Como pode ser visto na Figura 6.2 comparada à Figura 6.1, há uma degradação generalizada da BER em razão da utilização de um canal seletivo em frequência, em concordância com o resultado esperado. Pode-se observar que os diferentes modelos de canais COST207 TU , com 6 ou 12 *taps*, incluindo a seletividade no tempo, incluída através do desvio Doppler de 50 Hz, resultam em diferenças mínimas no desempenho do sistema MIMO-QOFDM . Isso indica uma robustez do sistema proposto aos efeitos deletérios do desvanecimento lento e rápido no canal móvel.

No intuito de averiguar em maior detalhe os efeitos distintos da seletividade na frequência e no tempo, para o uma simulação com símbolos QPSK , para 256 subportadoras, sem banda de guarda, com CP de 32 amostras de comprimento com 10 000 iterações de Monte Carlo para cada ponto avaliado da SNR . O desempenho foi avaliado para um canal COST207 TU , com 6 ou 12 *taps*, bem como desvios Doppler de 0 ou 100 Hz. Os resultados estão representados graficamente na Figura 6.3.

Os resultados apresentados na Figura 6.3 indicam que a seletividade em fre-

Figura 6.2 – Comparação de desempenho do sistema MIMO-QOFDM proposto para um canal COST207 TU, com diferentes níveis de seletividade no tempo e na frequência.



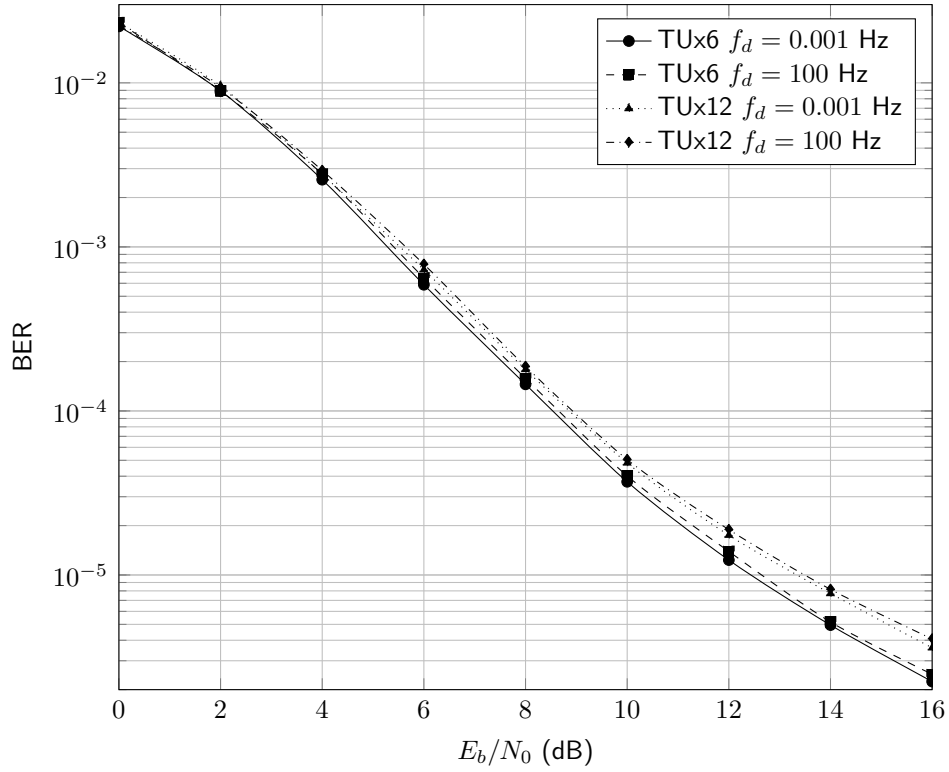
Fonte: Autoria própria.

quência possui efeito dominante no desvanecimento do canal em comparação à seletividade no tempo. Há uma distinta degradação no desempenho entre os modelos de canal com 6 ou 12 *taps*. Por outro lado, o sistema proposto se mostra bastante robusto aos efeitos da seletividade no tempo, pois embora a degradação inserida pelo desvio Doppler seja discernível na Figura 6.3, comparada à da seletividade em frequência, seu efeito é bastante reduzido.

Os resultados apresentados para o desempenho do sistema MIMO-QOFDM explorando a diversidade de polarização através da álgebra de quatérnions, obtidos através de simulações para canais Rayleigh (*flat fading*) e COST207, considerando ambos os efeitos de *slow fading* e *fast fading*, mostram que a solução proposta não apenas é superior às tecnologias atualmente empregadas. O sistema MIMO-QOFDM proposto também se mostrou robusto à degradação da BER frente à corrupção causada por modelos mais sofisticados de canal, que refletem mais fidedignamente as condições reais dos canais de comunicações móveis.

Esses resultados são de grande relevância para tecnologias de comunicação futuras, além do 5G NR, onde são esperados severos desvanecimentos em função da

Figura 6.3 – Comparação de desempenho do sistema MIMO-QOFDM proposto para um canal COST207 TU, comparando a seletividade em frequência e a seletividade no tempo para desvios Doppler típicos para veículos em alta velocidade.



Fonte: Autoria própria.

seletividade em frequência de canais na banda das onda milimétricas. Comunicações veiculares que naturalmente devem ser robustas ao desvanecimento no tempo inserido por significativos desvios Doppler também podem ser beneficiadas pelos resultados aqui apresentados.

6.2 Sincronismo QOFDM

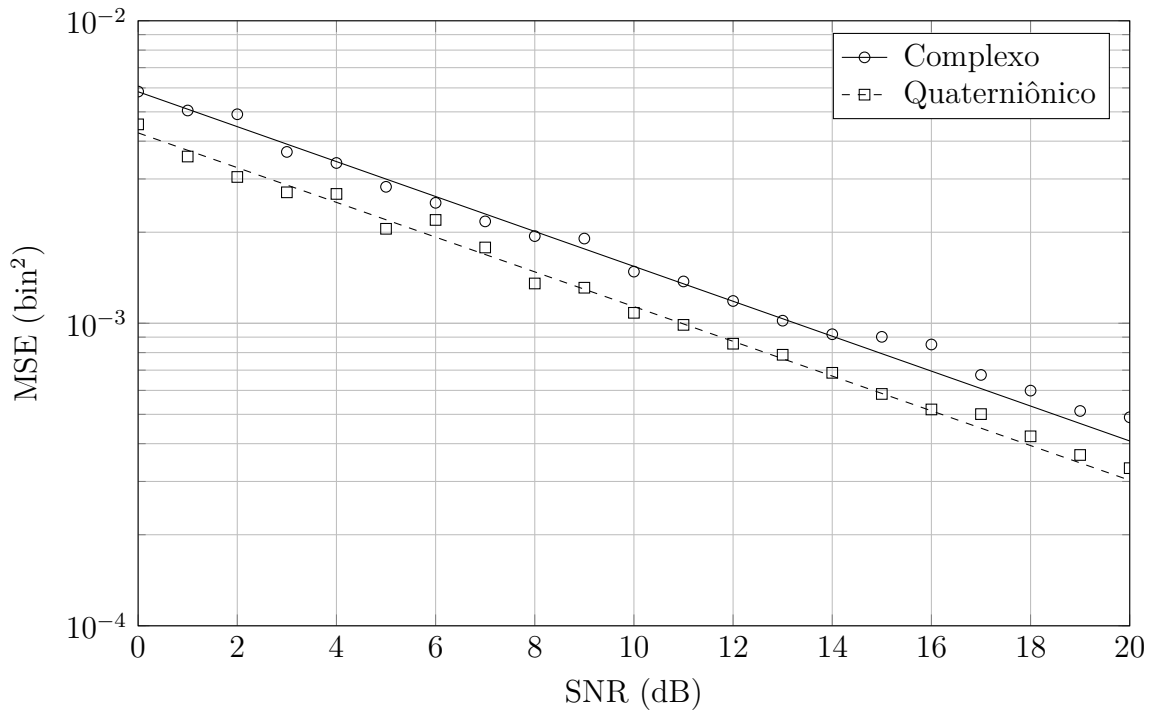
Os resultados das generalizações de sincronismo OFDM para sincronismo QOFDM, através de técnicas baseadas em símbolos de treinamento e prefixo cíclico, são apresentados a seguir. Foram abordadas as métricas para estimação da parte inteira do sincronismo de símbolo (STO) e da parte fracionária do sincronismo de frequência da portadora (CFO).

6.2.1 Sincronismo baseado em símbolo de treinamento

Conforme citado anteriormente, um fator crucial para o desempenho de um sistema de comunicações OFDM é a garantia de seu sincronismo no tempo (símbolo e quadro) e na frequência. Um estudo preliminar da estimação do sincronismo da CFO,

através da generalização do método clássico proposto por Moose em (MOOSE, 1994), para QOFDM, obteve os resultados (não publicados) da Figura 6.4. A simulação foi realizada sobre símbolos 16-QAM com a modulação OFDM realizada para 256 subportadoras, sem VCs (i.e., sem GB), com comprimento do CP de 16 símbolos, em um canal AWGN. O MSE foi obtido através de uma simulação de Monte Carlo, com 1 000 iterações para cada valor da SNR avaliada no intervalo de 0 a 20 dB. Assim como no último resultado, a potência total irradiada foi normalizada em função do número de elementos irradiantes.

Figura 6.4 – MSE da estimação da CFO pelo método de Moose comparada à sua generalização para sinais polarizados quaterniônicos.



Fonte: Autoria própria.

É possível observar uma vantagem de aproximadamente 2 dB entre o caso tradicional, OFDM complexo sem polarização e a generalização proposta de QOFDM para sinais polarizados. Essa vantagem observada, em conjunto com as vantagens já discutidas da sinalização QOFDM, observadas na Figura 6.1, motivou uma pesquisa mais aprofundada acerca de sincronismo QOFDM através de métodos ótimos (sob o critério de máxima verossimilhança).

Para a correção da STO inteira através do filtro casado proposto na Eq. (5.16), ambas as abordagens complexa e quaterniônica apresentaram variâncias nulas na estimação da STO inteira, dentro da faixa de SNR avaliada, razão pela qual seus gráficos não são apresentados.

Embora simples, em sua concepção, a generalização do método de Moose (MOOSE, 1994) para QOFDM com a vantagem observada de desempenho da estimação

da CFO, ainda que um resultado relevante em si, demonstrou que a linha de investigação era profícua. Como dito, isso motivou investigações adicionais, explorando estimadores mais sofisticados, como os de mínima variância.

6.2.2 Sincronismo baseado em prefixo cíclico

O método originalmente desenvolvido em (VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON, 1997), baseado apenas no CP, apresenta menor *overhead* sobre métodos de sincronismo baseado em símbolo de treinamento, realizando as estimações de STO e CFO, sem sacrificar a eficiência espectral e de potência (além do que já é exigido pela necessidade do CP). Na verdade, o método desenvolvido em (VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON, 1997) pode ser escolhido para obtenção do sincronismo de amostra e de frequência, no processo de aquisição de célula, em sistemas LTE.

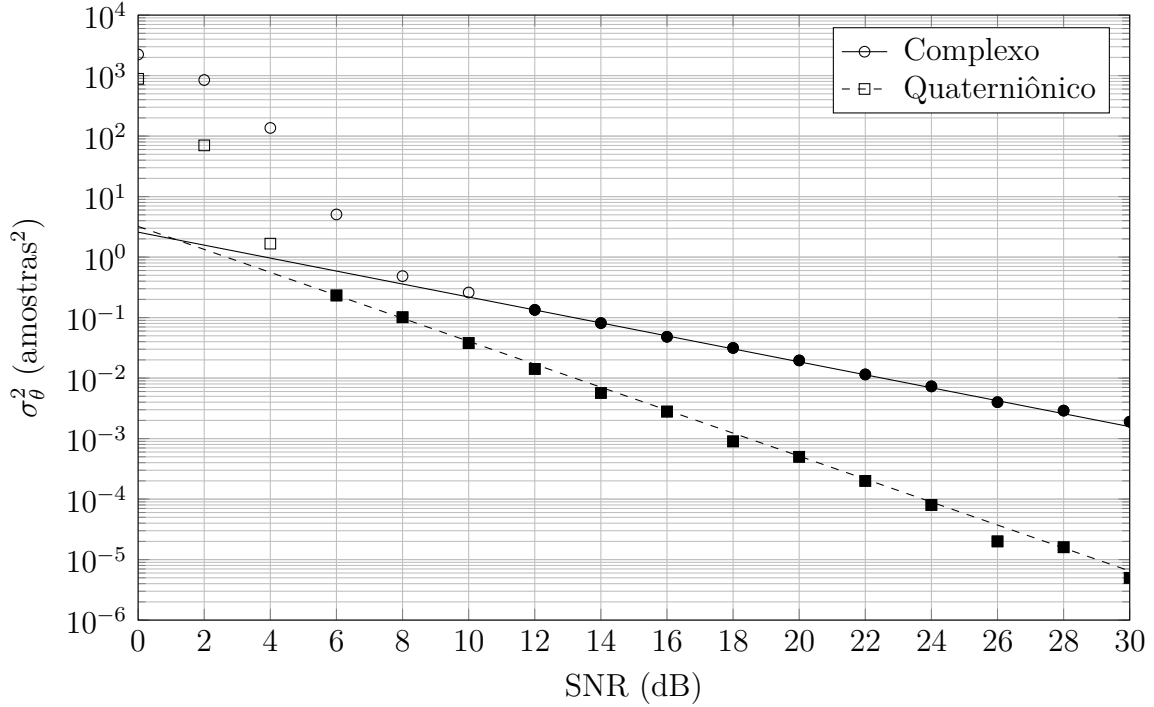
A simulação do sistema OFDM foi realizada com os seguintes parâmetros: 256 subportadoras, nenhuma VC, CP com comprimento de 64 amostras, sinalização através de símbolos 16-QAM em um canal AWGN. O método proposto em (VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON, 1997) e sua generalização para a álgebra de quatérnions, como desenvolvida nas Eqs. (5.21)–(5.30), foram aplicados. A estimulação do MSE foi obtida através da recursão em 10 000 iterações para cada ponto da SNR avaliado na simulação de Monte Carlo. Os resultados da estimulação da STO, comparado ao método original com a generalização para QOFDM, são apresentados na Figura 6.5.

Como pode ser visto na Figura 6.5, observa-se um ganho de diversidade na estimulação da STO através do método proposto para QOFDM em relação ao método tradicional para OFDM. As assíntotas ajustadas (apenas para as marcas preenchidas) possuem inclinações distintas, com o caso quaterniônico, representado por $\ln \sigma_\theta^2 = 3,21249 - 0,43707 \text{ SNR}$, tendo aproximadamente o dobro da inclinação do caso complexo, representado por $\ln \sigma_\theta^2 = 2,58253 - 0,24672 \text{ SNR}$. Mesmo antes de atingir o comportamento assintótico, a partir da SNR de 4 dB, observa-se uma vantagem de aproximadamente 3 dB entre os pontos complexos e quaterniônicos.

Embora não seja um resultado do autor, vale ressaltar que o grupo de pesquisa provou, subsequentemente, que ambas as curvas atingem seu limite de Crámer-Rao, obtendo assim desempenho ótimo na variância da estimulação. O trabalho, com minha co-autoria, encontra-se em revisão de pares.

Avaliando agora o desempenho na estimulação da CFO, também realizada pelo método proposto em (VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON, 1997), bem como a generalização quaterniônica proposta neste trabalho. Para as mesmas condições de simulação supracitadas, utilizada na obtenção dos resultados da Figura 6.5, também foram obtidos os resultados da Figura 6.6 para a estimulação da CFO.

Figura 6.5 – Variância da estimação da **STO**, em função da **SNR**, para **OFDM** complexa e quaterniônica. As marcas preenchidas representam os pontos de Monte Carlo escolhidos para a obtenção do ajuste linear.



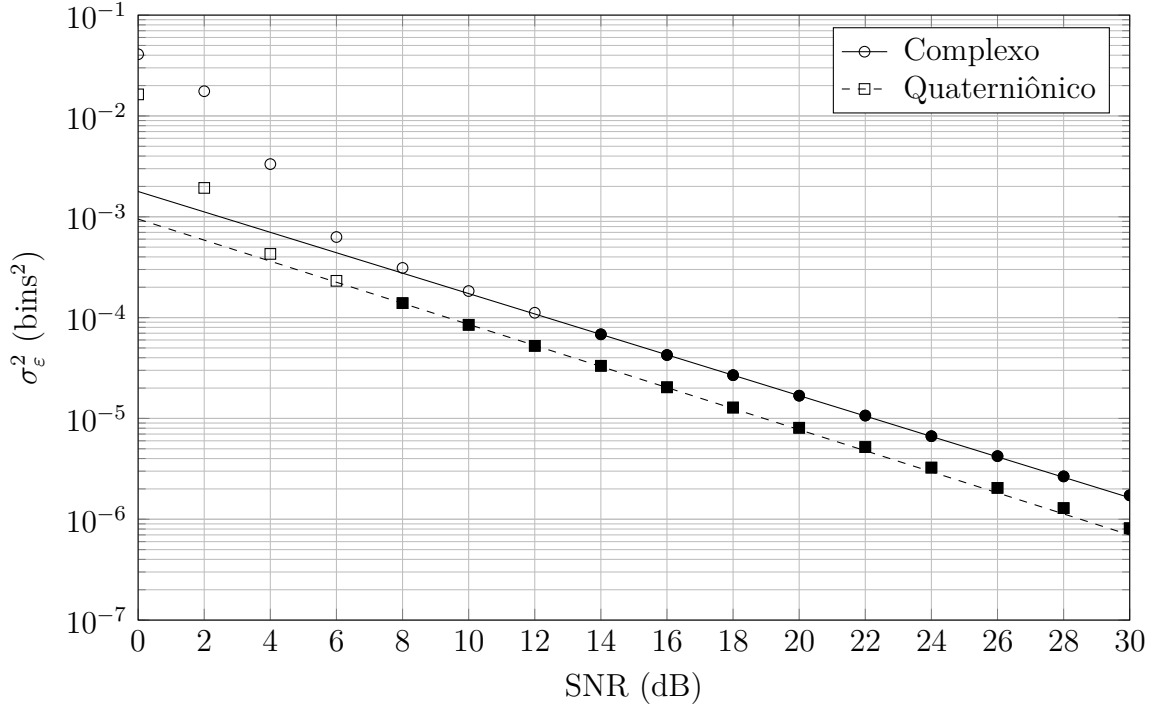
Fonte: Autoria própria.

Como pode ser observado na Figura 6.6, no caso da estimação da **CFO**, diferentemente da estimação da **STO**, não se observa um ganho de diversidade entre os casos complexos e quaterniônico. As assíntotas obtidas através do ajuste linear sobre as marcas preenchidas na Figura 6.6, possuem aproximadamente 3 decibéis de deslocamento entre si, ou seja, o caso quaterniônico apresentou uma vantagem de codificação de três decibéis sobre o caso complexo, conforme pode ser previsto pelo estudo das variáveis aleatórias quaterniônicas da Seção 2.9.

Assim como no caso da **STO**, o grupo de pesquisa provou que as estimações de **CFO** para **OFDM** e **QOFDM**, como apresentadas na Figura 6.6, atingem o limite de Crámer-Rao. Uma publicação co-autorada por mim, com esse resultado, aguarda o processo de revisão dos pares.

Ambos estimadores, de máxima verossimilhança da **STO** e **CFO**, por atingirem o limite de Crámer-Rao, podem ser considerados como estimadores de variância mínima, atingindo assim desempenho ótimo. Esses resultados foram obtidos para um comprimento de **CP** que tomava 25 % do comprimento do símbolo **OFDM**. No padrão **LTE**, que utiliza os símbolos de treinamento **PSS** e **SSS** para aquisição da célula (com sincronismo de quadro e de frequência da portadora), um sincronismo com desempenho similar pode ser esperado, se utilizado comprimento de **CP** estendido, onde o **CP** toma 20 % da duração do símbolo

Figura 6.6 – Variância da estimação da CFO, em função da SNR, para OFDM complexa e quaterniônica. As marcas preenchidas representam os pontos de Monte Carlo escolhidos para a obtenção do ajuste linear.



Fonte: Autoria própria.

OFDM (Tabelas 4.3 e 4.4). Isso é de particular relevância para canais seletivos no tempo e na frequência, típicos de ambientes móveis de alta velocidade, onde comumente um CP estendido é utilizado para combater a ISI, como exemplificam as Figuras 4.5 e 4.6.

6.3 Localização por OTDoA

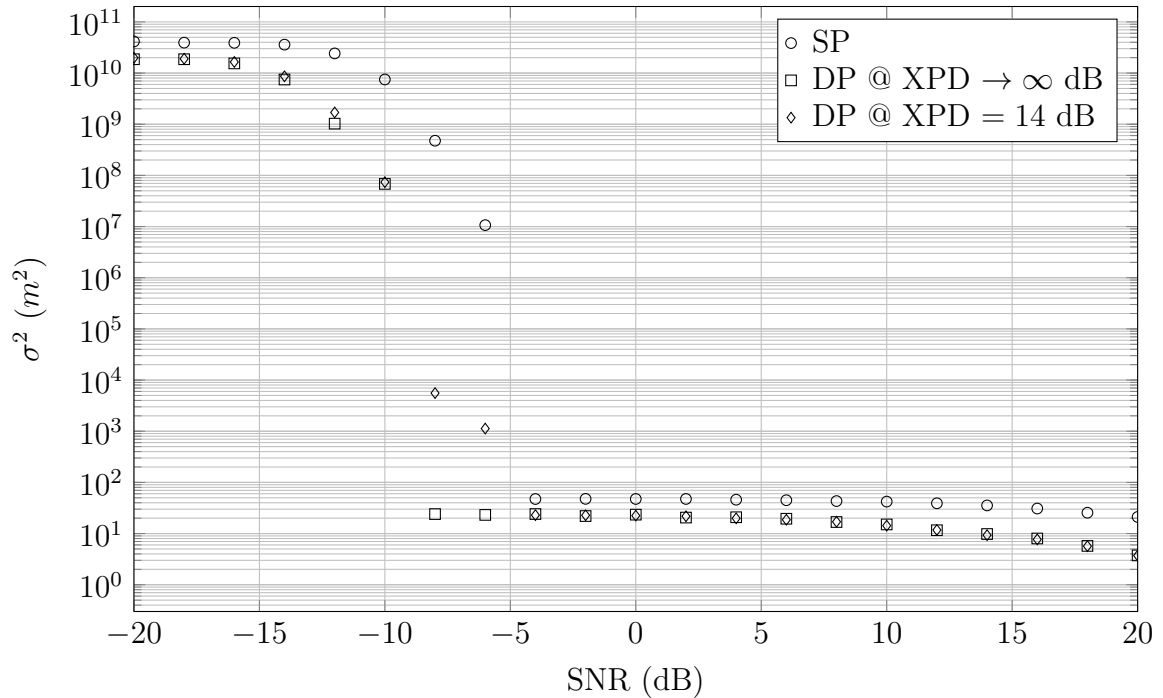
Para obtenção dos resultados para o serviço de localização baseado em PRS, foram usadas duas eNodeBs, cujos sinais foram atrasados e sobrepostos, simulando uma unidade móvel sob alcance de ambas. Na ocasião de posicionamento, ambas as estações transmitiram o sinal. Em razão da simplicidade do uso de apenas duas eNodeBs para estimar uma única OTDoA, não foi necessário utilizar PRS muting. As simulações foram realizadas em canal AWGN, com SNR medida em relação a eNodeB próxima. Foi considerado que a eNodeB remota sofria uma atenuação relativa de 10 decibéis em relação a SNR da eNodeB próxima. Os resultados foram obtidos usando o RMC R.9 FDD com banda de 20 MHz, SISO, com 2048 subportadoras, frequência de amostragem de 30,72 MHz (ETSI, 2010e) em um canal AWGN. A estimativa da variância do OTDoA foi realizada para 10 000 iterações, por ponto avaliado da SNR, na simulação de Monte Carlo.

Para o caso duplamente polarizado, dois sinais independentes foram enviados

nas polarizações horizontal e vertical. Na comparação entre o caso polarizado e não-polarizado, a potência total de transmissão e o ruído adicionado foram normalizados, permitindo a comparação direta da **SNR** dos sinais. O caso polarizado foi simulado para uma **XPD** infinita e para uma **XPD** de 14 dB, um valor típico para canais **SISO LoS** (JEON et al., 2012).

Os resultados da simulação são apresentados na Figura 6.7, mostrando a variância da estimativa da posição, em função da **SNR**. Os valores de variância foram corrigidos, através da velocidade da luz no vácuo para unidade de espaço, permitindo uma interpretação mais clara da precisão atingida. Os resultados mostram uma distinta vantagem dos casos polarizados em relação aos não-polarizados. O desempenho segue um tradicional gráfico “cascata”, a partir de uma **SNR** de -15 dB, para um piso em torno de -4 dB. Esse piso representa uma limitação do período de amostragem finito (porém não infinitesimal), que insere ruído de quantização temporal nas estimativas, limitando a variância mínima atingível na prática. Mesmo com o efeito da **XPD** finita, o caso duplamente polarizado se mostra consistentemente melhor do que o caso sem polarização.

Figura 6.7 – Variância da estimativa do **OTDoA**, escalada pela velocidade da luz no vácuo, em função da **SNR**, para sinais polarizados e não-polarizados, em canal **AWGN**. A **SNR** é relativa à **eNodeB** próxima, enquanto a **eNodeB** remota possui uma **SNR** 10 dBs abaixo.

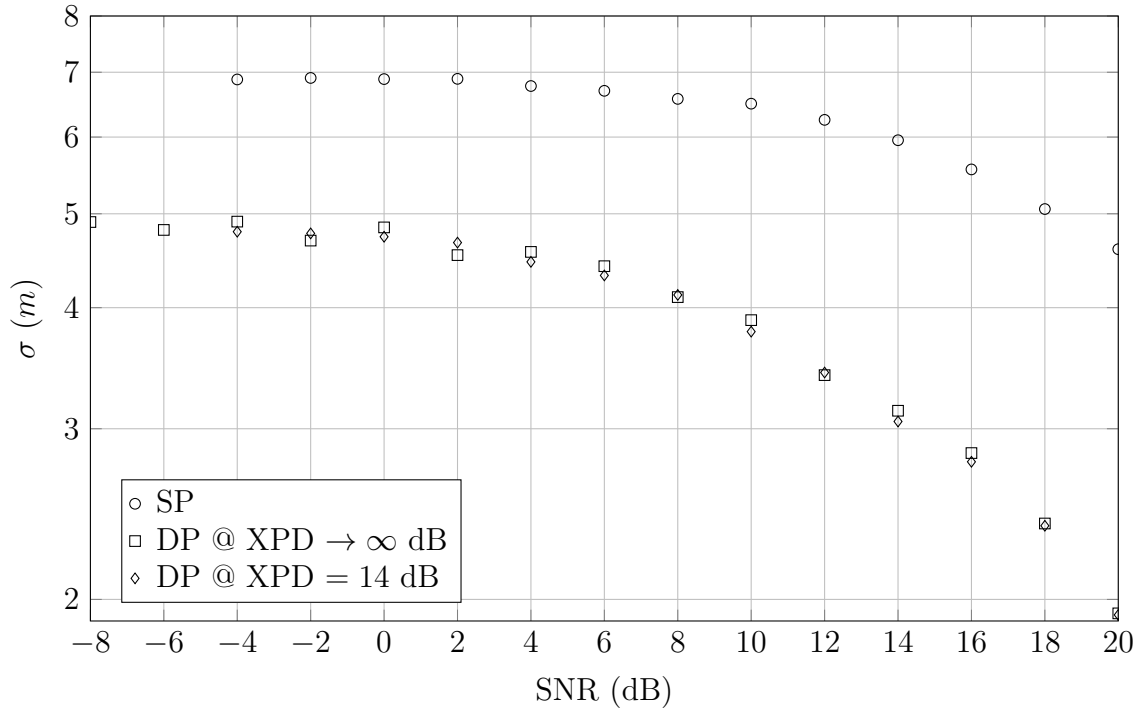


Fonte: Autoria própria.

A Figura 6.8 traz uma vista próxima dos resultados, a partir de -8 decibéis. A escala do gráfico foi transformada de variância para desvio padrão, permitindo ainda mais clara interpretação da resolução atingível, em metros, pela **SNR**. É possível observar,

em média, uma melhoria de 2,5 m na estimativa do desvio padrão do posicionamento. Nota-se também que no caso polarizado, para SNR acima de -4 decibéis, não há efeitos discerníveis em razão do XPD finito aplicado.

Figura 6.8 – Desvio padrão da estimativa do OTDoA, escalada pela velocidade da luz no vácuo, em função da SNR , para sinais polarizados e não-polarizados em canal AWGN. A SNR é relativa a eNodeB próxima, enquanto a eNodeB remota possui uma SNR 10 dB abaixo.



Fonte: Autoria própria.

Na verdade, simulações complementares mostraram que, para um XPD variando entre 0 e 20 decibéis, não há distinção no desempenho apresentado para o caso de 14 dB, representado nas Figuras 6.7 e 6.8. Isso mostra que há uma insensibilidade do método proposto a não-idealidades da propagação ou das antenas polarizadas. Como as potências totais de transmissão e os ruídos adicionados foram todos normalizados pelo número de elementos irradiantes, o melhor desempenho atingido é um resultado direto da exploração da diversidade de polarização.

A generalização, para sinais quaterniônicos polarizados do LTE PRS permitiu a obtenção de um desvio padrão de posicionamento menor do que três metros. Porém deve ser ressaltado que isso foi realizado em um modelo simples de canal AWGN. Também vale notar que, na atual tecnologia LTE, a frequência máxima de amostragem de 30,72 MHz estabelece um piso de ruído de quantização temporal, que corresponde a um desvio padrão de 2,82 m. De toda forma, os resultados indicam que a sinalização polarizada atinge o desvio padrão de 3 m para uma SNR entre 14 e 16 dB, enquanto, para a mesma faixa

de SNR, o LTE PRS apresentou um desvio padrão de aproximadamente o dobro desse valor. Com o aumento das frequência de amostragem necessários às bandas mais largas utilizadas no 5G NR espera-se que essa abordagem desenvolvida aqui, e sua substancial vantagem, possa ser melhor explorada nas futuras tecnologias.

7 Conclusões

A utilização de quatérnions na representação de sinais polarizados para comunicações pode ter sido originada em (ISAEVA; SARYTCHEV, 1995). Porém, foi apenas em (WYSOCKI; WYSOCKI; SEBERRY, 2006), mais de uma década após, que a ideia foi desenvolvida em um formalismo matemático mais completo, analisando não somente o modelo do sinal, mas também o modelo de canal quaterniônico. Alguns dos mesmos autores, baseados em seus trabalhos prévios em projetos ortogonais complexos (CHUNG TRAN et al., 2004; SEBERRY; SPENCE; WYSOCKI, 2005), desenvolveram uma generalização de projetos ortogonais quaterniônicos, expandindo o resultado original de (WYSOCKI; WYSOCKI; SEBERRY, 2006), para canais MIMO em (SEBERRY et al., 2008). Em (MELONI, 2012), os desenvolvimentos anteriores de (WYSOCKI; WYSOCKI; SEBERRY, 2006; SEBERRY et al., 2008), bem como os avanços na generalização da análise de Fourier para quatérnions de (ELL, 1992) e na modelagem de ruído quaterniônico (LE BIHAN, 2017) foram tomados como base na generalização do modelo de transmissão MIMO-OFDM, para sinais e canais quaterniônicos polarizados. Essa sequência de publicações compõem a “árvore genealógica” (revisada) da pesquisa aqui apresentada, em que as investigações se dirigiram a áreas de especialidade, como diversidade espacial por polarização, sincronismo OFDM e localização baseada em OTDoA.

A generalização do equacionamento do MIMO-OFDM, dos métodos de sincronismo OFDM e do OTDoA baseado em PRS para álgebra de quatérnions, à primeira vista, parece ser um desenvolvimento imediato. Porém, a não-comutatividade de \mathbb{H} , bem como a escolha implícita do eixo \mathbf{i} , decorrente da construção de CD no cálculo do argumento quaterniônico foram alguns dos desafios dos desenvolvimentos apresentados.

Os benefícios da exploração da diversidade de polarização, em um sistema MIMO-QOFDM para comunicações móveis (ZAHRA; KHAN; SHEIKH, 2020) não se resume aos ganhos de *throughput* e eficiência. Ganhos no desempenho do sincronismo no tempo e de frequência, críticos para a manutenção da ortogonalidade entre as subportadoras, também são expressivos, comparando OFDM com QOFDM. Melhorias similares também puderam ser observadas na precisão de serviços de localização, como os implementados nos padrões LTE, baseados em OTDoA.

A formulação do MIMO-QOFDM, explorando as diversidades de espaço, tempo, frequência e polarização, apresentou ganho de diversidade sobre as tradicionais técnicas MIMO-OFDM, ao mesmo tempo que foi mantida a estimação ótima dos símbolos transmitidos (sob o critério de máxima verossimilhança), para um detector com processamento linear. Isso é um resultado direto da aplicação da álgebra de quatérnions, não sendo

possível atingir a mesma meta empregando sinalização complexa. Os QODs, nesse aspecto, se mostraram mais flexíveis e capazes do que as atuais técnicas de *layer coding*, baseadas em CODs, empregadas no LTE. Embora a obtenção de QODs através da construção de CD de dois CODs seja uma abordagem simples, ela não oferece todas as vantagens de um QOD “nativo”. Utilizando QOD nativos, são esperados ganhos ainda mais expressivos, ao mesmo tempo que mantendo a taxa unitária e processamento linear, para um número maior (e.g., *Massive MIMO*) de antenas transmissoras e receptoras.

Duas técnicas de sincronismo OFDM foram generalizadas para QOFDM: uma baseada em símbolo de treinamento, similar à adotada pelo LTE para sincronismo de quadro e de fase; e outra baseada em CP. Ambas demonstraram uma vantagem distinta, entre 2 e 3 decibéis, na estimação da CFO, quando comparadas ao OFDM. Chama a atenção, no entanto, o ganho de diversidade observado na estimação da STO, através do método de CP QOFDM, generalizado a partir de (VAN DE BEEK; SANDELL; BORJESSON, 1997). Avanços no desempenho da estimação da STO e CFO, através de técnicas baseadas no CP, são de grande interesse, pois oferecem um caminho para obtenção de um sincronismo de amostra e frequência, durante a aquisição de célula, sem necessitar de *overhead* adicional na sinalização.

Por fim, também foi realizado um estudo acerca da precisão de serviços de localização, baseados em OTDoA, como ofertado pelo padrão LTE desde o 3GPP Release 9. Mais uma vez, a generalização de OFDM para QOFDM logrou melhorias substanciais em toda a faixa de SNR analisada. Para SNR mais altas, onde o efeito da quantização temporal passa a ser o fator limitante no desempenho, foi possível obter um ganho aproximado de 2,5 m sobre o desvio padrão da distância estimada, trazendo o desvio para valores menores do que 3 m, comparando de forma bastante favorável ao OTDoA tradicional.

Sistemas LTE atuais, ao tempo desta escrita, têm sua frequência de amostragem limitada em torno de 30 MHz. Isso implica um desvio padrão no ruído de quantização temporal próximo de 3 m, inviabilizando o comprimento das exigências na E911 (FCC, 2015), através da tecnologia atual. No entanto, o padrão 5G NR permite maiores frequências de amostragem e menores ruídos de quantização correspondentes. Espera-se que isso permita a realização do potencial da solução QOFDM proposta, através da observabilidade de uma distinta vantagem, em decibéis da SNR, entre o OTDoA padronizado desde o 3GPP Release 9 e o método proposto aqui, antes que o piso do ruído de quantização no tempo se torne um fator limitante.

Como pesquisas futuras, são planejados estudos mais gerais dos resultados apresentados aqui, incluindo os efeitos de canais dispersivos no tempo e na frequência, bem como sua estimação e equalização. De toda forma, os resultados apresentados demonstram a capacidade da melhoria de diferentes métricas de desempenho para sistemas de comunicação móvel QOFDM, comparados a sistemas OFDM tradicionais. As vantagens que os QODs

têm sobre os CODs ainda não foram exploradas nos sistemas *Massive MIMO* propostos para o 5G NR. O desvanecimento do canal para sinais na banda de ondas milimétricas é um dos principais desafios, ainda sob investigação, para que o 5G NR atinja a capacidade almejada. A utilização de sinalização com polarização linear e/ou circular pode oferecer ganhos de diversidade que ajudem a mitigar os efeitos do desvanecimento. Um estudo mais detalhado e aplicado acerca da propriedade e circularidade de variáveis aleatórias quaterniônicas também podem oferecer ganhos de diversidade no desempenho de estimadores para a recepção de sinais polarizados.

Referências

- ABDALLAH, A. A.; SHAMAEI, K.; KASSAS, Z. M. Performance Characterization of an Indoor Localization System with LTE Code and Carrier Phase Measurements and an IMU. In: *2019 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–8. Citado na página 25.
- ABOHAMRA, Y. A.; SOLEYMANI, M. R.; SHAYAN, Y. R. Using Beamforming for Dense Frequency Reuse in 5G. *IEEE Access*, v. 7, p. 9181–9190, 2019. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8610077/>>. Citado na página 24.
- ADAMS, S. S. A journey of discovery: orthogonal matrices and wireless communications. In: . [S.l.]: Contemporary Mathematics, 2009. v. 479, p. 1–10. Citado na página 26.
- AL-OBIEDOLLAH, H. M. et al. Energy Efficient Beamforming Design for MISO Non-Orthogonal Multiple Access Systems. *IEEE Transactions on Communications*, v. 67, n. 6, p. 4117–4131, 6 2019. ISSN 0090-6778. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8648507/>>. Citado na página 24.
- ALAMOUTI, S. M. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 8, p. 1451–1458, 1998. ISSN 0733-8716. Citado 4 vezes nas páginas 57, 58, 103 e 104.
- ALI, S. Quaternion Orthogonal Designs with Full Diversity and Maximal Data Rates. In: *2020 43rd International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*. IEEE, 2020. p. 188–192. ISBN 978-1-7281-6376-5. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9163570/>>. Citado na página 59.
- ATHAUDAGE, C. R. N. BER sensitivity of OFDM systems to time synchronization error. In: *The 8th International Conference on Communication Systems, 2002. ICCS 2002*. IEEE, 2002. v. 1, p. 42–46. ISBN 0-7803-7510-6. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1182434/>>. Citado na página 74.
- BENGTSSON, E. L.; TUFVESSON, F.; EDFORS, O. Ue antenna properties and their influence on massive mimo system performance. In: *2015 9th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–5. Citado na página 59.
- BHANDARI, R.; JADHAV, S. Novel Spectral Efficient Technique for MIMO-OFDM Channel Estimation with Reference to PAPR and BER Analysis. *Wireless Personal Communications*, v. 104, n. 4, p. 1227–1242, 2 2019. ISSN 0929-6212. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11277-018-6077-7>>. Citado na página 22.
- CHO, Y. S. et al. *MIMO-OFDM Wireless Communications with MATLAB®*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd., 2010. ISBN 9780470825631. Citado 6 vezes nas páginas 52, 53, 61, 68, 69 e 71.
- CHOWDHURY, M. Z. et al. 6G Wireless Communication Systems: Applications, Requirements, Technologies, Challenges, and Research Directions. *IEEE Open Journal of the Communications Society*, v. 1, p. 957–975, 2020. ISSN 2644-125X. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9144301/>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

CHUNG TRAN, L. et al. Two complex orthogonal space-time codes for eight transmit antennas. *Electronics Letters*, v. 40, n. 1, p. 55, 2004. ISSN 00135194. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 115.

DU, J. et al. Weighted Spectral Efficiency Optimization for Hybrid Beamforming in Multiuser Massive MIMO-OFDM Systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 68, n. 10, p. 9698–9712, 10 2019. ISSN 0018-9545. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8782618/>>. Citado na página 22.

ELL, T. A. *Hypercomplex Spectral Transformations [D]*. Tese (Doutorado) — University of Minnesota, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 115.

ELL, T. A.; LE BIHAN, N.; SANGWINE, S. J. *Quaternion Fourier Transforms for Signal and Image Processing*. 1. ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2014. 159 p. Citado 8 vezes nas páginas 28, 29, 33, 34, 35, 36, 97 e 101.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Long Term Evolution (LTE) physical layer; General description (3GPP TS 36.201 version 8.2.0 Release 8)*. [S.l.], 2009. Citado na página 79.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Base Station (BS) radio transmission and reception (3GPP TS 36.104 version 8.9.0 Release 8)*. [S.l.], 2010. Citado na página 82.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); LTE Positioning Protocol (LPP) (3GPP TS 36.355 version 9.1.0 Release 9)*. [S.l.], 2010. Citado na página 91.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation (3GPP TS 36.211 version 8.9.0 Release 8)*. [S.l.], 2010. Citado 3 vezes nas páginas 80, 81 e 85.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Physical channels and modulation (3GPP TS 36.211 version 9.1.0 Release 9)*. [S.l.], 2010. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 100.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); User Equipment (UE) radio transmission and reception (3GPP TS 36.101 version 9.1.0 Release 9)*. [S.l.], 2010. Citado 3 vezes nas páginas 89, 91 e 111.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Long Term Evolution (LTE) physical layer; General description (3GPP TS 36.201 version 10.0.0 Release 10)*. [S.l.], 2011. Citado na página 79.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); LTE Positioning Protocol (LPP) (3GPP TS 36.355 version 10.0.0 Release 10)*. [S.l.], 2011. Citado na página 92.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Long Term Evolution (LTE) physical layer; General description (3GPP TS 36.201 version 13.3.0 Release 13)*. [S.l.], 2017. Citado na página 80.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); Long Term Evolution (LTE) physical layer; General description (3GPP TS 36.201 version 15.1.0 Release 15)*. [S.l.], 2017. Citado na página 80.

ETSI. *LTE; Evolved Universal Terrestrial Radio Access (E-UTRA); User Equipment (UE) radio transmission and reception (3GPP TS 36.101 version 8.29.0 Release 8)*. [S.l.], 2018. Citado na página 85.

FCC. *E911 Location Accuracy Benchmarks and Timeline*. [S.l.], 2015. Disponível em: <<https://www.fcc.gov/general/9-1-1-and-e9-1-1-services>>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 116.

GERAMITA, A. V.; GERAMITA, J. M. Complex orthogonal designs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 25, n. 3, p. 211–225, 11 1978. ISSN 0097-3165. Citado na página 56.

GERAMITA, A. V.; GERAMITA, J. M.; WALLIS, J. S. Orthogonal designs. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 3, n. 4, p. 281–306, 1976. Citado na página 56.

GERAMITA, A. V.; SEBERRY, J. Orthogonal designs III: Weighing matrices. *Utilitas Mathematica*, v. 6, p. 209–236, 1974. Citado na página 56.

GERAMITA, A. V.; WALLIS, J. S. Orthogonal designs II. *Aequationes Math.*, v. 13, n. 3, p. 299–313, 1975. Citado na página 56.

GERAMITA, A. V.; WALLIS, J. S. Orthogonal designs IV: Existence questions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 19, n. 1, p. 66–83, 7 1975. ISSN 0097-3165. Citado na página 56.

GHOSH, A. et al. 5G Evolution: A View on 5G Cellular Technology Beyond 3GPP Release 15. *IEEE Access*, v. 7, p. 127639–127651, 2019. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8826541/>>. Citado na página 25.

GOLD, R. Optimal binary sequences for spread spectrum multiplexing (Corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 13, n. 4, p. 619–621, 10 1967. ISSN 0018-9448. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/1054048/>>. Citado na página 88.

HINOSTROZA N., J. L.; MELONI, L. G. P.; TORMENA JR., O. Improved time and frequency synchronization for dual-polarization ofdm systems. Submetido à revista *Signal Processing* da editora Elsevier, atualmente sob *peer-review*. 2020. Citado na página 127.

HINOSTROZA N., J. L. et al. Improved cfo synchronization of dual-polarized ofdm systems using training symbols. Aceito para apresentação no XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (SBrT 2020). 2020. Citado na página 127.

HORN, B. K. P. Quaternions: what are they, and why do we need to know? *Acta Crystallographica Section A Foundations and Advances*, v. 76, n. 5, p. 556–558, 9 2020. ISSN 2053-2733. Disponível em: <<http://scripts.iucr.org/cgi-bin/paper?S2053273320010359>>. Citado na página 28.

- ISAEVA, O. M.; SARYTCHEV, V. A. Quaternion presentations polarization state. In: *Conference Proceedings Second Topical Symposium on Combined Optical-Microwave Earth and Atmosphere Sensing*. [S.l.]: IEEE, 1995. p. 195–196. ISBN 0-7803-2402-1. Citado 4 vezes nas páginas 26, 28, 59 e 115.
- JAFARKHANI, H. A quasi-orthogonal space-time block code. *IEEE Transactions on Communications*, v. 49, n. 1, p. 1–4, 2001. ISSN 00906778. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.
- JAMSHED, M. A.; HELIOT, F.; BROWN, T. W. C. A Survey on Electromagnetic Risk Assessment and Evaluation Mechanism for Future Wireless Communication Systems. *IEEE Journal of Electromagnetics, RF and Microwaves in Medicine and Biology*, v. 4, n. 1, p. 24–36, 3 2020. ISSN 2469-7249. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8718293/>>. Citado na página 22.
- JAVED, S. et al. A Journey From Improper Gaussian Signaling to Asymmetric Signaling. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, v. 22, n. 3, p. 1539–1591, 2020. ISSN 1553-877X. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/9076203/>>. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 50.
- JEON, K. et al. SISO polarized flat fading channel modeling for dual-polarized antenna systems. In: *The International Conference on Information Network 2012*. [S.l.]: IEEE, 2012. p. 368–373. ISBN 978-1-4673-0250-0. ISSN 1976-7684. Citado 4 vezes nas páginas 59, 60, 101 e 112.
- JEON, Y.; PARK, H.; CHOI, E. Synchronization and Cell Search Procedure in 3GPP 5G NR Systems. In: *2019 21st International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT)*. IEEE, 2019. p. 475–478. ISBN 979-11-88428-02-1. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8701920/>>. Citado na página 25.
- KRISHNAN, V. *Probability and Random Processes*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2006. ISBN 9780471998303. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/0471998303>>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 101.
- KRUPINSKI, R. Generating Augmented Quaternion Random Variable With Generalized Gaussian Distribution. *IEEE Access*, v. 6, p. 34608–34615, 2018. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8386761/>>. Citado na página 37.
- LE BIHAN, N. The geometry of proper quaternion random variables. *Signal Processing*, v. 138, p. 106–116, 2017. ISSN 0165-1684. Citado 4 vezes nas páginas 28, 37, 49 e 115.
- LIANG, X.-B. Orthogonal designs with maximal rates. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49, n. 10, p. 2468–2503, 10 2003. ISSN 0018-9448. Citado na página 58.
- LIANG, X.-B.; XIA, X.-G. On the nonexistence of rate-one generalized complex orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49, n. 11, p. 2984–2989, 11 2003. ISSN 0018-9448. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 58.
- LIN, X. et al. Positioning for the Internet of Things: A 3GPP Perspective. *IEEE Communications Magazine*, v. 55, n. 12, p. 179–185, 12 2017. ISSN 0163-6804. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/8030544/>>. Citado na página 92.

LOOTS, M. T. et al. On the real representation of quaternion random variables. *Statistics*, Taylor & Francis, v. 47, n. 6, p. 1224–1240, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 37.

MATINMIKKO-BLUE, M. et al. Analysis of Spectrum Valuation Elements for Local 5G Networks: Case Study of 3.5-GHz Band. *IEEE Transactions on Cognitive Communications and Networking*, v. 5, n. 3, p. 741–753, 9 2019. ISSN 2332-7731. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8713522/>>. Citado na página 22.

MELONI, L. G. P. Hypercomplex OFDM schemes for cross-polarized antennas. In: *2012 International Symposium on Communications and Information Technologies (ISCIT)*. IEEE, 2012. p. 502–507. ISBN 978-1-4673-1157-1. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/6380951/>>. Citado 2 vezes nas páginas 115 e 127.

MELONI, L. G. P.; HINOSTROZA N., J. L.; TORMENA JR., O. Construction and Analysis of Quaternion MIMO-OFDM Communications Systems. *Journal of Communication and Information Systems*, v. 32, n. 1, p. 80–89, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 104, 105 e 127.

MISMAR, F. B.; EVANS, B. L.; ALKHATEEB, A. Deep Reinforcement Learning for 5G Networks: Joint Beamforming, Power Control, and Interference Coordination. *IEEE Transactions on Communications*, v. 68, n. 3, p. 1581–1592, 3 2020. ISSN 0090-6778. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8938771/>>. Citado na página 23.

MOOSE, P. H. A technique for orthogonal frequency division multiplexing frequency offset correction. *IEEE Transactions on Communications*, v. 42, n. 10, p. 2908–2914, 1994. ISSN 00906778. Citado 3 vezes nas páginas 75, 98 e 108.

MUSHTAQ, E.; ALI, S.; HASSAN, S. A. Novel construction methods of quaternion orthogonal designs based on complex orthogonal designs. In: *2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. IEEE, 2017. p. 973–977. ISBN 978-1-5090-4096-4. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/8006673/>>. Citado na página 59.

NADEEM, Q.-U.-A.; KAMMOUN, A.; ALOUINI, M.-S. Elevation Beamforming With Full Dimension MIMO Architectures in 5G Systems: A Tutorial. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, v. 21, n. 4, p. 3238–3273, 2019. ISSN 1553-877X. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8770245/>>. Citado na página 23.

NAGAPUSHPA, K. P.; Chitra Kiran, N. Novel Optimized Filter Design for Filtered-OFDM to Enhance 5G Communication Spectral Efficiency. In: . [s.n.], 2019. p. 11–20. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-19810-7_2>. Citado na página 23.

OMRI, A. et al. Synchronization Procedure in 5G NR Systems. *IEEE Access*, v. 7, p. 41286–41295, 2019. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8675913/>>. Citado na página 25.

PARCHIN, N. O. et al. Dual-polarized mimo antenna array design using miniaturized self-complementary structures for 5g smartphone applications. In: *2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–4. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 59.

- PATTANAYAK, P.; KUMAR, P. An efficient scheduling scheme for MIMO-OFDM broadcast networks. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, v. 101, p. 15–26, 3 2019. ISSN 14348411. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1434841118300359>. Citado na página 22.
- RADNOSRATI, K. et al. Localization in 3GPP LTE Based on One RTT and One TDOA Observation. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 69, n. 3, p. 3399–3411, 3 2020. ISSN 0018-9545. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8966502/>. Citado na página 91.
- RIBEIRO, C. et al. Multi-Gigabit/s OFDM real-time based transceiver engine for emerging 5G MIMO systems. *Physical Communication*, v. 38, p. 100957, 2 2020. ISSN 18744907. Disponível em: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1874490719301004>. Citado na página 26.
- ROSADO, J. A. del Peral et al. Performance limits of V2I ranging localization with LTE networks. In: *2017 14th Workshop on Positioning, Navigation and Communications (WPNC)*. IEEE, 2017. p. 1–5. ISBN 978-1-5386-3089-1. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/8250070/>. Citado na página 91.
- SAHU, M.; SHRIVASTAVA, M.; AGWEKAR, A. Optimization of PAPR in MIMO – OFDM Using Partial Transmit Sequence and ACO For 5G Communication System. In: *2020 International Conference on Inventive Computation Technologies (ICICT)*. IEEE, 2020. p. 1087–1091. ISBN 978-1-7281-4685-0. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9112384/>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 61.
- SANGUINETTI, L.; BJORNSEN, E.; HOYDIS, J. Toward Massive MIMO 2.0: Understanding Spatial Correlation, Interference Suppression, and Pilot Contamination. *IEEE Transactions on Communications*, v. 68, n. 1, p. 232–257, 1 2020. ISSN 0090-6778. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8861014/>. Citado na página 59.
- SANGWINE, S.; LE BIHAN, N. *Quaternion and octonion toolbox for Matlab®*. 2015. Disponível em: <http://qtfm.sourceforge.net>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- SANGWINE, S. J.; LE BIHAN, N. Quaternion Polar Representation with a Complex Modulus and Complex Argument Inspired by the Cayley-Dickson Form. *Advances in Applied Clifford Algebras*, v. 20, n. 1, p. 111–120, 3 2010. ISSN 0188-7009. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s00006-008-0128-1>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 34.
- SEBERRY, J. et al. The theory of quaternion orthogonal designs. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 56, n. 1, p. 256–265, 1 2008. ISSN 1053-587X. Citado 4 vezes nas páginas 26, 56, 104 e 115.
- SEBERRY, J.; SPENCE, S. A.; WYSOCKI, T. A. A construction technique for generalized complex orthogonal designs and applications to wireless communications. *Linear Algebra and its Applications*, v. 405, n. 1–3, p. 163–176, 8 2005. ISSN 00243795. Citado 3 vezes nas páginas 26, 56 e 115.
- SHI, K.; SERPEDIN, E. Coarse Frame and Carrier Synchronization of OFDM Systems: A New Metric and Comparison. *IEEE Transactions on Wireless*

Communications, v. 3, n. 4, p. 1271–1284, 7 2004. ISSN 1536-1276. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1310316/>. Citado na página 68.

SHUSTER, M. D. Survey of attitude representations. *Journal of the Astronautical Sciences*, v. 41, n. 4, p. 439–517, 10 1993. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1993JAnSc..41..439S>. Citado na página 28.

SINGH, S. K.; RATHKANTHIWAR, A. P.; GANDHI, A. S. New Algorithm for Time and Frequency Synchronization in MIMO-OFDM Systems. *Wireless Personal Communications*, v. 96, n. 3, p. 3283–3295, 10 2017. ISSN 0929-6212. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s11277-017-4090-x>. Citado na página 68.

SJODIN, M. et al. A 40.2 bps/Hz Single Polarization 4x4 Line-of-Sight MIMO Link With Unsynchronized Oscillators. In: *2019 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–3. Citado na página 24.

STUELPNAGEL, J. On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group. *SIAM Review*, v. 6, n. 4, p. 422–430, 10 1964. Citado na página 28.

TAROKH, V.; JAFARKHANI, H.; CALDERBANK, A. R. Space-time block codes from orthogonal designs. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 45, n. 5, p. 1456–1467, 7 1999. ISSN 00189448. Citado 3 vezes nas páginas 26, 57 e 58.

TEMIZ, M. et al. On the Impact of Antenna Array Geometry on Indoor Wideband Massive MIMO Networks. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, p. 1–1, 2020. ISSN 0018-926X. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9142324/>. Citado na página 59.

THANTHARATE, A.; BEARD, C.; MARUPADUGA, S. An Approach to Optimize Device Power Performance Towards Energy Efficient Next Generation 5G Networks. In: *2019 IEEE 10th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. IEEE, 2019. p. 0749–0754. ISBN 978-1-7281-3885-5. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8993067/>. Citado na página 22.

TORMENA JR., O.; MELONI, L. G. P. A generalization of location services using dual polarized cellular systems. Submetido para o JCIS. 2020. Citado na página 127.

VAEZI, M.; DING, Z.; POOR, H. V. (Ed.). *Multiple Access Techniques for 5G Wireless Networks and Beyond*. Cham: Springer International Publishing, 2019. ISBN 978-3-319-92089-4. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-92090-0>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

VAN DE BEEK, J. J. et al. A time and frequency synchronization scheme for multiuser OFDM. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 17, n. 11, p. 1900–1914, 11 1999. ISSN 0733-8716. Citado na página 76.

VAN DE BEEK, J. J.; SANDELL, M.; BORJESSON, P. O. ML estimation of time and frequency offset in OFDM systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 45, n. 7, p. 1800–1805, 7 1997. ISSN 1053-587X. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/document/599949/>. Citado 4 vezes nas páginas 76, 98, 109 e 116.

VAUGHAN, R. G. Polarization diversity in mobile communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 39, n. 3, p. 177–186, 1990. ISSN 0018-9545. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/130998/>>. Citado na página 24.

WANG, H.; XIA, X.-G. Upper bounds of rates of complex orthogonal space-time block codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49, n. 10, p. 2788–2796, 10 2003. ISSN 0018-9448. Citado na página 58.

WILKINS, D. *Sir William Rowan Hamilton*. 2020. Disponível em: <<https://www.britannica.com>>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

WYSOCKI, B. J.; WYSOCKI, T. A.; SEBERRY, J. Modeling dual polarization wireless fading channels using quaternions. In: *Joint IST Workshop on Mobile Future, 2006 and the Symposium on Trends in Communications. SympoTIC '06*. [S.l.]: IEEE, 2006. v. 6, p. 68–71. ISBN 1-4244-0368-5. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 115.

XU, C.; GONG, Y.; LETAIEF, K. B. High-rate complex orthogonal space-time block codes for high number of transmit antennas. In: *2004 IEEE International Conference on Communications*. [S.l.]: IEEE, 2004. v. 2, p. 823–826. ISBN 0-7803-8533-0. Citado na página 58.

XU, W. et al. Maximum likelihood TOA and OTDOA estimation with first arriving path detection for 3GPP LTE system. *Transactions on Emerging Telecommunications Technologies*, v. 27, n. 3, p. 339–356, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 91.

YAMADA, S. et al. Cross-Polarization Discrimination and Port-to-Port Isolation Enhancement of Dual-Polarized Antenna Structures Enabling Polarization MIMO. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, v. 18, n. 11, p. 2409–2413, 11 2019. ISSN 1536-1225. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8760360/>>. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 60.

ZAHRA, A.; KHAN, Q. U.; SHEIKH, S. A. Comparative analysis of quaternion modulation system with OFDM systems. *International Journal of Electronics Letters*, Taylor & Francis, p. 1–10, 2020. Citado na página 115.

ZANDBERGEN, P. A. Accuracy of iPhone Locations: A Comparison of Assisted GPS, WiFi and Cellular Positioning. *Transactions in GIS*, v. 13, p. 5–25, 6 2009. ISSN 13611682. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1111/j.1467-9671.2009.01152.x>>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 87.

ZARRINKOUB, D. H. *Understanding LTE with MATLAB®*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2014. ISBN 9781118443446. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1002/9781118443446>>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 80.

ZHANG, Y. et al. Ultra-Wideband Dual-Polarized Antenna With Three Resonant Modes for 2G/3G/4G/5G Communication Systems. *IEEE Access*, v. 7, p. 43214–43221, 2019. ISSN 2169-3536. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/8672061/>>. Citado na página 59.

ZHAO, Y.; HAGGMAN, S.-G. Sensitivity to Doppler shift and carrier frequency errors in OFDM systems-the consequences and solutions. In: *Proceedings of Vehicular Technology Conference - VTC*. IEEE, 1996. v. 3, p. 1564–1568. ISBN 0-7803-3157-5. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/504021/>>. Citado na página 74.

ZHOU, B.; LIU, A.; LAU, V. Successive Localization and Beamforming in 5G mmWave MIMO Communication Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 67, n. 6, p. 1620–1635, 3 2019. ISSN 1053-587X. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8624270/>. Citado na página 23.

ZHU, J. et al. Dual-Band Dual Circularly Polarized Antenna Array Using FSS-Integrated Polarization Rotation AMC Ground for Vehicle Satellite Communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 68, n. 11, p. 10742–10751, 2019. Citado na página 24.

APÊNDICE A – Publicações desta pesquisa

Essa vertente de pesquisa teve seu início com a publicação (MELONI, 2012). Desde então, o autor teve a seguinte produtividade acadêmica relacionada à sua pesquisa:

- co-autoria da publicação (MELONI; HINOSTROZA N.; TORMENA JR., 2017), intitulada “*Construction and Analysis of Quaternion MIMO-OFDM Communications Systems*”, publicada em 2017, no JCIS (*Journal of Communication and Information Systems*);
- submissão do artigo (HINOSTROZA N.; MELONI; TORMENA JR., 2020), também sob co-autoria, intitulado “*Improved Time and Frequency Synchronization for Dual-Polarization OFDM Systems*”, na revista *Signal Processing* da editora Elsevier, atualmente sob *peer-review*;
- co-autoria (principal) do artigo (TORMENA JR.; MELONI, 2020), intitulado “*A Generalization of Location Services Using Dual Polarized Cellular Systems*”, submetido para o JCIS;
- e co-autoria do artigo (HINOSTROZA N. et al., 2020), intitulado “*Improved CFO Synchronization of Dual-Polarized OFDM Systems using Training Symbols*”, aceito para apresentação no XXXVIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (SBrT 2020).