



Nathan Shauer

Aproximação Numérica de Propagação de  
Fraturas Hidráulicas em Domínio Bidimensional  
com Elastoplasticidade

Campinas  
2015





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E  
URBANISMO

Nathan Shauer

# Aproximação Numérica de Propagação de Fraturas Hidráulicas em Domínio Bidimensional com Elastoplasticidade

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de Estruturas e Geotécnica.

**Orientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo**

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Nathan Shauer e orientada pelo Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo.

---

Campinas

2015

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura  
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

Sh25a Shauer, Nathan, 1989-  
Aproximação numérica de propagação de fraturas hidráulicas em domínio bidimensional com elastoplasticidade / Nathan Shauer. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Philippe Remy Bernard Devloo.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Fraturamento hidráulico. 2. Metodo dos elementos finitos. 3. Elastoplasticidade. I. Devloo, Philippe Remy Bernard, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Numerical approximation of hydraulic fracturing in bidimensional domain with elastoplasticity

**Palavras-chave em inglês:**

Hydraulic fracturing  
Finite element method  
Elastoplasticity

**Área de concentração:** Estruturas e Geotécnica

**Titulação:** Mestre em Engenharia Civil

**Banca examinadora:**

Philippe Remy Bernard Devloo [Orientador]  
Luiz Carlos Marcos Vieira Júnior  
Jakson Manfredini Vassoler

**Data de defesa:** 16-01-2015

**Programa de Pós-Graduação:** Engenharia Civil

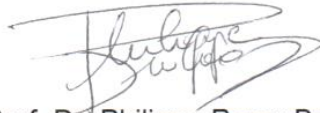


**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

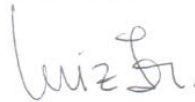
**Aproximação Numérica de Propagação de Fraturas Hidráulicas em  
Domínio Bidimensional com Elastoplasticidade**

**Nathan Shauer**

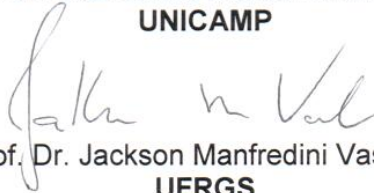
**Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:**



**Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo  
Presidente e Orientador/UNICAMP**



**Prof. Dr. Luiz Carlos Marcos Vieira Júnior  
UNICAMP**



**Prof. Dr. Jackson Manfredini Vassoler  
UFRGS**

Campinas, 16 de janeiro de 2015



# Resumo

Fraturamento Hidráulico é o processo pelo qual uma fratura se propaga através da injeção de um fluido pressurizado em seu interior. É muito utilizado na indústria de petróleo, pois cria uma zona de alta condutividade, possibilitando aumento nas taxas de injeção ou produção. Esse trabalho consiste na implementação numérica, no ambiente orientado a objetos NeoPZ, de uma fratura propagando hidraulicamente em um domínio bidimensional pelo método dos elementos finitos. Os fenômenos envolvidos considerados são a resposta mecânica do reservatório utilizando a relação tensão deformação elastoplástica, junto com escoamento entre placas planas no interior da fratura, incluindo o efeito de leak-off dado pelo modelo de Carter. Os critérios de plastificação utilizados são o de Mohr-Coulomb, que é usado para comparar os resultados com os de Papanastasiou, P. [1], e o de Sandler-DiMaggio, que é referenciado por Santos, E. S. [2] como sendo um bom critério para modelar a relação constitutiva de formações de óleo e gás. São utilizados conceitos de c++ orientação a objetos, materiais coesivos para critério de propagação, acoplamento completo de fenômenos e utilização de espaços reduzidos. As rotinas implementadas são verificadas de acordo com equações analíticas e observando que a conservação de massa é satisfeita. Com esse estudo confrontam-se os resultados obtidos pela abordagem da Elasticidade Linear usualmente utilizada, percebendo que a simulação de fraturamento hidráulico com elastoplasticidade, devido a plastificação da ponta, gera fraturas com menores comprimentos e maiores aberturas para um mesmo volume de injeção como observado por Papanastasiou, P. et al. [1, 3, 4].



# Abstract

Hydraulic Fracturing is the process in which a fracture propagates through the injection of a pressurized fluid in its interior. It is widely used in the oil industry due to the high conductivity zone it creates, which provides high rates of both injection and production. This work consists in the numerical implementation, in the object oriented environment NeoPZ, of a fracture hydraulically propagating in a two dimensional elastoplastic medium using the Finite Elements method. The involved phenomena considered are the mechanical response of the reservoir, using the elastoplastic stress-strain relationship, along with the flow between plane plates within the fracture and considering the leak-off on the walls of the fracture using the Carter model. The elastoplastic criteria used are the Mohr-Coulomb criteria, which is used to compare results with the ones from Papanastasiou, P. [1], and the Sandler-DiMaggio criteria, which is referenced by Santos, E. S. [2] as a good criteria to model the constitutive relation of oil and gas formations. Some of the concepts used in this work are c++ object oriented language, cohesive zone for fracture propagation, fully coupling of the involved phenomena, and use of reduced spaces. The routines implemented in this work are verified according to analytical equations and verifying that the conservation law is satisfied. In this study the results obtained are compared with the Linear Elasticity approach, which is commonly used, realizing that simulation of hydraulic fracturing using elastoplastic constitutive laws, due to the yielding of the tip, generates smaller fracture lengths and larger apertures for the same injection volume as observed by Papanastasiou, P. et al. [1, 3, 4].



# Sumário

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b> |
| 1.1      | Fraturamento Hidráulico . . . . .  | 1        |
| 1.2      | Elastoplasticidade . . . . .   | 3        |
| 1.3      | Motivação . . . . .  | 6        |
| 1.4      | Objetivos . . . . .  | 6        |
| <b>2</b> | <b>Revisão bibliográfica</b>   | <b>7</b> |
| 2.1      | Fraturamento Hidráulico . . . . .  | 7        |
| 2.1.1    | Modelos Analíticos . . . . .   | 7        |
| 2.1.1.1  | Modelo PKN . . . . .   | 8        |
| 2.1.1.2  | Modelo KGD . . . . .   | 11       |
| 2.1.1.3  | Modelo Radial . . . . .  | 13       |
| 2.1.2    | Fenômenos Mecânicos . . . . .  | 14       |
| 2.1.2.1  | Equação de Equilíbrio . . . . .  | 16       |
| 2.1.2.2  | Modelo de Filtração de Carter (Leak-off) . . . . .                                   | 17       |
| 2.1.2.3  | Equação de Conservação de Massa . . . . .  | 17       |
| 2.1.2.4  | Propagação da Fratura . . . . .  | 19       |
| 2.2      | Elastoplasticidade . . . . .   | 22       |
| 2.2.1    | Modelo Constitutivo Elastoplástico Geral . . . . .                                   | 22       |
| 2.2.1.1  | Decomposição do tensor de deformação infinitesimal . . . . .                         | 22       |
| 2.2.1.2  | Lei Elástica . . . . .   | 23       |
| 2.2.1.3  | Critério de Plastificação e Superfície de Plastificação . . . . .                    | 23       |
| 2.2.1.4  | Lei de Escoamento Plástico . . . . .   | 24       |
| 2.2.1.5  | Lei de Endurecimento . . . . .   | 24       |
| 2.2.1.6  | Condições Complementares de Carregamento/Descarregamento<br>e Consistência . . . . . | 26       |
| 2.2.1.7  | Leis de Escoamento derivadas de um Potencial de Fluxo Plástico . . . . .             | 27       |
| 2.2.1.8  | Associatividade . . . . .  | 27       |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.2.1.9  | PVI Elastoplástico . . . . .                             | 28        |
| 2.2.1.10 | Discretização de Euler do PVI Elastoplástico . . . . .   | 28        |
| 2.2.2    | Modelo de Sandler-DiMaggio . . . . .                     | 28        |
| 2.2.3    | Modelo de Mohr-Coulomb . . . . .                         | 31        |
| 2.3      | Fraturamento Hidráulico com Elastoplasticidade . . . . . | 33        |
| <b>3</b> | <b>Método dos Elementos Finitos</b>                      | <b>35</b> |
| 3.1      | Formulação Fraca . . . . .                               | 35        |
| 3.1.1    | Equação de Conservação de Massa . . . . .                | 36        |
| 3.1.2    | Equação de Equilíbrio . . . . .                          | 36        |
| 3.2      | Método de Galerkin . . . . .                             | 38        |
| 3.3      | Funções de base de Elementos Finitos . . . . .           | 39        |
| 3.4      | Geração das malhas . . . . .                             | 41        |
| 3.5      | Acoplamento das equações . . . . .                       | 44        |
| 3.5.1    | Espaços reduzidos . . . . .                              | 45        |
| 3.5.2    | Resolução do sistema não linear acoplado . . . . .       | 47        |
| 3.5.3    | Cálculo do Resíduo . . . . .                             | 48        |
| 3.5.4    | Demonstração do cálculo da matriz Jacobiana . . . . .    | 48        |
| 3.5.4.1  | Cálculo do Operador Tangente Elastoplástico . . . . .    | 50        |
| <b>4</b> | <b>Implementação</b>                                     | <b>52</b> |
| 4.1      | Ambiente NeoPZ . . . . .                                 | 52        |
| 4.2      | Classes implementadas . . . . .                          | 54        |
| 4.2.1    | <i>TPZCohesiveBC</i> . . . . .                           | 55        |
| 4.2.2    | <i>TPZPlasticFrac2D</i> . . . . .                        | 56        |
| 4.2.3    | <i>TPZPlasticStepPV</i> . . . . .                        | 57        |
| 4.2.4    | <i>ToolsTransient</i> . . . . .                          | 57        |
| <b>5</b> | <b>Validação das Classes Desenvolvida</b>                | <b>59</b> |
| 5.1      | Matriz Jacobiana . . . . .                               | 59        |
| 5.1.1    | Cálculo da ordem de convergência . . . . .               | 60        |
| 5.1.2    | Resultados . . . . .                                     | 61        |
| 5.2      | Material Coesivo . . . . .                               | 61        |
| 5.2.1    | Aplicação de Neumann . . . . .                           | 63        |
| 5.2.1.1  | Resultados Esperados . . . . .                           | 63        |
| 5.2.1.2  | Resultados Obtidos . . . . .                             | 65        |
| 5.2.2    | Aplicação de Dirichlet . . . . .                         | 68        |



|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.2.2.1  | Resultados Esperados . . . . .                           | 68        |
| 5.2.2.2  | Resultados Obtidos . . . . .                             | 69        |
| 5.3      | Conservação de Massa . . . . .                           | 71        |
| <b>6</b> | <b>Análise de Resultados</b>                             | <b>73</b> |
| 6.1      | Comparação com resultados de Papanastasiou [1] . . . . . | 73        |
| 6.2      | Simulação com modelo de Sandler-DiMaggio . . . . .       | 76        |
| 6.2.1    | Pressão líquida . . . . .                                | 77        |
| 6.2.2    | Comprimento de fratura . . . . .                         | 78        |
| 6.2.3    | Abertura de fratura . . . . .                            | 78        |
| 6.2.4    | Zona plastificada . . . . .                              | 80        |
| 6.2.5    | Superfície de plastificação . . . . .                    | 80        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões</b>  | <b>83</b> |
| <b>8</b> | <b>Trabalhos Futuros</b>                                 | <b>85</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                        | <b>85</b> |



Aos meus pais Dany e Lígia,  
e ao meu irmão Giuliny



# Agradecimentos

Aos meus pais Dany e Lígia pelo total e completo apoio durante esse mestrado, com conselhos e incentivos que sempre me colocaram no rumo certo. Tenho muita sorte de ser filho de pais tão dedicados;

Ao meu irmão Giuliny, pela grande amizade e sempre me mostrar a importância de ver as coisas com outros olhos;

Ao Nicky, por todo companheirismo de que sinto falta;

Ao meu orientador *Dr. Philippe Remy Bernard Devloo*, que durante esse tempo no *LabMeC* se tornou não só meu mentor, como um amigo para toda vida. Admiro-o muito por seu conhecimento científico e principalmente por sua empolgação contagiante para trabalhar com os mais diversos assuntos;

Ao *Omar Yesid Duran Triana* que é meu grande amigo e companheiro de trabalho até as mais tardes horas e finais de semana;

Ao *Dr. Tiago Luis Duarte Forti* que me esclareceu pacientemente diversos pontos de programação de elementos finitos na biblioteca NeoPZ que foram essenciais para esse trabalho;

Ao *Dr. Paulo Cesar Lucci* pela amizade e paciência para me introduzir na interessante linguagem que é o C++;

Ao *Dr. Diogo Lira Cecílio* por ter me introduzido ao conceito de elastoplasticidade e iniciado meus estudos na área;

Ao *Dr. Agnaldo Monteiro Farias* por me ajudar com os conceitos matemáticos que me faltam nessa complicada área que é simulação numérica;

Ao *Thiago Dias dos Santos* por ter me introduzido ao ambiente do *LabMeC* ainda em minha graduação;

Ao *Dr. Edimar Cesar Rylo*, pelas divertidas discussões de fraturamento hidráulico que tivemos;

Ao *Gustavo Camargo Longhin* que me introduziu e esclareceu dúvidas de programação paralela;

Ao *Dr. João Luis Gonçalves* por sempre responder minhas mais diversas dúvidas matemáticas e computacionais;

À *Dr. Denise Siqueira Campos* por me introduzir e ajudar com o software *Mathematica* ainda durante minha graduação;

Ao *Fábio Luis Gea dos Santos* que foi meu companheiro de cursos durante esse mestrado;

À *Dr. Sônia Maria Gomes* pelos divertidos congressos que participamos e pela forte cobrança de melhora da minha escrita científica;

A todos aos que participam e participaram do *LabMeC*, um ambiente de aprendizagem incrível.

# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Exemplo de poço em operação de fraturamento [5] . . . . .                       | 2  |
| 1.2  | Representação do poço e as duas asas da fratura, adaptado de [5] . . . . .      | 3  |
| 1.3  | Exemplo de ensaio de tração para materiais elastoplásticos [6] . . . . .        | 4  |
| 2.1  | Modelo PKN [7] . . . . .  | 9  |
| 2.2  | Comprimento para modelo PKN . . . . .   | 10 |
| 2.3  | Abertura para modelo PKN . . . . .  | 11 |
| 2.4  | Modelo KGD [7] . . . . .  | 11 |
| 2.5  | Comprimento para modelo KGD . . . . .   | 12 |
| 2.6  | Abertura para modelo KGD . . . . .  | 13 |
| 2.7  | Comprimento para modelo radial . . . . .  | 14 |
| 2.8  | Abertura para modelo radial . . . . .   | 14 |
| 2.9  | Fenômenos envolvidos na propagação hidráulica de fraturas. (Adaptado de [7])    | 15 |
| 2.10 | Progressão dos fenômenos mecânicos envolvidos . . . . .                         | 16 |
| 2.11 | Representação da ponta da fratura durante propagação [3] . . . . .              | 19 |
| 2.12 | Modelo constitutivo para elementos coesivos [3] . . . . .                       | 20 |
| 2.13 | Representação gráfica do modelo coesivo utilizado . . . . .                     | 21 |
| 2.14 | Critério de Von Mises e Tresca no espaço de tensões principais [6] . . . . .    | 24 |
| 2.15 | Exemplo de endurecimento isotrópico [6] . . . . .                               | 25 |
| 2.16 | Exemplo de endurecimento cinemático [6] . . . . .                               | 25 |
| 2.17 | Representação gráfica das condições de Kuhn-Tucker [2] . . . . .                | 27 |
| 2.18 | Critério de Plasticificação de Sandler Dimaggio [8] . . . . .                   | 30 |
| 2.19 | Critério de plasticificação de Sandler Dimaggio no espaço de tensões principais | 31 |
| 2.20 | Critério de Mohr-Coulomb [6] . . . . .  | 32 |
| 2.21 | Critério de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais [6] . . . . .          | 33 |
| 2.22 | Modelo de Papanastasiou [3] . . . . .   | 34 |
| 3.1  | Funções de base lineares [9] . . . . .  | 39 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.2  | Funções de forma para $p = 3$ do quadrilátero no ambiente NeoPZ . . . . .  | 40 |
| 3.3  | Estado de tensão in-situ [5] . . . . .   | 41 |
| 3.4  | Eixos de simetria no corte perpendicular . . . . .   | 42 |
| 3.5  | Exemplo da malha final de elementos . . . . .  | 43 |
| 3.6  | Elementos de fluido . . . . .  | 43 |
| 3.7  | Função de pressão constante unitária . . . . .   | 46 |
| 3.8  | Função de deslocamento fixo na ponta da fratura . . . . .  | 46 |
| 3.9  | Acoplamento com espaços reduzidos . . . . .  | 47 |
| 4.1  | Diagrama do ambiente NeoPZ . . . . .   | 54 |
| 4.2  | Derivação da classe <i>TPZCohesiveBC</i> . . . . .   | 55 |
| 4.3  | Derivação da classe <i>TPZPlasticFrac2D</i> . . . . .  | 56 |
| 5.1  | Malha para validação do material coesivo . . . . .   | 62 |
| 5.2  | Lei constitutiva coesiva considerada para validação . . . . .  | 63 |
| 5.3  | Aplicação de Neumann na malha elástica para validação de material coesivo  | 64 |
| 5.4  | Tensão na vertical para validação do material coesivo . . . . .  | 66 |
| 5.5  | Valor da tensão coesiva na curva de coesão . . . . .   | 67 |
| 5.6  | Malha indeformada e deformada para validação de material coesivo . . . . .   | 67 |
| 5.7  | Aplicação de Dirichlet na malha elástica para validação de material coesivo .  | 68 |
| 5.8  | Tensão na vertical para validação do material coesivo . . . . .  | 69 |
| 5.9  | Valor da tensão coesiva na curva de coesão . . . . .   | 70 |
| 5.10 | Malha indeformada e deformada para validação de material coesivo . . . . .   | 70 |
| 5.11 | Exemplificação de conservação de massa . . . . .   | 72 |
| 6.1  | Comparação de comprimento de fratura . . . . .   | 74 |
| 6.2  | Comparação de abertura de fratura . . . . .  | 75 |
| 6.3  | Pressão no tempo $t = 5,46$ s. Momento entre propagações . . . . .   | 76 |
| 6.4  | Pressão em quatro passos de tempo . . . . .  | 77 |
| 6.5  | Comprimento de fratura para ambas as simulações . . . . .  | 78 |
| 6.6  | Meia abertura em quatro passos de tempo . . . . .  | 79 |
| 6.7  | Meia abertura no poço para ambas as simulações . . . . .   | 79 |
| 6.8  | Zonas plastificadas em quatro passos de tempo. (a) $t = 1,33333$ s, (b) $t =$<br>2,33333 s. (c) $t = 3,33333$ s. (d) $t = 4,33333$ s . . . . .               | 80 |
| 6.9  | Superfície de plastificação $f_1$ em quatro passos de tempo. (a) $t = 1,33333$ s,<br>(b) $t = 2,33333$ s. (c) $t = 3,33333$ s. (d) $t = 4,33333$ s . . . . . | 81 |



|  |    |
|--|----|
| 6.10 Superfície de plastificação $f_2$ em quatro passos de tempo. (a) $t = 1,33333$ s, |    |
| (b) $t = 2,33333$ s. (c) $t = 3,33333$ s. (d) $t = 4,33333$ s . . . . .                | 82 |



# Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Parâmetros usados nos testes numéricos . . . . . | 8  |
| 5.1 | Resultados do teste de convergência . . . . .    | 61 |



# Lista de Símbolos

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| $\bar{A}$ , $\bar{B}$ e $\bar{C}$     | - constantes do material, ver equação (2.2.20), página 29                                       |
| $\bar{W}$ e $\bar{D}$                 | - constantes do material, ver equação (2.2.23), página 30                                       |
| $\alpha_j$ e $\beta_j$                | - graus de liberdade, ver equação (3.2.2), página 39  |
| $\epsilon$                            | - tensor de deformações infinitesimais total, ver equação (2.2.1), página 22                    |
| $\epsilon^e$                          | - tensor de deformações infinitesimais elástico, ver equação (2.2.1), página 22                 |
| $\epsilon^p$                          | - tensor de deformações infinitesimais plástico, ver equação (2.2.1), página 22                 |
| $\mathbb{I}$                          | - tensor de identidade de quarta ordem , ver equação (3.5.11), página 50                        |
| $\delta_C$                            | - Deslocamento crítico de fratura, ver equação (2.1.17), página 20                              |
| $\delta_c$                            | - deslocamento crítico , ver equação (2.1.18), página 20  |
| $\dot{\lambda}$                       | - multiplicador plástico, ver equação (2.2.7), página 24  |
| $\epsilon_v^p$                        | - deformação plástica volumétrica, ver equação (2.2.21), página 29                              |
| $\epsilon_y$                          | - Deformação da direção vertical , ver equação (5.2.1), página 64                               |
| $\Gamma_D^{for}$ e $\Gamma_N^{for}$   | - contorno com condição de Dirichlet e Neumann para a formação, ver equação (3.1.7), página 37  |
| $\Gamma_D^{frac}$ e $\Gamma_N^{frac}$ | - contorno com condição de Dirichlet e Neumann para a fratura, ver equação (3.1.4), página 36   |
| $\alpha$                              | - conjunto de variáveis associadas ao endurecimento do material, ver equação (2.2.8), página 26 |
| $A$                                   | - força termodinâmica de endurecimento, ver equação (2.2.4), página 23                          |
| $b$                                   | - forças de corpo, ver equação (2.1.11), página 16  |

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| <b>H</b>                             | - módulo de endurecimento generalizado do material, ver equação (2.2.9), página 26 |
| <b>I</b>                             | - tensor de identidade de segunda ordem , ver equação (3.5.11), página 50          |
| <b>J</b>                             | - Jacobiana , ver equação (3.5.4), página 47                                       |
| <b>J<sub>p</sub></b>                 | - Jacobiana relativa a equação de conservação , ver equação (3.5.6), página 48     |
| <b>J<sub>u</sub></b>                 | - Jacobiana relativa a equação de equilíbrio , ver equação (3.5.6), página 48      |
| <b>r</b>                             | - Vetor Resíduo , ver equação (3.5.3), página 44                                   |
| <b>r<sub>p</sub></b>                 | - Vetor Resíduo relativo a equação de conservação , ver equação (3.5.3), página 44 |
| <b>r<sub>u</sub></b>                 | - Vetor Resíduo relativo a equação de equilíbrio , ver equação (3.5.3), página 44  |
| <b>T</b>                             | - tensor de tensões, ver equação (2.1.11), página 16                               |
| <b>μ</b>                             | - viscosidade do fluido injetado, ver equação (2.1.1), página 9                    |
| <b>ν</b>                             | - coeficiente de poisson, ver equação (2.1.17), página 19                          |
| <b>Ω<sup>for</sup></b>               | - domínio da formação (deformação mecânica), ver equação (3.1.7), página 37        |
| <b>Ω<sup>frac</sup></b>              | - domínio da fratura, ver equação (3.1.4), página 36                               |
| <b>Φ</b>                             | - função de plastificação, ver equação (2.2.4), página 23                          |
| <b>φ<sub>j</sub> e φ<sub>j</sub></b> | - funções de base de elementos finitos, ver equação (3.2.2), página 39             |
| <b>Ψ</b>                             | - potencial de fluxo plástico, ver equação (2.2.11), página 27                     |
| <b>σ<sub>H</sub></b>                 | - Tensão horizontal máxima   |
| <b>σ<sub>h</sub></b>                 | - Tensão horizontal mínima   |
| <b>σ<sub>i</sub><sup>pr</sup></b>    | - autovalor i do tensor de tensões projetado , ver equação (3.5.11), página 50     |
| <b>σ<sub>j</sub><sup>tr</sup></b>    | - autovalor j do tensor de tensões tentativa , ver equação (3.5.11), página 50     |
| <b>σ<sub>max</sub></b>               | - Tensão horizontal máxima   |
| <b>σ<sub>min</sub></b>               | - Tensão horizontal mínima   |

|               |  |
|---------------|--|
| $\sigma_T$    | - tensão de tração da rocha, ver equação (2.1.18), página 20   |
| $\sigma_v$    | - Tensão vertical  |
| $\Upsilon$    | - região de plastificação, ver equação (2.2.6), página 23  |
| $\xi$         | - domínio elástico, ver equação (2.2.5), página 23   |
| $C_l$         | - coeficiente de filtração de Carter, ver equação (2.1.1), página 9  |
| $D^{ep}$      | - Tensor tangente elastoplástico , ver equação (3.5.11), página 50   |
| $E$           | - módulo de elasticidade, ver equação (2.1.1), página 9  |
| $f_1$         | - critério de cisalhamento de critério de plastificação de Sandler-DiMaggio, ver equação (2.2.20), página 29       |
| $f_2$         | - envoltória de compressão móvel do critério de plastificação de Sandler-DiMaggio, ver equação (2.2.21), página 29 |
| $f_p$ e $g_p$ | - funções conhecidas, ver equação (3.1.4), página 36   |
| $f_u$ e $g_u$ | - funções conhecidas, ver equação (3.1.7), página 37   |
| $G$           | - módulo de cisalhamento, ver equação (3.1.10), página 37  |
| $h_f$         | - altura da fratura, ver equação (2.1.1), página 9   |
| $I_1$         | - primeiro invariante do tensor de tensões, ver equação (2.2.20), página 29  |
| $K_I$         | - fator de intensidade de tensão, ver equação (2.1.17), página 19  |
| $L$           | - valor do primeiro invariante na transição entre as duas curvas, ver equação (2.2.21), página 29                  |
| $L_{frac}$    | - comprimento da fratura para os modelos analíticos, ver equação (2.1.2), página 9                                 |
| $N$           | - direção de escoamento plástico, ver equação (2.2.7), página 24   |
| $p$           | - pressão, ver equação (2.1.14), página 18   |
| $Q$           | - vazão paralela as paredes da fratura, ver equação (2.1.14), página 18  |
| $q$           | - vazão injetada, ver equação (2.1.1), página 9  |

|                    |   |
|--------------------|---|
| $q_l$              | - velocidade de filtração, ver equação (2.1.12), página 17  |
| $R$                | - razão entre os comprimentos dos semi-eixos da envoltória do critério de plastificação à compressão, ver equação (2.2.21), página 29 |
| $t$                | - tempo de injeção, ver equação (2.1.1), página 9   |
| $t_D$              | - tempo adimensional , ver equação (2.1.1), página 9  |
| $t_e$              | - tempo de exposição, ver equação (2.1.12), página 17   |
| $T_T, w_T$ e $w_C$ | - parâmetros da curva coesiva , ver equação (2.1.20), página 21   |
| $u_y^i$            | - Deslocamento dos nós inferiores na direção vertical , ver equação (5.2.2), página 65  |
| $u_y^s$            | - Deslocamento dos nós superiores na direção vertical , ver equação (5.2.2), página 65  |
| $v$                | - função teste, ver equação (3.1.4), página 36  |
| $v_i$              | - autovetor i do tensor de tensões projetado , ver equação (3.5.11), página 50  |
| $v_j$              | - autovetor j do tensor de tensões tentativa , ver equação (3.5.11), página 50  |
| $v_l$              | - volume filtrado, ver equação (2.1.13), página 17  |
| $v_{sp}$           | - spurt loss ou perda de fluido instantânea, ver equação (2.1.12), página 17  |
| $w$                | - abertura da fratura, ver equação (2.1.14), página 18  |
| $w_w$              | - abertura média da fratura para os modelos analíticos, ver equação (2.1.3), página 9   |
| $X$                | - distância do final envoltória de compressão no eixo da primeira invariante, ver equação (2.2.22), página 30                         |



# Convenções Gerais

O significado matemático associado com fontes específicas é dado a seguir. Excessões podem aparecer caso especificado no texto.

- Letras sem negrito ( $A$ ,  $a$ ): escalares e funções escalares.
- letras minúsculas em negrito ( $\mathbf{a}$ ): vetores e funções vetoriais.
- letras maiúsculas em negrito ( $\mathbf{A}$ ): tensores de segunda ordem e funções tensoriais.



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Fraturamento Hidráulico

Fraturamento Hidráulico é o fenômeno de propagação de fraturas em uma camada de rocha, por um fluido pressurizado. Essa técnica começou a ser estudada em 1940 tendo sua primeira utilização reportada em 1947, no campo de Hugoton, Kansas [5]. Neste teste não foram verificados ganhos de produção após o processo de fraturamento. Segundo Azevedo, C. T. [5] acredita-se que a maior causa desse mal rendimento é a falta, no processo, de agentes de sustentação, que são responsáveis por manter a abertura depois de parado o bombeamento. Ainda na mesma década a técnica foi testada em um campo no leste do Texas, dessa vez utilizando agentes de sustentação, acarretando altos índices de produção. Após 1955, com a redução no preço do óleo devido à regulação do preço do gás pelo governo americano, a técnica passou a ser pouco utilizada, causando declínio de investimento em pesquisas na área. Foi só a partir do final da década de 70, com a crise do petróleo, que a técnica voltou a ser estudada. Na época, fraturamento hidráulico era em maior parte aplicado à formações de baixa permeabilidade, e foi só na década de 90 que a técnica começou a ser utilizada em formações de alta permeabilidade. A alta taxa de filtração, muitas vezes associada a reservatórios areníticos inconsolidados representavam uma dificuldade para iniciação e propagação de uma fratura com abertura suficiente para receber o agente de sustentação [5]. A estimulação dessas formações necessitava de grandes volumes de fluido de perfuração, configurando altos custos. Esses fatores levaram a grandes investimentos em pesquisa na área que viabilizaram a aplicação do fraturamento hidráulico em formações de alta permeabilidade.

Segundo Dore, P. [10], a decisão de submeter um poço a um fraturamento hidráulico, geralmente, é tomada com base em estudos de produtividade da formação, a fim de verificar se a resposta da rocha-reservatório ao tratamento torna o mesmo economicamente viável. A otimização do projeto consistirá na escolha do tratamento que possa produzir maior lucro,

ou seja, maior produtividade com o menor custo possível. Com isso, a simulação prévia do processo constitui poderosa ferramenta de engenharia de reservatórios na escolha do projeto de fraturamento.

Fraturamento Hidráulico é um processo físico complexo que envolve pelo menos três fenômenos concomitantes: a deformação mecânica do reservatório induzida pela pressão do fluido na superfície da fratura, o fluxo de fluido dentro da fratura e a propagação da fratura. Na figura 1.1 apresenta-se uma exemplificação de um caso de fraturamento hidráulico em um poço vertical. É possível perceber a fratura se propagando perpendicularmente a tensão horizontal mínima  $\sigma_h$ .

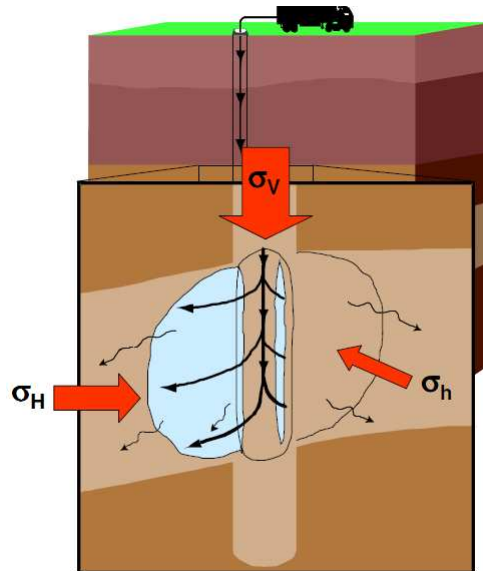


Figura 1.1: Exemplo de poço em operação de fraturamento [5]

Fraturamento hidráulico é utilizado por diversos motivos, entre eles pode-se citar [5]:

- Ultrapassar a zona danificada durante a perfuração, que se situa próxima ao poço, restabelecendo o contato do poço com o reservatório não danificado;
- Criar um caminho longo e de boa condutividade para dentro da formação, promovendo maior área de reservatório exposta ao fluxo;
- Atingir melhores características permo-porosas;
- Conectar fraturas naturais do reservatório ou zonas hidraulicamente isoladas;

O fraturamento hidráulico também é inerente ao processo de reinjeção de água, em que a água produzida é injetada novamente na formação. Nesse processo o tamanho da fratura deve ser controlado para não atingir grandes comprimentos.

Na Figura 1.2 é apresentado uma representação usual do fenômeno de fraturamento em que é realizado um corte perpendicular em um poço. É possível visualizar o poço circular no centro e as duas asas da fratura.

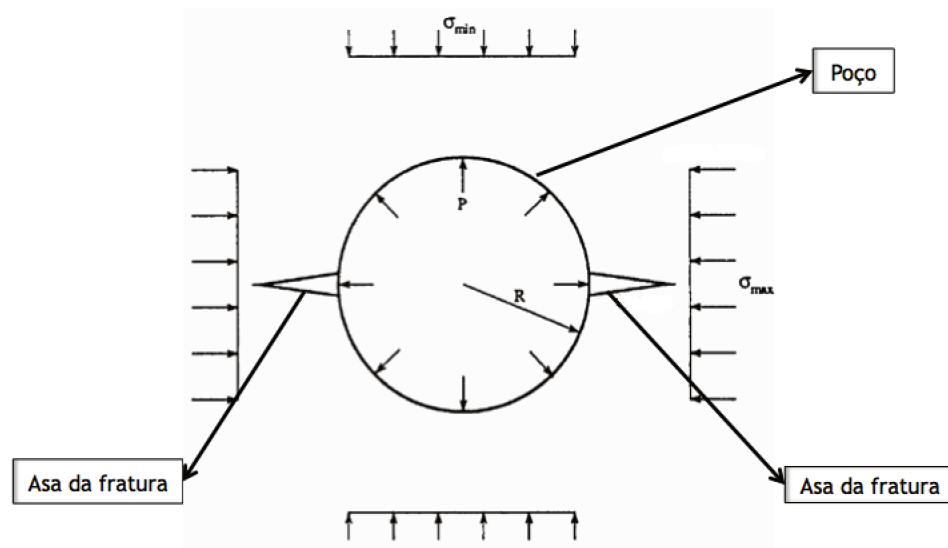


Figura 1.2: Representação do poço e as duas asas da fratura, adaptado de [5]

## 1.2 Elastoplasticidade

Como citado na seção anterior, ocorrem três fenômenos concomitantes durante um processo de fraturamento hidráulico: o fluxo dentro da fratura, a propagação da fratura e a deformação mecânica do reservatório. Usualmente esse último é modelado como um material elástico linear, mas nesse trabalho almeja-se modelar a relação de tensão-deformação da formação como um material elastoplástico.

A utilização de modelos elastoplásticos é motivada pela possível melhor representação do fenômeno por ser mais realístico segundo o material da formação. Segundo Dore, P [11], a plastificação da ponta da fratura é conhecida e deseja-se desenvolver um simulador capaz de contabilizar a influência desse fenômeno no processo de fraturamento hidráulico.

Materiais elásticos deformam quando uma força é aplicada e voltam para configuração original se essa força é retirada. Já materiais elastoplásticos, a partir de certos valores de deformação, apresentam uma deformação residual, que mesmo com a retirada da carga, continua existindo. Na Figura 1.3 apresenta-se um exemplo de curva de tensão por deformação para um ensaio de tração uniaxial em um material elastoplástico.

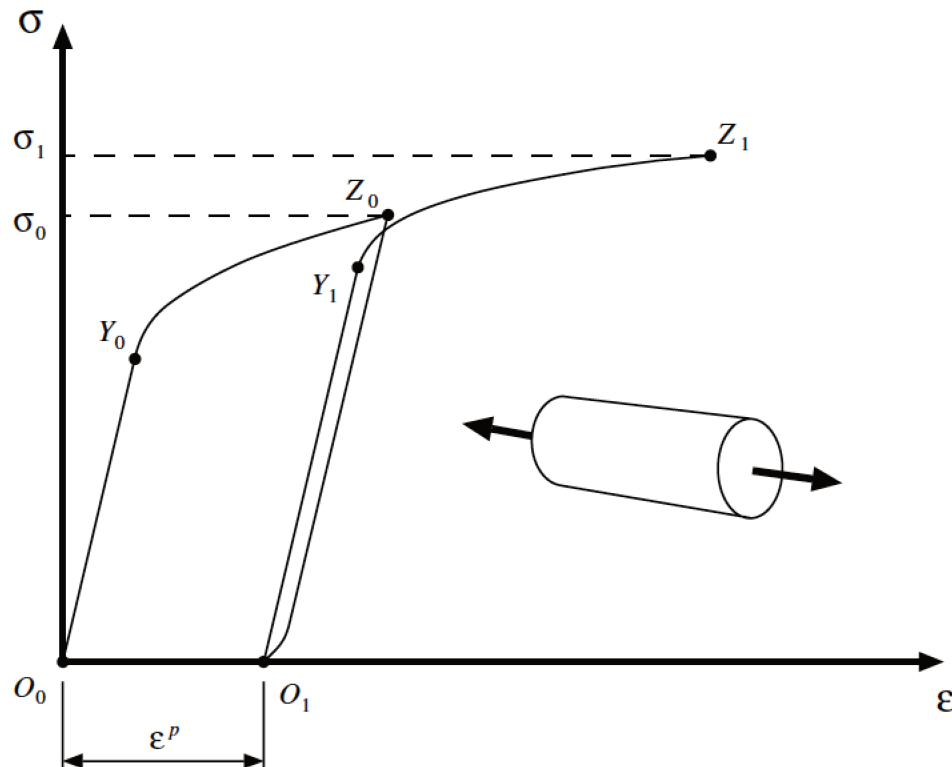


Figura 1.3: Exemplo de ensaio de tração para materiais elastoplásticos [6]

Primeiramente o material é submetido a um aumento de tensão até atingir o valor  $\sigma_0$ . A seguir, é totalmente descarregado, para depois ser carregado novamente até uma tensão  $\sigma_1$  superior a  $\sigma_0$ . O caminho da curva de tensão-deformação é dado por  $O_0Y_0Z_0O_1Y_1Z_1$ . Nesse caminho a reta  $O_0Y_0$  representa a parte elástica do primeiro carregamento, isto é, se a carga fosse retirada, o material voltaria ao ponto  $O_0$ . Depois do ponto  $Y_0$ , a curva sofre uma mudança de inclinação onde o material se encontra sob deformações plásticas até atingir o ponto  $Z_0$ . A deformação plástica continuará existindo mesmo após a retirada da carga, logo, quando houver o descarregamento, a configuração atingirá o ponto  $O_1$ , mantendo uma deformação residual (plástica) de  $\epsilon_p$ . No segmento  $O_1Y_1$  também verifica-se um comportamento

linear elástico, e como anteriormente, a partir do ponto  $Y_1$ , o material estará em estado de deformações plásticas. De acordo com Neto [6], três importantes propriedades fenomenológicas são observadas nesse teste:

1. A existência de um regime puramente elástico em que não ocorrem deformações permanentes (plásticas). O domínio plástico, nesse caso, é caracterizado por um certo valor de tensão denominado tensão de escoamento. Na Figura 1.3 os trechos  $O_0Y_0$  e  $O_1Y_1$  representam a parte do ensaio em que o material se encontra em regime puramente elástico, e os valores de tensão associados aos pontos  $Y_0$  e  $Y_1$  representam os valores da tensão de escoamento;
2. Se o material for carregado em valores acima do valor da tensão de escoamento ocorrerá o escoamento plástico (ou fluxo plástico), isto é, será observado aumento na deformação plástica (permanente);
3. Acompanhando a evolução da deformação plástica, observa-se um aumento no valor da tensão de escoamento. Esse fenômeno é chamado de encruamento.

Existem diversos critérios de plastificação na literatura, como os de Ducker-Prager, Mohr-Coulomb ou Tresca. Cada um desses modelos é verificado por representar melhor diferentes tipos de materiais. Para o caso de sólidos granulares o modelo de Sandler-Dimaggio é conhecido na área de petróleo por apresentar bons resultados [2], e por isso é utilizado nesse trabalho de pesquisa.

Além disso, Papanastasiou, P. [1] realizou a simulação numérica do processo de fraturamento hidráulico também considerando modelos constitutivos elastoplásticos com critério de Mohr-Coulomb e utilizando metodologias semelhantes às apresentadas nessa dissertação. A fim de comparar os resultados obtidos por esse trabalho com os de Papanastasiou, P. [1], esse critério também é implementado.

## 1.3 Motivação

Uma das técnicas que visam aumentar o índice de produtividade de um poço é a do fraturamento hidráulico, uma vez que proporciona um canal de grande condutividade para o escoamento do fluido a ser recuperado. Por outro lado, o processo de injeção de água para recuperação secundária frequentemente exige que o bombeio seja realizado com pressões acima da pressão de fratura. Desta forma, a geometria da fratura precisa ser cuidadosamente analisada, visto que diferentes camadas podem ser fraturadas nesse processo. Isso pode, inclusive, conectar camadas permeáveis antes separadas, o que resulta em perdas na eficiência de injeção de água. Este cuidado é mais necessário principalmente em formações carbonáticas, nas quais os contrastes<sup>1</sup> de tensões se mostram menos pronunciados em comparação com os contrastes em arenitos, o que poderá ocasionar avanços de fraturas indesejáveis. Outra motivação desse trabalho é analisar as diferenças na solução entre as lei constitutivas elásticas lineares comumente utilizadas nos softwares comerciais com a lei constitutiva elastoplástica estudada nesse trabalho.

## 1.4 Objetivos

Este texto apresenta revisão bibliográfica dos temas envolvidos, a proposta de uma metodologia de aproximação numérica para a simulação de propagação hidráulica de fraturas bidimensionais com elastoplasticidade, resumo de implementação e validação, e resultados qualitativos do problema. Os objetivos principais são:

- Gerar um simulador para o processo de fraturamento hidráulico podendo utilizar tanto leis elásticas quanto elastoplásticas;
- Comparar os resultados entre o uso de lei constitutiva elastoplástica e elástica;
- Desenvolver um código eficiente utilizando recursos avançados de simulação numérica e programação.

---

<sup>1</sup>Contraste de tensões é definido aqui como a relação entre as tensões horizontais entre a camada permeável e a camada confinante.



# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

### 2.1 Fraturamento Hidráulico

Com base na história de simulação de fraturamento hidráulico, primeiramente serão apresentados modelos analíticos bidimensionais inicialmente desenvolvidos para simular o fenômeno. Em seguida, será apresentado o equacionamento que governa o fenômeno estudado. Sobre esse equacionamento, posteriormente será apresentada a metodologia para encontrar uma solução aproximada.

#### 2.1.1 Modelos Analíticos

Três modelos analíticos são mais consagrados na solução do fenômeno de fraturamento hidráulico [7, 5] e serão discutidos a seguir. Um dos artigos que mais inovaram na área foi o de Perkins e Kern em 1961 (modelo PK), em que se adaptou a solução de Sneddon para fraturas em estado plano de deformação para criar o modelo PK. Depois, Nordgren adaptou o modelo PK para incluir os efeitos de perda de fluido, formulando o modelo PKN. Khristianovic e Zheltov, e Geertsma e Klerk, criaram separadamente o modelo KGD (1969), e o modelo radial, com fluido em pressão constante foi formulado por Sneddon (1950). A dedução dos modelos apresentados a seguir pode ser vista em [5] ou em [12, 13, 14, 15]. Os modelos analíticos apresentam simplificações do equacionamento e foram muito utilizados no início das simulações de fraturamento hidráulico. Para cada um deles será apresentada um teste numérico para os dados apresentados na Tabela 2.1. Esses resultados são úteis para o entendimento do comportamento da fratura.

Tabela 2.1: Parâmetros usados nos testes numéricos

|                                     |
|-------------------------------------|
| $\mu = 5 * 10^{-8} \text{ MPa.s}$   |
| $q = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s.m}$ |
| $E = 25 \text{ GPa}$                |
| $\nu = 0,2$                         |
| $h_f = 1 \text{ m}$                 |
| $C_l = 0,001 \text{ m/s}^{-1/2}$    |

em que:

- $C_l$ : coeficiente de filtração de Carter;
- $h_f$ : altura da fratura;
- $\mu$ : viscosidade do fluido injetado;
- $\nu$ : módulo de poisson
- $E$ : módulo de elasticidade;
- $q$ : vazão de injeção;

#### 2.1.1.1 Modelo PKN

Formulado por Perkins, Kern e Nordgren [12], o modelo assume estado plano de deformação nas seções verticais das fraturas. Assim, cada seção se deforma independentemente das vizinhas. Esse modelo apresenta bons resultado para simulações de fraturas alongadas, cujo comprimento é muito maior que a altura. Outra hipótese assumida pelo modelo é que a pressão líquida é constante ao longo do plano vertical, o que define um formato elíptico da fratura no plano vertical conforme Figura 2.1.

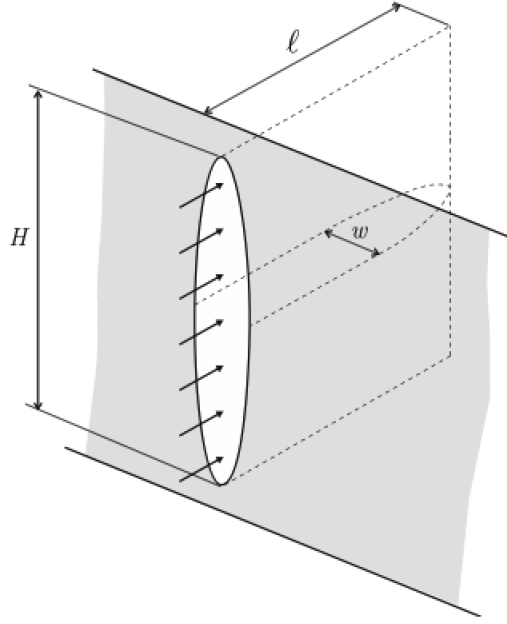


Figure 2.1: Modelo PKN [7]

Neste modelo somente é possível expressar analiticamente algumas aproximações da geometria da fratura utilizando os casos limites de alta e baixa eficiência. O tempo adimensional  $t_D$ , definido por Nordgren é o parâmetro utilizado para avaliar a eficiência:

$$t_D = \left( \frac{64C_l^5 E h_f}{\pi^3 \mu q^3} \right)^{2/3} t \quad (2.1.1)$$

em que  $t$  é o tempo de injeção:

Caso  $t_D < 0,01$ , a fratura é considerada de alta eficiência e o comprimento e abertura da fraturas serão dados respectivamente por:

$$L_{frac}(t) = 0,39 \left( \frac{E q^3}{\mu h_f^4} \right)^{1/5} t^{4/5} \quad (2.1.2)$$

$$w_w = 2,18 \left( \frac{\mu q^2}{E h_f} \right)^{1/5} t^{1/5} \quad (2.1.3)$$

sendo:

- $x_f$ : comprimento da frautra;
- $w_w$ : abertura média da fratura.

Se  $t_D > 1$ , o caso é considerado de baixa eficiência e o comprimento e abertura podem ser aproximados pelas seguintes equações:

$$L_{frac}(t) = \frac{q\sqrt{t}}{2\pi C_l h_f} \quad (2.1.4)$$

$$w_w = 4 \left( \frac{\mu q^2}{\pi^3 E C_l h_f} \right)^{1/4} t^{1/8} \quad (2.1.5)$$

Para os parâmetros listados na Tabela 2.1, obtém-se as curvas apresentadas nas Figuras 2.2 e 2.3:

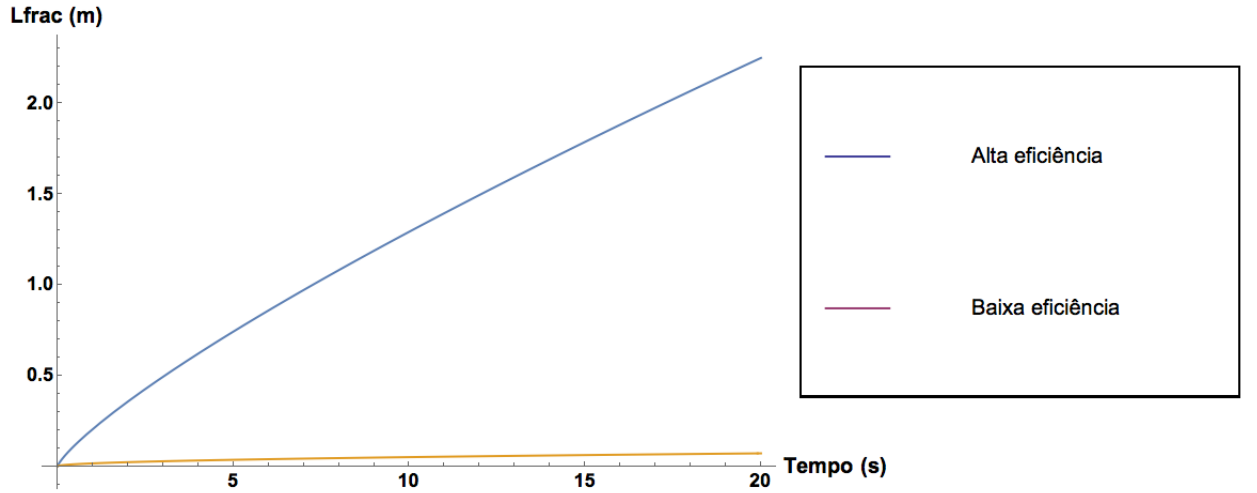


Figure 2.2: Comprimento para modelo PKN

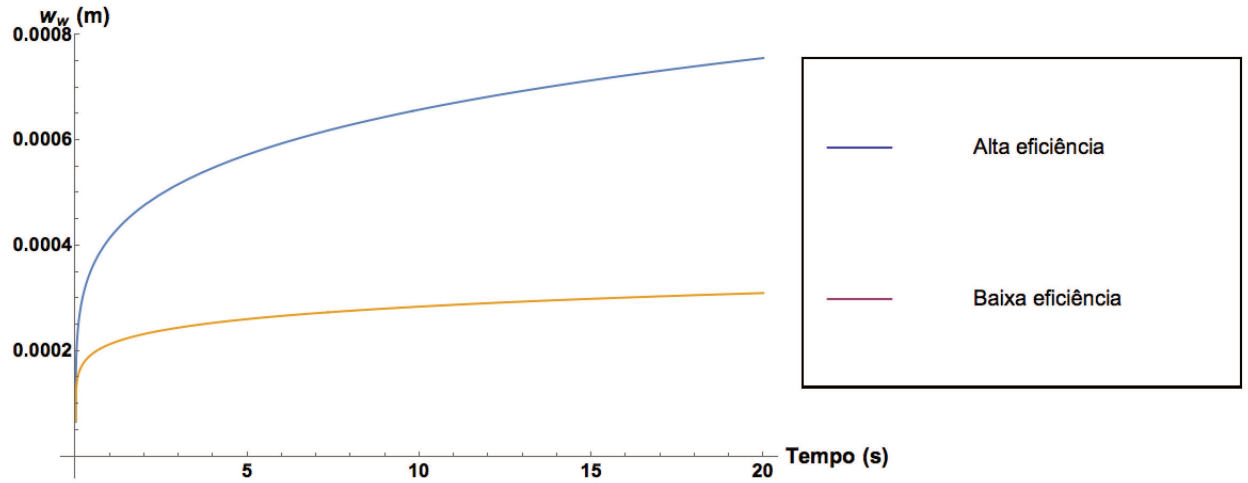


Figure 2.3: Abertura para modelo PKN

#### 2.1.1.2 Modelo KGD

Desenvolvido por Khristianovic e Zheltov [13], e Geertsma e Klerk [14], esse modelo assume estado plano de deformação entre as seções horizontais da fratura, o que resulta em uma geometria retangular nas seções verticais, e elíptica entre as seções horizontais da fratura conforme a Figura 2.4. Esse modelo apresenta bons resultados quando a fratura é curta e a altura é muito maior que o comprimento.

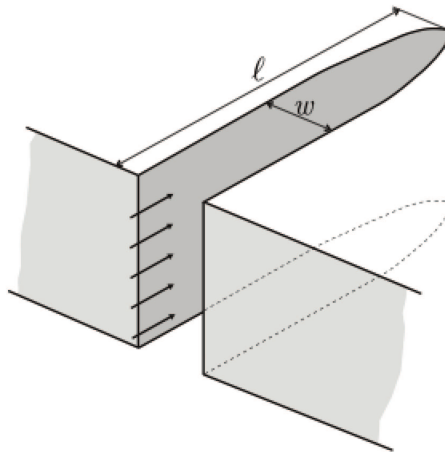


Figure 2.4: Modelo KGD [7]

O comprimento e abertura média da fratura são dados, respectivamente, por:

$$L_{frac} = \frac{qw_w}{64C_l^2 h_f} \left( \exp(\beta^2) \operatorname{erfc}(\beta) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 \right) \quad (2.1.6)$$

$$w_w = 2,36 \left( \frac{q^3 \mu}{E h_f^3} \right)^{1/6} t^{1/3} \quad (2.1.7)$$

em que:

$$\beta = \frac{8C_l \sqrt{\pi t}}{\pi w_w} \quad (2.1.8)$$

Para os parâmetros listados na Tabela 2.1, obtém-se as curvas apresentadas nas Figuras 2.5 e 2.6.

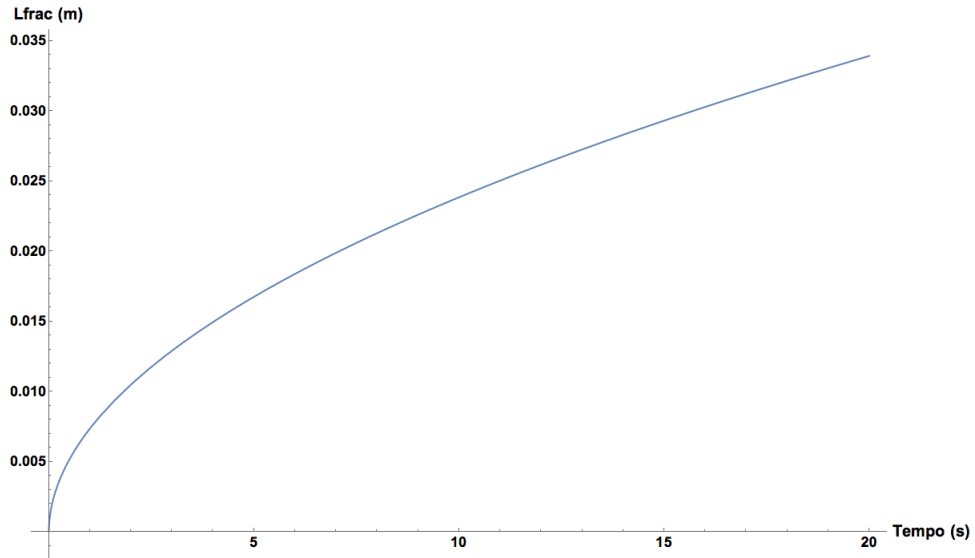


Figure 2.5: Comprimento para modelo KGD

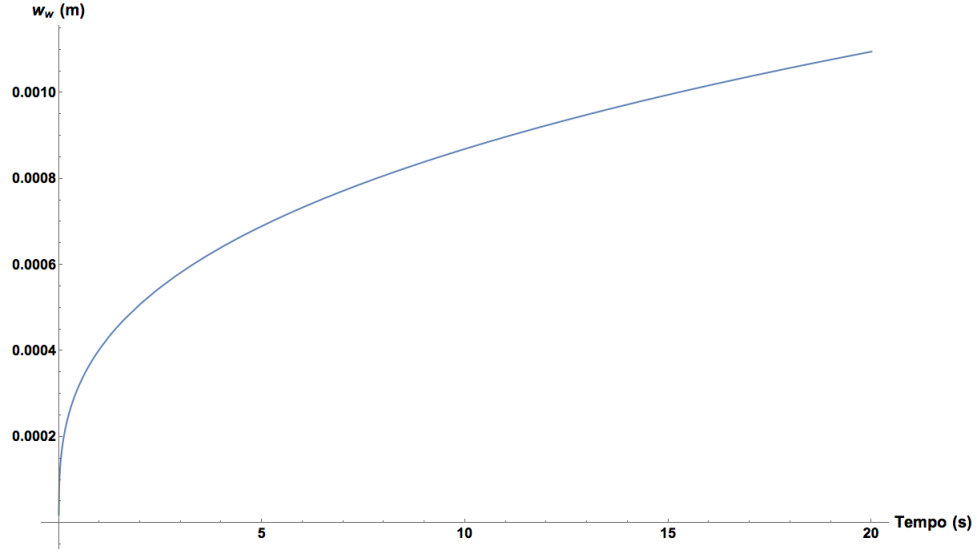


Figure 2.6: Abertura para modelo KGD

### 2.1.1.3 Modelo Radial

Foi apresentado por Sneddon [15] e é aplicável em reservatórios onde a injeção é realizada praticamente por uma fonte pontual. Ocorrem em maior parte em reservatórios homogêneos espessos ou quando fraturado a partir de um pequeno intervalo. Desse modo, o comprimento e abertura serão dados, respectivamente, por:

$$L_{frac} = 0,572 \left( \frac{q^3 E}{\mu} \right)^{1/9} t^{4/9} \quad (2.1.9)$$

$$w_w = 1,95 \left( \frac{q^3 \mu^2}{E^2} \right)^{1/9} t^{1/9} \quad (2.1.10)$$

Para os listados na Tabela 2.1, obtém-se as curvas apresentadas nas Figuras 2.7 e 2.8.

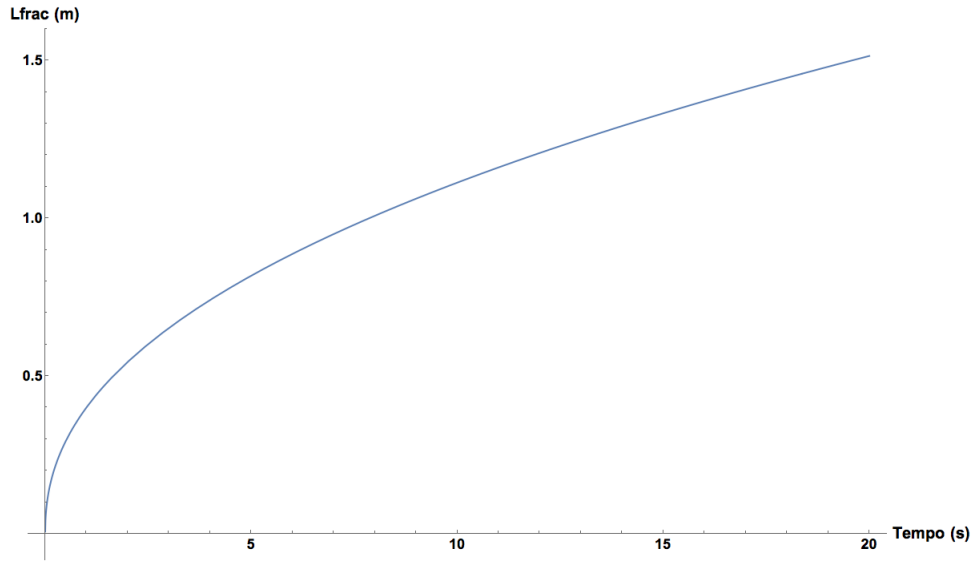


Figure 2.7: Comprimento para modelo radial

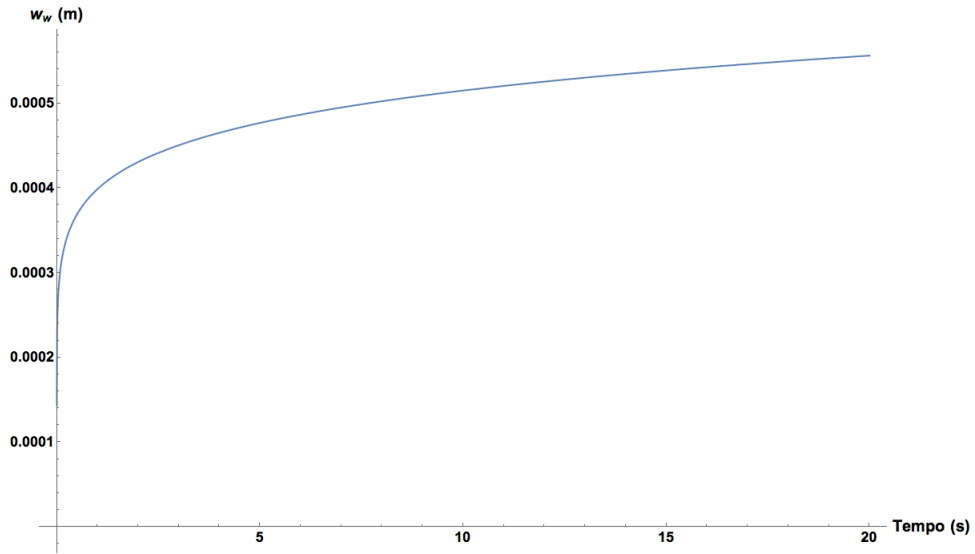


Figure 2.8: Abertura para modelo radial

### 2.1.2 Fenômenos Mecânicos

Três fenômenos mecânicos são acoplados de forma a modelar a propagação de fraturas: a deformação mecânica do reservatório que neste trabalho é modelada por relações tensão-deformação elastoplásticas, o fluxo de fluido com filtração e a propagação da fratura. Esse



efeitos são exemplificados na Figura 2.9 em que é apresentada apenas uma asa da fratura com comprimento  $l$  e abertura média  $w$ .

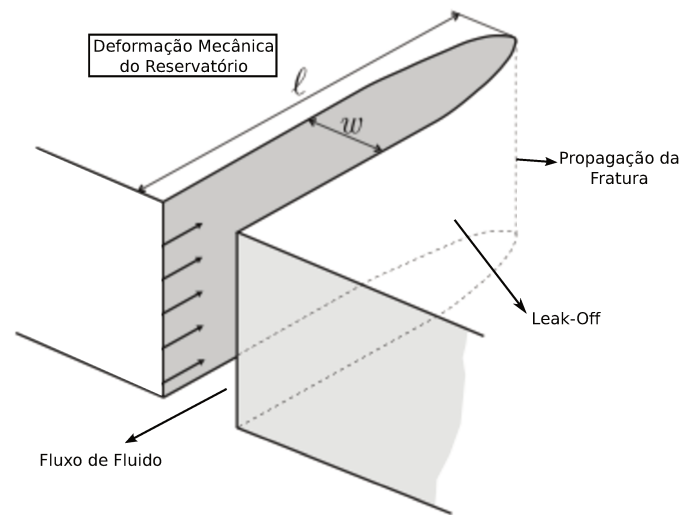


Figura 2.9: Fenômenos envolvidos na propagação hidráulica de fraturas. (Adaptado de [7])

A progressão dos fenômenos, pode ser caracterizada pelo diagrama da Figura 2.10.

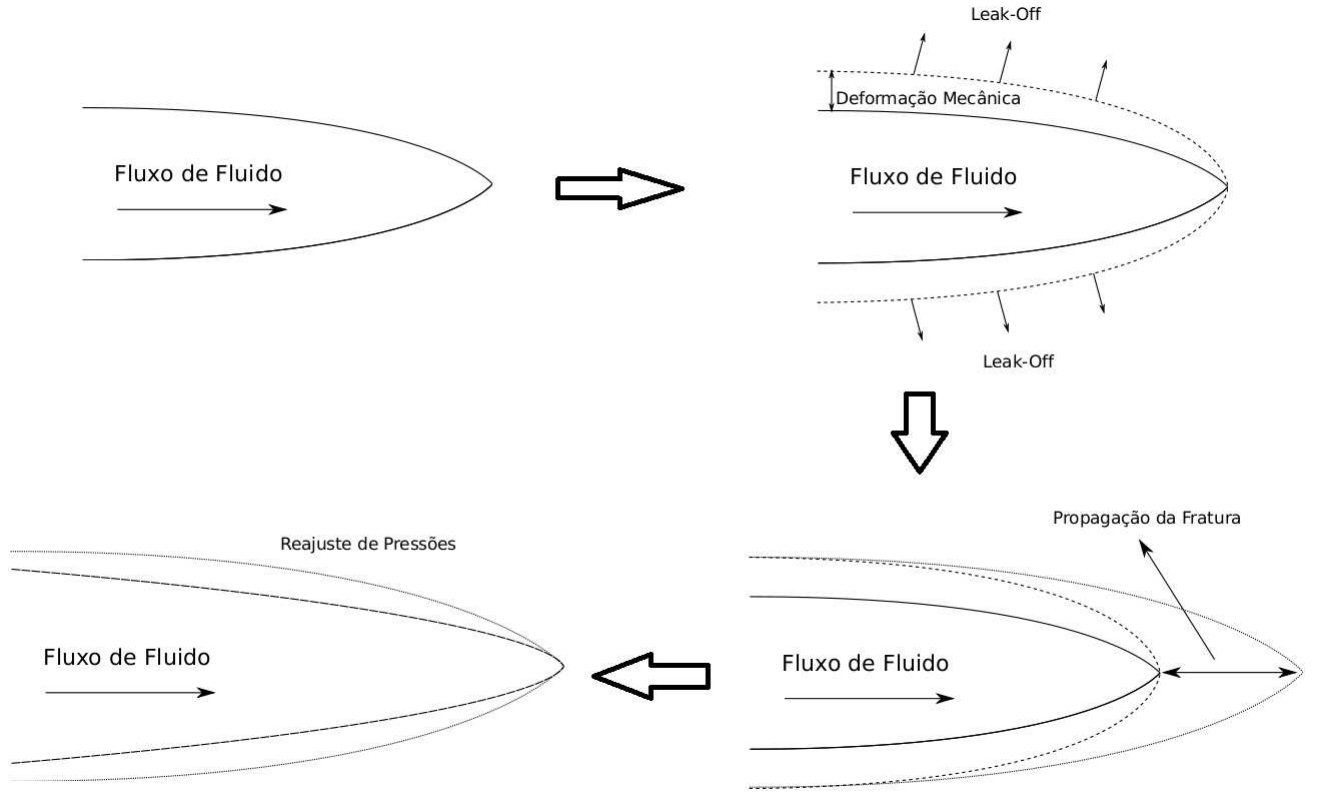


Figura 2.10: Progressão dos fenômenos mecânicos envolvidos

### 2.1.2.1 Equação de Equilíbrio

A equação governante no problema de deformação mecânica é a equação de equilíbrio (equação de conservação de quantidade de movimento linear). O desenvolvimento dessa equação pode ser verificada em [16] e, no caso de equilíbrio estático é dada por:

$$\text{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{b} = 0 \quad (2.1.11)$$

em que  $\mathbf{b}$  representa as forças de corpo e  $\mathbf{T}$  é o tensor de tensões de Cauchy. Essa equação significa que qualquer ponto material do corpo está em equilíbrio.

Neste trabalho, para modelar a relação tensão-deformação da rocha (formação), é utilizada a lei constitutiva elastoplástica com critérios de plastificação de Sandler-DiMaggio [8] e Mohr-Coulomb. Esses critérios são descritos na seção 2.2.

### 2.1.2.2 Modelo de Filtração de Carter (Leak-off)

Costuma se adicionar um polímero no fluido de perfuração que tem a atuação de criar continuamente um reboco na face da fratura, mantendo uma resistência ao fluxo. Além do reboco, outros dois processos interferem na filtração: a invasão da formação pelo filtrado do fluido de fraturamento e o deslocamento e a compressibilidade do fluido do reservatório.

Carter [17] realizou um estudo sobre esses efeitos e definiu a velocidade de filtração como:

$$q_l(x, t_e) = \frac{C_l}{\sqrt{t_e - t_0}} + v_{sp}\delta(t_e - t_0) \quad (2.1.12)$$

em que

- $q_l$ : velocidade de filtração;
- $C_l$ : coeficiente de filtração de Carter;
- $t_e$ : tempo de exposição;
- $v_{sp}$ : *spurt loss* ou perda de fluido instantânea.

Essa equação assume que o fluxo de fluido é linear e que o fluido é Newtoniano. Integrando-se a Equação 2.1.12 obtém-se o volume filtrado:

$$v_l(x, t_e) = \int_0^{t_e} q_l(x, t_e) dt = 2C_l\sqrt{t_e - t_0} + v_{sp}H(t_e - t_0) \quad (2.1.13)$$

Os parâmetros  $C_l$  e  $v_{sp}$  são medidos em laboratório.

### 2.1.2.3 Equação de Conservação de Massa

Em uma fratura bidimensional o fluxo de fluido pode ser aproximado pela equação de Reynolds. A equação de Reynolds é uma particularização da equação de Navier-Stokes a partir da teoria da lubrificação. Essa teoria descreve o fluxo de fluidos em geometrias na qual uma dimensão é significantemente menor que as outras. No caso em questão, a fratura será aproximada por duas placas planas com fluxo em uma direção. As seguintes suposições são adotadas [18]:

1. A espessura do fluido,  $z$ , é muito pequena comparada com a largura  $y$  e comprimento  $x$ ;
2. A pressão não varia na dimensão  $z$  (altura) do fluido;
3. O fluxo é laminar;

4. Nenhuma força externa age no filme de fluido;
5. A inércia do fluido é muito pequena quando comparada com o cisalhamento viscoso. Essas forças inerciais são devido a aceleração do fluido e podem ser negligenciadas;
6. Não há atrito entre as superfícies;
7. Todos os outros gradientes de velocidade podem ser descartados comparado com  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  e  $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ .

Nesse caso, a relação entre a vazão na fratura e pressão é dada por:

$$\mathbf{q} = -\frac{w^3}{12\mu}\nabla p \quad (2.1.14)$$

em que:

- $\mathbf{q}$  é a vazão paralela as paredes da fratura;
- $w$  é a abertura da fratura em determinado ponto (distância entre as paredes);
- $\mu$  é a viscosidade do fluido;
- $p$  a pressão em determinado ponto;

O leak-off é um termo incluído na equação de Reynolds que representa a quantidade de fluido perdido para reservatório. Será aplicado o modelo de Carter, o que implica que essa perda de fluido é unidimensional na direção ortogonal ao plano da fratura [11]. Essa aproximação é válida para reservatórios com alta permeabilidade e em que a fratura se propaga suficientemente rápido.

A equação de conservação de massa é apresentada abaixo e sua dedução pode ser verificada em [18]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}[\mathbf{q}] + q_l = 0 \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_{in} \text{ , na região de injeção.} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ , no contorno da fratura.} \end{array} \right. \quad (2.1.15)$$

Em futuros desenvolvimentos é conveniente expressar a conservação de massa em com a pressão como variável de estado, logo, incluindo a Equação 2.1.14 na Equação 2.1.15, tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + q_l = \text{div}\left[\frac{w^3}{12\mu}(\nabla p)\right] \quad (2.1.16)$$

### 2.1.2.4 Propagação da Fratura

O estudo de propagação de fraturas aqui apresentado é baseado no livro de mecânica da fratura de GDoutos [19]. Usualmente, os modelos numéricos consideram o critério convencional da LEFM (Linear Elastic Fracture Mechanics) de que a fratura se propaga quando  $K_I = K_{Ic}$ . Em que  $K_{Ic}$  representa a resistência da rocha e  $K_I$  é o fator intensidade de tensão. A cada passo de tempo, o  $K_I$  é calculado, e quando este equiparar a resistência da rocha, a propagação ocorre. O fator  $K_I$  pode ser calculado com auxílio da integral J [19]. A integral J representa um modo de calcular a taxa de liberação de energia de deformação por unidade de superfície e a relação entre o fator intensidade de tensão e a integral J é dada por:

$$J = \frac{(K_I)^2}{E'} \quad (2.1.17)$$

sendo que para estado plano de tensão  $E' = E$ , e para estado plano de deformação  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ .

Esta teoria se refere a sólidos com comportamento elástico, mas para elastoplasticidade é necessário utilizar outra metodologia. Papanastasiou [3] afirma que o critério de propagação mais robusto disponível em mecânica não linear é baseado na modelagem constitutiva de zonas coesivas. Ainda segundo o autor, a zona coesiva é a região à frente da ponta da fratura em que a descrição de meio contínuos deixa de ser satisfatória. Essa região é caracterizada por micro fraturamento e intertravamento com parte da fratura, e a fratura principal é propagada pela conexão dessas micro fraturas.

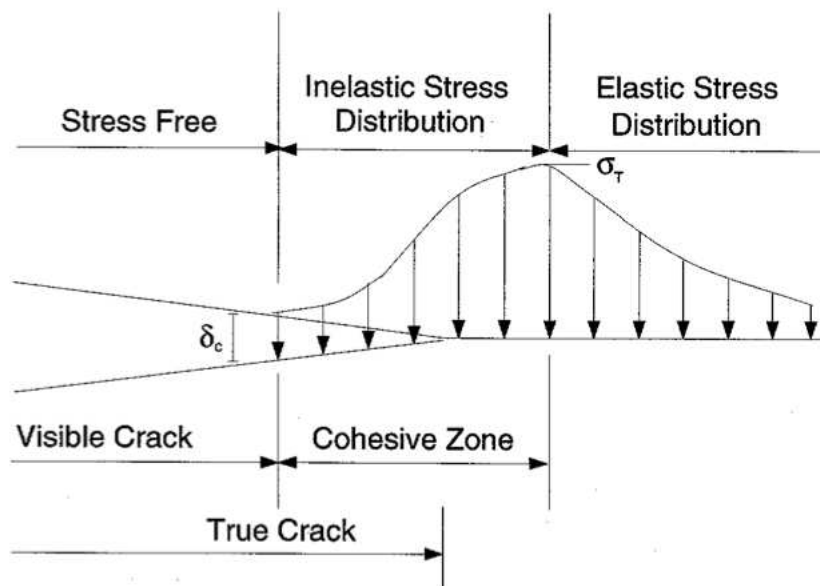


Figura 2.11: Representação da ponta da fratura durante propagação [3]

A tensão de fechamento pode ser caracterizada pelo comportamento de amolecimento observado em muitas rochas durante um teste de tração uniaxial. Na Figura 2.12 verifica-se um exemplo desse teste em que a rocha se desloca quase que linearmente até atingir a tensão  $\sigma_T$ , em seguida, essa tensão de fechamento cai até atingir um deslocamento  $\delta_C$ .

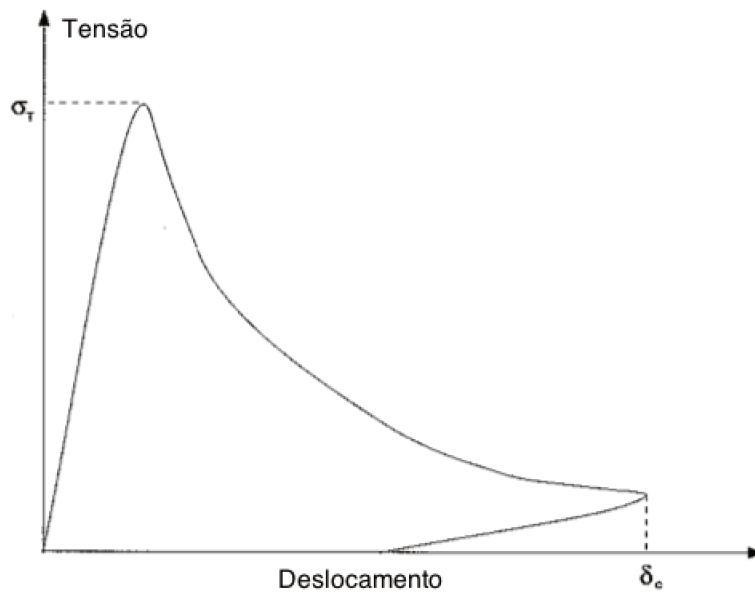


Figura 2.12: Modelo constitutivo para elementos coesivos [3]

Papanastasiou [3] também supõe que a zona coesiva se encontra em uma região estreita à frente da fratura visível, e portanto modela esse comportamento com elementos de contorno com tensão dependente da solução.

O processo ocorre da seguinte maneira: com o aumento da carga, a tensão nos elementos coesivos aumenta linearmente com a abertura, mas assim que a tensão atinge a tensão  $\sigma_T$  da rocha, esses elementos carregam uma tensão decrescente até atingir um deslocamento crítico  $\delta_C$ . Nesse momento a fratura se propaga.

Para tornar o número de parâmetros mínimo, Papanastasiou assume variação linear entre os pontos de amolecimento da curva:

$$\sigma = \sigma_T(1 - \delta/\delta_C) \quad (2.1.18)$$

Papanastasiou também publicou em artigo posterior [4] uma maneira de calcular o deslocamento crítico em função da resistência da rocha  $K_{IC}$ :

$$\delta_C = \frac{2 K_{IC}(1 - \nu^2)}{E \sigma_T} \quad (2.1.19)$$

Como nesse trabalho, diferente de Papanastasiou, usou-se  $w$  ao invés de  $\delta$  para abertura de fratura, e  $T$  ao invés de  $\sigma$  para tensão, tem-se a seguinte lei constitutiva coesiva para determinados  $T_T$ ,  $w_T$  e  $w_C$ :

$$T_C(w) = \begin{cases} \frac{T_T}{w_C} w & , w \leq w_T \\ T_T \left(1 - \frac{w - w_T}{w_C - w_T}\right) & , w_T \leq w \leq w_C \\ 0 & , w \geq w_C \end{cases} \quad (2.1.20)$$

A representação gráfica dessa função é apresentada na Figura 2.13.

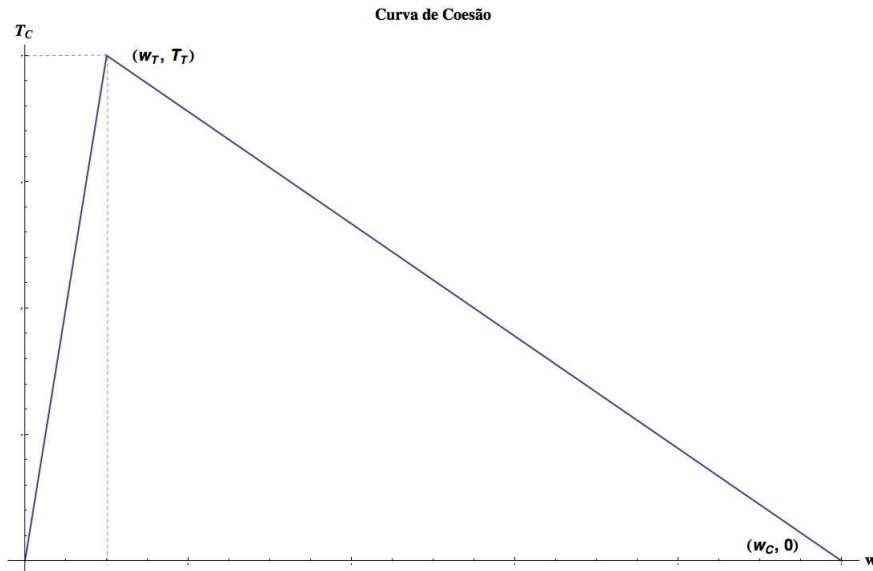


Figura 2.13: Representação gráfica do modelo coesivo utilizado

## 2.2 Elastoplasticidade

A teoria matemática da plasticidade fornece um quadro geral para descrição do comportamento de uma importante classe de materiais. Segundo Neto [6], a teoria da plasticidade lida com os sólidos que, após sujeitos a um histórico de carregamento, podem sustentar deformações permanentes (plásticas) quando completamente descarregados .

Nesta seção será apresentada a teoria elastoplástica geral. Essa teoria pode ser utilizada para diversos modelos sendo que as diferenças residem na definição do critério de plastificação e lei de endurecimento. A teoria apresentada aqui segue o modelo apresentado em Neto [6].

### 2.2.1 Modelo Constitutivo Elastoplástico Geral

De acordo com Neto [6], o modelo matemático clássico para caracterizar a relação tensão-deformação elastoplástica possui as seguintes componentes:

- Decomposição do tensor de deformação;
- Lei elástica entre tensão e deformação;
- Um critério de plastificação, estabelecido por uma função de escoamento;
- Definição de uma lei de escoamento plástico;
- Uma lei de endurecimento, caracterizando a evolução da função de escoamento.

Cada uma dessas componentes será detalhada a seguir.

#### 2.2.1.1 Decomposição do tensor de deformação infinitesimal

O tensor de deformação infinitesimal total pode ser decomposto na soma de duas componentes: o tensor de deformação elástico ( $\epsilon^e$ ), e o tensor de deformação plástico ( $\epsilon^p$ ). Sendo:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (2.2.1)$$

em que  $\epsilon$  é o tensor de deformação infinitesimal total.

A taxa de variação correspondente dessa decomposição é dada por:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (2.2.2)$$



### 2.2.1.2 Lei Elástica

Neste trabalho é utilizada a usual Lei de Hooke generalizada, que expressa em termos dos coeficientes de lamé toma a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}^e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (2.2.3)$$

### 2.2.1.3 Critério de Plastificação e Superfície de Plastificação

Se considerarmos um ensaio uniaxial de tração, certo material irá plastificar assim que atingir determinado limite de tensão. Esse princípio pode ser estendido para o estado completo de tensão se for considerada uma função de plastificação. Essa função indica que o material se encontra em estado elástico caso seja negativa, e que se encontra na iminência de fluxo plástico caso seja nula. Valores positivos não possuem significado físico. Essa função é chamada de superfície de plastificação e depende do estado de tensão e das variáveis relacionadas ao endurecimento:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \quad (2.2.4)$$

O domínio elástico é definido como:

$$\xi = \{\mathbf{T} \mid \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{A}) < 0\} \quad (2.2.5)$$

E a região de plastificação:

$$\Upsilon = \{\mathbf{T} \mid \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{A}) = 0\} \quad (2.2.6)$$

É notável que existe uma ambiguidade nesse critério em pontos em que a superfície de plastificação é nula. Nesse caso, o material poderá ser encontrado em dois estados: carregamento plástico, ou descarregamento elástico. Esse problema é resolvido utilizando as condições complementares de carregamento, descarregamento, e consistência de Kuhn-Tucker, que serão definidas em item posterior dessa seção.

É importante ressaltar que a função de plastificação pode ser representada graficamente no espaço de tensões principais. Dois exemplos de critérios que ilustram bem esse conceito são os critérios de plastificação de Von-Mises e de Tresca. O primeiro é caracterizado por um cilindro infinito e o segundo por um hexágono prismático infinito em que o eixo de ambos

coincide com o eixo hidrostático. A representação gráfica desse critério é apresentada na Figura 2.14.

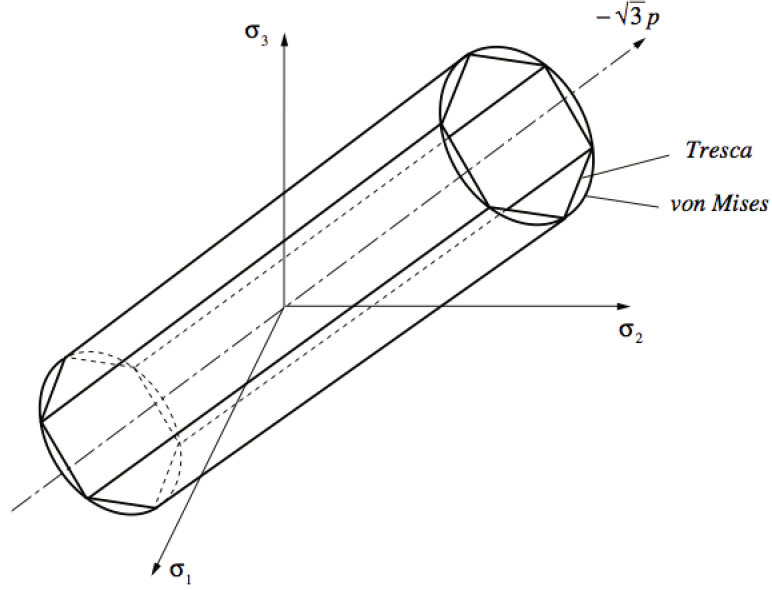


Figura 2.14: Critério de Von Misses e Tresca no espaço de tensões principais [6]

#### 2.2.1.4 Lei de Escoamento Plástico

No momento em que ocorre a plastificação, o tensor de deformações infinitesimais pode ser decomposto em uma parcela elástica e uma parcela plástica. A evolução do tensor de deformações infinitesimais plásticas em certo curso de plastificação é dada pela lei de escoamento plástico. Define-se um tensor  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{T}, \mathbf{A})$  que caracteriza a direção de escoamento plástico, e uma constante  $\dot{\lambda}$ , chamada multiplicador plástico. Assim, a lei de escoamento plástico é dada por:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \quad (2.2.7)$$

#### 2.2.1.5 Lei de Endurecimento

No problema elastoplástico, as variáveis internas são o tensor plástico de deformações infinitesimais ( $\epsilon^p$ ), e o conjunto de variáveis associadas ao endurecimento do material ( $\alpha$ ). Assim como foi definida uma lei para a evolução de  $\epsilon^p$ , é definida outra para a evolução de

$\alpha$ . Endurecimento é um fenômeno em que materiais adquirem resistência com o aumento da deformação plástica. Existem diferentes formas de endurecimento:

- Isotrópico: Um endurecimento é dito isotrópico caso a evolução da superfície plástica corresponda a uma expansão uniforme (isotrópica). Por exemplo, no caso da superfície de Von Mises, que é caracterizada por um cilindro infinito, o endurecimento isotrópico seria equivalente a um aumento no raio do cilindro (Figura 2.15).
- Cinemático: No caso da superfície de plastificação manter o seu formato, mas transladar no espaço de tensões, o endurecimento é dito cinemático. De acordo com Neto [6], esse tipo de endurecimento é frequentemente observado quando, depois de carregado em uma direção, o material demonstra menor resistência ao escoamento plástico em outra direção (Figura 2.16).

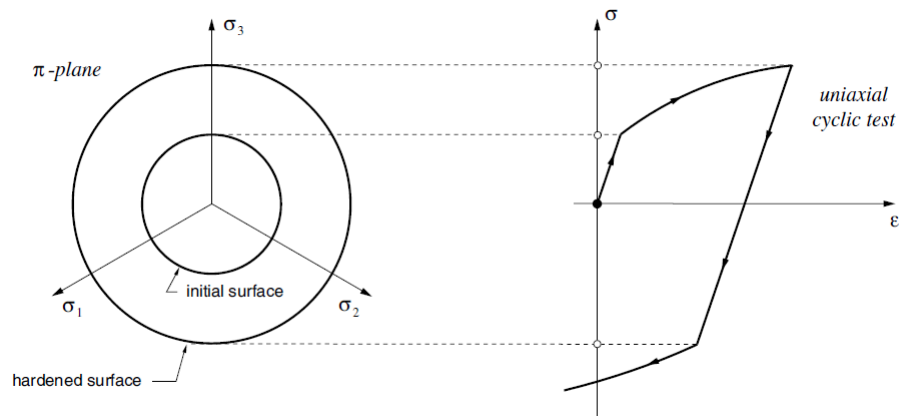


Figura 2.15: Exemplo de endurecimento isotrópico [6]

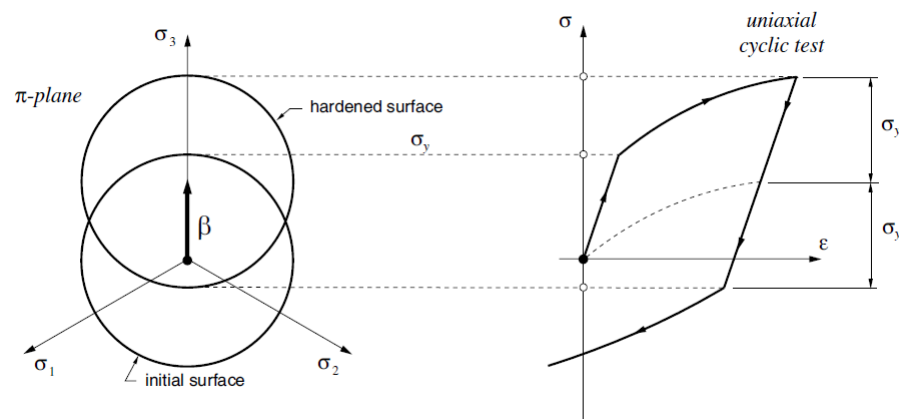


Figura 2.16: Exemplo de endurecimento cinemático [6]

A evolução das variáveis internas associadas ao endurecimento é dada pela lei de endurecimento:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\lambda} \mathbf{H}(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \quad (2.2.8)$$

em que  $\mathbf{H}$  é o módulo de endurecimento generalizado do material. Para modelos associativos é dado por:

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{T}, \mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} \quad (2.2.9)$$

#### 2.2.1.6 Condições Complementares de Carregamento/Descarregamento e Consistência

As condições complementares ou condições de carregamento/descarregamento e consistência de KUHN-TUCKER são dadas por:

$$\Phi \leq 0; \quad \dot{\lambda} \geq 0; \quad \dot{\lambda} \Phi = 0 \quad (2.2.10)$$

A primeira desigualdade especifica a região admissível plástica, a segunda impõe que o multiplicador plástico deve ser maior ou igual a zero. Será maior que zero caso o material se encontre plastificando e igual a zero em caso de estado elástico ou na iminência de fluxo plástico. A última desigualdade se refere ao fato de que o multiplicador plástico e a função de plastificação não podem ser não nulos conjuntamente. Se o material estiver em regime elástico ( $\Phi < 0$ ), o multiplicador plástico será nulo ( $\dot{\lambda} = 0$ ), e se estiver em regime plástico ( $\Phi = 0$ ), o multiplicador plástico será positivo ( $\dot{\lambda} > 0$ ). Existe também o caso de carregamento neutro, em que a função de plastificação é satisfeita, e o multiplicador plástico é nulo, isto é, o material se encontra na iminência de plastificação. A figura a seguir exemplifica as condições complementares de KUHN-TUCKER:

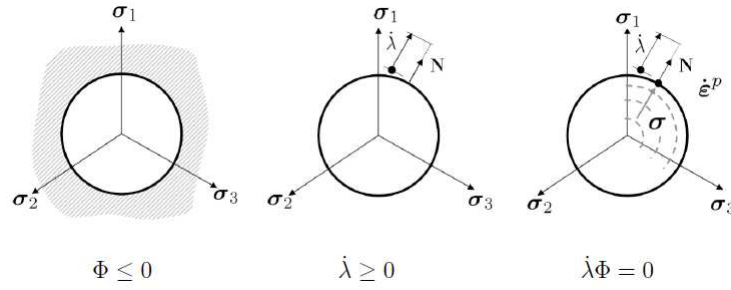


Figura 2.17: Representação gráfica das condições de Kuhn-Tucker [2]

### 2.2.1.7 Leis de Escoamento derivadas de um Potencial de Fluxo Plástico

Neto [6] afirma que na modelagem de formulações para modelos plásticos é conveniente definir as leis de escoamento e endurecimento em termos de um potencial de fluxo plástico. Dessa maneira, postula-se a existência de tal potencial:

$$\Psi = \Psi(\mathbf{T}, \mathbf{A}) \quad (2.2.11)$$

do qual, o tensor  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{T}, \mathbf{A})$  que caracteriza a direção de escoamento plástico, é obtido como:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{T}} \quad (2.2.12)$$

O potencial de fluxo plástico, nessa abordagem, deve ser uma função convexa não-negativa de ambos  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{A}$ , valendo zero na origem.

### 2.2.1.8 Associatividade

Um modelo é considerado associativo quando a função de plastificação coincide com o potencial de fluxo plástico:

$$\Psi \equiv \Phi \quad (2.2.13)$$

Desse modo, de acordo com as equações 2.2.12, 2.2.13 e 2.2.7, pode-se expressar a equação de evolução da deformação plástica como:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{T}} \quad (2.2.14)$$

Santos [2] demonstra que a imposição de plasticidade associativa (ou normalidade de escoamento plástico) e de convexidade do potencial plástico é uma das formas de se garantir irreversibilidade incondicional do trabalho plástico.

#### 2.2.1.9 PVI Elastoplástico<sup>1</sup>

A lei constitutiva elastoplástica, de acordo com Neto [6] pode ser enunciada em termos de um problema de valor inicial no pseudo tempo  $t$ : dados os valores iniciais  $\boldsymbol{\epsilon}^e(t_0)$  e  $\boldsymbol{\alpha}(t_0)$  e dada a história do tensor de deformação infinitesimal  $\boldsymbol{\epsilon}(\tau)$ ,  $\tau \in [t_0, t_f]$ , encontrar as funções  $\boldsymbol{\epsilon}^e(\tau)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(\tau)$  e  $\dot{\lambda}(\tau)$  para a deformação elástica, variáveis internas de endurecimento e multiplicador plástico que satisfazem as equações gerais elastoplásticas constitutivas:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e(\tau) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\tau) - \dot{\lambda}(\tau)\mathbf{N}(\mathbf{T}(\tau), \mathbf{A}(\tau)) \quad (2.2.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\tau) = \dot{\lambda}(\tau)\mathbf{H}(\mathbf{T}(\tau), \mathbf{A}(\tau)) \quad (2.2.16)$$

com as restrições  $\dot{\lambda}(\tau) \geq 0$ ,  $\Phi(\mathbf{T}(\tau), \mathbf{A}(\tau)) \leq 0$  e  $\dot{\lambda}(\tau) \Phi(\mathbf{T}(\tau), \mathbf{A}(\tau)) = 0$  em cada pseudo instante  $\tau \in [t_0, t_f]$

#### 2.2.1.10 Discretização de Euler do PVI Elastoplástico

Considerando o caso de integração pelo método de Euler implícito, tem-se:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\epsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\epsilon} - \Delta\lambda\mathbf{N}(\mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \quad (2.2.17)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta\lambda\mathbf{H}(\mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \quad (2.2.18)$$

com as restrições  $\Delta\lambda \geq 0$ ,  $\Phi(\mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq 0$  e  $\Delta\lambda \Phi(\mathbf{T}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0$

### 2.2.2 Modelo de Sandler-DiMaggio

O critério de plastificação utilizado foi proposto por Sandler e DiMaggio em 1971. Os autores mostraram que o modelo caracteriza bem sólidos granulares e Santos [2] afirma que esse já é um modelo consagrado na representação de formações. O modelo apresenta duas superfícies de plastificação, em que uma delas é fixa e a outra depende da deformação volumétrica plástica. Além de um envelope de falha generalizado de Mohr-Coulomb, a superfície

---

<sup>1</sup>A teoria aqui apresentada continua seguindo a apresentada em Neto [6]

de escoamento desse modelo elastoplástico tem uma superfície que se move de acordo com deformação volumétrica plástica, intersectando o eixo hidrostático [8]. As duas curvas também podem ser interpretadas como um critério de cisalhamento e uma uma envoltória de compressão móvel.

Esse critério de plastificação é associativo, e de acordo com Sandler e DiMaggio[8], pode controlar dilatação excessiva e histerese. Foi primeiramente concebido para ajustar resultados de solos granulares, apresentando bons resultados e satisfazendo as condições de continuidade, estabilidade e unicidade.

O critério de plastificação pode ser interpretado no plano de tensões deviatóricas em que o eixo x será a primeira invariante do tensor de tensão ( $I_1$ ) e o eixo y será a raiz da segunda invariante do tensor de tensão deviatórico ( $\sqrt{J_2}$ ), logo:

A superfície plástica fixa é definida por:

$$f_1(I_1, \sqrt{J_2}) = \sqrt{J_2} - F(I_1) = 0 \quad (2.2.19)$$

$$F(S) = \bar{A} - \bar{C} \exp(\bar{B}S) \quad (2.2.20)$$

em que:

- $I_1$ : primeira invariante do tensor de tensões;
- $J_2$ : segunda invariante do tensor de tensões deviatórico;
- $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$  são constantes do material;
- $S$  é uma variável que pode representar  $I_1$  ou  $L$ .

e a superfície que depende da deformação plástica volumétrica:

$$f_2(I_1, \sqrt{J_2}, \epsilon_v^p) = \left[ \frac{L(\epsilon_v^p) - I_1}{R F(L(\epsilon_v^p))} \right]^2 + \left[ \frac{\sqrt{J_2}}{F(L(\epsilon_v^p))} \right]^2 - 1 \quad (2.2.21)$$

sendo:

- $R$ : razão entre os comprimentos dos semi-eixos da envoltória do critério de plastificação à compressão;
- $\epsilon_v^p$ : deformação plástica volumétrica.

e

$$X(\epsilon_v^p) = L(\epsilon_v^p) + R F(L(\epsilon_v^p)) \quad (2.2.22)$$

A representação gráfica dessas funções é apresentada a seguir:

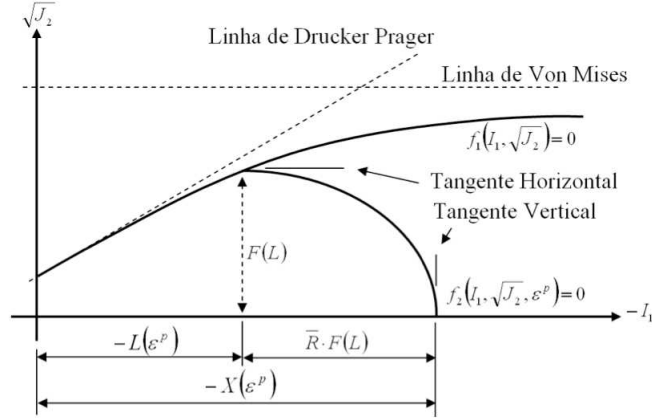


Figura 2.18: Critério de Plastificação de Sandler Dimaggio [8]

Percebe-se pela figura que  $X(\epsilon_v^p)$  representa o critério de plastificação na compressão hidrostática. Santos [2] afirma que esta é uma grandeza facilmente mensurável em laboratório e possibilita a relação entre a posição da envoltória e a deformação plástica volumétrica também medida em laboratório.

Os autores também identificaram a relação da deformação plástica volumétrica  $\epsilon_v^p$  com o estado de tensão  $I_1 = X(\epsilon_v^p)$ , e observaram o comportamento dado pela Equação 2.2.23.

$$\epsilon_v^p(X) = \bar{W}[\exp(\bar{D}X) - 1.0] \quad (2.2.23)$$

Isolando o valor de  $X$  chega-se a Equação 2.2.24.

$$X(\epsilon_v^p) = \frac{1}{\bar{D}} \ln \left( \frac{\epsilon_v^p}{\bar{W}} + 1.0 \right) \quad (2.2.24)$$

O critério de Sandler-DiMaggio é apresentado graficamente no espaço de tensões principais na Figura 2.19.



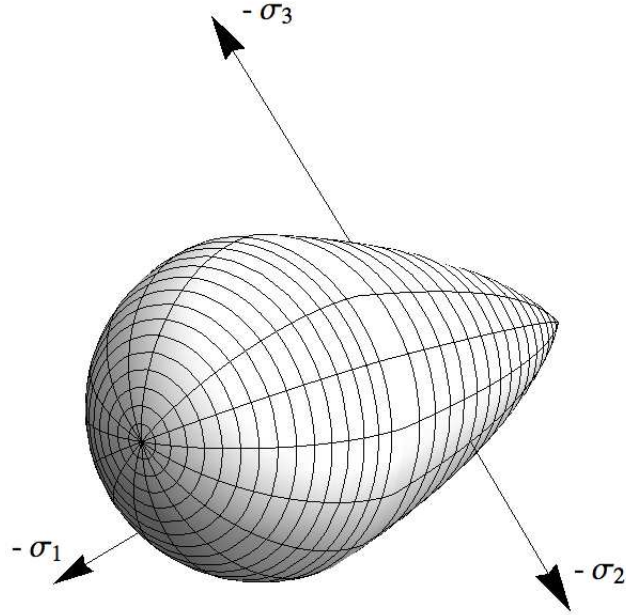


Figura 2.19: Critério de plastificação de Sandler Dimaggio no espaço de tensões principais

As implementações e validações do modelo de Sandler-DiMaggio no ambiente NeoPZ podem ser verificadas em artigo publicado por colaboradores do *LabMeC* junto com o autor dessa dissertação no periódico *Computer & Geotechnics* [20].

### 2.2.3 Modelo de Mohr-Coulomb

Segundo Neto [6], O critério de Mohr-Coulomb é baseado na suposição de que a plastificação é essencialmente resultado do deslizamento friccional entre as partículas. Este critério é mais adequado para materiais friccionais sensíveis à pressão, como solo, rocha, concreto. Generalizando-se a lei de fricção de Coulomb, para qualquer direção em um meio contínuo o escoamento plástico tem início quando, em um plano arbitrário do corpo, a tensão de cisalhamento,  $\tau$ , e a tensão normal,  $\sigma_n$ , atingem uma combinação crítica.

$$\tau = c - \sigma_n \tan(\phi)$$

em que  $c$  é a coesão e  $\phi$  o ângulo de atrito interno.

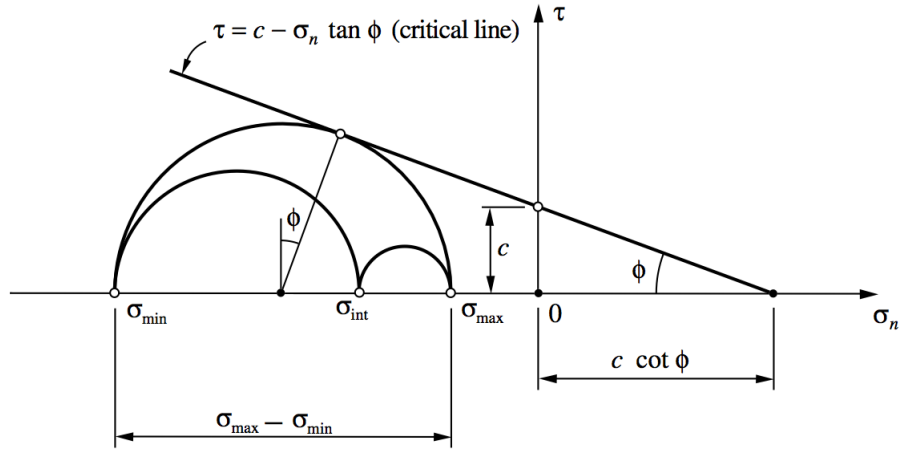


Figura 2.20: Critério de Mohr-Coulomb [6]

Esse modelo pode ser representado no espaço de tensões principais por meio de seis funções:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi - 2c \cos\phi \\
 \phi_2(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_2 - \sigma_3 + (\sigma_2 + \sigma_3)\sin\phi - 2c \cos\phi \\
 \phi_3(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_2 - \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_1)\sin\phi - 2c \cos\phi \\
 \phi_4(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_3 + \sigma_1)\sin\phi - 2c \cos\phi \\
 \phi_5(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_3 - \sigma_2 + (\sigma_3 + \sigma_2)\sin\phi - 2c \cos\phi \\
 \phi_6(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2)\sin\phi - 2c \cos\phi
 \end{aligned}$$

que definem seis planos nesse espaço como apresentado na Figura 2.21.

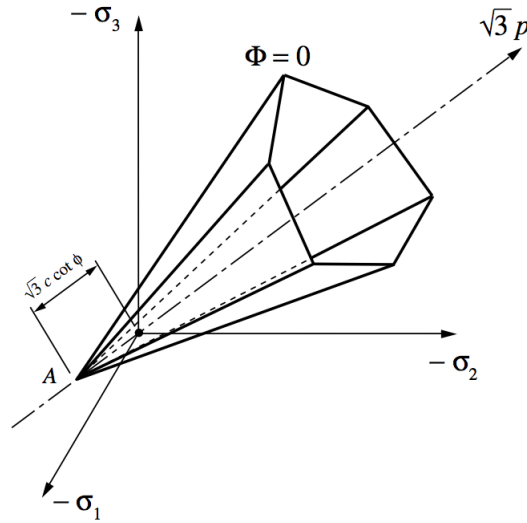


Figura 2.21: Critério de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais [6]

Esse modelo foi utilizado para comparar os resultados com o modelo apresentado por Papanastasiou [1]. Maiores detalhes de sua implementação e validação podem ser verificados na tese de doutorado de Santos, E. S. [2].

## 2.3 Fraturamento Hidráulico com Elastoplasticidade

Os estudos encontrados na bibliografia referentes a fraturamento hidráulico com elastoplasticidade se remetem ao autor Papanastasiou, P. [1, 3, 4]. O autor realizou uma análise numérica acoplada de fraturamento hidráulico com elastoplasticidade para uma geometria em estado plano de deformação. É analisado um corte ortogonal ao eixo do poço que se encontra em estado plano de deformação. O meio da formação é considerado elastoplástico com critério de plastificação de Mohr-Coulomb e o critério de de propagação é dado por elementos coesivos. O modelo acoplado não-linear é resolvido numericamente por diferenças finitas para a Equação de Conservação de Massa (Equação 2.1.16), e elementos finitos para a Equação de Equilíbrio (Equação 2.1.11). O efeito de filtração (leak-off) é desconsiderado pelo autor. Uma exemplificação do modelo é apresentada na Figura 2.22.

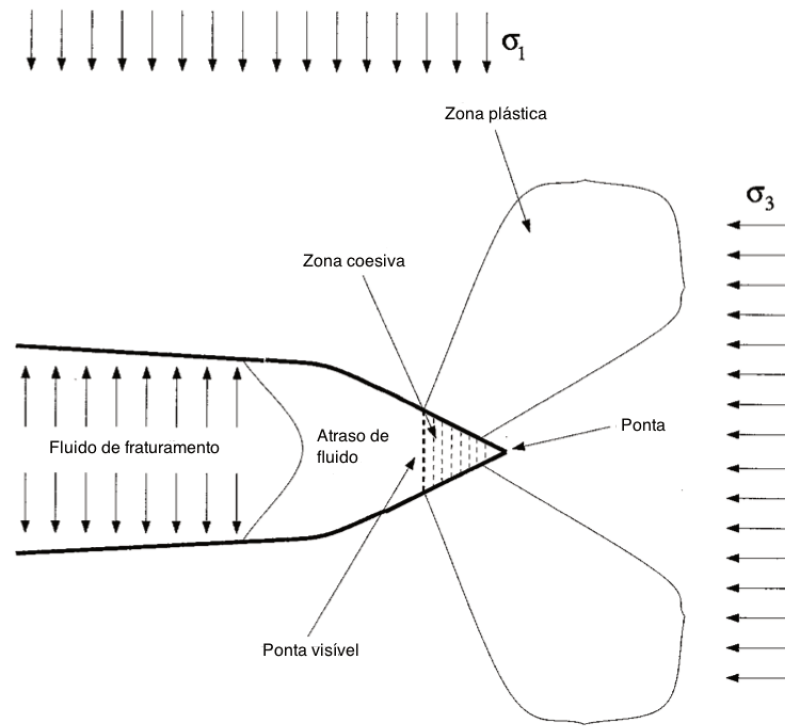


Figura 2.22: Modelo de Papanastasiou [3]

As seguintes conclusões foram observadas pelo autor:

- A plastificação ocorre perto da ponta da fratura, e resulta em um fortalecimento que aumenta a rigidez efetiva da rocha;
- Devido a esse fortalecimento, uma pressão maior que a de modelos elásticos é necessária para propagar a fratura;
- A fratura criada é mais curta e com maior abertura que a de modelos elásticos para um mesmo volume injetado.

Os resultados apresentados por Papanastasiou [1] são comparados com os obtidos pelo modelo usado neste trabalho.

# Capítulo 3

## Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos baseia-se em uma formulação fraca do problema de equações diferenciais. Esse processo será aplicado à equação de conservação de massa na fratura (Equação 2.1.16), e à equação de equilíbrio mecânico do reservatório (Equação 2.1.11) resultando em um sistema não-linear de equações diferenciais.

O estudo do Método de Elementos Finitos foi baseado no livro *Finite Elements: An Introduction* [9]. A metodologia apresentada segue a do livro.

### 3.1 Formulação Fraca

Nesta seção serão descritas as metodologias usadas para gerar a formulação fraca dos dois fenômenos. Para isso são definidos os seguintes espaços de funções:

$$V_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; v = 0 \text{ em } \Gamma_D\} \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{V}_0(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2), \text{ tal que } v_i \in H^1(\Omega) ; v_i = 0 \text{ em } \Gamma_D, \text{ com } i = 1, 2\} \quad (3.1.2)$$

em que

$$H^1(\Omega) = \left\{ \vartheta \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (3.1.3)$$

E  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções de quadrado integrável.

### 3.1.1 Equação de Conservação de Massa

O problema de fluxo dentro da fratura tratado neste trabalho (Seção 2.1.2.3) pode ser enunciado como abaixo:

Encontrar  $p$  que seja solução do problema não-linear de segunda ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \text{div} [\mathbf{q}] + q_l = 0 & , \text{ em } \Omega^{frac} \\ p = f_p & \text{ em } \Gamma_D^{frac} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = g_p & \text{ em } \Gamma_N^{frac} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

em que:

- $\Omega^{frac}$ : domínio da fratura com fronteira de  $\partial\Omega^{frac}$ ;
- $p$ : pressão (função escalar);
- $\Gamma_D^{frac}$  e  $\Gamma_N^{frac}$  as partes do contorno com condição de Dirichlet e Neumann, respectivamente com  $\Gamma_D^{frac} \cap \Gamma_N^{frac} = \emptyset$  e  $\Gamma_D^{frac} \cup \Gamma_N^{frac} = \partial\Omega^{frac}$ ;
- $f_p$  e  $g_p$  funções conhecidas, e  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  o fluxo normal a fronteira  $\Gamma_N^{frac}$ .

Define-se o seguinte espaço tentativa para a solução:

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; v = f_p \text{ em } \Gamma_D\} \quad (3.1.5)$$

Fazendo o Método dos Resíduos Ponderados, ou seja, multiplicando-se a Equação 3.1.4 por uma função teste  $v$ , integrando sobre o domínio e, com auxílio do teorema de Divergência de Gauss, chega-se à formulação fraca do problema. Desse modo, pode-se enunciar um novo problema:

Encontrar  $p \in V(\Omega^{frac})$  tal que:

$$\int_{\Omega^{frac}} \frac{\partial w}{\partial t} v \, dV - \int_{\Omega^{frac}} (\mathbf{q}(p)) \cdot \nabla v \, dV + \int_{\Gamma_N^{frac}} (\mathbf{q}(p) \cdot \mathbf{n}) v \, ds + \int_{\Omega^{frac}} q_l v \, dV = 0, \quad \forall v \in V_0(\Omega^{frac}) \quad (3.1.6)$$

### 3.1.2 Equação de Equilíbrio

O problema de deformação mecânica tratado neste trabalho (Seção 2.1.2.1) pode ser enunciado como abaixo:

Encontrar  $u$  que seja solução do problema não-linear de segunda ordem:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{T}) + \mathbf{b} = 0 & , \text{ em } \Omega^{for} \\ \mathbf{u} = \mathbf{f}_u & \text{ em } \Gamma_D^{for} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_u & \text{ em } \Gamma_N^{for} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

em que:

- $\Omega^{for}$ : domínio da formação com fronteira  $\partial\Omega^{for}$ ;
- $\mathbf{u}$ : deslocamento (vetorial  $u_x$  e  $u_y$ );
- $\Gamma_D^{for}$  e  $\Gamma_N^{for}$  as partes do contorno com condição de Dirichlet e Neumann, respectivamente com  $\Gamma_D^{for} \cap \Gamma_N^{for} = \emptyset$  e  $\Gamma_D^{for} \cup \Gamma_N^{for} = \partial\Omega^{for}$ ;
- $\mathbf{f}_u$  e  $\mathbf{g}_u$  funções conhecidas, e  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$  o fluxo normal a fronteira  $\Gamma_N^{for}$ .

Novamente, define-se o seguinte espaço tentativa para a solução:

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2), \text{ tal que } \mathbf{v} \in H^1(\Omega) ; \mathbf{v} = \mathbf{f}_u \text{ em } \Gamma_D\} \quad (3.1.8)$$

Utilizando a mesma estratégia usada para o problema de fluxo de fluido, e considerando que neste caso, a variável de estado  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  e a função teste  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  são vetoriais, o problema se torna:

Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\Omega^{for})$  tal que:

$$\int_{\Omega^{for}} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) \, dV - \int_{\Omega^{for}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, dV - \int_{\Gamma_N^{for}} \mathbf{T}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0(\Omega^{for}) \quad (3.1.9)$$

Esse último termo envolve a condição de Neumann aplicada ao contorno em que existe a fratura e é dada pela equação a seguir:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) \mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \left( -p + \frac{G \, u_{frac}}{0,817(1-\nu) h_f} \right) \mathbf{n} \quad (3.1.10)$$

em que:

- $u_{frac}$  é o deslocamento normal à fratura,;
- $G$  o módulo de cisalhamento;
- $\nu$  o coeficiente de Poisson.

Essa relação entre pressão, abertura e tensão aplicada no contorno da malha é derivada da fórmula de England-Green e seu desenvolvimento pode ser verificado em Dore [11]. Agrupando os termos constantes em uma única notação, tem-se:

$$\kappa = \frac{G}{0,817(1-\nu)h_f} \quad (3.1.11)$$

Substituindo-se 3.1.11 em 3.1.10, chega-se a seguinte equação:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u})\mathbf{n} = T_n(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (-p + \kappa u_{frac}) \mathbf{n} \quad (3.1.12)$$

A substituição de 3.1.12 em 3.1.9 será utilizada no cálculo detalhado do resíduo e a jacobiana para uso no método de newton posteriormente, e por isso é apresentada na Equação 3.1.13:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{for}} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}) dV - \int_{\Omega^{for}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^{for-coesivo}} \mathbf{t}_c \cdot \mathbf{v} ds + \\ & \int_{\Gamma_N^{for-frac}} p(n_x v_x + n_y v_y) ds - \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \kappa u_{frac} (n_x v_x + n_y v_y) ds = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0(\Omega^{for}) \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

No problema a ser resolvido,  $\mathbf{t}_c$  representa a função coesiva dos elementos à frente da ponta da fratura. Na Equação 3.1.13,  $\Gamma_N^{for-frac}$  é relativo ao contorno da formação onde há fratura, e  $\Gamma_N^{for-coesivo}$  é relativo ao contorno da formação em que há tensão coesiva.

## 3.2 Método de Galerkin

O espaço  $H^1$  tem duas propriedades fundamentais para o Método de Galerkin: é um espaço linear e infinito. O fato de ser linear implica que para duas funções teste  $v_1$  e  $v_2$  e duas constantes  $l_1$  e  $l_2$  quaisquer,  $l_1 v_1 + l_2 v_2$  também faz parte do espaço. O fato de ser infinito implica que é necessário especificar um número infinito de parâmetros para definir a função teste  $v$  e obter a solução exata.

Para gerar a aproximação do problema se cria um espaço  $H^N \subset H^1$  representado pela combinação linear de um número finito de funções  $\phi_j \in H^1$  e  $\varphi_j \in H^1$ :

$$\mathbf{u}_N = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(x) \quad (3.2.1)$$

$$p_N = \sum_{j=1}^N \beta_j \varphi_j(x) \quad (3.2.2)$$



as funções  $\phi_j$  e  $\varphi_j$  são chamadas de funções de base e  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  de graus de liberdade.

### 3.3 Funções de base de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos provê uma estratégia sistemática para escolher um espaço de funções  $H^N \subset H^1$  em que a ideia principal é definir as funções por partes, sobre sub-regiões do domínio chamadas elementos finitos. Para domínios unidimensionais é comum utilizar as funções lineares (Figura 3.1).

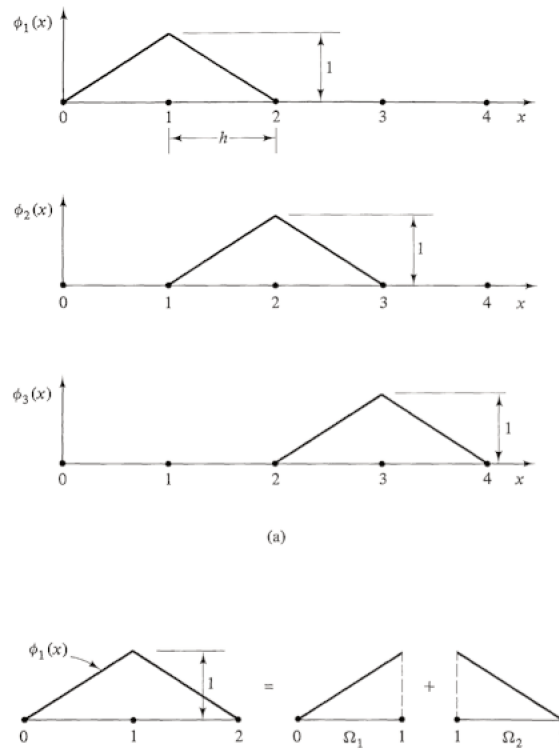


Figura 3.1: Funções de base lineares [9]

Essas funções também podem ser chamadas de funções langrangianas com ordem polinomial  $p = 1$ , e obedecem três critérios fundamentais:

1. São geradas por funções simples definidas por partes (ou elementos) sobre a malha de elementos finitos;
2. As funções são suaves o bastante para fazer parte do espaço  $H^1$ ;

3. Os parâmetros  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são precisamente os valores de  $u_N$  nos pontos nodais da malha.

A extensão dessa metodologia de criação de funções de base lagrangianas para domínios bidimensionais, tridimensionais e com ordens polinomiais maiores é apresentada em Oden, J. T. [9].

No ambiente NeoPZ os espaços de aproximação de elementos finitos são construídos utilizando-se funções de base hierárquicas, como definido em Devloo, P. [21]. Na Figura 3.2 são apresentadas as funções de base do quadrilátero para ordem  $p = 3$ .

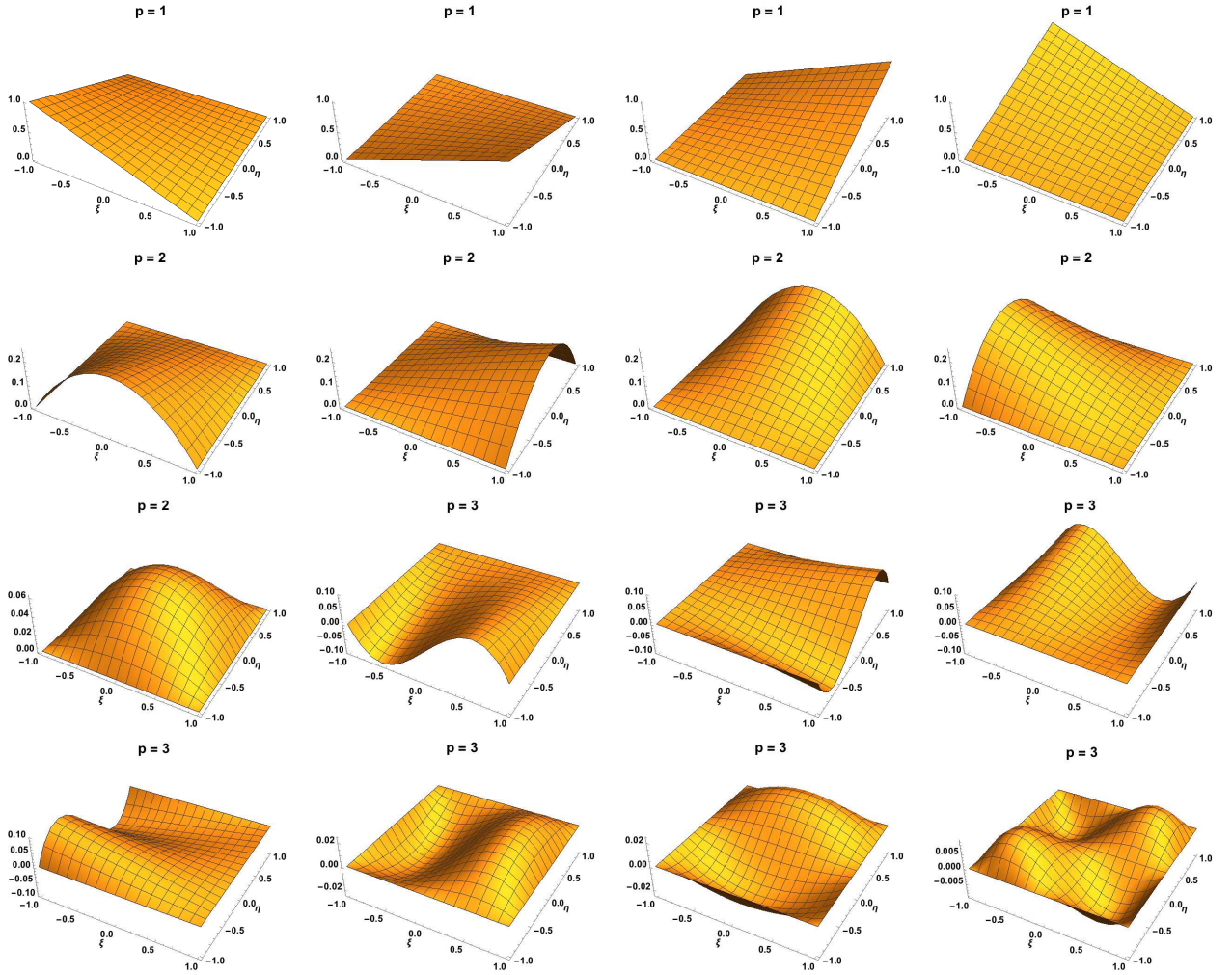


Figura 3.2: Funções de forma para  $p = 3$  do quadrilátero no ambiente NeoPZ

### 3.4 Geração das malhas

O modelo a ser aproximado considera um domínio bidimensional. Esse domínio é obtido a partir de um corte horizontal na seção onde se encontra a fratura como visto na Figura 3.3.

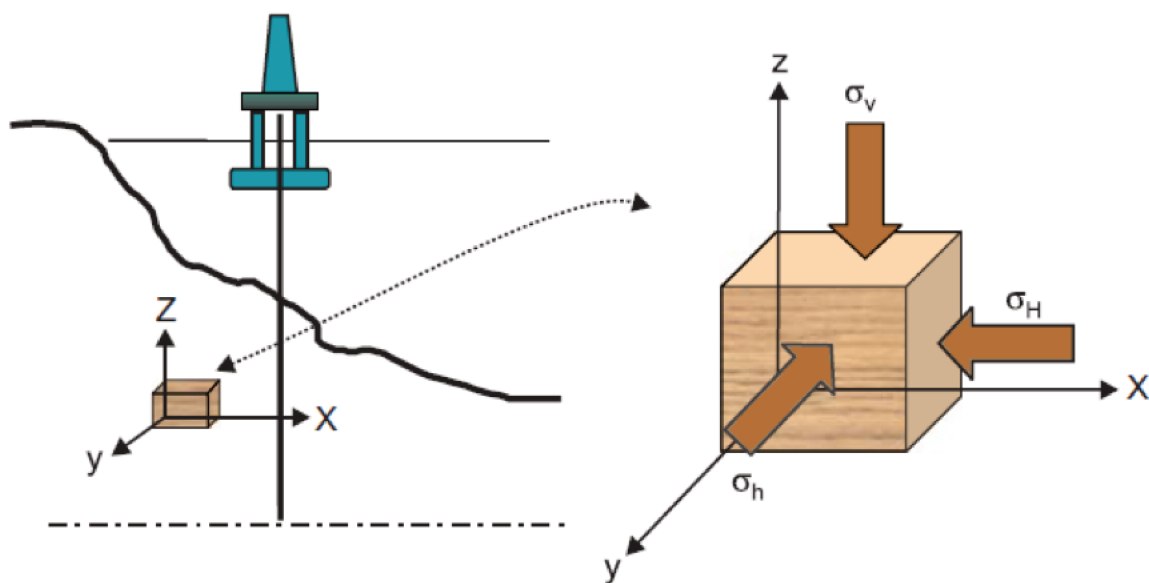


Figura 3.3: Estado de tensão in-situ [5]

É importante ressaltar que, por apresentar simetria horizontal e vertical, poderá ser simulado apenas 1/4 do domínio se aplicadas as condições de contorno corretas nas seções dos cortes de simetria. A Figura 3.4 apresenta o corte perpendicular ao eixo do poço com os respectivos eixos de simetria.

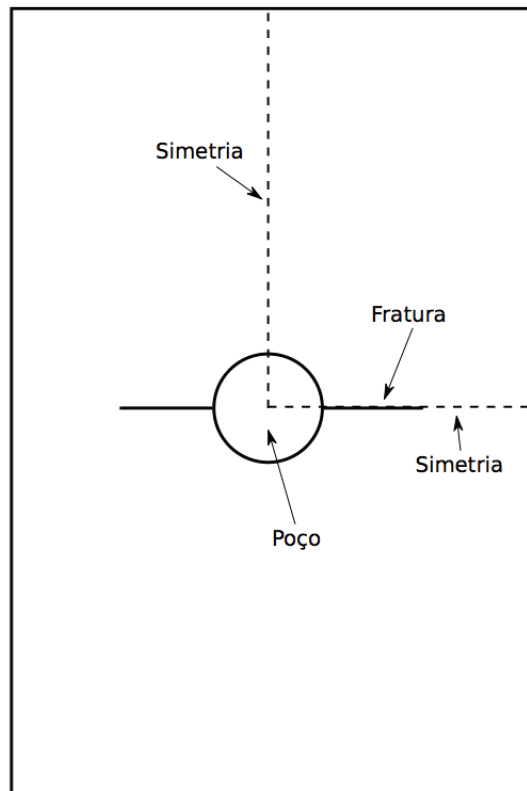


Figura 3.4: Eixos de simetria no corte perpendicular

Um exemplo de malha de elementos finitos que pode ser utilizada no problema é dada pela Figura 3.5.

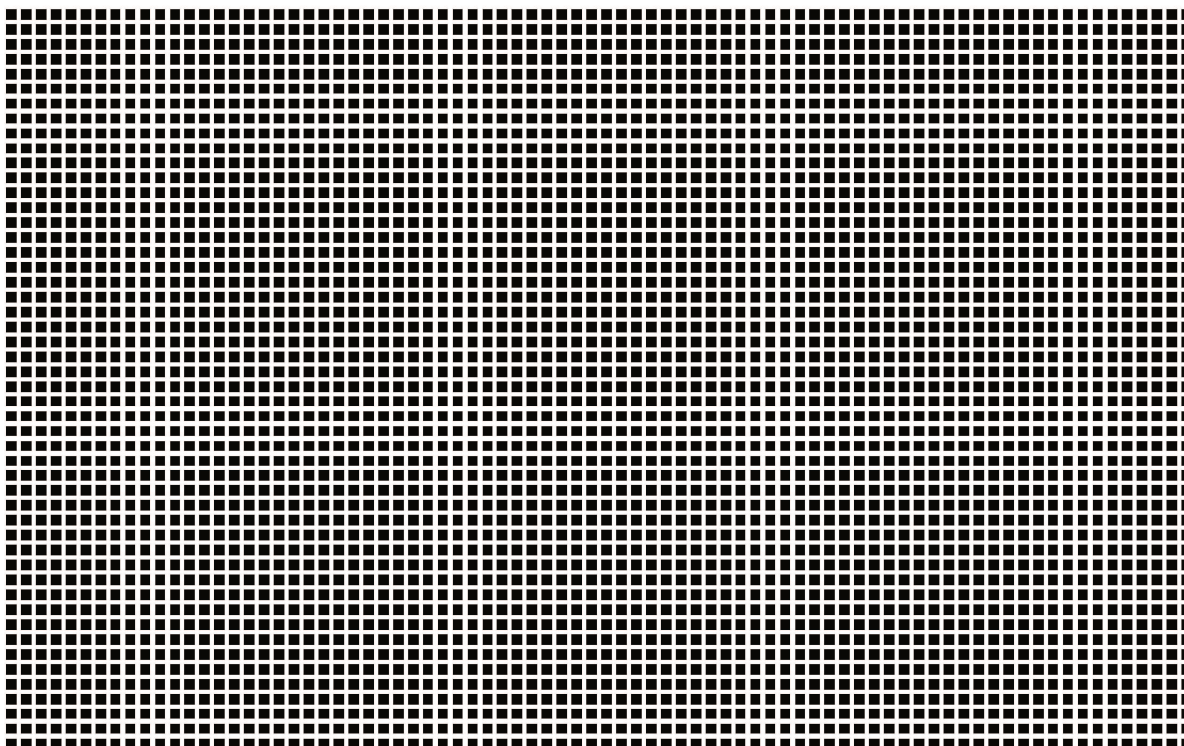


Figura 3.5: Exemplo da malha final de elementos

Essa malha bidimensional será usada para caracterizar a deformação mecânica da formação. Para o fluxo de fluido dentro da fratura será utilizada uma malha unidimensional incluída na posição da fratura da malha bidimensional. Os fenômenos serão simulados com o acoplamento dessas duas malhas, como apresentado na Figura 3.6.

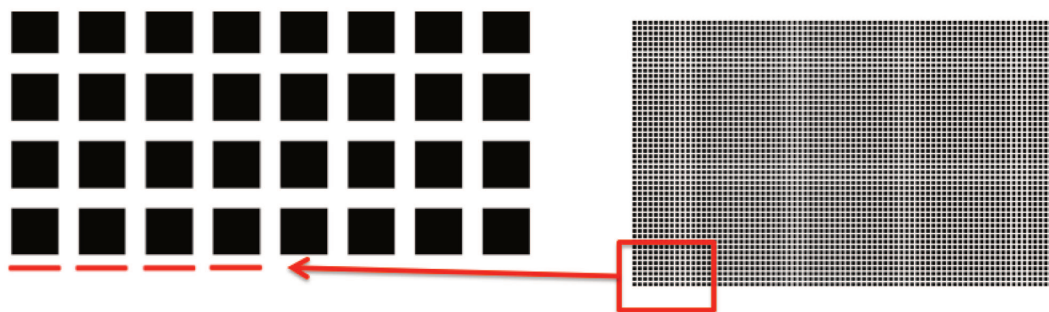


Figura 3.6: Elementos de fluido

### 3.5 Acoplamento das equações

Nesta seção será apresentado o procedimento para acoplar a resposta elastoplástica do reservatório com o escoamento de fluido na fratura deste trabalho. A modelagem deste acoplamento é desafiadora visto que a vazão é função cúbica da abertura da fratura.

O problema consiste na resolução do sistema não-linear dado pelas Equações 3.1.6 e 3.1.9. Nessas equações, o deslocamento  $u$  do contorno em contato com a fratura representa a abertura  $w$ , presente na Equação de Reynolds. Ademais, a pressão calculada pela equação de conservação tem relação com a tensão aplicada no problema de deformação mecânica. Como temos um domínio unidimensional para o problema de fluxo de fluido, a Equação 3.1.6 pode ser reescrita como:

$$\int_0^{l_{frac}} \frac{\partial w}{\partial t} v \, dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{w^3}{12\mu} \nabla p \cdot \nabla v \, dx - Q_{in} v(x_{in}) + \int_0^{l_{frac}} q_l v \, dx = 0 \quad (3.5.1)$$

em que  $Q_{inj}$  é a vazão de injeção. Em seguida, para aproximar a variação da abertura em relação ao tempo será utilizado um método de Euler implícito, resultando na seguinte equação:

$$\int_0^{l_{frac}} \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} v \, dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - Q_{in} v(x_{in}) + \int_0^{l_{frac}} q_l v \, dx = 0 \quad (3.5.2)$$

Por questões de estabilidade de solução, seleciona-se um método implícito e define-se  $u_{frac}$  como duas vezes o deslocamento normal na malha de deformação mecânica relativo ao contorno da fratura, tal que:

$$u_{frac} = w$$

Desta forma, pode-se se apresentar o sistema não-linear final.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^{for}} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}^{n+1}) \, dV - \int_{\Omega^{for}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \, dV - \int_{\Gamma_N^{for}} T(\mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds = 0 \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{u_{frac}^{n+1} - u_{frac}^n}{\Delta t} v \, dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{(u_{frac}^{n+1})^3}{12\mu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - Q_{in} v(x_{in}) + \int_0^{l_{frac}} q_l^{n+1} v \, dx = 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

E substituindo a Equação 3.1.12, tem-se:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^{for}} \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}^{n+1}) dV - \int_{\Omega^{for}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^{for-coesivo}} \mathbf{t}_c^{n+1} \cdot \mathbf{v} ds + \\ \int_{\Gamma_N^{for-frac}} p^{n+1} (n_x v_x + n_y v_y) ds - \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \kappa u_{frac}^{n+1} (n_x v_x + n_y v_y) ds = 0 \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{u_{frac}^{n+1} - u_{frac}^n}{\Delta t} v dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{(u_{frac}^{n+1})^3}{12\mu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} dx - Q_{in} v(x_{in}) + \int_0^{l_{frac}} q_l^{n+1} v dx = 0 \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

Este sistema de equações é resolvido aplicando o Método de Newton.

### 3.5.1 Espaços reduzidos

A estabilidade das aproximações numéricas de problemas de interação fluido-estrutura, envolvendo um fluido incompressível e uma estrutura elástica, é muito sensível à maneira como as condições de acoplamento de interface são tratadas ao nível discreto. Pode-se citar por exemplo a estabilidade de acoplamento explícito Dirichlet-Neumann (ou sistemas convencionais de baixo acoplamento), que é ditada pelo efeito da quantidade de massa adicionada ao sistema, em que uma certa proporção de densidade de fluido/sólido, combinada com uma geometria longa e delgada, dá origem a instabilidades numéricas, independentemente dos parâmetros de diferenciação [22]. Além disso, para problemas complexo

Devido à dependência da vazão no interior da fratura com o valor da abertura elevado a terceira potência, o processo de simulação de fraturamento hidráulico apresenta grande instabilidade numérica. Para contornar esse problema, neste trabalho serão utilizados espaços de aproximação reduzidos [23, 24, 25, 26, 27, 28] no acoplamento entre fluido e estrutura, que consiste em um subespaço de menor dimensão de suporte global das funções de deformação mecânica, que captura a solução para um grau suficiente de precisão. Para alcançar este objetivo, esta redução depende da adoção *a priori* de que a variação da pressão líquida no interior da fratura não é acentuada, sendo razoável considerar que seu acoplamento com a matriz rochosa se dá por um valor constante em sua extensão (Figura 3.7).

Para a composição destes espaços reduzidos são realizadas duas simulações elásticas lineares. Na primeira, o problema de deformação mecânica é resolvido com pressão constante e unitária na posição da fratura e dirichlet nulo no resto do contorno (Figura 3.7). Na segunda, resolve-se um problema com deslocamento fixo na ponta da fratura, e nulo a frente (3.8). Com isso, a solução de deformação mecânica no problema acoplado será dada por dois coeficientes que multiplicarão essas duas funções.

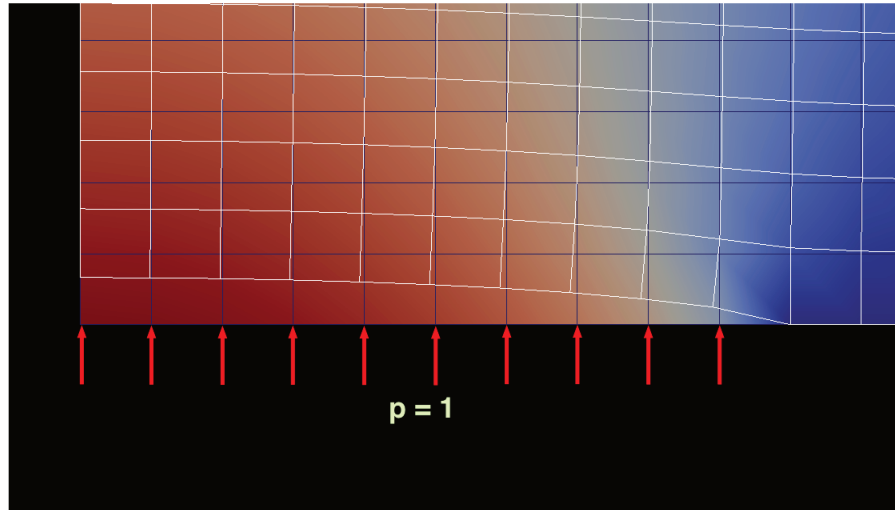


Figura 3.7: Função de pressão constante unitária

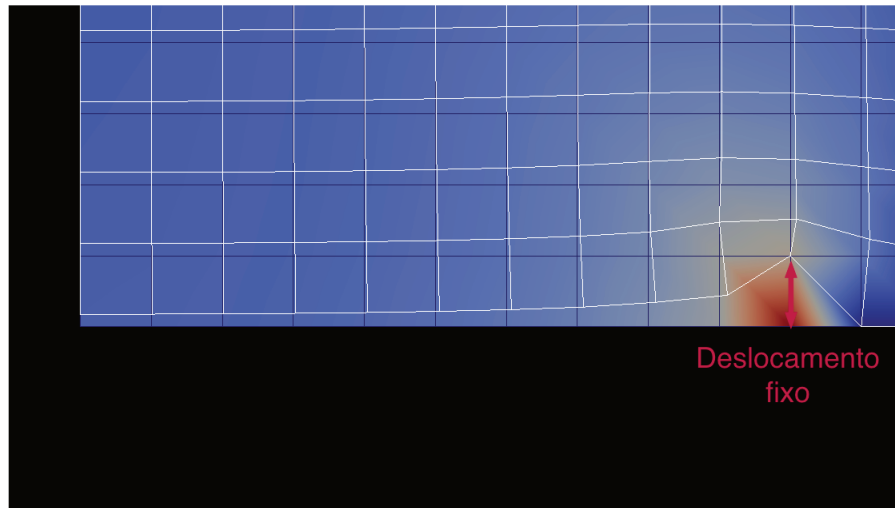


Figura 3.8: Função de deslocamento fixo na ponta da fratura

Além da esperada estabilidade numérica que esta abordagem proporciona, pode-se exaltar também que o sistema numérico acoplado, formado pelas formulações elástica e de fluidos, apresenta tamanho do sistema de formulação de fluidos (que é 1D), acrescida das 2 equações elásticas de espaços reduzidos. Isso traz significativa redução do custo de resolução numérica não linear pelo método de Newton-Raphson, que envolve assemblagens e inversões lineares sucessivas até a redução da norma do resíduo ao nível de tolerância.



A seguir apresenta-se um diagrama simplificado da metodologia para criar e utilizar os espaços reduzidos nesse trabalho.

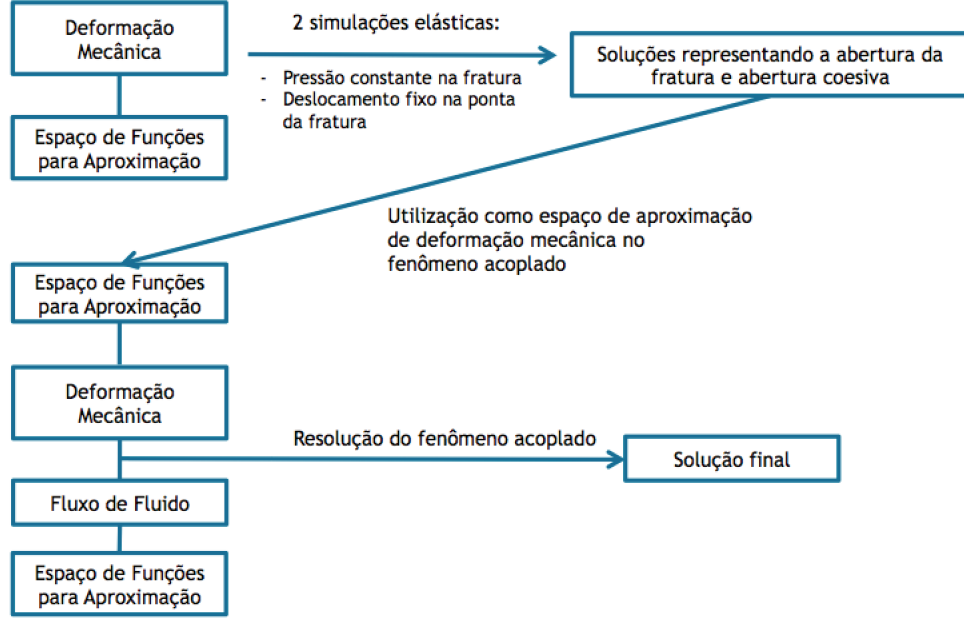


Figura 3.9: Acoplamento com espaços reduzidos

Ressalta-se que o problema de deformação mecânica acoplado é elastoplástico, e os espaços gerados na metodologia apresentada são oriundos de simulações elásticas.

### 3.5.2 Resolução do sistema não linear acoplado

O método escolhido para resolver o sistema não linear é o Método de Newton [6]. O Método de Newton é amplamente utilizado em análise numérica. Dado um resíduo em determinado vetor  $\mathbf{u}_n$ , tem-se:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n) \cong \mathbf{r}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{u}_n)\Delta\mathbf{u}_n$$

Em que  $\mathbf{r}(\mathbf{u}_n)$  é o resíduo,  $\mathbf{u}_n$  é um vetor tentativa para solução,  $\Delta\mathbf{u}_n$  é uma variação nesse vetor, e  $\mathbf{J}(\mathbf{u}_n)$  é a matriz jacobiana de  $\mathbf{r}(\mathbf{u}_n)$ . O objetivo é chegar na solução em que  $\mathbf{r}(\mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n) = 0$ , logo:

$$0 \cong \mathbf{r}(\mathbf{u}_n) + \mathbf{J}(\mathbf{u}_n)\Delta\mathbf{u}_n$$

Isolando  $\Delta \mathbf{u}_n$ , tem-se a variação da solução a cada passo do método:

$$\Delta \mathbf{u}_n = -\mathbf{J}(\mathbf{u}_n)^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}_n)$$

e o vetor solução atualizado para um passo  $\mathbf{u}_{n+1}$ :

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n$$

Logo, a cada passo do Método de Newton, queremos achar  $\Delta \mathbf{u}$ . O cálculo de  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{u})$  será detalhado a seguir.

### 3.5.3 Cálculo do Resíduo

O resíduo é calculado como apresentado na Equação 3.5.4 para um número finito de graus de liberdade e funções de base como apresentado na seção 3.2, logo:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{r}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^{for}} \nabla \phi_i \cdot \mathbf{T}(\mathbf{u}_N^{n+1}) dV - \int_{\Omega^{for}} \phi_i \cdot \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_N^{for-coesivo}} \mathbf{t}_c^{n+1} \cdot \phi_i ds + \\ \int_{\Gamma_N^{for-frac}} p^{n+1} (n_x \phi_{i_x} + n_y \phi_{i_y}) ds - \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \kappa u_{frac}^{n+1} (n_x \phi_{i_x} + n_y \phi_{i_y}) ds \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{u_{frac}^{n+1} - u_{frac}^n}{\Delta t} \varphi_i dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{(u_{frac}^{n+1})^3}{12\mu} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{dx} dx - Q_{in} v(x_{in}) + \\ \int_0^{l_{frac}} q_l^{n+1} \varphi_i dx \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

Ressaltando que o número de funções  $\phi_i$  é de apenas 2 devido a utilização dos espaços reduzidos apresentados na seção 3.5.1.

### 3.5.4 Demonstração do cálculo da matriz Jacobiana

A Jacobiana é calculada como a variação do resíduo em relação aos graus de liberdade (ver Equações 3.2.1 e 3.2.2) e é apresentada na Equação 3.5.6:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_u \\ \mathbf{J}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{r}_{u_i}}{d\alpha_j} + \frac{d\mathbf{r}_{u_i}}{d\beta_j} \\ \frac{d\mathbf{r}_{p_i}}{d\alpha_j} + \frac{d\mathbf{r}_{p_i}}{d\beta_j} \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

Sendo as seguintes relações necessárias para o cálculo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_N}{\partial \alpha_j} = \phi_j(x) \quad (3.5.7)$$

$$\frac{\partial p_N}{\partial \beta_j} = \varphi_j(x) \quad (3.5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (\nabla \mathbf{u}_N) = \nabla \phi_j(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left( \frac{\partial p_N}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(x)$$

Obtendo-se:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_u \\ \mathbf{J}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega^{for}} \nabla \phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{u}_N^{n+1})}{\partial \alpha_j} dV - \int_{\Gamma_N^{for-coesivo}} \frac{\partial t_c^{n+1}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{u}} \phi_j \cdot \phi_i ds + \\ \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \varphi_j (n_x \phi_{i_x} + n_y \phi_{i_y}) ds - \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \kappa \phi_{j_{frac}} (n_x \phi_{i_x} + n_y \phi_{i_y}) ds \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{\phi_{j_{frac}}}{\Delta t} \varphi_i dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{(u_{frac}^{n+1})^3}{12\mu} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{3(u_{frac}^{n+1})^2}{12\mu} \phi_{j_{frac}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{\partial q_i^{n+1}}{\partial p^{n+1}} \varphi_j \varphi_i dx \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

Pela regra da cadeia tem-se que:

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{u})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \mathbf{T}(\epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon(\mathbf{u})}{\partial \alpha_j}$$

Em que  $\frac{\partial \mathbf{T}(\epsilon)}{\partial \epsilon}$  é a variação da tensão em relação à deformação, que em modelos elasto-plásticos é chamado de tensor tangente elastoplástico. Assim, o cálculo final da jacobiana é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_u \\ \mathbf{J}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_{for}} \nabla \phi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{T}(\epsilon)}{\partial \epsilon} \epsilon(\phi_j) dV - \int_{\Gamma_N^{for-coesivo}} \frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial w} 2\phi_j \cdot \phi_i ds + \\ \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \varphi_j (n_x \phi_{i_x} + n_y \phi_{i_y}) ds - \int_{\Gamma_N^{for-frac}} \kappa \phi_{j_{frac}} (n_x \phi_{i_x} + n_y \phi_{i_y}) ds \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{\phi_{j_{frac}}}{\Delta t} \varphi_i dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{(u_{frac}^{n+1})^3}{12\mu} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \\ \int_0^{l_{frac}} \frac{3(u_{frac}^{n+1})^2}{12\mu} \phi_{j_{frac}} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dx + \int_0^{l_{frac}} \frac{\partial q_l^{n+1}}{\partial p^{n+1}} \varphi_j \varphi_i dx \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

O número 2 multiplicando a derivada da tensão coesiva  $\mathbf{t}_c^{n+1}$  na primeira linha de  $\mathbf{J}_u$  se deve ao fato que o deslocamento na malha elástica é metade da abertura da fratura.

#### 3.5.4.1 Cálculo do Operador Tangente Elastoplástico

O operador tangente elastoplástico é definido como a derivada de cada componente do tensor de tensões em relação a cada componente do tensor de deformações  $D^{ep} = \frac{\partial \mathbf{T}(\epsilon)}{\partial \epsilon}$  para determinado estado do material. Foi desenvolvido um trabalho para calcular esse tensor em termos de valores principais (autovalores e autovetores), e a dedução pode ser vista no artigo publicado na revista *Computer & Geotechnics* (Cecílio et al. [20]). O cálculo desse tensor é apresentado pela Equação 3.5.11:

$$D^{ep} = \left( \sum \frac{\partial \sigma_i^{pr}}{\partial \sigma_j^{tr}} (v_i \otimes v_i) \otimes (v_j \otimes v_j) \right) (2\mu \mathbb{I} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (3.5.11)$$

Nota-se que esse tensor é de quarta ordem, e portanto, de complexa representação matricial. Neste trabalho, optou-se por trabalhar com a notação de *Voigt* [6], que visualiza o tensor de tensões como vetor, e o tensor tangente elastoplástico de quarta ordem como uma matriz dadas as simetrias desses tensores. Nas Equações 3.5.12 e 3.5.13 são apresentadas essas representações:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{xy} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.5.12)$$

$$D^{ep} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial \epsilon_{xx}} & \frac{\partial T_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} & \frac{\partial T_{xx}}{\partial \epsilon_{zz}} & \frac{\partial T_{xx}}{\partial \epsilon_{xy}} & \frac{\partial T_{xx}}{\partial \epsilon_{yz}} & \frac{\partial T_{xx}}{\partial \epsilon_{zx}} \\ \frac{\partial T_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}} & \frac{\partial T_{yy}}{\partial \epsilon_{yy}} & \frac{\partial T_{yy}}{\partial \epsilon_{zz}} & \frac{\partial T_{yy}}{\partial \epsilon_{xy}} & \frac{\partial T_{yy}}{\partial \epsilon_{yz}} & \frac{\partial T_{yy}}{\partial \epsilon_{zx}} \\ \frac{\partial T_{zz}}{\partial \epsilon_{xx}} & \frac{\partial T_{zz}}{\partial \epsilon_{yy}} & \frac{\partial T_{zz}}{\partial \epsilon_{zz}} & \frac{\partial T_{zz}}{\partial \epsilon_{xy}} & \frac{\partial T_{zz}}{\partial \epsilon_{yz}} & \frac{\partial T_{zz}}{\partial \epsilon_{zx}} \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial \epsilon_{xx}} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial \epsilon_{yy}} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial \epsilon_{zz}} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial \epsilon_{xy}} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial \epsilon_{yz}} & \frac{\partial T_{xy}}{\partial \epsilon_{zx}} \\ \frac{\partial T_{yz}}{\partial \epsilon_{xx}} & \frac{\partial T_{yz}}{\partial \epsilon_{yy}} & \frac{\partial T_{yz}}{\partial \epsilon_{zz}} & \frac{\partial T_{yz}}{\partial \epsilon_{xy}} & \frac{\partial T_{yz}}{\partial \epsilon_{yz}} & \frac{\partial T_{yz}}{\partial \epsilon_{zx}} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial \epsilon_{xx}} & \frac{\partial T_{zx}}{\partial \epsilon_{yy}} & \frac{\partial T_{zx}}{\partial \epsilon_{zz}} & \frac{\partial T_{zx}}{\partial \epsilon_{xy}} & \frac{\partial T_{zx}}{\partial \epsilon_{yz}} & \frac{\partial T_{zx}}{\partial \epsilon_{zx}} \end{pmatrix} \quad (3.5.13)$$

# Capítulo 4

## Implementação

Nesse capítulo será abordado o ambiente NeoPZ, e as classes implementadas para simulação do fenômeno.

### 4.1 Ambiente NeoPZ

O ambiente NeoPZ para programação científica de elementos é utilizado neste projeto. De autoria do Professor Philippe Remy Bernard Devloo, o ambiente NeoPZ é uma coleção de classes em C++ que encapsulam os conceitos de matriz, elemento, malha, espaço de interpolação, refinamento, modelos constitutivos materiais etc, que podem ser empregadas para montar métodos numéricos, dentre eles o método de elementos finitos. O NeoPZ é um ambiente colaborativo e uma parte significativa dele tem sido desenvolvida e aprimorada pelos alunos de mestrado e doutoramento orientados pelo professor Devloo. Esta colaboratividade permite que sejam agregados aos desenvolvimentos de cada aluno tecnologias de domínio de outros pós-graduandos, promovendo a integração das pesquisas. O ambiente NeoPZ é de código aberto e está disponível no site <https://code.google.com/p/neopz/>. O programa implementado neste mestrado se encontra na pasta *Projects/ReducedSpacePlasticity* do repositório. Um manual interativo e simplificado pode ser acessado no site do laboratório de mecânica computacional da engenharia civil da Unicamp: <http://www.labmec.org.br/pz/arquivos-html/html/index.html>.

O NeoPZ subdivide-se em diversos módulos. Estes módulos correspondem às implementações das classes e têm a finalidade de prover solução computacional para um determinado grupo de tecnologias ou abstrações. Os módulos gerais do ambiente são apresentados a seguir. Uma explicação mais detalhada pode ser obtida em [29] e [2].

- *Common*: definições de tipos básicos e servem para a portabilidade do código;

- *Util*: classes auxiliaórias ao desenvolvimento científico;
- *Geom*: abstrações geométricas de elementos básicos (ponto, aresta, triângulo, quadrilátero, tetraedro, hexaedro e pirâmide) e as funções de mapeamento desde a geometria de um elemento mestre;
- *Shape*: composto pelas classes de construção das funções de forma para cada geometria;
- *Topology*: contém as definições básicas dos elementos geométricos, tais como numeração de ponto, aresta, face e volume;
- *Material*: implementa as diversas variantes de equações diferenciais que representam as modelagens constitutivas dos diversos materiais suportados pelo PZ;
- *Mesh*: implementa o conceito de malha. No NeoPZ há uma distinção entre malha geométrica e computacional. A malha geométrica objetiva a discretização espacial do domínio de análise e contém os elementos geométricos, nós, sistemas de coordenada elementares e condições de contorno. A malha computacional está relacionada com o espaço de interpolação da solução.
- *Analysis*: gerencia o processo de montagem (assemblagem) e solução do sistema de equações relacionado a uma malha computacional;
- *Integral*: reúne as regras de integração para uma, duas e três dimensões e diversos graus polinomiais;
- *Matrix*: implementações dos tipos matriciais suportados pelo NeoPZ, como Skyline, banda, esparsa, entre outras;
- *StrMatrix* : Classes que encapsulam o armazenamento de matriz e incluem um contexto de malha, viabilizando a contribuição material de cada elemento computacional à matriz do problema;
- *LinearSolvers*: define os métodos de condicionamento e resolução de sistema de equações modelados como matrizes. A depender do tipo da matriz, podem estar disponíveis diversos métodos de decomposição. Os métodos iterativos de Gauss-Seidel, Jacobi e os baseados em gradientes conjugados estão disponíveis;
- *Post*: Classes que produzem a saída para pós-processadores;
- *Pre*: Classes de pré-processamento e leitura de malha;

- *Save*: Módulo que permite salvar e recuperar dados de memória para disco e vice-versa. Todas as classes que podem ser salvas em disco devem derivar da TPZSaveable;
- *Refine*: Elenca os padrões geométricos de refinamento e processos de refinamento automático de uma malha;

A Figura 4.1 apresenta um diagrama simplificado das tecnologias do ambiente.

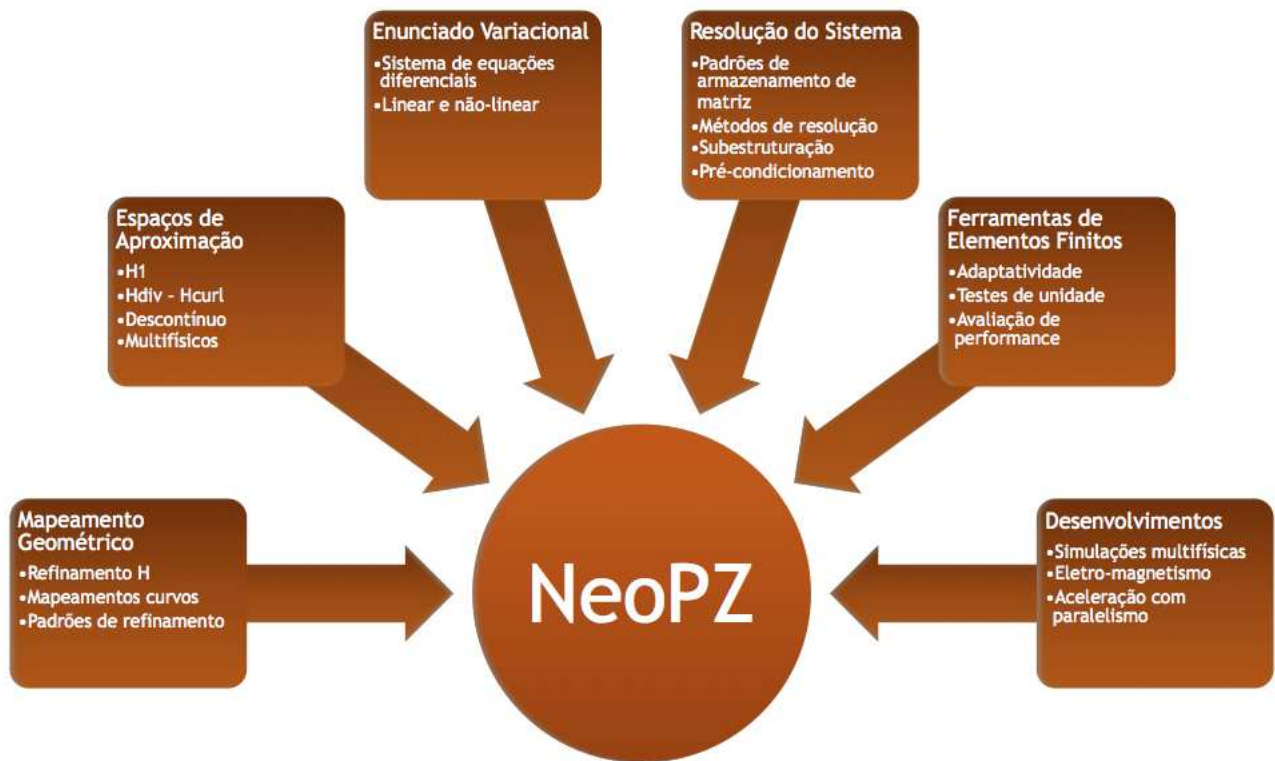


Figura 4.1: Diagrama do ambiente NeoPZ

## 4.2 Classes implementadas

Para implementar a formulação desta dissertação, quatro novas classes precisaram ser implementadas. As classes são:

1. *TPZCohesiveBC*: Classe que implementa a contribuição de um ponto de integração para a formulação fraca que envolve a condição de contorno coesiva;



2. *TPZPlasticFrac2D*: Classe que implementa a contribuição de um ponto de integração para a formulação fraca do problema acoplado;
3. *TPZPlasticStepPV*: Classe que calcula o tensor tangente elastoplástico e gerencia os cálculos elastoplásticos;
4. *ToolsTransient*: Classe que gerencia a execução do programa de forma geral;

A implementação dessas classes envolve diversos conceitos de programação C++, além da própria filosofia do ambiente NeoPZ, que não são contemplados no escopo deste trabalho. A seguir serão apresentados os conceitos principais de cada classe. O leitor que desejar se aprofundar nos conceitos em questão pode acessar o repositório do NeoPZ em que o projeto deste trabalho se encontra [30].

#### 4.2.1 *TPZCohesiveBC*

Essa classe é derivada da classe abstrata *TPZMatWithMem* que, por sua vez, é derivada da classe *TPZMaterial* como apresentado na Figura 4.2. A classe *TPZMaterial* implementa a estrutura de dados necessária para um material qualquer no ambiente NeoPZ, e a classe *TPZMatWithMem* implementa a estrutura de dados necessária para um material que possui memória nos pontos de integração. A memória do material *TPZCohesiveBC* é dada pelos valores  $w_T$  e  $T_T$  da Equação 2.1.20. Se  $w_T$  de um determinado passo de tempo for ultrapassado, os valores  $w_T$  e  $T_T$  desse ponto de integração serão atualizados para a nova situação de equilíbrio.

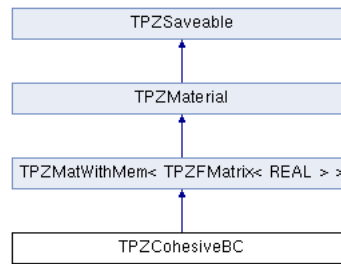


Figura 4.2: Derivação da classe *TPZCohesiveBC*

Como explicado, a classe *TPZCohesiveBC* implementa a contribuição de um ponto de integração para condição de contorno coesiva como segue:

1. Dada uma solução do problema de deformação mecânica em um passo do Método de Newton, calcula-se o valor da força coesiva e sua derivada de acordo com a lei coesiva estipulada;
2. Calcula-se a contribuição para o resíduo de acordo com a Equação 4.2.1;

$$- \int_{\Gamma_N^{for}} \mathbf{t}_c \cdot \boldsymbol{\phi}_i \, ds \quad (4.2.1)$$

3. Calcula-se a contribuição para a Jacobiana de acordo com a Equação 4.2.2.

$$- \int_{\Gamma_N^{for}} \frac{\partial \mathbf{t}_c}{\partial w} 2\boldsymbol{\phi}_j \cdot \boldsymbol{\phi}_i \, ds \quad (4.2.2)$$

#### 4.2.2 *TPZPlasticFrac2D*

Essa classe é derivada de *TPZMatElastoPlastic2D*, já existente no ambiente NeoPZ, que é utilizada para implementar materiais puramente elastoplásticos com superfícies de plastificação definidas pelo usuário. Muitos métodos e atributos desse material puderam ser reutilizados para implementar o *TPZPlasticFrac2D*, exemplificando um dos grandes benefícios de utilizar um ambiente de elementos finitos orientado a objetos.

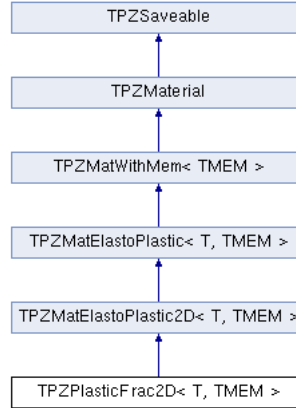


Figura 4.3: Derivação da classe *TPZPlasticFrac2D*

A contribuição de um ponto de integração de um elemento acoplado é calculada como segue:

1. Verifica-se se o ponto de integração é referente a um elemento de deformação mecânica ou de fluxo de fluido dentro da fratura. Caso for de deformação mecânica:

- (a) Dada uma solução do problema de deformação mecânica em um passo do método de newton, calculam-se a matriz tangente elastoplástica e o tensor de tensão de acordo com o critério de plastificação estipulado. Esses métodos puderam ser reutilizados da classe *TPZMatElastoPlastic2D*;
- (b) Calcula-se a contribuição para o resíduo de acordo com a Equação para  $\mathbf{r}_u$  definida na Equação 3.5.5;
- (c) Calcula-se a contribuição para a Jacobiana de acordo com a Equação para  $\mathbf{J}_u$  definida na Equação 3.5.10.

2. Caso for de fluxo de fluido dentro da fratura:

- (a) Calcula-se a contribuição para o resíduo de acordo com a Equação para  $\mathbf{r}_p$  definida na Equação 3.5.5;
- (b) Calcula-se a contribuição para a Jacobiana de acordo com a Equação para  $\mathbf{J}_p$  definida na Equação 3.5.10.

### 4.2.3 *TPZPlasticStepPV*

Com a implementação dessa classe o usuário pode escolher utilizar o cálculo da matriz tangente elastoplástica em valores principais. Esse cálculo apresenta ganhos em tempo computacional visto que calcula todas as derivadas analiticamente. A classe pré-existente chamada somente *TPZPlasticStep* utilizava pacotes de diferenciação automática que apresentam custo computacional alto.

A metodologia para cálculo da matriz tangente elastoplástica em valores principais é apresentada no artigo publicado em conjunto com os pesquisadores do *LabMeC* [20].

### 4.2.4 *ToolsTransient*

Todo gerenciamento do programa é implementado nessa classe, que não é derivada de nenhuma outra. Entre as funcionalidades principais citam-se:

- Criação da malha geométrica;
- Criação dos espaços de aproximação utilizados, incluindo os espaços reduzidos a cada propagação;
- Métodos para checagem de convergência da matriz tangente;
- Cálculo da jacobiana e do resíduo global;

- Processo de Newton para um determinado passo de tempo;
- *Loop* sobre os passos de tempo e método para decisão de propagação;
- Metodologia para reorganização da estrutura de dados a cada propagação da fratura;
- Execução dos pós-processamentos do problema.

# Capítulo 5

## Validação das Classes Desenvolvida

Neste capítulo serão apresentadas as validações das classes desenvolvidas. São elas:

- Validação da matriz jacobiana
- Validação do material coesivo
- Verificação da conservação de massa

### 5.1 Matriz Jacobiana

A matriz jacobiana apresentada na Equação 3.5.10 envolve muitos termos, e por isso sua implementação está facilmente sujeita a erros. A fim de verificar se essa matriz é consistente, será realizada a checagem de convergência ou *TaylorCheck*. A partir da expansão pela Série de Taylor, pretende-se constatar que a diferença entre a solução exata e a solução aproximada apresenta ordem de convergência quadrática para valores de  $\gamma$  pequenos.

$$\underbrace{\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma \Delta \mathbf{u})}_{\substack{\text{solução} \\ \text{exata}}} = \underbrace{\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma \Delta \mathbf{u}}_{\substack{\text{solução} \\ \text{aproximada}}} + \underbrace{o(\gamma \Delta \mathbf{u})}_{\substack{\text{ordem} \\ \text{quadrática}}} \quad (5.1.1)$$

Em que o termo de ordem pode ser representado por:

$$o(\gamma \Delta \mathbf{u}) = c(\gamma \Delta \mathbf{u})^n$$

sendo  $n$  a ordem de convergência.

### 5.1.1 Cálculo da ordem de convergência

Com o objetivo de isolar a variável que representará a ordem de convergência ( $n$ ), serão realizadas as seguintes manipulações algébricas na Equação 5.1.1.

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma \Delta \mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma \Delta \mathbf{u} + c(\gamma \Delta \mathbf{u})^n$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma \Delta \mathbf{u}) - \mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma \Delta \mathbf{u} = c \gamma^n \Delta \mathbf{u}^n$$

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma \Delta \mathbf{u}) - [\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma \Delta \mathbf{u}]\| = |c| |\gamma|^n \|\Delta \mathbf{u}^n\|$$

$$\ln(\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma \Delta \mathbf{u}) - [\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma \Delta \mathbf{u}]\|) = n \ln(|\gamma|) + \ln(\|c \Delta \mathbf{u}^n\|)$$

Para  $\gamma_1$ :

$$\ln(\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma_1 \Delta \mathbf{u}) - [\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma_1 \Delta \mathbf{u}]\|) = n \ln(|\gamma_1|) + \ln(\|c \Delta \mathbf{u}^n\|) \quad (5.1.2)$$

Para  $\gamma_2$ :

$$\ln(\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma_2 \Delta \mathbf{u}) - [\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma_2 \Delta \mathbf{u}]\|) = n \ln(|\gamma_2|) + \ln(\|c \Delta \mathbf{u}^n\|) \quad (5.1.3)$$

Será subtraída a Equação 5.1.2 da Equação 5.1.3 seguido do isolamento da variável  $n$ , obtendo:

$$n = \frac{\ln(\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma_1 \Delta \mathbf{u}) - [\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma_1 \Delta \mathbf{u}]\|) - \ln(\|\mathbf{r}(\mathbf{u} + \gamma_2 \Delta \mathbf{u}) - [\mathbf{r}(\mathbf{u}) + \mathbf{J}(\mathbf{u})\gamma_2 \Delta \mathbf{u}]\|)}{\ln(|\gamma_1|) - \ln(|\gamma_2|)} \quad (5.1.4)$$

Pretende-se validar a derivada  $\mathbf{J}(\mathbf{u})$  da Equação 3.5.10 através da constatação de que para diferentes valores de  $\gamma$ , será sempre obtido  $n \cong 2$ , confirmando a ordem de convergência quadrática esperada pela Série de *Taylor* de primeira derivada.

### 5.1.2 Resultados

Tabela 5.1: Resultados do teste de convergência

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $n$     |
|------------|------------|---------|
| 0.001      | 0.002      | 2.00027 |
| 0.002      | 0.003      | 2.00047 |
| 0.003      | 0.004      | 2.00066 |
| 0.004      | 0.005      | 2.00085 |
| 0.005      | 0.006      | 2.00104 |
| 0.006      | 0.007      | 2.00123 |
| 0.007      | 0.008      | 2.00142 |
| 0.008      | 0.009      | 2.00161 |
| 0.009      | 0.010      | 2.00180 |
| 0.010      | 0.011      | 2.00199 |
| 0.011      | 0.012      | 2.00218 |
| 0.012      | 0.013      | 2.00237 |
| 0.013      | 0.014      | 2.00256 |
| 0.014      | 0.015      | 2.00275 |
| 0.015      | 0.016      | 2.00294 |
| 0.016      | 0.017      | 2.00313 |
| 0.017      | 0.018      | 2.00332 |
| 0.018      | 0.019      | 2.00352 |
| 0.019      | 0.020      | 2.00371 |
| 0.020      | 0.021      | 2.00390 |

## 5.2 Material Coesivo

A fim de validar o novo material coesivo implementado na biblioteca NeoPZ, foi gerada a seguinte simulação com elasticidade linear. Foi considerado um domínio retangular entre os nós  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ , e para esse domínio foi gerado uma malha cartesiana com três refinamentos uniformes. Esse domínio já com malha é representado na Figura 5.1.

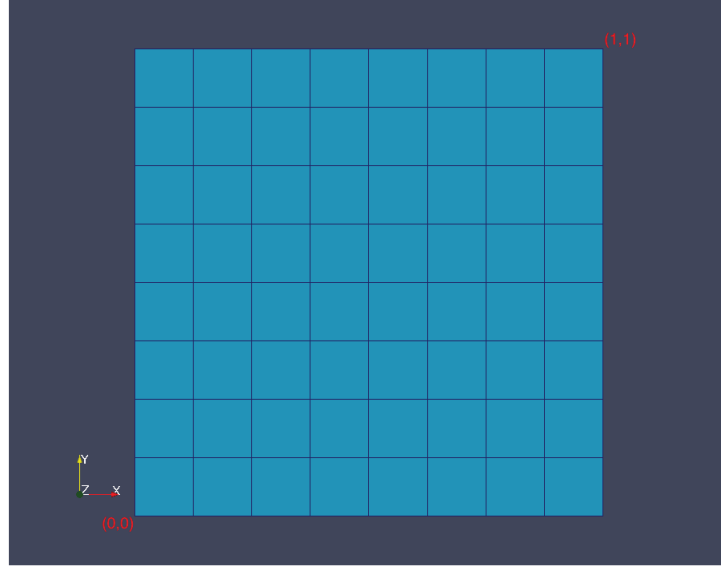


Figura 5.1: Malha para validação do material coesivo

Nesse domínio será considerado elasticidade linear com estado plano de tensão. Na parte inferior serão colocados materiais coesivos, e na superior, tensão (condição de neumann) ou deslocamento (condição de dirichlet). Espera-se verificar que o deslocamento e a tensão na posição em que se encontra o material coesivo satisfazem a lei coesiva analítica previamente definida na Equação 5.2.1. Para ambos os testes a seguinte lei constitutiva coesiva é considerada com  $T_T = 2$ ,  $w_T = 0,2$  e  $w_C = 1$ .

$$T_C(w) = \begin{cases} \frac{2}{0,2}w & , w \leq w_T \\ 2 \left( 1 - \frac{w-0,2}{1-0,2} \right) & , w_T \leq w \leq w_C \\ 0 & , w \geq w_C \end{cases} \quad (5.2.1)$$



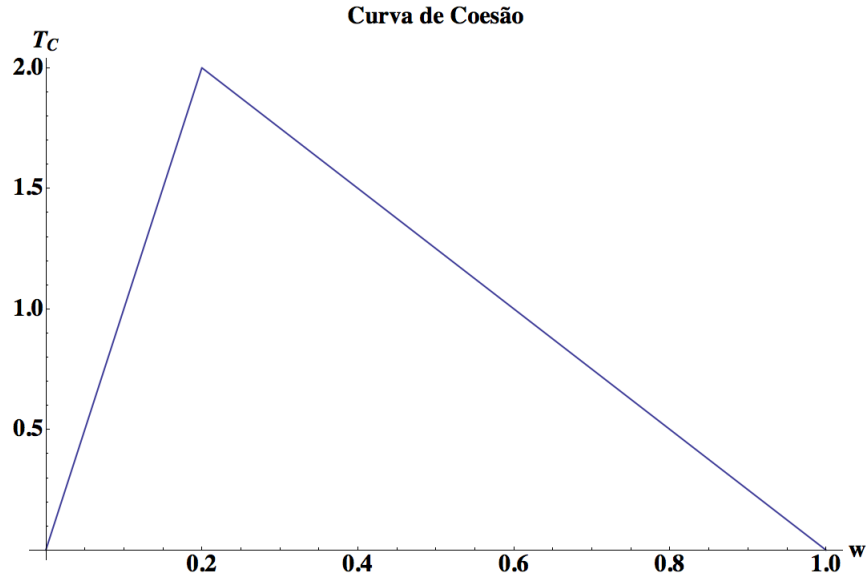


Figura 5.2: Lei constitutiva coesiva considerada para validação

É importante lembrar que como o problema original de fraturamento, devido a simetria, está sendo tratado com apenas 1/4 do domínio, a abertura da fratura equivale a duas vezes o deslocamento verificado na malha elástica.

Os parâmetros elásticos utilizados foram:

$$E = 40$$

$$\nu = 0$$

Os resultados serão apresentados com o software livre Paraview, amplamente utilizado para análise de dados e visualização científica.

### 5.2.1 Aplicação de Neumann

Primeiro serão apresentados os resultados esperados e, em seguida, os obtidos pela simulação de elementos finitos.

#### 5.2.1.1 Resultados Esperados

Nesse caso será aplicada uma tensão constante unitária  $T = 1$  na parte superior da malha, como apresentado na Figura 5.3.

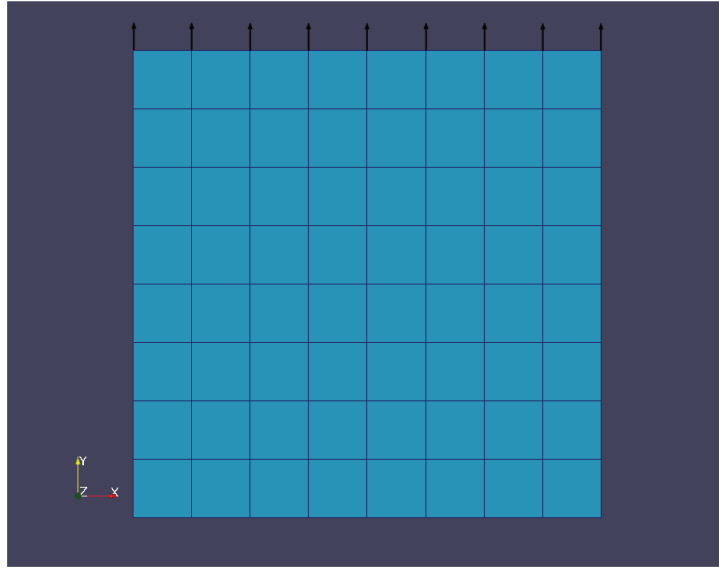


Figura 5.3: Aplicação de Neumann na malha elástica para validação de material coesivo

Desse modo, tem-se um estado homogêneo de tensão e pode se calcular o resultado esperado. Dada a lei de Hooke unidimensional com  $E$  módulo de Elasticidade e  $\epsilon_y$  a deformação na direção  $y$ , tem-se:

$$T = E\epsilon_y$$

$$1 = 40\epsilon_y$$

$$\epsilon_y = 0.025$$

E a relação entre deformação e alteração no tamanho do domínio na vertical:

$$\epsilon_y = \frac{\Delta l}{L_y}$$

$$0.025 = \frac{\Delta l}{1}$$

$$\Delta l = 0.025$$

Portanto, espera-se que a diferença de deslocamento entre os nós superiores e inferiores tenha valor como a seguir:

$$u_y^s - u_y^i = \Delta l = 0.025 \quad (5.2.2)$$

Outra verificação vem do fato de que o equilíbrio se encontra com tensão  $T = 1$  na vertical, assim o deslocamento do material coesivo deve ser de grandeza para atingir esse equilíbrio. Dada a curva coesiva apresentada na Equação 5.2.1, e uma vez que se começa a simulação da posição indeformada, tem-se:

$$\frac{2}{0,2}w = 1$$

$$w = 0,1$$

E como a abertura da fratura é duas vezes o deslocamento da malha elástica, deve-se observar um deslocamento no nó inferior de  $u_y^i = 0,05$ . Substituindo esse valor na Equação 5.2.2, obtém-se:

$$u_y^s = 0.075$$

Resumindo, devem-se observar os seguintes valores:

$$\begin{aligned} u_y^i &= 0,05 \\ u_y^s &= 0.075 \\ T &= 1 \end{aligned}$$

#### 5.2.1.2 Resultados Obtidos

Primeiramente é verificada a tensão no eixo vertical da malha. Esse valor é apresentado na Figura 5.4.

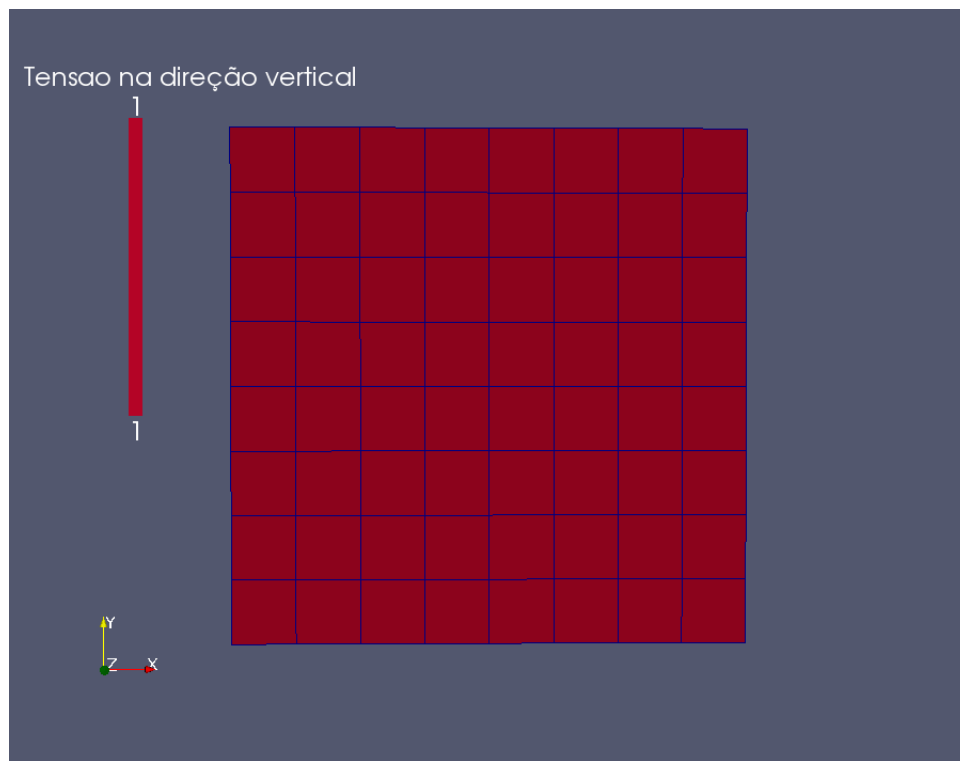


Figura 5.4: Tensão na vertical para validação do material coesivo

Obteu-se então tensão homogênea unitária, como esperado. O ponto no gráfico da curva de coesão é apresentado em vermelho na Figura 5.5.

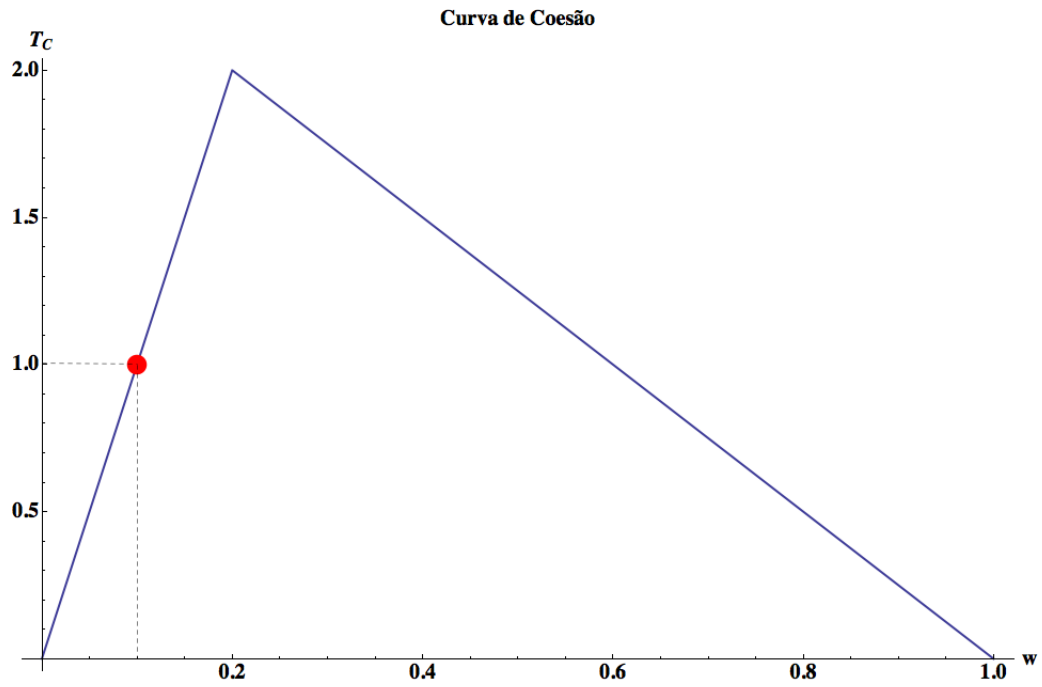


Figura 5.5: Valor da tensão coesiva na curva de coesão

Em seguida mostra-se a malha indeformada e a deslocada. Na Figura 5.6 a grade branca representa a malha deformada, e o diagrama de cores, o módulo do deslocamento em cada ponto. Também apresenta-se o gráfico da variação do deslocamento em relação ao eixo vertical.

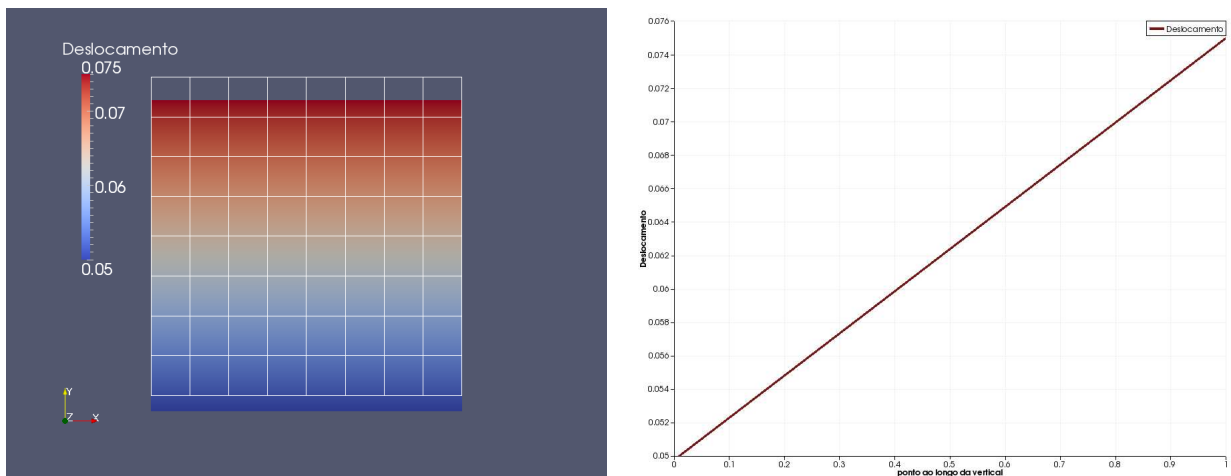


Figura 5.6: Malha indeformada e deformada para validação de material coesivo

Em que nota-se  $u_y^i = 0,05$  e  $u_y^s = 0,075$  assim como esperado.

## 5.2.2 Aplicação de Dirichlet

### 5.2.2.1 Resultados Esperados

Nesse caso será aplicado um deslocamento constante de valor  $u_y^s = 0,3$  na parte superior da malha.

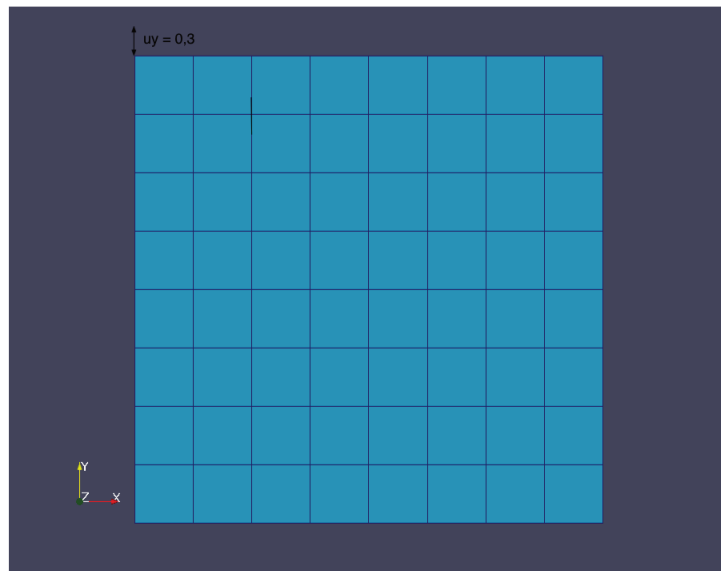


Figura 5.7: Aplicação de Dirichlet na malha elástica para validação de material coesivo

Desse modo também tem-se um estado homogêneo de tensão e pode-se calcular o resultado esperado. Dada a lei de Hooke unidimensional com  $E$  módulo de Elasticidade e  $\epsilon_y$  a deformação na direção  $y$ , tem-se:

$$T = E\epsilon_y$$

Em que  $T$  é a tensão coesiva aplicada na malha, que depende do deslocamento do nó inferior. Logo:

$$T_C(w) = E \frac{(u_y^s - u_y^i)}{L}$$

Novamente, devido à utilização de simetria  $w = 2u_y^i$ , chega-se a seguinte função:

$$f(u_y^i) = T_C(2u_y^i) - \frac{E(u_y^s - u_y^i)}{L}$$

E substituindo os valores conhecidos:

$$f(u_y^i) = T_C(2u_y^i) - 40(0,3 - u_y^i)$$

Resolvendo a equação acima para  $u_y^i$  chega-se aos valores que devem ser observados:

$$u_y^i = 0,271429$$

$$u_y^s = 0,3$$

$$T = 1,14286$$

### 5.2.2.2 Resultados Obtidos

Primeiramente é verificada a tensão no eixo vertical da malha. Esse valor é apresentado na Figura 5.8.

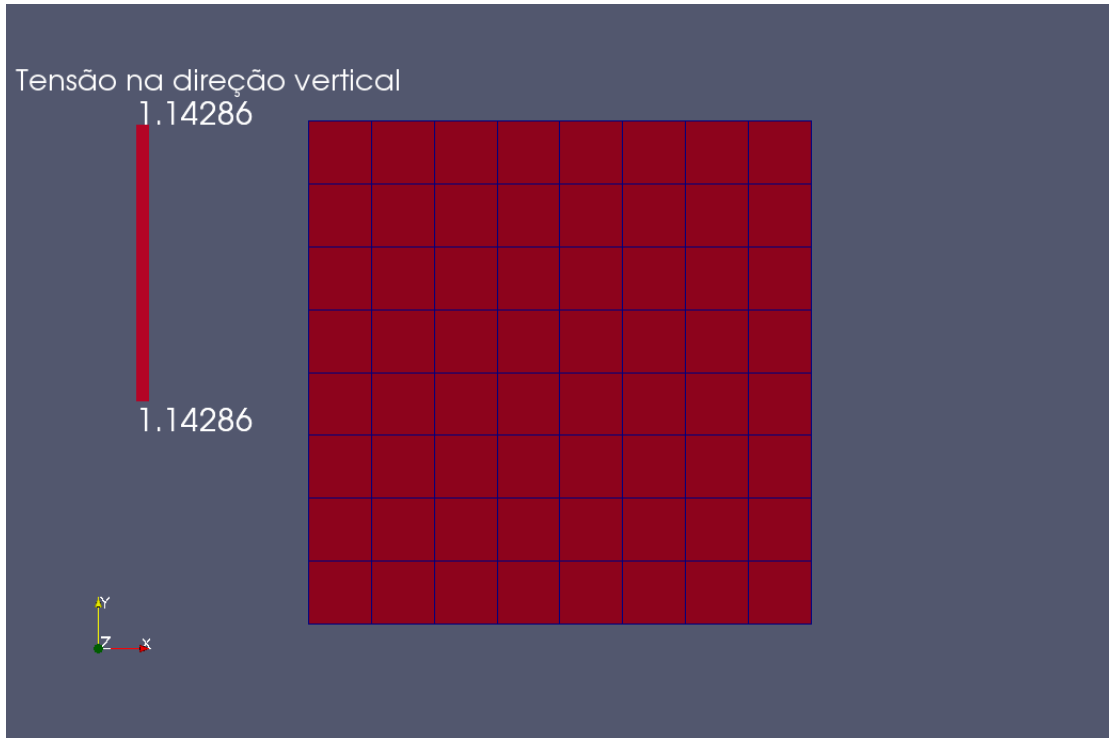


Figura 5.8: Tensão na vertical para validação do material coesivo

Obteu-se então tensão  $T = 1,14286$ , como esperado. O ponto no gráfico da curva de coesão é apresentado em vermelho na Figura 5.9.

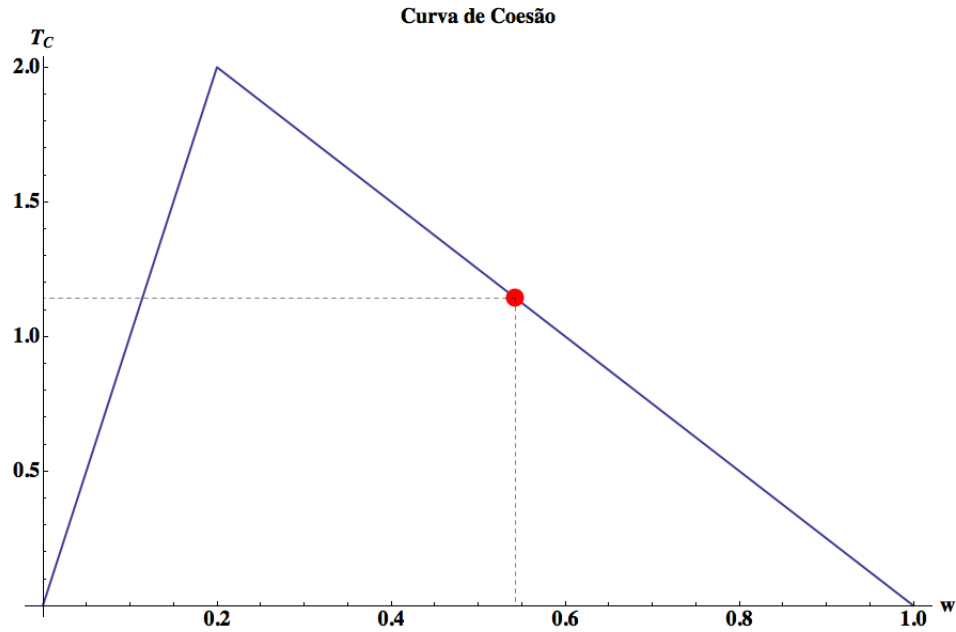


Figura 5.9: Valor da tensão coesiva na curva de coesão

Em seguida mostra-se a malha indeformada e a deslocada. Na Figura 5.10 a grade branca representa a malha deformada, e o diagrama de cores, o módulo do deslocamento em cada ponto. Também apresenta-se o gráfico da variação do deslocamento em relação ao eixo vertical.

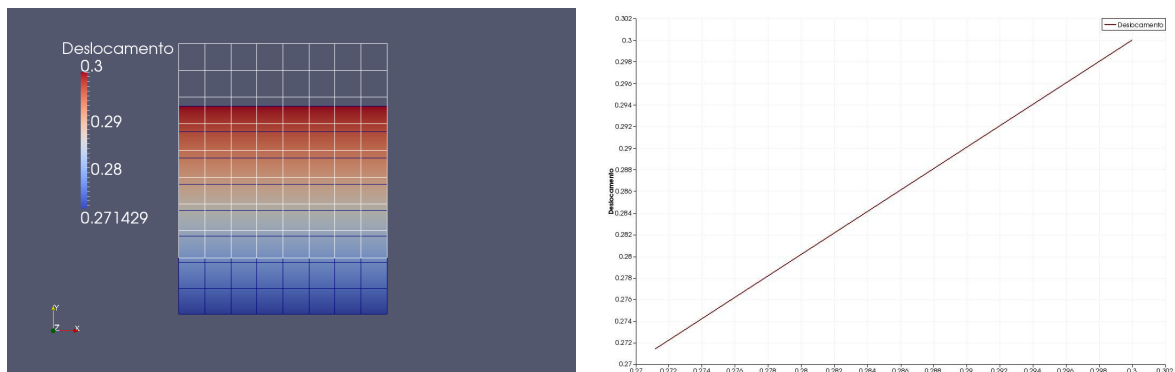


Figura 5.10: Malha indeformada e deformada para validação de material coesivo

Em que nota-se  $u_y^i = 0,271429$  e  $u_y^s = 0,3$  assim como esperado.



## 5.3 Conservação de Massa

De acordo com o esquema numérico imposto, a conservação de massa deve ser satisfeita, isto é, a quantidade de volume injetada deve ser igual ao volume da fratura somado com a quantidade filtrada por *leak-off*.

$$q_{inj} = V_{frac} + q_{leak-off}$$

A conservação é apresentada para um caso exemplo. Os parâmetros utilizados para essa simulação são:

- Parâmetros da formação:

$$\begin{aligned} E &= 25 * 10^3 MPa \\ \nu &= 0,2 \end{aligned}$$

- Parâmetros do fluido:

$$\begin{aligned} \mu &= 5 * 10^{-8} MPa.s \\ q &= 0,0002 m^3/s.m \\ C_l &= 0,0001 m/s^{-1/2} \end{aligned}$$

- Parâmetros do material coesivo:

$$\begin{aligned} K_{IC} &= 2 MPa\sqrt{m} \\ T_T &= 3 MPa \end{aligned}$$

- Parâmetros do modelo de Sandler-DiMaggio:

$$\begin{aligned} A &= 156 MPa \\ B &= 0.00155 MPa^{-1} \\ C &= 146,29 MPa \\ R &= 0,91969 \\ D &= 0,018768 \\ W &= 0,006605 \end{aligned}$$

Na Figura 5.11 verifica-se a conservação, em que o gráfico em vermelho representa o volume injetado, o em verde representa o volume da fratura, o azul representa o volume filtrado, e os pontos pretos representam o volume da fratura somado com o volume filtrado.

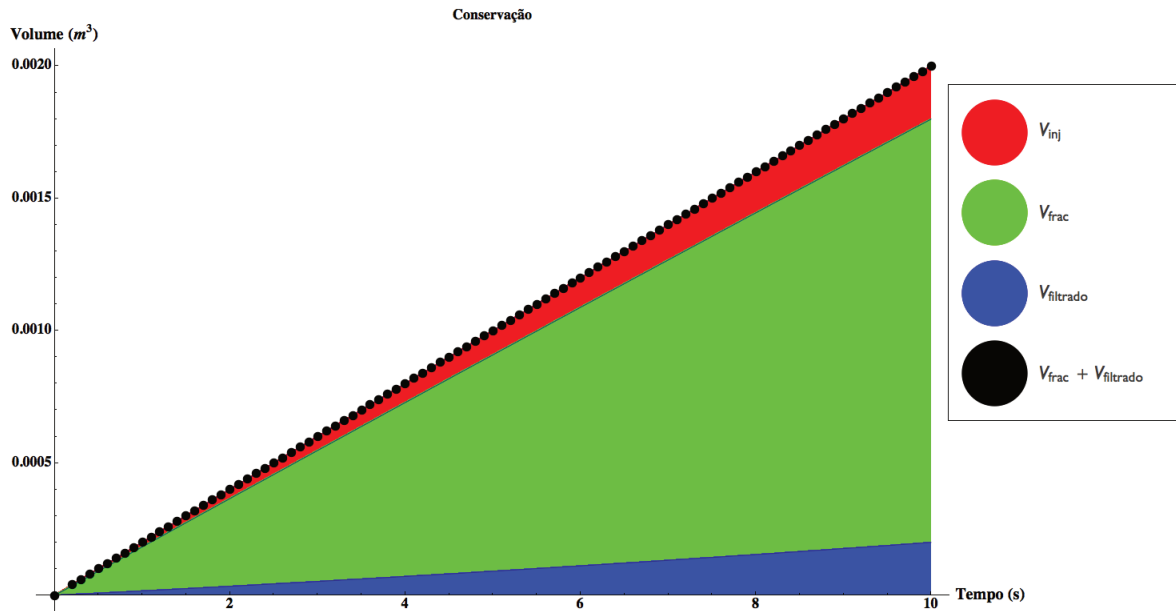


Figura 5.11: Exemplificação de conservação de massa

No programa é realizada a conferência de conservação a cada passo de tempo, e se não satisfeita, o programa é interrompido e o usuário é avisado.

# Capítulo 6

## Análise de Resultados

Neste capítulo serão apresentados comparações com os resultados obtidos por Papanastasiou [1], os resultados de uma simulação utilizando o modelo proposto, e a comparação dos resultados com elasticidade linear. Serão realizadas comparação entre pressões líquidas, comprimentos de fratura e abertura de fratura. Adicionalmente, para o modelo elastoplástico, serão mostrados resultados da zona plastificada e da superfície de plastificação.

### 6.1 Comparação com resultados de Papanastasiou [1]

Papanastasiou [1, 3, 4] realizou extenso estudo sobre fraturamento hidráulico com elastoplasticidade, e publicou gráficos de comprimento e abertura de fratura em função do tempo de injeção para o caso de filtração. Buscou-se reproduzir esses resultados. Uma grande precisão na comparação não pode ser obtida pois o autor publicou somente os gráficos e não tabelas com os valores. Outro fator que influencia a discrepância dos resultados são as diferentes metodologias utilizadas: o uso de diferenças finitas para a equação de conservação por Papanastasiou, e os diferentes espaços de aproximação utilizados nesse trabalho. Outros fatores que também podem influenciar essa discrepância são o refinamento da malha e o tamanho do passo de tempo. Os parâmetros utilizados são:

- Parâmetros da formação: simulação

$$E = 25 * 10^3 MPa$$

$$\nu = 0,2$$

- Parâmetros do fluido:

$$\begin{aligned}\mu &= 5 * 10^{-8} MPa.s \\ q &= 0,0002 \text{ m}^3/s.m \\ C_l &= 0 \text{ m/s}^{-1/2}\end{aligned}$$

- Parâmetros do material coesivo:

$$\begin{aligned}K_{IC} &= 2 \text{ MPa}\sqrt{m} \\ T_T &= 3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

- Parâmetros do modelo de Mohr-Coulomb:

$$\begin{aligned}c &= 5,77 \text{ MPa} \\ \phi &= 30^\circ\end{aligned}$$

Os resultados obtidos para comprimento de fratura em ambos os trabalhos são apresentados na Figura 6.1, e os de abertura da fratura são apresentados na Figura 6.2.

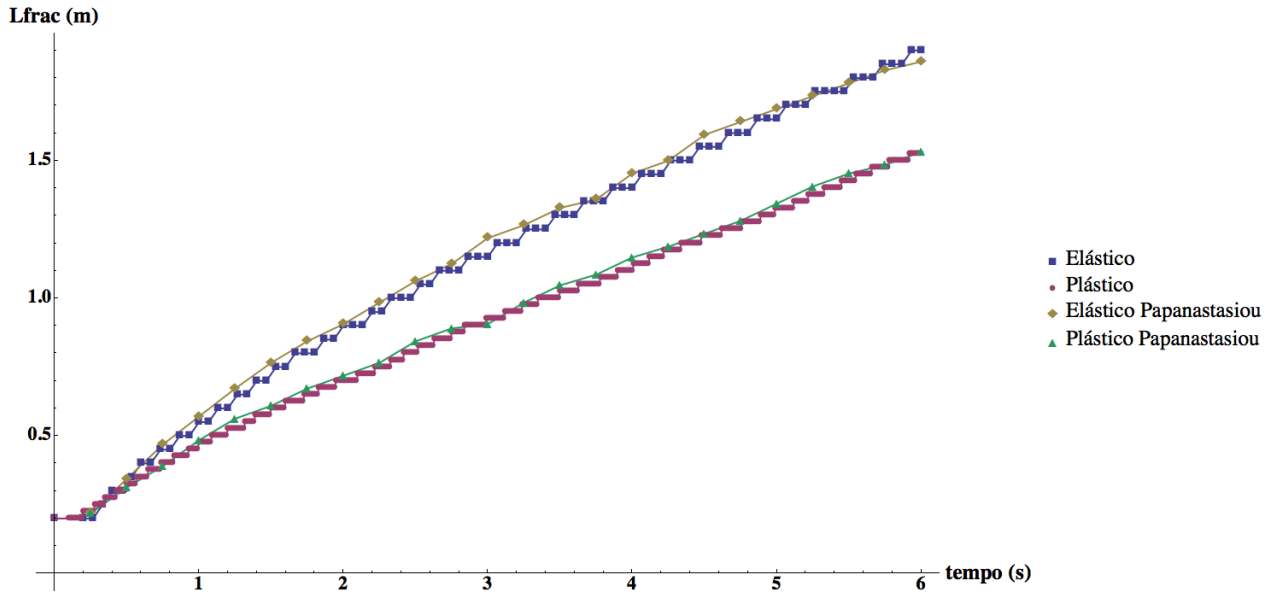


Figura 6.1: Comparação de comprimento de fratura

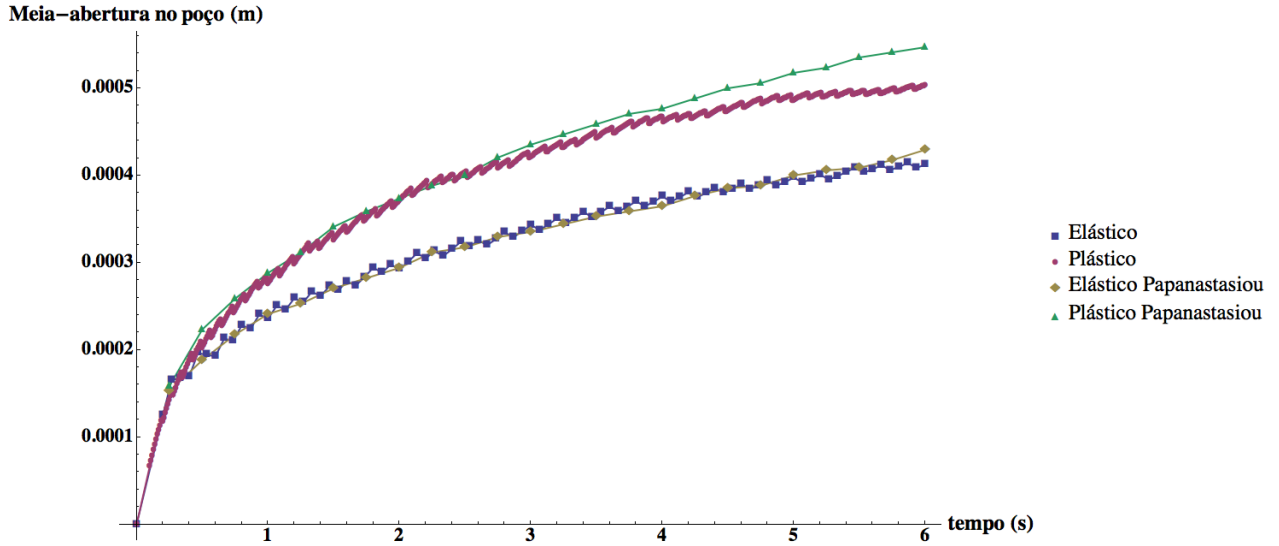


Figura 6.2: Comparação de abertura de fratura

É perceptível que o gráfico de comprimento de fratura apresenta patamares constantes e que o de abertura aumenta de acordo com esse patamares e decresce rapidamente nas transições. Esse fato é explicado pela discretização da malha que possui comprimento de fratura constante em determinado número de passos de tempo até certa propagação. Enquanto o comprimento de fratura não muda, o gráfico de comprimento em relação ao tempo fica constante e o de abertura aumenta gradualmente de acordo com a injeção e deformação do meio. Quando há propagação, o comprimento aumenta de acordo com o tamanho dos elementos da malha e a abertura diminui a fim de manter a conservação de massa na fratura.

Também é verificado que a abertura no poço para simulação elastoplástica apresentada por Papanastasiou tem maiores valores para um mesmo passo de tempo. Essa diferença pode ser explicado pela interpretação dos espaços gerados. Os espaços reduzidos são gerados por uma pressão constante, logo, o erro será menor quanto mais uniforme for a pressão. As pressões em um passo de tempo entre propagações é apresentado na Figura 6.3.

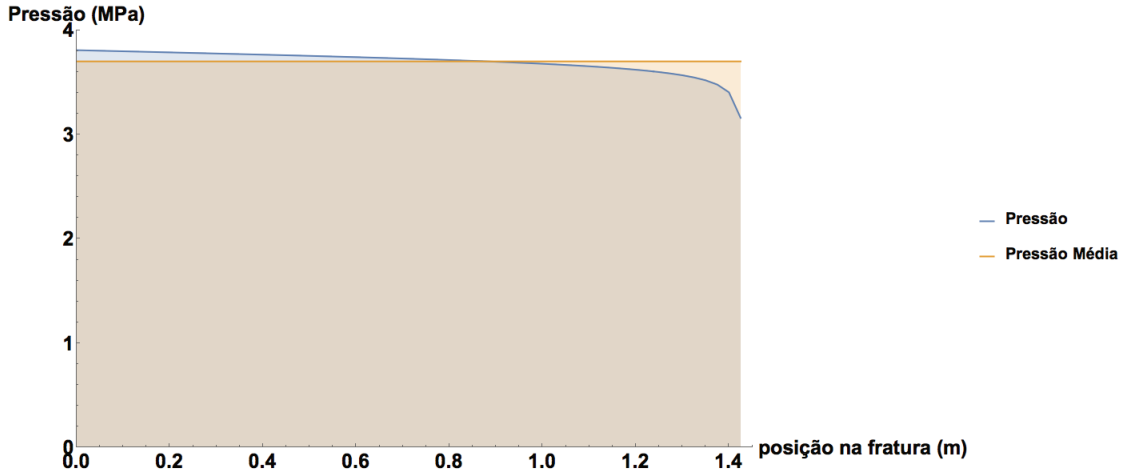


Figura 6.3: Pressão no tempo  $t = 5,46$  s. Momento entre propagações

Percebe-se que a pressão perto do poço é maior, e que portanto, os espaços reduzidos estão contrabalanceando essa abertura para outras partes da fratura, a fim de manter a conservação de massa.

Outro fator que influencia a solução é a geração do espaço de aproximação reduzido com simulações elásticas.

## 6.2 Simulação com modelo de Sandler-DiMaggio

Os parâmetros utilizados para a simulação são:

- Parâmetros da formação:

$$E = 12 * 10^3 MPa$$

$$\nu = 0,19$$

- Parâmetros do fluido:

$$\mu = 0,5 * 10^{-8} MPa.s$$

$$q = 0,000075 m^3/s.m$$

$$C_l = 0.00005 m/s^{-1/2}$$

- Parâmetros do material coesivo:

$$K_{IC} = 1,2513 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

$$T_T = 4 \text{ MPa}$$

- Parâmetros do modelo de Sandler-DiMaggio:

$$A = 149 \text{ MPa}$$

$$B = 0.00155 \text{ MPa}^{-1}$$

$$C = 146,29 \text{ MPa}$$

$$R = 0,91969$$

$$D = 0,018768$$

$$W = 0,006605$$

### 6.2.1 Pressão líquida

Na Figura 6.4 são apresentadas as pressões líquidas em quatro passos de tempo diferentes para elasticidade e elastoplasticidade.

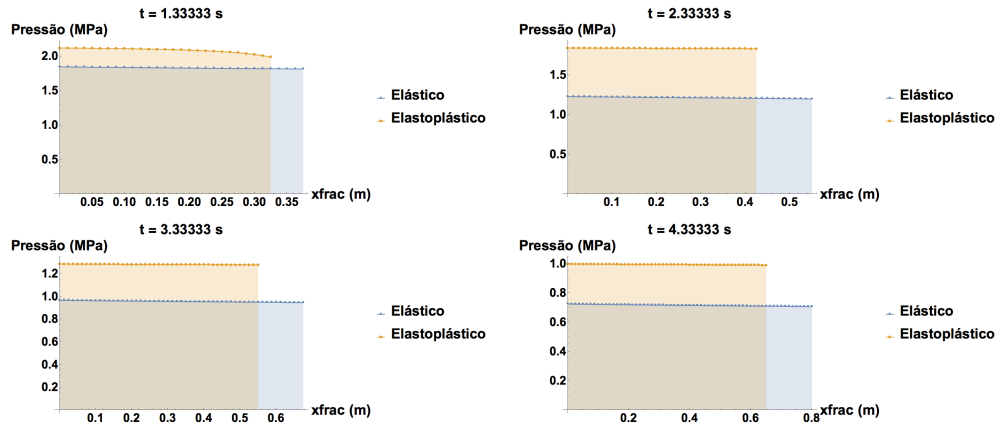


Figura 6.4: Pressão em quatro passos de tempo

Em que é observável que a pressão líquida da simulação com elastoplasticidade é sempre maior que na com elasticidade. Esse fato é devido às maiores aberturas obtidas na simulação elastoplástica, que para uma mesma quantidade de volume injetado "comprimem" menos o fluido no interior da fratura.

### 6.2.2 Comprimento de fratura

Na Figura 6.5 são apresentados os valores de comprimento de fratura no tempo para elasticidade e elastoplasticidade.

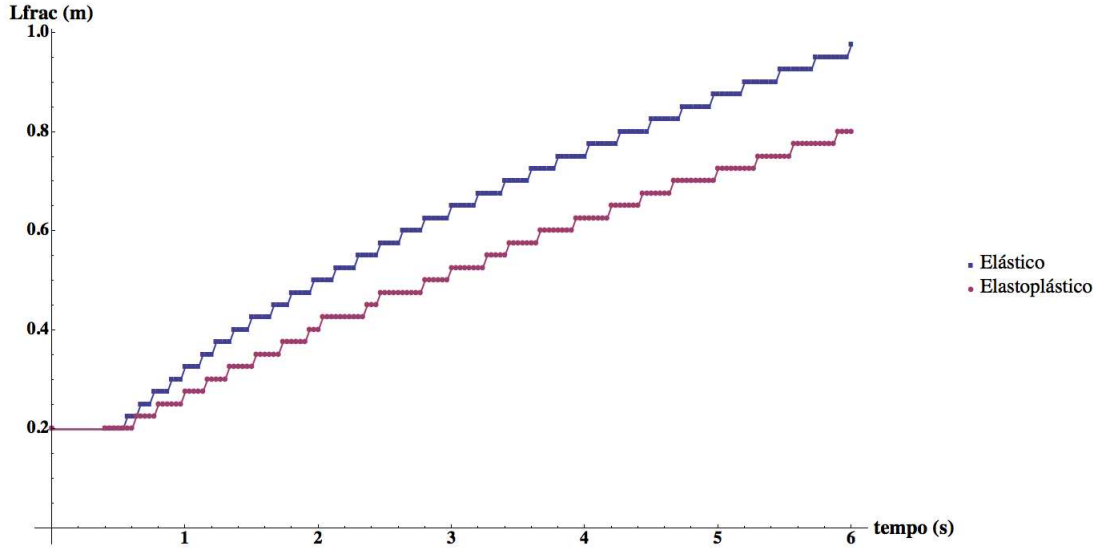


Figura 6.5: Comprimento de fratura para ambas as simulações

Como observado por Papanastasiou [1], os comprimentos de fratura em simulações elastoplásticas são menores que para elástica para um mesmo passo de tempo. Devido a plastificação da ponta da fratura, as fraturas com elastoplasticidade demoram mais para propagar dadas as menores pressões observadas. Uma diferença de 17,9% em relação a elástica é notada no último passo de tempo.

### 6.2.3 Abertura de fratura

Na Figura 6.6 são apresentados os valores de meia abertura de fratura em quatro passos de tempo para elasticidade e elastoplasticidade.



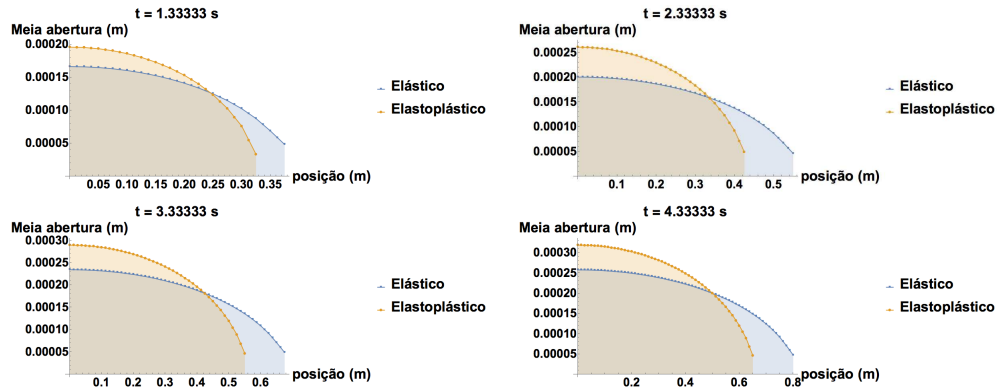


Figura 6.6: Meia abertura em quatro passos de tempo

E na Figura 6.7 são apresentados os valores de meia abertura de fratura no poço para elasticidade e elastoplasticidade em cada passo de tempo.

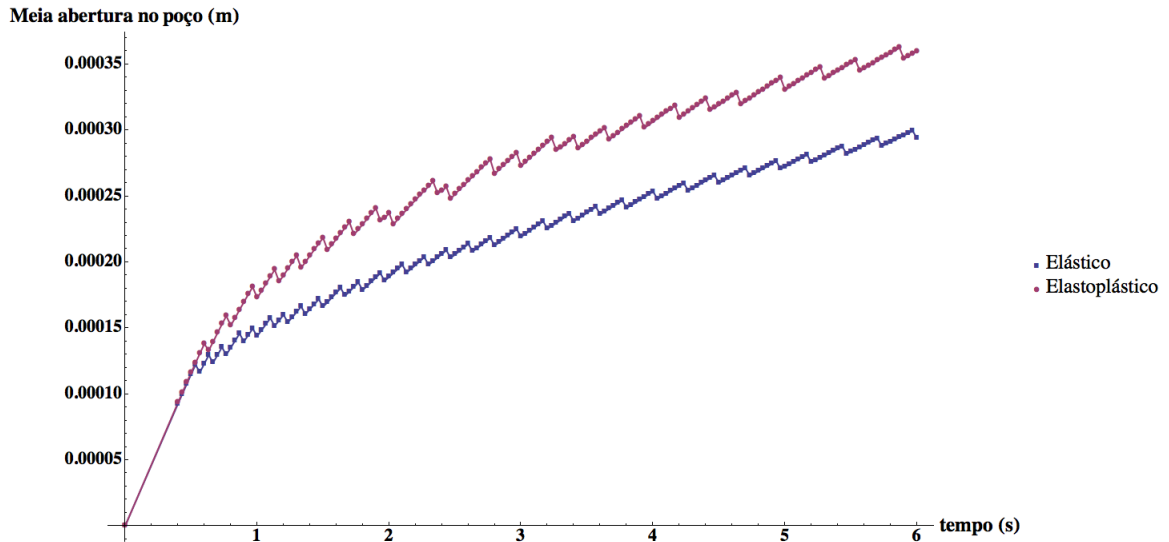


Figura 6.7: Meia abertura no poço para ambas as simulações

Como observado por Papanastasiou [1], as aberturas de fratura no poço em simulações elastoplásticas são maiores que para elástica para um mesmo passo de tempo. Esse fato pode ser explicado pela conservação de massa: como as fraturas com elastoplasticidade demoram mais para propagar, a fim de manter a conservação de massa, maiores aberturas são constatadas. Uma diferença de 22,5% em relação a elástica é notada no último passo de tempo.

### 6.2.4 Zona plastificada

Na Figura 6.8 são apresentadas as zonas plastificadas, isto é, as zonas que apresentam  $\epsilon^p$  em quatro passos de tempo diferentes com deslocamento ampliado 100x.

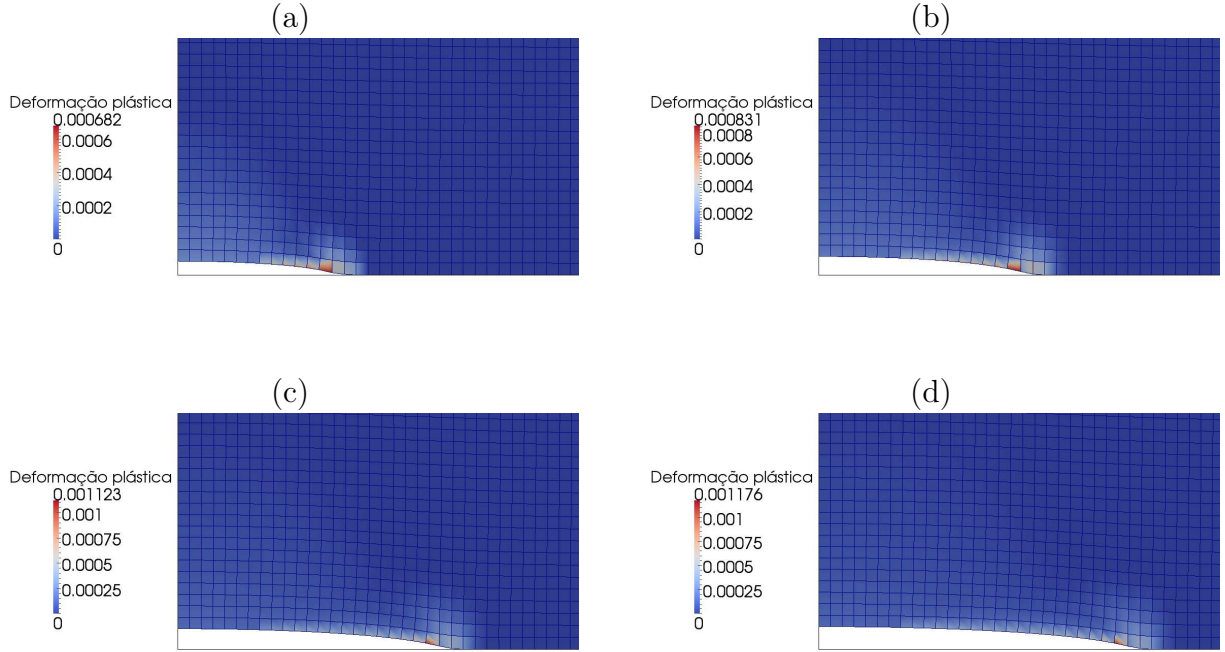


Figura 6.8: Zonas plastificadas em quatro passos de tempo. (a)  $t = 1,33333$  s, (b)  $t = 2,33333$  s. (c)  $t = 3,33333$  s. (d)  $t = 4,33333$  s

Nota-se que a maior deformação plástica ocorre na ponta da fratura, assim como constatado por Papanastasiou [3].

### 6.2.5 Superfície de plastificação

Nas Figuras 6.9 e 6.10 são apresentados os valores das superfícies de plastificação  $f_1$  e  $f_2$  (Equações 2.2.19 e 2.2.21) no domínio em quatro passos de tempo diferentes. A superfície  $f_1$  é ativada devido ao cisalhamento, e a superfície  $f_2$  devido à compressão. O deslocamento apresentado é ampliado 100x.

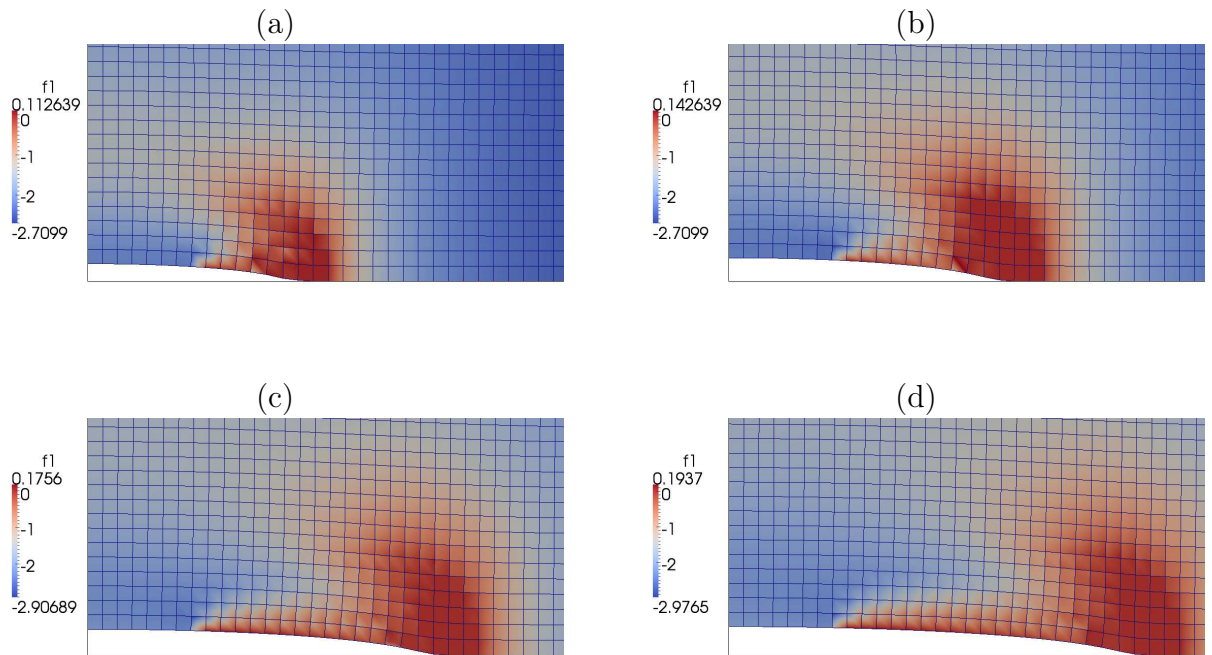


Figura 6.9: Superfície de plastificação  $f_1$  em quatro passos de tempo. (a)  $t = 1,33333$  s, (b)  $t = 2,33333$  s. (c)  $t = 3,33333$  s. (d)  $t = 4,33333$  s

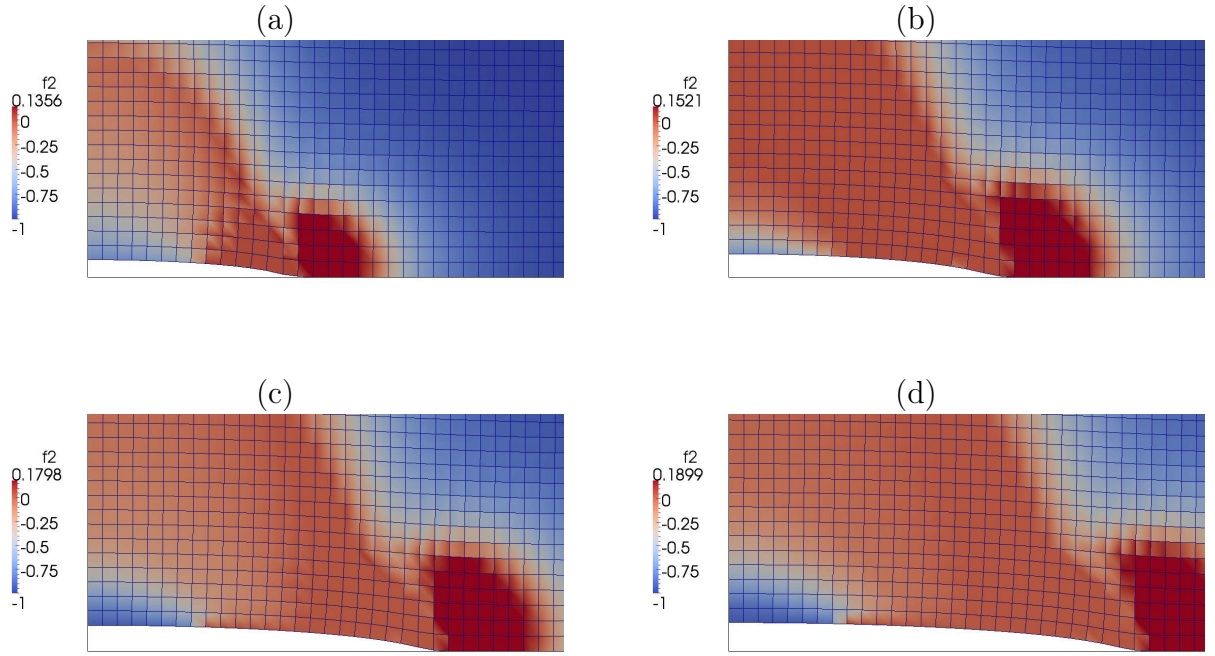


Figura 6.10: Superfície de plastificação  $f_2$  em quatro passos de tempo. (a)  $t = 1,33333$  s, (b)  $t = 2,33333$  s. (c)  $t = 3,33333$  s. (d)  $t = 4,33333$  s

Verifica-se que a superfície  $f_1$  é ativa em maior parte antes da ponta, e na ponta da fratura, enquanto a superfície  $f_2$  isso ocorre a frente da fratura. Esse fato é explicado pelo maior cisalhamento apresentado a frente da fratura, e maior compressão antes e na ponta da mesma.

# Capítulo 7

## Conclusões

Neste trabalho foi realizada a revisão bibliográfica dos temas de fraturamento hidráulico e elastoplasticidade. Com o conhecimento dos modelos matemáticos que descrevem os fenômenos, foi proposta uma metodologia de simulação com o método de elementos finitos, e a implementação do mesmo foi realizada no ambiente NeoPZ. Foram apresentados testes numéricos a fim de verificar a capacidade representativa da ferramenta computacional desenvolvida nesse trabalho. O modelo de propagação de fratura com elementos coesivos foi validado com formulações analíticas desenvolvidas nesse trabalho e resultados similares a trabalhos anteriores foram obtidos. Este trabalho de mestrado partiu de estudos anteriores na área de elastoplasticidade realizados no Laboratório de Mecânica Computacional por Santos e Cecílio [2, 31], que desenvolveram a base para o cálculo elastoplástico encontrada no ambiente computacional NeoPZ. O trabalho apresentado foi beneficiado por esses estudos e desenvolvimentos.

Grande parte do progresso obtido neste estudo deve-se à modularização do NeoPZ. Esta modularização permitiu que estudos feitos anteriormente fossem aproveitados, de modo que a atenção pudesse ser voltada ao foco deste estudo, acelerando a produção de conhecimento.

Com limitações de aplicação, este estudo se propõe apenas a tratar casos bidimensionais com uma única direção de propagação de fratura, através de um modelamento uniaxial do fluxo de fluido.

Uma nova metodologia para criação dos espaços de aproximação para o problema de deformação mecânica foi proposta, o que gerou grande estabilidade para resolução do problema. Essa metodologia também gerou redução considerável no sistema não-linear, diminuindo o custo computacional da aplicação. Nota-se que a utilização desses espaços perde precisão quanto menos uniforme for a distribuição de pressão na fratura. Outro fator que prejudicial à qualidade da solução é a utilização de espaços reduzidos gerados com simulações elásticas. Uma sugestão para trabalho futuro é gerar o espaço reduzido com simulações elastoplásticas

utilizando como pressão a solução obtida com a metodologia apresentada nessa dissertação. Isso é necessário para obter corretamente as zonas plastificadas, e assim uma função de base que gera melhores aproximações.

Em comparação com o modelo elástico, verificou-se que simulações com modelos elasto-plástico geram fraturas com menores comprimentos e maiores aberturas. Esse fato é explicado pela plastificação da ponta da fratura, que gera um alívio de tensões, e portanto, um adiamento da propagação. Essa plastificação da ponta foi observada e apresentada neste trabalho. Outra observação é que a pressão efetiva em um mesmo passo de tempo é maior para o caso elastoplástico.

Em comparação qualitativa com os modelos analíticos apresentados, tanto comprimento quanto abertura de fratura seguem formatos parecidos com os analíticos em relação ao tempo, que aumentam com uma taxa decrescente.

Salienta-se que os resultados obtidos são dependentes dos parâmetros elastoplástico utilizados. Uma análise da influência dos parâmetros e uso de parâmetros definidos em laboratório seria necessária para comparações quantitativas dos resultados entre modelos.

# Capítulo 8

## Trabalhos Futuros

Esse trabalho consistiu na implementação de um simulador numérico para fraturamento hidráulico e testes numéricos do mesmo. Comparações qualitativas com elasticidade linear foram realizadas e discutidas. Como extensões para trabalhos futuros sugerem-se estudos em três áreas: extensão de funcionalidades, análise de parâmetros e otimização do código:

- Extensão de funcionalidades:
  - Implementação de outros modelos constitutivos elastoplásticos, e comparação entre esses modelos;
  - Incorporação do transporte de agente de sustentação no fluido de fraturamento;
  - Utilização de leis poro-elastoplásticas para o problema de deformação mecânica;
  - Incorporação da solução elastoplástica no espaço de aproximação reduzido.
  - Validações do modelo com outros simuladores e experimentos laboratoriais.
  - Incorporação técnicas h-p adaptativas.
- Análise de parâmetros:
  - Análise da influência de cada um dos parâmetros nos resultados da simulação;
  - Utilização de parâmetros determinados a partir de ensaios laboratoriais.
- Otimização do código:
  - Substruturação para utilização do cálculo elastoplástico somente nas zonas passíveis de plastificação;

# Referências Bibliográficas

- [1] Papanastasiou, P. C., “A coupled elastoplastic hydraulic fracturing model,” *Elsevier Science Ltd.*, 1997.
- [2] Santos, E. S. R., *Simulador de meios porosos saturados elastoplásticos*. PhD thesis, Unicamp, 2009.
- [3] Papanastasiou, P. C., “The influence of plasticity in hydraulic fracturing,” *International Journal of Fracture*, 1997.
- [4] Papanastasiou, P. C., “Hydraulic fracture closure in a pressure-sensitive elastoplastic medium,” *International Journal of Fracture*, 2000.
- [5] Azevedo, C. T., *Análise da curva de pressão do fraturamento de formações de alta permeabilidade para estimativa dos parâmetros da fratura*. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2011.
- [6] de Souza Neto, E. A., *Computational Methods For Plasticity*. John Wiley and Sons Ltd, 2008.
- [7] Adachi, J., Siebrits, E., Peirce, A., and Desroches, J., “Computer simulation of hydraulic fractures,” *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, p. 19, 2007.
- [8] DiMaggio, F. L. and Sandler, I. S., “Material model for granular soils,” *Journal of the Engineering Mechanics Division*, p. 15, 1971.
- [9] Becker, B. E., Carey, G. F., and Oden, J. T., *Finite elements: An introduction*, vol. I. Texas Institute of Computational Mechanics, The university of texas at Austin: Prentice Hall, 1981.
- [10] Fernandes, P. D., “Análise das operações de fraturamento hidráulico através do comportamento da pressão durante o bombeio,” Master’s thesis, Unicamp, 1991.



- [11] Fernandes, P. D., *Modelagem Semi-Analítica Pseudo Tridimensional de Propagação e fechamento de Fraturas Induzidas em Rochas*. PhD thesis, Unicamp, 1998.
- [12] Nordren, R. P., “Propagation of a vertical hydraulic fracture,” *SPE J*, vol. 12(8), no. 306, pp. 306–314, 1972.
- [13] Khristianovic, S. A. and Zheltov, Y. P., “Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid,” *In: Proceedings of the fourth world petroleum congress*, pp. p. 579–86, 1955.
- [14] Geertsma, J. and de Klerk, F., “A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures,” *J Pet Tech*, vol. 21, pp. 1571–81, 1969.
- [15] Sneddon, I. N., “The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid,” *Proc R Soc London A*, vol. 187, pp. 229–60, 1946.
- [16] Gurtin, M. E., *An introduction to continuum mechanics*. No. 158 in Mathematics in Science and Engineering, Department of Mathematics Carnegie-Mellon University Pittsburgh, Pennsylvania: Academic Press inc., 1981.
- [17] Carter, R. D., “Optimum fluid characteristics for fracture extension,” *Drilling and Production Practices*, 1957.
- [18] Ozdemirtas, M., “Numerical and experimental investigations of borehole ballooning in smooth and rough fractures,” Master’s thesis, University of Alberta, 2009.
- [19] GDoutos, E., *Fracture Mechanics*. Springer, 2005.
- [20] Cecílio, D. L., Devloo, P. R. B., Gomes, S. M., Santos, E. R. S., and Shauer, N., “An improved numerical integration algorithm for elastoplastic constitutive equations,” *Computer and Geotechnics*, vol. 64, p. 9, 2014.
- [21] Devloo, P., “Systematic and generic construction of shape functions for p-adaptive meshes of multidimensional finite elements,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 21–26, May 2009.
- [22] Fernández, M. A., “Incremental displacement-correction schemes for incompressible fluid-structure interaction: Stability and convergence analysis,” Research Report 7671, Numerische Mathematik, 2012.
- [23] Fink, J. P. and Rheinboldt, W. C., “On the error behavior of the reduced basis technique for nonlinear finite element approximation,” *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1983.

- [24] Rozza, G., “Reduced basis approximation and error bounds for potential flows in parametrized geometries,” *Commun. Comput. Phys.*, vol. 9, no. 1, pp. 1–48, 2011.
- [25] Hesthaven, J. S., Stamm, B., and Zhang, S., “Efficient greedy algorithms for high-dimensional parameter spaces with applications to empirical interpolation and reduced basis methods,” *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 48, pp. 259–283, January 2014.
- [26] Rheinboldt, W. C., “On the theory and error estimation of the reduced basis method for multi-parameter problems,” tech. rep., University of Pittsburgh, 1992.
- [27] Rozza, G., Huynh, D. B. P., and Patera, A. T., “Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations,” *Arch Comput Methods Eng*, vol. 15, pp. 229–275, 2008.
- [28] Maday, Y. and Stamm, B., “Locally adaptive greedy approximation for anisotropic parameter reduced basis spaces,” *arXiv*, 2012.
- [29] Forti, T. L. D., *Aplicações dos métodos de Elementos Finitos contínuo e Galerkin Descontínuo combinados*. PhD thesis, Unicamp, 2010.
- [30] NeoPZ, M., “<http://www.labmec.org.br/pz/arquivos-html/html/index.html>,” *LabMeC*, Janeiro 2014.
- [31] Cecílio, D. L., *Modelagem e simulação elastoplástica em elementos finitos*. PhD thesis, Unicamp, 2011.
- [32] Bueno, E. M. R., “Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos,” Master’s thesis, Universidade de São Paulo, 1999.
- [33] Yew, C. H., *Mechanics of Hydraulic Fracturing*. No. ISBN 0-88415-474-2, Gulf Publishing Company, 1997.
- [34] Forti, T. L. D., *O Método de Galerkin Descontínuo Aplicado a Problemas de Convecção-Difusão*. PhD thesis, Unicamp, 2005.
- [35] Gurtin, M. E., “Variational principles for linear elastodynamics,” *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, no. 16, pp. 34–50, 1964.
- [36] Oden, J. T., *Applied functional analysis*. Civil engineering and engineering mechanics series, The university of texas: Prentice Hall, 1979.