

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

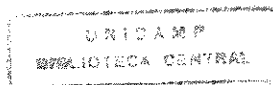
**DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL**

**ANÁLISE DINÂMICA MODAL ESPECTRAL  
DE PÓRTICOS PLANOS**

**Autor: Ulises Bobadilla Guadalupe**

**Orientador: Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan**

**Campinas, Fevereiro de 1996**



9601060

UNIDADE	78C
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	B63a
V.	Ex.
TEVEDO BC/	27610
PROD.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	03/05/96
N.º CPD	

CM-0008780 2-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B63a Bobadilla Guadalupe, Ulises  
Análise dinâmica modal espectral de pórticos planos /  
Ulises Bobadilla Guadalupe.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Aloisio Ernesto Assan.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Dinâmica estrutural. 2. Análise modal. 3. Análise  
espectral. 4. Vibrações. I. Assan, Aloisio Ernesto. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Civil. III. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**

**DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL**

**ANÁLISE DINÂMICA MODAL ESPECTRAL  
DE PÓRTICOS PLANOS**

**Autor: Ulises Bobadilla Guadalupe**

**Dissertação apresentada à  
Coordenadoria de Pós-Graduação  
da Faculdade de Engenharia Civil,  
como parte dos requisitos exigidos  
para obtenção do título de Mestre  
em Engenharia Civil, área de  
concentração Estruturas.**

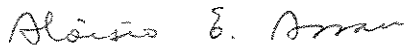
**Campinas, Fevereiro de 1996**

*Atesto que esta é a versão definitiva  
da Tese.  
22/3/96  
Blairis E. Roson*

# ANÁLISE DINÂMICA MODAL ESPECTRAL DE PÓRTICOS PLANOS

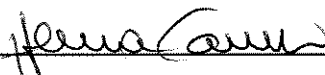
**Autor: Ulises Bobadilla Guadalupe**

**Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 09 de  
fevereiro de 1996 pela Banca Examinadora constituída pelos professores:**



---

**Prof. Dr. Aloisio Ernesto Assan (UNICAMP)**



---

**Profa. Dra. Helena Maria Cunha do Carmo Antunes (EESC-USP)**



---

**Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes (UNICAMP)**

**Aos meus pais, Luis Alfonso e Maria Teodosia,  
e aos meus irmãos, pelo apoio, estímulo e carinho.**

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Orientador Aloisio Ernesto Assan, pela paciência, incentivo e dedicação dados a este trabalho.
- À UNICAMP e ao CNPq pelo suporte institucional e financeiro, indispensáveis para a realização deste trabalho.
- Aos Profs.Drs: Francisco Antonio Meneses, Jose Luiz Antunes de Oliveira e Sousa e Leandro Palermo Junior por acreditarem no sucesso do meu trabalho.
- Ao Engenheiro Marcus Thompsen Primo, pelas sugestões e pelo companheirismo e amizade que sempre dispensou ao longo de minha vida acadêmica.
- Aos Profs Drs: Helena Maria Cunha do Carmo Antunes, Francisco Antonio Meneses e Aloisio Ernesto Assan, membros da banca examinadora da defesa do mestrado, pelas valiosas sugestões e recomendações que enriqueceram ainda mais o presente trabalho.
- A todos que, direta ou indiretamente deram o seu apoio para a feliz conclusão deste trabalho.

Campinas, Fevereiro de 1996

Ulises Bobadilla Guadalupe

## RESUMO

Este trabalho apresenta a análise dinâmica modal espectral de estruturas aporticadas planas.

A ação dinâmica excitando as estruturas é o abalo sísmico, que se mostra através de gráficos espectrais que representam as respostas máximas das estruturas à excitação sísmica.

Apresenta-se também o cálculo sísmico-estático destas estruturas, aplicando-se para este fim os requerimentos das normas de cálculo sísmico-resistentes de alguns países sujeitos ao abalo sísmico.

Faz-se uma comparação das respostas destas estruturas tanto para a análise sísmico-estática (segundo as normas acima mencionadas), quanto para a análise sísmico-dinâmica modal espectral.

## ABSTRACT

This work presents the modal spectral dynamic analysis of plane framed structures. The Seismic Force is the dynamic excitation acting on structures. A *response spectrum*, namely, a plot of the maximum response (maximum displacement, velocity, acceleration, or any other quantity of interest) to a specified seismic load function for all possible single degree-of-freedom systems, is used to show the seismic action on these structures.

The seismic static design of these structures, also presented, is made through the application of requirements of the some earthquake resistant design codes.

A comparison of the responses of these structures to seismic static analysis (using the building codes) and to seismic dynamic analysis (using modal spectral dynamic analysis), is made.



## SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	I
AGRADECIMENTOS.....	II
RESUMO.....	III
ABSTRACT.....	IV
CAP. I      INTRODUÇÃO.....	1
I.1      Justificativa / Objetivos.....	1
I.2      O Método da Superposição Modal Espectral na Análise Dinâmica...	2
I.3      Abrangência e delimitação do trabalho.....	4
I.4      Organização do trabalho.....	5
CAP. II      VIBRAÇÃO DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE.....	6
II.1      Considerações preliminares.....	6
II.2      Vibração de sistemas com um grau de liberdade (1GDL).....	6
II.2.1      Modelo matemático.....	7
II.2.2      Equação geral do movimento.....	9
II.2.3      Vibrações livres.....	11
II.2.3.1      Vibrações livres não amortecidas.....	11
II.2.3.2      Vibrações livres amortecidas.....	13
II.2.4      Resposta a excitações simples.....	18

II.2.4.1	Fator de amplificação dinâmica.....	20
II.2.4.2	Resposta aos transientes.....	21
II.2.5	Excitação sísmica: movimento da base de apoio.....	24
II.2.6	Tipos de amortecimento.....	27
II.2.7	Vibrações harmônicas.....	30
II.2.8	Excitação arbitrária: Integral de Duhamel.....	35
II.2.9	Análise tempo-história.....	36
II.2.10	Espectro de resposta.....	36
II.3	Vibração de sistemas com vários graus de liberdade.....	39
II.3.1	Modelos.....	39
II.3.2	Massas e rigidezes.....	41
II.3.3	Propriedades dinâmicas: modos e frequências.....	43
II.3.4	Propriedades matemáticas dos modos.....	46
II.3.5	Amortecimento.....	50
CAP. III	TEORIA DA ANÁLISE MODAL.....	52
III.1	Considerações iniciais.....	52
III.2	Decomposição modal das equações de movimento.....	57
III.2.1	Equacionamento para sistemas sem amortecimento.....	57
III.2.2	Equacionamento para sistemas com amortecimento.....	60
III.3	Análise modal para excitações sísmicas.....	62
III.4	Análise modal espectral.....	64
III.5	Combinação modal.....	65

III.6	Resumo do procedimento da superposição modal.....	67
III.7	Elaboração de um espectro de respostas.....	69
III.8	Espectro de respostas para excitação da base.....	73
III.9	Espectro de respostas em escalas trilogarítmicas.....	76
<b>CAP. IV</b>	<b>ANÁLISE SÍSMICO-ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS.....</b>	<b>82</b>
IV.1	Considerações preliminares.....	82
IV.2	Fórmula para a determinação da força cortante na base.....	83
IV.2.1	Norma Americana UBC-88.....	83
IV.2.2	Norma Peruana NPDSR-77.....	89
IV.2.3	Norma Chilena NCh433.Of 93.....	95
IV.3	Distribuição das forças sísmico-laterais.....	102
IV.3.1	Norma Americana UBC-88.....	102
IV.3.2	Norma Peruana NPDSR-77.....	103
IV.3.3	Norma Chilena NCh433.Of 93.....	104
IV.4	Outras considerações das normas para o cálculo sísmico-resistente.	105
<b>CAP. V</b>	<b>ANÁLISE DINÂMICA MODAL ESPECTRAL</b>	
	<b>NO SOFTWARE SAP90.....</b>	<b>107</b>
V.1	Considerações iniciais.....	107
V.2	Análise de autovalores no SAP90.....	110
V.3	Análise sísmico-dinâmica modal espectral no SAP90.....	112
<b>CAP VI</b>	<b>COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS.....</b>	<b>114</b>
VI.1	Considerações preliminares.....	114

VI.2	Apresentação do primeiro exemplo a ser analisado.....	116
VI.2.1	Análise sísmico-estática do exemplo 1 pela norma americana UBC-88..	118
VI.2.2	Análise sísmico-dinâmica modal espectral usando o software SAP90..	141
VI.2.3	Comparação dos resultados estático e dinâmico para o exemplo 1.....	143
VI.2.4	Força cortante sísmico-estática na base pelas normas peruana e chilena	144
VI.2.4.1	Força cortante na base pela norma peruana NPDSR-77.....	144
VI.2.4.2	Força cortante na base pelas norma chilena NCh433.Of93.....	145
VI.2.4.3	Comparação da força cortante para as três normas (exemplo 1).....	147
VI.3	Apresentação do segundo exemplo a ser analisado.....	148
VI.3.1	Análise sísmico-estática do exemplo 2 pela norma peruana NPDSR-77	151
VI.3.2	Comparação dos resultados estático e dinâmico para o exemplo 2.....	157
VI.3.3	Força cortante sísmico-estática na base pelas normas americana e chilena.	158
VI.3.3.1	Força cortante na base pela norma americana UBC 88.....	158
VI.3.3.2	Força cortante na base pelas norma chilena NCh433.Of93.....	159
VI.3.3.3	Comparação da força cortante para as três normas (exemplo 2).....	160
CAP. VII	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	161
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	164

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### I.1.- JUSTIFICATIVA / OBJETIVOS

Alguns fenômenos naturais e atividades humanas impõem ações com variabilidade dependente do tempo quando atuando em estruturas simples como uma viga de concreto armado ou quando atuando em estruturas complexas como um edifício de muitos andares ou um veículo espacial.

Estas ações variando com o tempo são chamadas de *cargas dinâmicas*. Assim, um *carregamento dinâmico* é aquele em que a magnitude, direção ou ponto de aplicação variam com o tempo, enquanto os resultantes deslocamentos e/ou tensões variando com o tempo constituem a *resposta dinâmica*.

Estuda-se neste trabalho o *comportamento dinâmico* de uma estrutura aporticada plana submetida a ação da mais importante *excitação dinâmica* existente: o *abalo sísmico*.

Os objetivos deste trabalho são os seguintes:

- Apresentar a *análise dinâmica modal espectral* como uma ferramenta muito importante na análise estrutural.
- Apresentar a *análise sísmico-estática* de estruturas avaliada segundo as normas de alguns países sujeitos ao *abalo sísmico*.
- Comparar a *análise sísmico-dinâmica modal espectral* com a *análise sísmico-estática* de estruturas aporricadas planas avaliadas segundo *normas de cálculo sísmico-resistente*.

## **I.2.- O MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL ESPECTRAL NA ANÁLISE DINÂMICA**

A *análise dinâmica* através da *combinação linear dos modos de vibração* de uma estrutura, recebe a denominação de *análise modal*.

A *análise modal* é o procedimento mais comumente usado em *dinâmica estrutural*.

Se a excitação sísmica -que pode ser entendida de maneira simples como uma série de movimentos aleatórios do solo - é expressa através de *gráficos* denominados *espectrais*, então a análise dinâmica denomina-se de *análise modal espectral*.

A teoria e o desenvolvimento do processo de cálculo por superposição modal e suporte matemático são encontrados em Hildebrand (1965)<sup>(1)</sup>, Bathe (1976)<sup>(2)</sup>, Craig (1981)<sup>(3)</sup>, Clough (1975)<sup>(4)</sup>, Zienkiewics (1971)<sup>(5)</sup> e outros.

A teoria da análise modal espectral e engenharia sísmica encontram-se em Biggs (1964)<sup>(6)</sup>, Newmark (1971)<sup>(7)</sup>, Okamoto (1973)<sup>(8)</sup>, Clough (1975)<sup>(4)</sup>, Paz (1991)<sup>(9)</sup>, Blume et al (1961)<sup>(10)</sup>, etc.

O programa SAP90<sup>(11)</sup> usa as seguintes referências bibliográficas para desenvolver a análise modal espectral relativa a estruturas aporticadas: Wilson et al (1981)<sup>(12)</sup>, Anagnostopoulos (1981)<sup>(13)</sup>, Bathe (1982)<sup>(14)</sup>, Wilson et al (1982)<sup>(15)</sup>, Wilson & Button (1982)<sup>(16)</sup>, Zienkiewicz (1971)<sup>(5)</sup>, Cook et al (1989)<sup>(17)</sup>, etc.

Para a resolução do problema de autovalores, o programa SAP90 utilizou: Bathe & Ramaswamy (1979)<sup>(18)</sup> e Wilson & Tetsuji (1983)<sup>(19)</sup> entre outros.

Deve-se observar ainda que a teoria sísmica já foi estudada a partir da década de 1940 (e talvez antes), com as seguintes referências: Biot (1943)<sup>(20)</sup>, Housner (1947)<sup>(21)</sup>, Hudson (1956)<sup>(22)</sup> entre outros.

No contexto da UNICAMP têm-se feito trabalhos usando o método de superposição modal, podendo-se mencionar: Prodonoff et al (1990)<sup>(23)</sup>, Cordovil (1991)<sup>(24)</sup> e Czerwinski (1994)<sup>(25)</sup>.

### **I.3.- ABRANGÊNCIA E DELIMITAÇÃO DO TRABALHO**

Este trabalho utiliza a prática generalizada atual no cálculo sísmico-resistente a qual considera que as solicitações sísmicas sobre a estrutura determinam-se usando uma análise elástico-linear (pequenas deformações).

Deve-se observar que a tendência moderna incorpora critérios de comportamento inelástico como ferramentas de dissipação de energia, mas a análise se faz admitindo que a estrutura e seus elementos não excedam sua resistência e mantenham a sua forma inicial, hipóteses implícitas na análise estrutural no regime elástico.

Sob este critério tem-se dois caminhos para executar a análise e que são contemplados nos códigos: análise estática ou análise dinâmica.

Neste trabalho executam-se os dois tipos de análise para estruturas aporticadas e comparam-se os resultados obtidos para um pórtico da estrutura.

A análise estática se faz usando as normas sísmico-resistentes de alguns países sujeitos ao abalo sísmico apresentadas no capítulo IV.

A análise dinâmica se faz usando a técnica da superposição modal espectral através do software SAP90 apresentado no capítulo V.

O programa SAP90 utiliza o método dos elementos finitos e no presente trabalho discretiza-se a estrutura em elementos finitos de pórtico plano com três graus de liberdade por nó: duas translações e uma rotação.



## **I.4.- ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Organizou-se este trabalho na forma de capítulos. O primeiro capítulo (I) foi dedicado à introdução, apresentando-se a justificativa e os objetivos, seguidos pela referência bibliográfica quanto ao uso do método de superposição modal espectral na análise dinâmica, bem como a abrangência e delimitação do trabalho.

O segundo capítulo (II) apresenta brevemente a teoria de vibrações baseado nas referências [3], [4], [9] e [26].

O terceiro capítulo (III) aborda a análise dinâmica modal de sistemas com vários graus de liberdade e baseia-se nas referências [9], [3], [4], [24] e [26].

O capítulo quarto (IV) apresenta a análise sísmico-estática de estruturas de acordo com as normas: UBC-88<sup>(27)</sup>, NPDSR-77<sup>(28)</sup> e NCh433.Of93<sup>(29)</sup>.

O capítulo quinto (V) aborda a análise dinâmica modal espectral usando o software SAP90 que usa como referências: [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18] e [19].

No capítulo sexto (VI) apresentam-se as estruturas a serem avaliadas e a comparação dos resultados obtidos tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica.

O capítulo sétimo (VII) é composto pelas conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

Finalmente apresentam-se as referências bibliográficas.

## **CAPÍTULO II**

### **VIBRAÇÃO DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE**

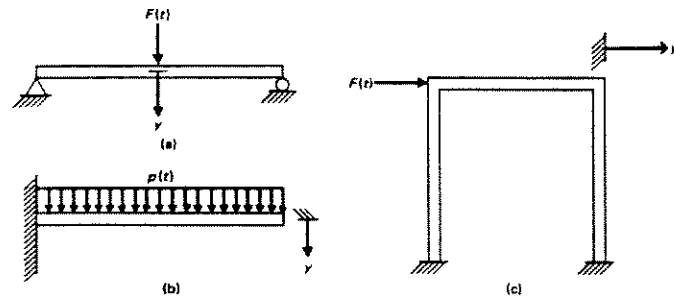
#### **II.1.- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES**

Com o fim de entender a análise dinâmica de estruturas utilizando o método de superposição modal espectral, inicia-se este trabalho apresentando brevemente a teoria de vibrações de sistemas com vários graus de liberdade.

Para o estudo da vibração de sistemas com vários graus de liberdade é necessário utilizar alguns conceitos relativos à resposta de sistemas com um grau de liberdade. A seguir apresenta-se esta parte introdutória.

#### **II.2.- VIBRAÇÃO DE SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE (1GDL)**

“Um sistema com um grau de liberdade (*1GDL*) é definido como aquele em que somente é possível um tipo de movimento, ou seja, a posição do sistema em qualquer instante pode ser definida pela posição de uma coordenada”<sup>(6)</sup>. A *Fig.II.1* mostra alguns exemplos de estruturas que podem ser representadas, para a análise dinâmica, como sistemas com um grau de liberdade (*1GDL*)<sup>(9)</sup>.



**Fig. II.1.- Exemplos de estruturas modeladas como sistemas com um grau de liberdade (1 GDL).** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.4.)

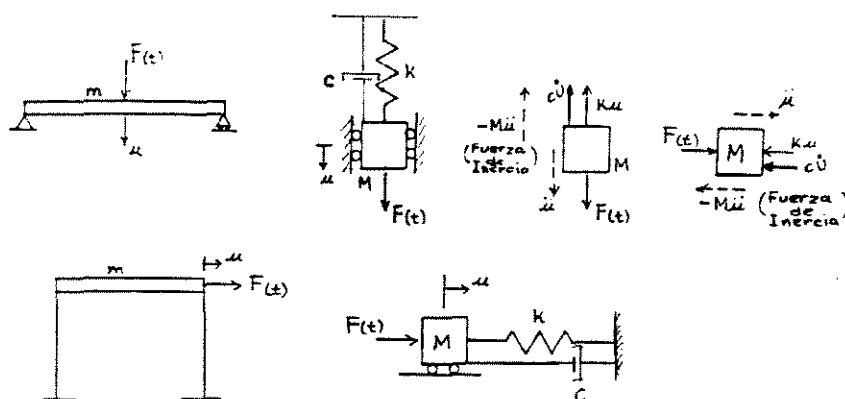
### II.2.1.- MODELO MATEMÁTICO

O sistema idealizado de uma massa concentrada e uma mola sem peso é uma ferramenta conveniente para representar os modelos da *Fig. II.1*.

A utilidade de um sistema tão simples é que permite estabelecer de maneira muito fácil e direta vários conceitos úteis na compreensão de sistemas dinâmicos mais complexos.

Muitas estruturas simples podem ser representadas razoavelmente por sistemas com 1GDL. Também, a solução de sistemas complexos pode ser obtida reduzindo o problema a 1GDL ou a uma combinação de sistemas com 1GDL.

A viga simplesmente apoiada e o pórtico de um pavimento mostrados na **Fig.II.2** podem ser representados aproximadamente por um sistema de massa concentrada e mola com somente uma componente de deslocamento, ou seja 1GDL.



**Fig. II.2.- Sistemas com um grau de liberdade (1GDL).** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-25).

Estes modelos têm os seguintes elementos: (a) uma massa  $m$ , que representa a massa e a característica inercial da estrutura, (b) uma mola  $k$ , representando a força restauradora elástica e a capacidade de energia potencial da estrutura, (c) um amortecimento  $c$  que representa as características de fricção e dissipação de energia da estrutura, e (d) uma força excitadora  $F(t)$  que representa as forças externas atuando no sistema estrutural. Escreve-se a força  $F(t)$  deste modo para indicar que é uma função do tempo.

## II.2.2 EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO

A equação do movimento é encontrada a partir do equilíbrio da massa  $m$ . Nos modelos da *Fig. II.2* adota-se como referência o ponto de equilíbrio estático, não considerando-se o efeito do peso ( $mg$ ).

Deve-se observar que introduziu-se o efeito do amortecimento viscoso, quando utiliza-se a velocidade  $\left(\dot{u}\right)$  para exprimir a força de amortecimento.

Como a massa  $m$  está submetida a uma força  $F(t)$  que varia com o tempo, o corpo não está mais em repouso, o equilíbrio de forças não é nulo, mas leva a existência de uma aceleração, e o movimento passa a ser variado. Assim da segunda lei de Newton:

$$F = m a \quad (2.1)$$

$$F_{(t)} - ku - c\dot{u} = m\ddot{u} \quad (2.2)$$

Normalmente é mais conveniente usar o *princípio de D'Alembert*, segundo o qual o equilíbrio dinâmico em qualquer instante pode ser encontrado acrescentando às forças externas e internas uma força de inércia igual ao produto da

massa pela aceleração,  $m \ddot{u}$ , e que opõe-se ao movimento, ou seja, é orientada no sentido negativo do deslocamento. Desta forma o equilíbrio será:

$$F_{(t)} - ku - c\dot{u} - m\ddot{u} = 0 \quad (2.3)$$

ou:

$$m\ddot{u}_{(t)} + c\dot{u}_{(t)} + ku_{(t)} = F_{(t)} \quad (2.4)$$

Esta equação, relaciona a aceleração,  $\ddot{u}$  ( $d^2u/dt^2$ ), a força na mola, a força do amortecedor e a força aplicada em qualquer instante no tempo. Corresponde a uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. A solução dá a resposta do sistema, ou seja, a variação de  $u$  com o tempo. Esta pode ser escrita como a soma da solução geral da equação homogênea que envolve duas constantes de integração e qualquer solução particular da equação completa. As constantes de integração determinam-se impondo as condições iniciais (deslocamento  $u$  e velocidade  $\dot{u}$  ( $du/dt$ )), na origem do tempo  $t = t_0$  (frequentemente  $t_0 = 0$ ).

## II.2.3 VIBRAÇÕES LIVRES

### II.2.3.1 VIBRAÇÕES LIVRES NÃO AMORTECIDAS

Considere-se os modelos da *Fig.II.2*, nos quais negligenciam-se as forças friccionais ou de amortecimento. Adicionalmente considerem-se os sistemas, durante seu movimento ou vibração, estarem livres de forças ou ações externas. Sob estas condições, o sistema em movimento está governado somente pela influência das chamadas condições iniciais, isto é, um dado deslocamento e velocidade no tempo  $t = 0$ , onde inicia-se o estudo do sistema. Este estado é conhecido como o de *vibração livre não amortecida*.

Na *eq. (2.4)* faz-se  $F(t) = 0$ , e  $c = 0$ . Assim tem-se uma equação diferencial homogênea, cuja solução representa a *frequência natural* e o *modo de vibração* correspondente.

$$m \ddot{u}_{(t)} + k u_{(t)} = 0 \quad (2.5)$$

A solução corresponde à solução geral da equação diferencial, neste caso:

$$u(t) = A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t = X \sin (\omega_n t + \alpha)$$

onde;  $\omega_n^2 = k/m$  é a frequência natural circular ou angular;

$$X = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \text{ é a amplitude da vibração;}$$

$$\tan \alpha = \frac{A_2}{A_1} \text{ é o ângulo de fase.}$$

As grandezas  $A_1$  e  $A_2$ , ou  $X$  e  $\alpha$ , são determinadas a partir das condições iniciais do problema, ou seja, no tempo  $t = 0$  o deslocamento vale  $u_0$  e a velocidade  $\dot{u}_0$  podendo ambos, ou um deles, serem nulos.

Avaliando as constantes  $A_1$  e  $A_2$ , tem-se:

$$u(t) = (\dot{u}_0 / \omega_n) \text{ sen } \omega_n t + u_0 \cos \omega_n t \quad (2.6)$$

A expressão anterior dá como resposta o deslocamento em qualquer instante devido a um deslocamento inicial, ou velocidade, ou ambos.

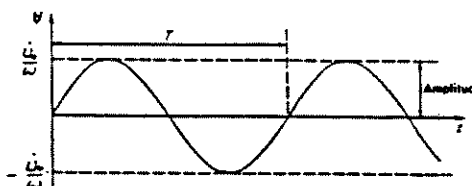
Pode-se observar na *Fig. II.3* que o movimento é periódico, ou seja, repete-se a cada intervalo de tempo, podendo-se chamá-lo de harmônico com uma frequência natural e período dados por:

$$\text{-Frequência natural circular ou angular} = \omega_n = \sqrt{k/m} \text{ em radianos/seg.} \quad (2.7)$$

$$\text{-Frequência natural} = f = \omega_n / 2\pi = (\sqrt{k/m}) / 2\pi \text{ em hertz ou ciclos/seg.} \quad (2.8)$$

$$\text{-Período natural} = T = 1/f = 2\pi \sqrt{m/k} \text{ em segundos.} \quad (2.9)$$





**Fig. II.3.- Vibração livre não amortecida.** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-25).

### II.2.3.2 VIBRAÇÕES LIVRES AMORTECIDAS

Fazendo  $F(t) = 0$  na *eq. (2.4)*, tem-se:

$$m \ddot{u}_{(t)} + c \dot{u}_{(t)} + k u_{(t)} = 0 \quad (2.10)$$

Resolve-se a equação colocando como solução a função:

$$u(t) = X e^{\lambda t} \quad (2.11)$$

Substituindo-se na *eq. (2.10)*, obtem-se:

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0$$

e:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \left[ \left( \frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2}$$

a) Quando  $\left( \frac{c}{2m} \right)^2 > \frac{k}{m}$ , as duas raízes são reais. A solução da *eq. (2.10)* passa a

ser:

$$u(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.12)$$

Deve-se observar que as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e negativas, assim, a massa retornará à sua posição original monotonicamente com velocidade decrescente, isto é, não haverá movimento vibratório.

Entretanto, este caso ocorre toda vez que o amortecimento é grande ( $c > 2\sqrt{km}$ ). O sistema está sobre-amortecido. (ver Fig. II.4).

b) Quando  $\left( \frac{c}{2m} \right)^2 < \frac{k}{m}$ , as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexas; a solução passa a ser:

$$u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) \quad (2.13)$$

onde:  $\omega_d = \left[ \frac{k}{m} - \left( \frac{c}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}$  é a *frequência natural amortecida*.

Nota-se da solução *eq. (2.13)* que a existência de uma função exponencial elevada a uma grandeza negativa faz com que a amplitude decresça com o tempo. Este é o caso de um *sistema sub-amortecido*, e é o de maior interesse na dinâmica de sistemas sujeitos a sismos. (*Fig. II.5*)

c) Para o caso onde o amortecimento vale  $(2\sqrt{km})$ , que é o de transição entre (a) e (b), onde as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são iguais, chama-se de *amortecimento crítico* a este valor de  $c$ . Então o *sistema está criticamente amortecido; não existe vibração* ( $\omega_d = 0$ ). Assim, valem as relações:

$$C_c = 2\sqrt{km} = 2k / \omega_n = 2m \omega_n \text{ que é o } \textit{amortecimento crítico}$$

$$\gamma = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \Rightarrow \gamma \omega_n = \frac{c}{2m} \text{ onde } \gamma \text{ é a relação entre o}$$

amortecimento  $c$  da estrutura e o amortecimento crítico  $c_c$ .

Daquí, a *expressão (2.13)* pode ser reescrita:

$$u(t) = e^{-\gamma \omega_n t} (A_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) \quad (2.14)$$

ou

$$u(t) = X e^{-\gamma \omega_n t} [\text{Sen}(\omega_d t + \alpha)] \quad (2.15)$$

Pela forma senoidal, o efeito do amortecimento será maior de acordo com

$\gamma$  (ver Fig. II.5)

$$\omega_d = \left[ \frac{k}{m} - \left( \frac{c}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ ou:}$$

$$\omega_d = \omega_n (1 - \gamma^2)^{1/2} \text{ que é a } \textit{frequência natural amortecida} \quad (2.16)$$

$$\gamma = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \text{ é o fator ou razão de amortecimento} \quad (2.17)$$

$$\tan \alpha = \frac{A_2}{A_1} \text{ é o ângulo de fase} \quad (2.18)$$

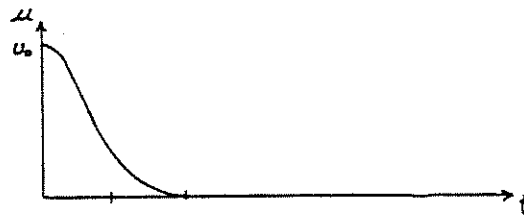
Usando  $\gamma$ , a eq. (2.10) é:

$$\ddot{u}(t) + 2\gamma\omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \quad (2.19)$$

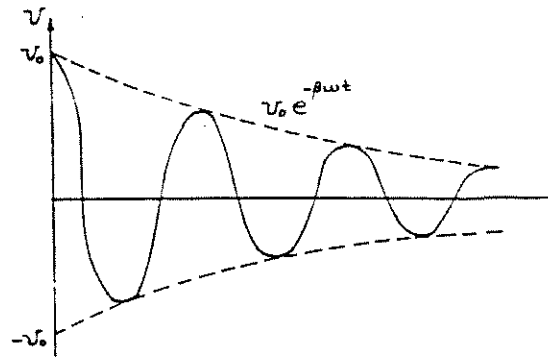
Esta expressão dá a resposta do sistema em função do amortecimento e da frequência natural de vibração.

Considerando-se o dado real onde  $\gamma$  é menor que 0,2 (exceto nos casos onde é provido grande amortecimento), a frequência natural circular de vibração das estruturas tendo em conta o amortecimento próprio ( $\omega_d$ ), é aproximadamente igual à frequência natural circular destas estruturas sem o efeito do amortecimento próprio ( $\omega_n$ ).

Assim, para fins práticos, a negligência do amortecimento próprio constitui-se em boa aproximação para o problema, dada a simplicidade no cálculo que ela introduz. Em estruturas, o valor típico de  $\gamma$  varia entre 0,01 e 0,05; para solos pode alcançar entre 0,10 e 0,20.



**Fig. II.4.- Sistema sobre-amortecido, não existe vibração.** (do livro *Análisis Dinámico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-27)



**Fig. II.5.- Vibração livre amortecida.** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué, J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-27).

## II.2.4.- RESPOSTA A EXCITAÇÕES SIMPLES

Quando a excitação não é nula, ela pode aparecer como deslocamentos impostos, acelerações dos apoios ou forças externas. Então a solução completa é obtida superpondo as respostas para cada excitação (supondo sistema linear), com a homogênea.

Dentre os vários tipos de excitação, tem-se:

1.- Forças harmônicas, geralmente usadas em problemas de máquinas motrizes.

$$F_{(t)} = F_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (2.20)$$

Onde:  $\omega$  é a frequência natural da excitação.

Nestes problemas procura-se as respostas em regime de trabalho.

2.- Forças transientes ou aperiódicas; são forças aplicadas repentinamente e por um intervalo de tempo muito pequeno. Neste caso procura-se a resposta transiente, ou o máximo deslocamento da massa (ou máxima extensão da mola), que ocorre durante a aplicação da força ou no período imediatamente seguinte.

3.- Forças aleatórias, que são forças que somente podem ser descritas em termos estatísticos; por exemplo os efeitos do vento.

Deve-se lembrar que as forças dinâmicas podem ser introduzidas por movimentos do apoio, como no caso dos sismos, ao invés de somente pelas cargas aplicadas.

É útil analisar a resposta de um sistema de 1GDL a algumas excitações simples.

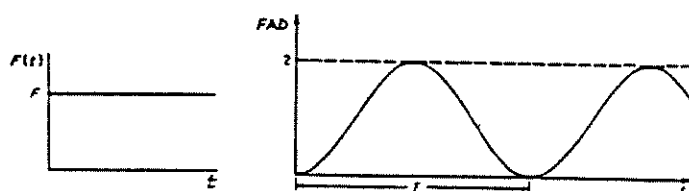
A solução da *eq.(2.4)* consta de duas partes: a solução geral que corresponde à solução homogênea (vibração livre do item anterior), mais a solução particular  $u_p$  -que é qualquer solução que satisfaz a equação diferencial- e que pelo geral corresponde a uma que tem a mesma forma matemática da função excitadora. Daqui:

$$u(t) = u_p + A_1 \sin \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t \quad (2.21)$$

Na **Fig. II.2**, se a massa  $m$ , em repouso (deslocamento e velocidade iniciais iguais a zero), é instantaneamente sujeita a uma força aplicada  $F_0$ , e mantida indefinidamente, os deslocamentos serão (desprezando-se o amortecimento):

$$u(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) \quad (2.22)$$

Na **Fig. II.6** observa-se a variação da resposta com o tempo. Partindo-se de zero, a resposta alcançará um máximo de  $2F_0/k$ .



**Fig. II.6.- Carga constante e máxima resposta.** (do livro *Análisis*

*Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-26).

#### II.2.4.1.- FATOR DE AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA

Uma forma conveniente de tornar adimensional a resposta consiste em exprimi-la em termos de um *fator de amplificação dinâmica (FAD)*. O FAD é a relação (quociente), entre a amplitude da vibração forçada e a deflexão estática que é causada por  $F_0$ , ou seja:



$$FAD = \frac{u(t)}{\frac{F_0}{k}} = \frac{u(t)}{u_{\text{estático}}}; \quad u_{\text{est.}} = \frac{F_0}{k} \quad (2.23)$$

Daqui, para o caso anterior da força aplicada subitamente, tem-se:

$$u_{\text{máx}} = 2 u_{\text{est}} \quad (2.24)$$

A força na mola será  $2F_{\text{est}}$ . Então, para este caso, a variação no tempo do FAD será:

$$FAD(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad \text{e} \quad u(t) = u_{\text{est}} \cdot FAD(t) \quad (2.25)$$

Qualquer força aplicada subitamente e, que mantenha-se constante sobre um sistema, dá como resultado máximo uma amplificação de 2. No entanto, quando a força varia no tempo após a sua aplicação inicial, podem apresentar-se amplificações maiores.

#### II.2.4.2.- RESPOSTA AOS TRANSIENTES

O que ocorre se a força é aplicada por um certo tempo  $t_d$ ? A solução tem que ser obtida em dois intervalos de tempo. Um até  $t \leq t_d$  e outro quando  $t > t_d$ . Para o primeiro caso, a solução anterior é aplicável. Não entanto, quando  $t > t_d$  a força não está

atuando, e tem-se vibração livre com as condições iniciais de deslocamento e velocidade existentes no instante  $t = t_d$ . O comportamento do sistema dependerá do grau de amortecimento para a continuidade no tempo. Tem-se (desprezando-se o amortecimento):

$$u(t) = \frac{F}{k} (1 - \cos \omega_n t); \quad \text{para } t \leq t_d \quad (2.26)$$

$$u(t) = \underbrace{\frac{F}{k} (1 - \cos \omega_n t_d)}_{\substack{\downarrow \\ \dot{u}(t_d)}} \cos(t - t_d) + \underbrace{\frac{F}{k} \sin \omega_n t_d}_{\substack{\downarrow \\ u(t_d)}} \sin(t - t_d); \quad t > t_d \quad (2.27)$$

$$u(t) = \frac{F}{k} [\cos(t - t_d) - \cos \omega_n t]; \quad \text{para } t > t_d \quad (2.28)$$

O FAD para ambos casos é:

$$\text{FAD} = 1 - \cos \omega_n t = 1 - \cos 2\pi t/T; \quad \text{para } t \leq t_d \quad (2.29)$$

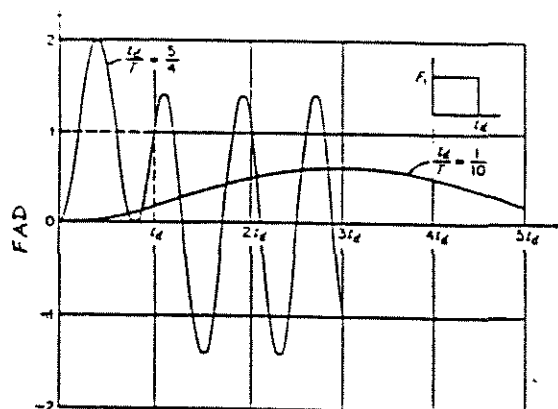
$$\text{FAD} = \cos(t - t_d) - \cos \omega_n t = \cos 2\pi (t/T - t_d/T) - \cos 2\pi t/T; \quad t > t_d \quad (2.30)$$

É conveniente tornar o parâmetro tempo adimensional como indica-se nas equações anteriores, nas quais  $T$  é o período natural. Isto também serve para fixar o fato que a razão do tempo de duração ao período natural ( $t_d / T$ ), mais que o valor real dessas quantidades, é o parâmetro importante.

Da eq. (2.29) pode-se visualizar que o valor máximo do  $FAD = 2$ , somente será alcançado se  $t_d$  é igual a  $T/2$  e, neste caso, não interessa quanto mais dure a aplicação da força, o máximo seguirá sendo 2. Se  $t_d < T/2$ , o  $FAD$  será  $< 2$ .

Na Fig. II.7 observa-se a resposta típica para dois casos de  $t_d$ . Em ambos os casos o efeito do período é muito significativo.

Se o período é relativamente curto - um sistema rígido - o sistema responde rapidamente, alcançando a máxima resposta antes que a aplicação da força cesse, resultando o  $FAD > 1$ . Se o período é relativamente longo - um sistema flexível - a resposta máxima ocorre depois que a força cessa e o efeito da mesma diminui, sendo o  $FAD < 1$ .



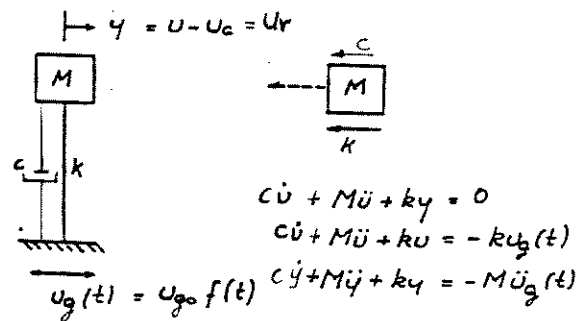
**Fig. II.7.- Pulso retangular.** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-26).

## II.2.5.-EXCITAÇÃO SÍSMICA. MOVIMENTO DA BASE DE APOIO

Um sismo produz um movimento da base de apoio do sistema. Neste caso, a equação do movimento para o sistema mostrado na *Fig. II.8* é:

$$m \ddot{u} = -k u_r - c \dot{u}_r \quad (2.31)$$

onde:  $u_r$  é o deslocamento relativo da massa  $m$  em relação ao solo, ou seja, a distorção da mola.



**Fig. II.8.- Sistema com 1GDL sujeito à movimento da base.** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-26).

O movimento da base está definido por  $u_g(t)$ . Substituindo-se  $u_r = u - u_g$  na eq. (2.31) tem-se:

$$m \ddot{u} = -k(u - u_g) - c(\dot{u} - \dot{u}_g) \quad (2.32)$$

ou;

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = k u_g + c \dot{u}_g \quad (2.33)$$

onde,  $u_g(t)$  é o movimento inicial do apoio.

Pode-se escrever a *eq. (2.31)*, em termos do deslocamento relativo  $u_r$ :

$$m \ddot{u}_r + c \dot{u}_r + k u_r = -m \ddot{u}_g \quad (2.34)$$

Esta equação é semelhante à *eq.(2.4)* onde  $F(t)$  foi substituído por  $m \ddot{u}_g$ , e a incógnita representa o deslocamento relativo ( $u_r$ ). Portanto neste caso podem usar-se as soluções analíticas obtidas para forças aplicadas.

É interessante analisar os casos limites. Para sistemas muito flexíveis, o solo alcançará seu máximo deslocamento antes que a massa tenha tempo de responder e, por conseguinte, o deslocamento relativo máximo será igual ao máximo deslocamento da base. Também, a aceleração máxima da massa será muito pequena comparada com a aceleração da base. No entanto, para sistemas muito rígidos, a massa simplesmente segue a base, resultando numa aceleração máxima da massa igual à máxima aceleração da base, e o deslocamento relativo é praticamente nulo.

O deslocamento relativo é talvez a variável mais importante a ser obtida, posto que ele é indicativo do esforço na mola (isto é, a estrutura).

Devido a este fato, é mais comum especificar o movimento da base em termos de aceleração ao invés de deslocamento. Os sismos são precisamente registrados desta maneira. Mais ainda, a solução neste caso dá o deslocamento relativo ao invés do deslocamento absoluto, que é o caso da *eq. (2.34)*. Dividindo esta expressão por  $m$ , tem-se (desprezando-se o amortecimento):

$$\ddot{u}_r + \omega_n^2 u_r = - \ddot{u}_g \quad (2.35)$$

No caso do sismo,  $\ddot{u}_g(t)$  não segue uma função analítica simples, e será necessário fazer uso de procedimentos de integração numérica para conhecer a resposta do sistema.

Existe uma relação importante entre os valores máximos da aceleração absoluta e do deslocamento relativo. Da *eq.(2.31)*., e desprezando-se o amortecimento, tem-se:

$$m \ddot{u} + k u_r = 0 \quad (2.36)$$

Da *Fig. II.7* e da *eq. (2.36)*, é evidente que os valores máximos de  $\ddot{m}u$  e

$ku_r$  devem ocorrer simultaneamente. Assim:

$$m \ddot{u}_{máx} + k u_{r máx} = 0 \quad (2.37)$$

$$\ddot{u}_{máx} = - \frac{k}{m} (u_{r máx}) \quad (2.38)$$

$$\ddot{u}_{máx} = - \omega_n^2 u_{r máx} \quad (2.39)$$

Esta é uma expressão geral que sempre é satisfeita, exceto quando existe amortecimento, em cujo caso, apresenta-se um pequeno erro. Indica que a força máxima na mola pode ser calculada, tanto a partir da força de inércia ( $\ddot{m}u_{máx}$ ) quanto a partir da distorção na mola ( $ku_{r máx}$ )

## II.2.6 TIPOS DE AMORTECIMENTO

A maioria das estruturas e dos solos apresentam amortecimento, pequeno nas estruturas, maior nos solos.

O efeito, no entanto, não é importante para respostas de curta duração, ou seja, quando a resposta máxima ocorre em um ou dois ciclos de vibração. No entanto, para respostas de longa duração, que se prolongam por vários ciclos, pode ser extremamente importante. Este é precisamente o caso das excitações sísmicas.

O amortecimento manifesta-se como uma diminuição da amplitude do movimento em cada ciclo devido à dissipação de energia.

Entre os diversos tipos de amortecimento temos:

## 1.- AMORTECIMENTO VISCOSO

Matematicamente, a forma mais simples de considerar o amortecimento corresponde à existência de um amortecedor viscoso, com uma resistência proporcional à velocidade de deformação (*Fig.II.2*). A expressão do movimento corresponde à *eq. (2.4)*, onde  $c$  é a constante de amortecimento.

A solução da equação homogênea com amortecimento viscoso foi analisada no item *II.2.3.2*.

Na realidade, o amortecimento viscoso, e o conceito de viscosidade, estão associados com o comportamento dos fluidos (ou fluxo plástico em materiais estruturais). Sob condições normais, as estruturas apresentam uma quantidade mínima de viscosidade. As perdas de energia sob movimentos cíclicos devem-se principalmente à fricção e ao comportamento inelástico (não linear) dos materiais.



## 2.- AMORTECIMENTO POR FRICÇÃO OU DE COULOMB

Este tipo de amortecimento é introduzido na equação do movimento acrescentando uma força de fricção  $R$ , com o sinal próprio, dependente da direção do movimento.

$$m \ddot{u} + k u \pm R = F(t) \quad (2.40)$$

A solução desta equação é relativamente mais complicada, porque é necessário conhecer a força de fricção  $R$ , que depende do sinal da velocidade.

## 3.- AMORTECIMENTO HISTERÉTICO OU ESTRUTURAL

A energia dissipada no amortecimento é o trabalho da força de amortecimento nos deslocamentos da massa  $m$ , ou seja:  $T_{\text{dissip}} = \int c \dot{u} du$

Para simplicidade nos cálculos, seja a energia dissipada em um ciclo de aplicação da força, ou entre zero e  $2\pi/\omega$ , onde  $\omega$  é a frequência circular da força; logo:

$$T_{\text{dissip}} = \int_0^{2\pi/\omega} c \dot{u} \dot{u} dt = \int_0^{2\pi/\omega} c u^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \alpha) dt = \pi c \omega u^2 \quad (2.41)$$

Nota-se que a energia dissipada no amortecimento é linearmente proporcional à frequência da força aplicada. Sem ingressar nos detalhes do amortecimento, percebe-se que uma forma constante em sua energia dissipada é uma melhor aproximação do caso real. Deste modo, o modelo matemático para este problema é:

$$m \ddot{u}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{u}(t) + k u(t) = F(t) \quad (2.42)$$

onde,  $h$  é o valor constante de dissipação de energia.

Neste caso o amortecimento é inversamente proporcional à frequência da força excitadora.

## IL2.7 VIBRAÇÕES HARMÔNICAS

É importante a análise de sistemas sujeitos à forças dinâmicas  $F(t)$  da forma  $F_0 \sin \omega t$ . Esta situação corresponde a excitações dinâmicas impostas por máquinas rotatórias com alguma excentricidade (projeto de fundações de máquinas).  $F_0$  é proporcional ao peso desbalanceado e  $\omega$  é a frequência circular ou velocidade da máquina. Também é de utilidade para interpretar o caso de sismos nos quais o movimento pode ser considerado como a superposição de muitas ondas harmônicas de distintas amplitudes e frequências.

Considerando a equação do movimento, incluindo-se amortecimento viscoso, tem-se:

$$\ddot{m}u + \dot{c}u + k u = F_0 \text{sen } \omega t \quad (2.43)$$

A solução é a soma de duas partes, a da equação diferencial homogênea, ou a das vibrações livres, e a da solução particular, que é da forma:

$$u_p(t) = \frac{F_0 \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \text{sen } \omega t - 2\gamma \frac{\omega}{\omega_n} \cos \omega t}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (2.44)$$

A solução completa é:

$$u(t) = e^{-\gamma \omega_n t} (A_1 \text{sen } \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) + \frac{F_0 \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \text{sen } \omega t - 2\gamma \frac{\omega}{\omega_n} \cos \omega t}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\gamma^2 \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (2.45)$$

O primeiro termo corresponde à solução geral, e representa um movimento com a frequência natural amortecida do sistema,  $\omega_d$  (lembrar que para

valores de  $\gamma$  de interesse prático,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \gamma^2}$ , é quase idêntico a  $\omega_n$ ). A amplitude deste movimento é função das condições iniciais e diminui exponencialmente.

O segundo termo, que é a solução particular, representa um movimento harmônico com a frequência da força excitadora  $\omega$ . Sua amplitude permanecerá com um valor constante igual a:

$$\frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.46)$$

O primeiro termo também é referido como a contribuição da vibração livre à resposta, enquanto o segundo representa a vibração forçada. Enquanto o primeiro termo ainda contribui significativamente para o movimento, diz-se que a solução completa representa um movimento transitório. Depois que a contribuição faz-se mínima, o segundo termo diz-se que representa a resposta estacionária ou o estado estacionário da resposta. A *eq. (2.46)* pode exprimir-se:

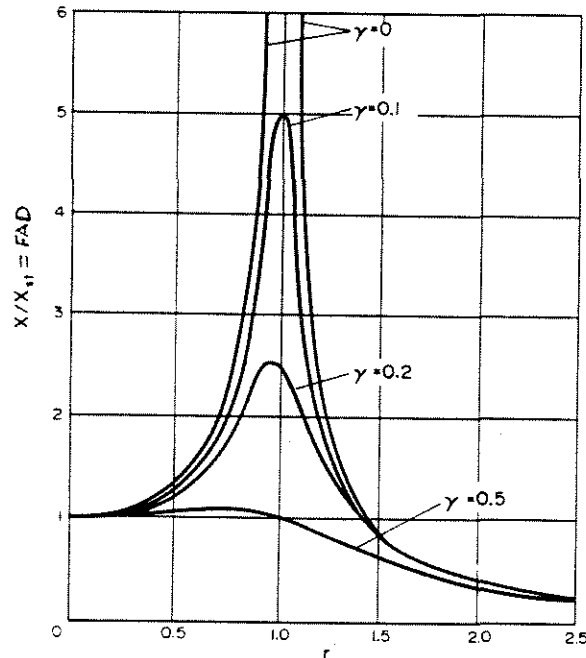
$$u_{\text{estacionário}} = u_{\text{estático}} \cdot FAD \quad (2.47)$$

Onde:  $u_{\text{estático}} = F_0 / k$  é a amplitude estática.

$$FAD = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\gamma^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{1}{\left[(1-r^2)^2 + (2\gamma r)^2\right]^{1/2}} \quad (2.48)$$

onde:  $r = \omega/\omega_n$ ;  $\gamma = c/c_c$ ;  $c_c = 2(k m)^{1/2} = 2k / \omega_n = 2 m \omega_n$

O FAD, eq. (2.47), é mostrado a seguir na **Fig. II.9** em função do amortecimento  $\gamma$ .



**Fig. II.9.-** Resposta a uma vibração forçada: Variação do FAD com a relação de frequências  $r$  ( $\omega / \omega_n$ ) para distintos valores do fator de amortecimento  $\gamma$  ( $c / c_d$ ). (do livro *The Dynamical Behavior of Structures*, por G.B. Warburton. 2. ed. Oxford, Pergamon Press, 1976. p.13.).

Da figura anterior deduz-se o seguinte:

- Se o sistema é rígido, ou quando os valores de  $r (\omega / \omega_n)$  são pequenos, casos em que a carga tem uma variação lenta em relação ao período natural do sistema, o fator de magnificação  $FAD$  é quase 1, e a resposta é controlada pela rigidez da mola (a carga pode ser considerada como estática).
- Se o sistema é muito flexível, ou quando os valores de  $r (\omega / \omega_n)$  são grandes, de modo que a carga varia rapidamente em relação ao período natural do sistema, este último não tem tempo de reagir e a aceleração da massa torna-se perto de zero, de modo que o  $FAD$  tem valores menores que a unidade, e a resposta do sistema é controlada pela inércia do sistema.
- Existe um regime intermediário, quando a frequência da excitação está perto da frequência do sistema, onde o  $FAD$  pode atingir valores muito altos. A resposta neste regime está primariamente controlada pela magnitude do amortecimento do sistema.

A condição  $\omega = \omega_n$  é referida normalmente como **ressonância**. Neste ponto, o  $FAD$  é  $\frac{1}{2} \gamma$ , e a resposta é quase a máxima (o máximo ocorre realmente

quando  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2 \gamma^2}$ , com um valor  $\left[ FAD = \frac{1}{2\gamma \sqrt{1 - 2 \gamma^2}} \right]$ ).

Para amortecimentos típicos de 5% ( $\gamma = 0,05$ ), a máxima amplificação é do ordem de dez (10).

No desenho de fundações de máquinas, normalmente o desejável é que a frequência fundamental da fundação esteja o mais longe possível da frequência de operação da máquina .

## II.2.8 EXCITAÇÃO ARBITRÁRIA : INTEGRAL DE DUHAMEL

A solução particular para a resposta de um sistema de 1GDL sujeito a uma excitação arbitrária, está dada pela integral de Duhamel. Esta pode ser deduzida considerando-se a força excitadora como uma série de pequenos impulsos atuando num instante  $\tau$  , produzindo uma velocidade inicial, e integrando a resposta para este caso(velocidade inicial)desde aquele instante qualquer, até o tempo  $t$ .

$$u_p(t) = \frac{F_0}{\omega_d m} \int_0^t f(\tau) e^{-\gamma \omega_n (t - \tau)} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \quad (2.49)$$

Esta é uma integral chamada de convolução. Será necessário acrescentar a solução geral correspondente à vibração livre para obter a solução completa. Esta incluirá as constantes  $A_1$  e  $A_2$  , que levam em conta as condições iniciais de deslocamento e velocidade, além da solução particular avaliada no tempo  $t_0$  inicial.

Com fins práticos, por exemplo, para um terremoto, a integral deve ser avaliada por métodos numéricos. No entanto, o procedimento preferido é aplicar análise numérica diretamente na equação do movimento.

## **II.2.9 ANÁLISE TEMPO-HISTÓRIA**

A análise tempo-história é um procedimento pelo qual a equação diferencial do movimento é resolvida passo a passo (também é conhecida com este nome), começando no tempo zero, quando o deslocamento e a velocidade são supostamente conhecidos. A escala do tempo é dividida em intervalos discretos, nos quais se conhece a aceleração do solo, e se progride extrapolando sucessivamente o deslocamento de um intervalo do tempo ao seguinte.

## **II.2.10 ESPECTRO DE RESPOSTA**

Uma ferramenta muito útil e comum na análise dinâmica sísmica é o espectro de respostas de um terremoto. Este espectro é o lugar geométrico das máximas respostas de um sistema de 1GDL sujeito à excitação de um sismo na base de apoio. Estas respostas para uma frequência natural e amortecimentos específicos podem ser obtidas por integração numérica (no domínio do tempo ou de frequências) da equação do movimento.



$$m \ddot{u}_r + 2 \gamma \omega_n m \dot{u}_r + k u_r = -m \ddot{u}_g(t) \quad (2.50)$$

$$\ddot{u}_r + 2 \gamma \omega_n \dot{u}_r + \omega_n^2 u_r = -\ddot{u}_g(t) \quad (2.51)$$

Repetindo estes cálculos para um conjunto completo de osciladores, com a mesma quantidade de amortecimento  $\gamma$ , e para um espectro de frequências naturais  $\omega_n$ , é possível desenhar os gráficos dos diferentes parâmetros da resposta versus a frequência ou o período. Um gráfico de  $u_r \text{ máx}$  versus frequência natural dá-nos o que é chamado um espectro de respostas de deslocamento relativo de um terremoto dado para o amortecimento  $\gamma$  especificado.

Para amortecimento zero, a máxima aceleração absoluta é  $-\omega_n^2 u_r \text{ máx}$ , ou, como somente interessa o valor absoluto, pode obter-se o espectro de acelerações multiplicando o de deslocamentos relativos por  $\omega_n^2$ .

Para sistemas amortecidos esta relação não é válida, mas, para os valores de interesse de  $\gamma$ , a diferença é desprezível. A máxima velocidade relativa é também perto de  $\omega_n$  vezes o máximo deslocamento relativo, exceto para valores pequenos de  $\omega_n$ . Logo, frequentemente define-se:

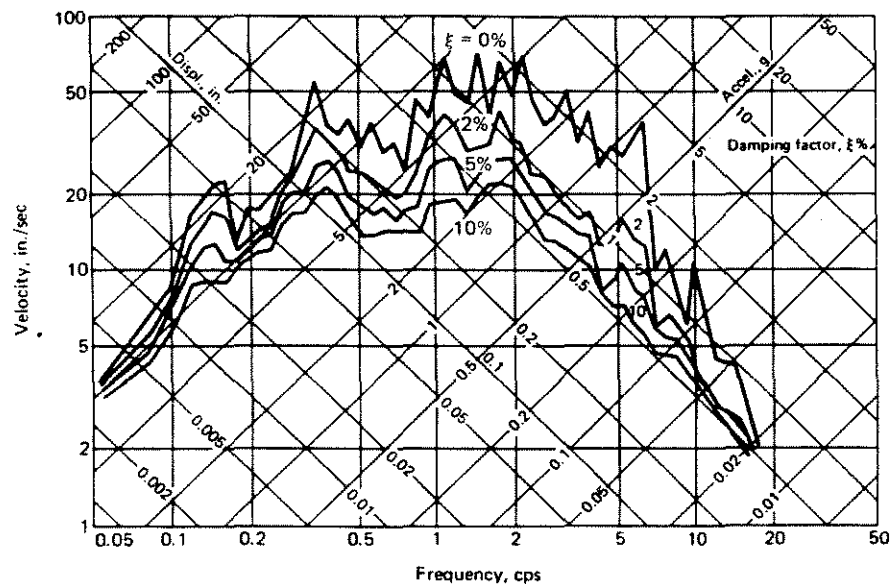
Espectro de deslocamento relativo  $S_d(\omega_n, \gamma) = \text{máx (em t) de } u_r(t)$

Espectro de pseudo-velocidade relativa  $S_v(\omega_n, \gamma) = \omega_n S_d(\omega_n, \gamma)$

Espectro de pseudo-acelerações absolutas  $S_a(\omega_n, \gamma) = \omega_n^2 S_d(\omega_n, \gamma)$

Por causa destas relações diretas entre os três espectros, costuma-se desenhar o espectro de pseudo-velocidades como função do período ou frequência num papel com escalas logarítmicas triplas. As linhas horizontais correspondem aos valores constantes da pseudo-velocidade. As linhas inclinadas a  $45^\circ$  com gradiente positivo representam valores constantes da pseudo-aceleração. As linhas inclinadas a  $45^\circ$  com gradiente negativo, representam valores constantes de deslocamento relativo.

A *Fig. II.10* mostra um espectro desenhado usando estas coordenadas. Deste único gráfico pode-se ler os valores dos três efeitos para qualquer sistema de 1GDL.



**Fig. II.10.- Espectro de resposta em coordenadas trilogarítmicas.** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.178.).

## **II.3 VIBRAÇÃO DE SISTEMAS COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE**

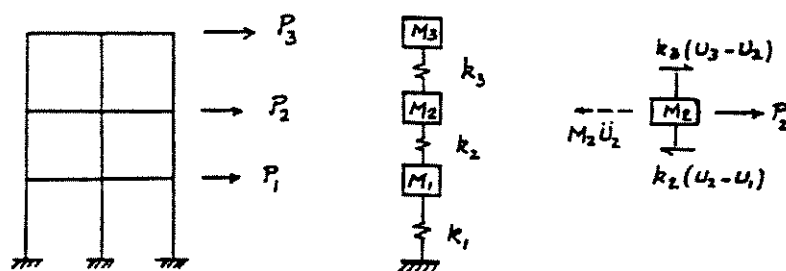
Quando trata-se com sistemas estruturais reais, é necessário, em geral, considerar vários graus de liberdade, cada um correspondente a uma coordenada independente.

O número de graus de liberdade deveria ser igual ao número de componentes de deslocamento necessário para definir adequadamente a deformada do sistema sob o tipo de excitação de interesse, e, como consequência, poder determinar as forças internas de modo suficientemente aproximado.

No caso de edifícios submetidos a carregamento sísmico, a excitação principal são acelerações horizontais que inserem à estrutura uma deformação lateral, e cujos graus de liberdade independentes importantes são os deslocamentos horizontais dos nós.

### **II.3.1 MODELOS**

O modelo mais simples para um sistema com vários graus de liberdade corresponde a uma série de massas interconectadas por molas sem peso, como se mostra na *Fig. II.11*.

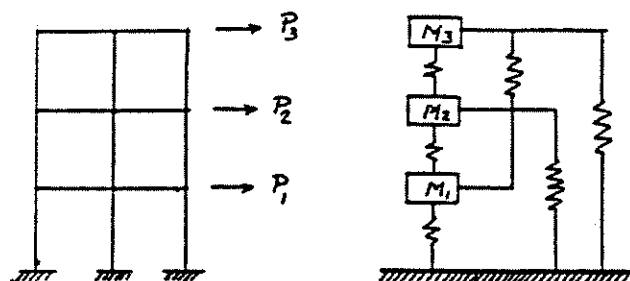


**Fig. II.11.- Sistema com vários graus de liberdade. Modelo de acoplamento tipo cortante.** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-30).

Este modelo chama-se de sistema de acoplamento *tipo cortante*. Estritamente só é aplicável às vibrações laterais de um pórtico com vigas infinitamente rígidas e desprezando-se a deformação axial dos pilares; ou também a sistemas vibratórios cujas deformações sejam principalmente deslocamentos laterais. Por isto também denomina-se modelo *tipo cortante*.

Numa estrutura real, no entanto, as massas estão conectadas por elementos flexíveis e o modelo anterior poderá não ser aplicável.

O modelo real seria um em que as massas encontram-se todas interconectadas, denominando-se este modelo de *acoplamento interconectado* (Fig. II.12).



**Fig.- 2.12.- Sistema com vários graus de liberdade. Modelo de acoplamento interconectado (vigas flexíveis).** (do livro *Análisis Dinâmico*, por Piqué J. e Scaletti, H. Lima, ACI, 1991. p.1-30).

### II.3.2 MASSAS E RIGIDEZES

Considere-se inicialmente um modelo tipo cortante de  $n$  graus de liberdade para estudar as propriedades básicas dos sistemas com vários GDL. Fazendo-se um diagrama de corpo livre de cada massa, a correspondente equação do equilíbrio dinâmico, desprezando-se o amortecimento, pode ser escrita como: (*Fig. II.11*)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = F_1 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 = F_2 \\ \vdots \\ m_n \ddot{u}_n - k_n u_{n-1} + k_n u_n = F_n \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

Há tantas equações do movimento quantos graus de liberdade existentes.

Exprimindo-se as equações anteriores em forma matricial, tem-se:

$$[M] \left\{ \ddot{U} \right\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (2.53)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massas do sistema,  $[K]$  é a matriz de rigidez,  $\{F\}$  é o vetor de forças dinâmicas aplicadas,  $\{U\}$  e  $\left\{ \ddot{U} \right\}$  são os vetores de deslocamentos e acelerações respectivamente.

Para o modelo simples considerado ou em geral quando trata-se com massas concentradas, e usando os deslocamentos como graus de liberdade, a matriz de massas  $[M]$  é uma matriz diagonal com a  $i$ ésima massa,  $m_i$ , como o  $i$ ésimo elemento diagonal.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$[K]$  é a matriz de rigidez do sistema, que relaciona os graus de liberdade dinâmicos escolhidos com as forças correspondentes. Para o sistema com acoplamento *tipo cortante* em estudo tem a seguinte forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & . & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & . & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & (k_{n-1} + k_n) & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & . & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Notar que neste tipo de modelo o acoplamento das  $n$  equações diferenciais é proporcionado somente pela matriz de rigidez.

### II.3.3 PROPRIEDADES DINÂMICAS: MODOS E FREQUÊNCIAS

Como no caso de sistemas com 1GDL, é útil estudar o comportamento de um sistema sem amortecimento quando está submetido a uma perturbação inicial. As equações do movimento são:

$$[M] \left\{ \ddot{U} \right\} + [K] \{U\} = \{0\} \quad (2.56)$$

Onde  $\{0\}$  representa um vetor com n componentes, todas elas nulas. As condições iniciais são:  $\{U\}_{(0)} = \{U_0\}$  e  $\left\{ \dot{U} \right\}_{(0)} = \left\{ \dot{U}_0 \right\}$

Na seção anterior observou-se que um sistema com 1GDL, submetido a uma perturbação inicial, estaria forçado a vibrar com um movimento periódico de período T ou frequência circular ( $\omega_n = 2 \pi / T$ ), que é uma característica do sistema ( $\omega_n^2 = k/m$ ). Por analogia é interessante pesquisar se um sistema com vários graus de liberdade ao que impõe-se um conjunto inicial de deslocamentos (ou velocidades), vibrará harmonicamente, mantendo a forma relativa destes deslocamentos e variando somente as amplitudes por um fator de proporcionalidade.

Se o movimento é harmônico, U deve ser:

$$U = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t = X \sin (\omega_n t + \alpha) \quad (2.57)$$

U,  $A_1$ ,  $A_2$ , e X são vetores.  $\ddot{U}$  é  $-\omega_n^2 U$ . Logo a eq. (2.56), transforma-se em:



$$\begin{aligned}
 & -\omega_n^2 [M] \{U\} + [K] \{U\} = \{0\} \\
 & \text{ou:} \\
 & [K] \{U\} = \omega_n^2 [M] \{U\}
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Substituindo-se (2.57) em (2.58):

$$[K] \{X\} = \omega_n^2 [M] \{X\} \tag{2.59}$$

O problema é determinar se existem valores de  $\omega_n^2$  e vetores correspondentes  $X$  que satisfazem esta equação matricial, além da solução trivial  $\omega_n^2 = 0, x = 0$ . Este é um problema matemático chamado de autovalores, valores característicos, ou de valores próprios.

Considerando o problema da forma:

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \{X\} = \{0\} \tag{2.60}$$

Pode-se observar que esta equação representa um sistema com  $n$  equações algébricas lineares com  $n$  incógnitas (as componentes do vetor  $X$ ). Como o segundo membro é igual a zero, este é um sistema homogêneo. Não terá solução única (a solução trivial  $x = 0$ ), se o determinante da matriz dos coeficientes  $([K] - \omega_n^2 [M])$ , for nulo (matriz singular).

A expansão deste determinante resultará numa equação algébrica de grau  $n$  em  $\omega_n^2$ , denominada *equação característica*. As raízes desta equação são os valores de  $\omega_n^2$  procurados que fazem nulo o determinante.

Os valores  $\omega_n^2$  são as frequências naturais do sistema, e os vetores  $x$  são os modos de vibração. Um sistema com  $n$  graus de liberdade terá  $n$  frequências naturais e  $n$  formas modais ou modos de vibração associados.

Ao se resolver o sistema de *eqs. (2.53)*, a maior dificuldade é que elas estão acopladas, isto é, relacionadas entre si, o que obriga a uma resolução simultânea dessas equações. A análise modal desacopla as equações, gerando um conjunto de equações independentes de um grau de liberdade, facilitando a resolução.

Para a análise dinâmica de sistemas lineares em computadores, citaremos dois métodos de solução: integração direta e análise modal.

A primeira baseia-se na integração das equações passo a passo. A segunda técnica baseia-se na superposição dos modos de vibração para a montagem da resposta forçada; por esse motivo denominada superposição modal. Neste trabalho será estudada a última técnica, no capítulo III.

### II.3.4 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS DOS MODOS

Quando as matrizes  $[K]$  e  $[M]$  são simétricas, e uma delas é definida positiva ( $[K]$  o é quando a estrutura é estável), várias propriedades dos problemas de autovalores podem ser automaticamente garantidos.

- 1).- Se o sistema tem  $n$  graus de liberdade, a equação característica terá  $n$  raízes reais,  $\omega_1^2$  até  $\omega_n^2$  (deve-se notar que uma raiz pode ter uma ordem de multiplicidade maior que um. Se a ordem de multiplicidade é  $r$ , deve-se contar como  $r$  raízes. Este é o caso de um edifício simétrico com a mesma rigidez em ambas as direções principais).
- 2).- Para cada valor próprio ou característico (frequência natural)  $\omega_i$  de multiplicidade um, existe uma forma modal  $x_i$  definida em função de um fator, o que implica que impondo ao sistema um conjunto de deslocamentos com a forma do vetor  $x_i$ , este vibrará com a frequência  $\omega_i$ .
- 3).- As formas modais  $x_i$ ,  $x_j$ , correspondentes a duas frequências naturais  $\omega_i$ ,  $\omega_j$  são tais que:

$$x_i^T [M] x_j = \sum_k x_{ki} m_k x_{kj} = 0 \quad (2.61)$$

Esta propriedade é conhecida normalmente como a condição de ortogonalidade. Diz-se que os vetores  $x_i$  e  $x_j$  são ortogonais em relação à matriz de massas  $[M]$  (o somatório somente é válido quando a matriz de massas é diagonal). Deve-se notar que as formas modais também são ortogonais com relação à matriz de rigidez  $[K]$ , de modo que:

$$x_i^T [K] x_j = \sum_l \sum_n k_{ln} x_{li} x_{nj} = 0 \quad (2.62)$$

A ortogonalidade implica que um modo não pode ser obtido a partir de outro.

4).- O conjunto de  $n$  formas modais  $x_1$  até  $x_n$  constitui um conjunto completo definindo um espaço vetorial de ordem  $n$ . Isto implica que qualquer vetor  $v$  com  $n$  componentes pode ser expresso como uma combinação linear das formas modais.

$$v = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad (2.63)$$

Os coeficientes  $a_i$  são obtidos usando as condições de ortogonalidade.

Então pre-multiplicando ambos os lados da eq. (2.63) pela matriz  $[M]$  e o vetor  $[x_j^T]$ , tem-se:

$$x_j^T [M] v = \sum_{i=1}^n a_i x_j^T [M] x_i \quad (2.64)$$

Mas, como  $x_j^T [M] x_i = 0$ , para  $i$  diferente de  $j$ , obtem-se:

$$a_j = \frac{x_j^T [M] v}{x_j^T [M] x_j} \quad (2.65)$$

Esta propriedade é extremamente importante porque permite exprimir a solução de qualquer problema dinâmico como uma soma onde cada termo representa a contribuição de um modo. Permite reduzir a solução de um sistema de  $n$  graus de liberdade, à solução de  $n$  sistemas de um grau de liberdade independentes, desacoplando as equações do movimento.

Devido a que as formas modais estão sempre definidas em termos de um fator constante, é possível arbitrar a escala de seus valores. Pode-se usar diversos critérios para isso:

- a).- As vezes as escalas dos vetores são tomadas de modo que a máxima componente em termos absolutos iguala-se à unidade.
- b).- Em outros casos, uma dada componente (por exemplo o deslocamento da massa do último piso), é selecionada arbitrariamente e igualada à unidade em todos os modos.
- c).- No entanto, para o cálculo, prefere-se escalar os vetores de modo que  $\mathbf{x}_i^T [\mathbf{M}] \mathbf{x}_i = 1$ , para todo  $i$ , tendo em conta que repete-se este produto constantemente no denominador de muitas expressões. Isto implica dividir as componentes de  $\mathbf{x}_i$ , obtidas da solução do problema de valores característicos, pela raiz quadrada de  $\mathbf{x}_i^T [\mathbf{M}] \mathbf{x}_i$ .

Quando as formas modais escalam-se desta última forma, diz-se que estão normalizadas. Logo  $\mathbf{x}_i^T [\mathbf{K}] \mathbf{x}_i = \omega_i^2$ .

As formas modais normalizadas podem agrupar-se como as colunas de uma matriz  $[\Phi]$ , que é denominada *matriz modal*.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdot & \cdot & \phi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{Obs: } \phi_i = x_i. \quad (2.66)$$

Usando-se a propriedade de ortogonalidade dos modos, o produto  $[\Phi]^T [\mathbf{M}] [\Phi]$  é uma matriz identidade, e o produto  $[\Phi]^T [\mathbf{K}] [\Phi]$  é uma matriz diagonal cujo iésimo termo diagonal é igual a  $\omega_i^2$ .

### II.3.5 AMORTECIMENTO

Nos itens anteriores supôs-se por simplicidade que o sistema não estava amortecido.

As edificações têm diferentes mecanismos de dissipação de energia enquanto vibram sob a ação de um sismo. As perdas de energia (e consequentemente o amortecimento), ocorrem devido à fricção interna nas uniões, ou entre as paredes e os pórticos, e, se as deformações são grandes, devido a plastificações.

As equações do movimento do sistema, considerando-se o amortecimento (matriz  $[C]$ ), serão:

$$[M] \left\{ \ddot{\mathbf{U}} \right\} + [C] \left\{ \dot{\mathbf{U}} \right\} + [K] \left\{ \mathbf{U} \right\} = \left\{ \mathbf{F}(t) \right\} \quad (2.67)$$

Quando se usa a análise modal, não é necessário contar com uma matriz de amortecimento. Tudo o que se requer é introduzir uma fração do amortecimento crítico (ou percentagem do amortecimento  $\gamma$ ) na  $i$ -ésima equação modal:

$$\ddot{a}_i(t) + 2\gamma \omega_{n_i} \dot{a}_i(t) + \omega_{n_i}^2 a_i(t) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{F}(t) \quad (2.68)$$

A determinação da matriz  $[C]$  só é necessária se não se vai usar a análise modal, e vai-se integrar numericamente o conjunto completo de equações. Este é o caso quando se vai executar uma análise dinâmica não-linear, e deseja-se acrescentar à estrutura uma quantidade adicional de amortecimento, além do que resulta do comportamento inelástico.

## CAPÍTULO III

### TEORIA DA ANÁLISE MODAL

#### III.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As equações de movimento para um sistema com vários graus de liberdade (tal como um edifício qualquer), tem a seguinte forma:

$$[M] \left\{ \ddot{U} \right\} + [C] \left\{ \dot{U} \right\} + [K] \{U\} = \{F_{(t)}\} \quad (3.1)$$

A resposta das estruturas a uma excitação dinâmica pode ser avaliada de várias formas.

Para o caso de uma excitação sísmica (movimento da base), a resposta pode ser obtida por quaisquer dos três métodos gerais utilizados na solução dinâmica de sistemas com vários graus de liberdade:

1).- Integração direta no tempo das equações do movimento, resolvendo-se simultaneamente as  $n$  equações diferenciais através de um procedimento de integração passo a passo.



2).- Solução direta no campo das frequências, resolvendo-se novamente  $n$  equações simultâneas.

3).- Análise modal.

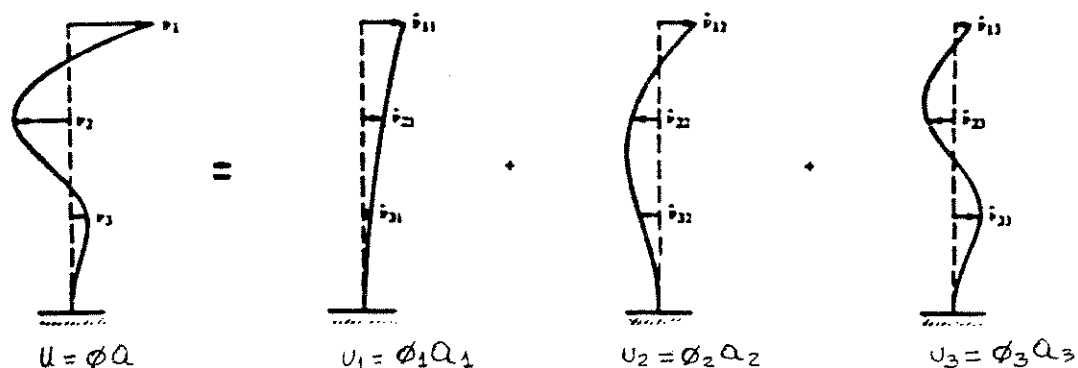
De todos estes procedimentos, o primeiro é o único processo rigoroso para levar em conta um comportamento não-linear.

No segundo procedimento as soluções no campo de frequências estão sempre limitadas a sistemas lineares, mas têm a vantagem de permitir considerar propriedades dependentes da frequência. O comportamento não-linear pode ser simulado através de um processo iterativo, onde os valores da rigidez e o amortecimento são recalculados ao final de cada análise para igualar o nível de deformações obtido.

A análise modal permite-nos desacoplar as  $n$  equações diferenciais do movimento reduzindo o problema à solução de  $n$  equações independentes de 1 grau de liberdade.

Na maioria dos casos somente alguns dos modos contribuem significativamente para a resposta, e, portanto, nem todos os  $n$  sistemas simples têm que ser resolvidos.

Agora, considere-se uma coluna fixada no solo. A conformação final pode ser definida por três deslocamentos, referenciados a três modos de vibração como na *Fig. III.1.*



**Fig. III.1.- Superposição dos modos de vibração.**

Assim, qualquer vetor  $\{u\}$  pode ser obtido através da conveniente superposição dos modos de vibração; deste modo:

$$\{u_i\} = a_i \{\phi\}_i \quad (3.2)$$

onde:  $\{u_i\}$  é o vetor de deslocamentos generalizado;

$a_i$  são as coordenadas modais;

$\{\phi\}_i$  são os modos de vibração.

Esta representação é baseada no fato que os modos de vibração são ortogonais em relação as matrizes  $[M]$  e  $[K]$ , formando um conjunto linearmente

independente, e, portanto, podendo constituir-se numa base para a representação de qualquer vetor pertencente àquele espaço vetorial.

O vetor  $\{U\}$  completo passa a ser expresso por:

$$\{U\} = \sum a_i \{\phi\}_i = [\Phi] \{a\} \quad (3.3)$$

onde,  $\{a\}$  = coordenadas no espaço modal.

$[\Phi]$  = matriz modal.

Às coordenadas  $a_i$  é dado o nome de coordenadas modais (ou naturais) da estrutura. A matriz  $[\Phi]$  é não singular, pois é composta de  $n$  vetores linearmente independentes, logo é inversível.

A ortogonalidade dos modos de vibração pode ser mostrada da seguinte forma:

Da eq. (2.60) tem-se que:

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \{\phi\} = \{0\} \quad (a)$$

assim, para  $\omega_{nr}^2$  tem-se  $\phi_r$  e para  $\omega_{ns}^2$  tem-se  $\phi_s$ , então:

$$([K] - \omega_{nr}^2 [M]) \phi_r = \{0\} \quad (b)$$

$$([K] - \omega_{ns}^2 [M]) \phi_s = \{0\} \quad (c)$$

agora multiplicando a eq.(b) por  $\phi_s^T$  e a eq.(c) por  $\phi_r^T$  resulta:

$$\phi_s^T ([K] - \omega_{nr}^2 [M]) \phi_r = \{0\} \quad (d)$$

$$\phi_r^T ([K] - \omega_{ns}^2 [M]) \phi_s = \{0\} \quad (e)$$

Fazendo-se a transposta da equação (e), tem-se:

$$\phi_s^T ([K] - \omega_{ns}^2 [M]) \phi_r = \{0\} \quad (f)$$

Fazendo-se a subtração (d) - (f), tem-se:

$$(\omega_{ns}^2 - \omega_{nr}^2) \phi_s^T [M] \phi_r = \{0\} \quad (g)$$

Como:  $\omega_{ns}^2 \neq \omega_{nr}^2$  logo:

$$\phi_s^T [M] \phi_r = \{0\} \quad (h)$$

substituindo-se este valor em quaisquer das eqs. (d), (e) ou (f), tem-se:

$$\phi_s^T [K] \phi_r = \{0\} \quad (i)$$

assim os modos de vibração são ortogonais em relação às matrizes de massa e rigidez.

## III.2 DECOMPOSIÇÃO MODAL DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A existência dos modos como um espaço vetorial é extremamente importante, já que permite reduzir a solução de um sistema de  $n$  graus de liberdade à solução de  $n$  sistemas independentes de 1GDL, desacoplando as equações do movimento. A seguir desenvolve-se esta formulação.

### III.2.1 EQUACIONAMENTO PARA SISTEMAS SEM AMORTECIMENTO

A equação inicial é:

$$[M] \left\{ \ddot{U} \right\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \quad (3.4)$$

Com o resultado do item *III.1*:  $\{U\} = [\Phi] \{a\}$  tem-se:

$$[M][\Phi]\left\{\ddot{\mathbf{a}}\right\} + [K][\Phi]\{\mathbf{a}\} = \{F(t)\} \quad (3.5)$$

Multiplicando-se a *eq. (3.5)* por  $\{\phi\}_i^T$  vem:

$$\{\phi\}_i^T [M] [\Phi] \left\{\ddot{\mathbf{a}}\right\} + \{\phi\}_i^T [K] [\Phi] \{\mathbf{a}\} = \{\phi\}_i^T \{F(t)\}$$

Desenvolvendo-se os termos e simplificando (pela ortogonalidade), tem-se:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \ddot{a}_i + \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i a_i = \{\phi\}_i^T \{F(t)\} \quad (3.6)$$

Define-se:

$$M_i = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i$$

$$K_i = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i$$

$$F_i(t) = \{\phi\}_i^T \{F(t)\}$$

Estas novas constantes são chamadas: *massa, rigidez, e cargas modais* respectivamente. Usando-as na *eq. (3.6)*, tem-se:

$$M_i \ddot{a}_i + K_i a_i = F_i(t) \quad (3.7)$$

Esta expressão é semelhante à equação de um sistema com 1GDL (equação diferencial ordinária).

Ainda, pode-se relacionar K e M através de:

$$K_i = \omega_{ni}^2 M_i \quad (3.8)$$

deste modo a eq.(3.7) fica:

$$M_i \ddot{a}_i + \omega_{ni}^2 M_i a_i = F_i(t) \quad (3.9)$$

e resolver da mesma maneira que um sistema de 1GDL para cada frequência natural.

Normalizando as formas modais em relação à matriz de massas:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (3.10)$$

a eq.(3.8) resulta:

$$K_i = \omega_{ni}^2 \quad (3.11)$$

Substituindo-se as eqs. (3.10) e (3.11) na eq. (3.7) tem-se:

$$\ddot{a}_i(t) + \omega_{ni}^2 a_i(t) = F_i(t) \quad (3.12)$$

Assim, esta expressão é a equação modal desacoplada e representa  $n$  equações diferenciais independentes e cuja resolução resulta nos valores desejados das coordenadas modais  $a_i$ , que substituídas na *eq. (3.3)* fornecem finalmente os valores dos deslocamentos generalizados na estrutura.

### III.2.2 EQUACIONAMENTO PARA SISTEMAS COM AMORTECIMENTO

A equação geral do movimento é:

$$[M]\left\{\ddot{U}\right\} + [C]\left\{\dot{U}\right\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad (3.13)$$

Tendo-se em conta que a relação de ortogonalidade também é válida para a matriz de amortecimento  $[C]$ , tem-se:



$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0, \text{ para } j \neq i; \quad \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = M_i = 1 \quad (3.14)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0, \text{ para } j \neq i; \quad \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = \omega_{ni}^2 = K_i \quad (3.15)$$

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_j = 0, \text{ para } j \neq i; \quad \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i = C_i = 2 \gamma_i \omega_{ni} M_i \quad (3.16)$$

Na *eq. (3.16)*,  $\gamma_i$  é a *i*ésima razão de amortecimento, e os outros fatores já são conhecidos. É mais conveniente e fisicamente razoável definir o amortecimento pela variável  $\gamma_i$ , que calcular os elementos da matriz  $[C]$ . O fator  $\gamma_i$  representa a razão entre o amortecimento real da estrutura e o amortecimento crítico

Logo, a *eq. (3.13)* após tratamento análogo ao do item *III.2.1* fica:

$$M_i \ddot{a}_i + C_i \dot{a}_i + K_i a_i = F_i(t) \quad (3.17)$$

Normalizando em relação à matriz de massa *eq. (3.14)*, o sistema de equações diferenciais reduz-se a um outro sistema de *n* equações independentes da forma:

$$\ddot{a}_i(t) + 2 \gamma_i \omega_{ni} \dot{a}_i(t) + \omega_{ni}^2 a_i(t) = F_i(t) \quad (3.18)$$

Estas equações são chamadas *equações modais do movimento*.  
Constituem  $n$  equações independentes de um grau de liberdade.

$a_i(t)$  encontra-se da solução de um sistema com um grau de liberdade (a eq. (3.18)) com a frequência natural  $\omega_{ni}$  submetida à função do tempo  $F_i(t)$ .

Em geral, para estruturas, as frequências mais altas têm menor amplificação e, como resultado, a contribuição dos modos superiores na resposta não será tão significativa. Na maioria dos casos práticos somente alguns modos (3 até 5) são suficientes para obter uma resposta razoável (isto considerando o problema plano; se o problema é modelado tri-dimensionalmente, tem-se que triplicar este número).

A determinação de  $a_i(t)$  requer a solução da equação de movimento para um sistema com um grau de liberdade. Esta pode ser resolvida tanto no campo do tempo quanto no campo de frequências.

### III.3 ANÁLISE MODAL PARA EXCITAÇÕES SÍSMICAS

Quando um sistema com vários graus de liberdade submete-se a uma excitação sísmica, representada usualmente como uma aceleração horizontal na base, as equações de movimento têm a seguinte forma:

$$[M] \left\{ \ddot{U}_r \right\} + [C] \left\{ \dot{U}_r \right\} + [K] \left\{ U_r \right\} = - [M] I \ddot{u}_g(t) \quad (3.19)$$

Onde:  $U_r$ ,  $\dot{U}_r$ ,  $\ddot{U}_r$ , representam os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração relativos à base.

$U_r = U - I u_g$  ( $u_g$  é o deslocamento do solo).

$\ddot{u}_g(t)$  é a aceleração do solo.

$I$  representa um vetor unitário.

Aplicando-se a decomposição modal apresentada na seção anterior, tem-se para a resposta:

$$U_r = \sum_{i=1}^n a_i(t) \Gamma_i \{\phi\}_i \quad (3.20)$$

$$\ddot{a}_i(t) + 2 \gamma_i \omega_{ni} \dot{a}_i(t) + \omega_{ni}^2 a_i(t) = - \ddot{u}_g(t) \quad (3.21)$$

$$\Gamma_i = \{\phi\}_i^T [M] I \quad (3.22)$$

Existem duas formas de executar-se a análise modal:

a).- Pode-se resolver cada equação modal tanto no domínio do tempo quanto no domínio de frequências. A resposta da equação modal ou seja toda a história no tempo da variável  $\mathbf{a}_i(\mathbf{t})$  é armazenada. Logo os modos superpõem-se apropriadamente para cada intervalo do tempo e avalia-se o tempo-história para cada efeito para encontrar seu máximo valor.

b).- A análise modal pode ser executada mantendo para cada modo somente a máxima resposta  $\mathbf{a}_i$ . Isto é particularmente conveniente quando usa-se um espectro de resposta para representar o movimento, ao invés de um registro (que é precisamente o caso da análise sísmica especificada nos códigos de projeto), já que o valor  $\mathbf{a}_i \text{ max}$  lê-se diretamente do espectro especificado para o amortecimento desejado,  $\mathbf{a}_i \text{ max} = S_d(\omega_{ni}, \gamma_i)$ . Este procedimento é o que se conhece como *Análise Modal Espectral*.

### III.4 ANÁLISE MODAL ESPECTRAL

Neste caso de análise modal a resposta correspondente ao modo  $i$  estará expressa como segue:

$$u_{ri} = S_{di} \Gamma_i \{\phi\}_i \quad (3.23)$$

onde,  $S_{di}$  é o valor lido do espectro de resposta que se está usando, ou, também, pode ser o valor máximo da solução da *equação modal* (3.21).

Em ambos os casos obtém-se os valores máximos da aceleração, deslocamento ou velocidade para uma frequência determinada e que são o dado de ingresso para a eq. (3.23).

O *fator de participação estática* tem a forma apresentada anteriormente para o caso de uma excitação sísmica:  $\Gamma_i = \{\phi\}_i^T [M] I$ .

Os máximos para outros efeitos, tais como forças nos elementos, determinam-se para cada modo, de uma análise estática, obtendo-se primeiro os valores do conjunto de deslocamentos para o modo  $\{\phi\}_i$  e daí multiplicando-os por  $S_d$  e  $\Gamma_i$ .

### III.5 COMBINAÇÃO MODAL

Na análise modal espectral, a determinação do efeito devido à superposição de todos os modos pode ser feita somente de forma aproximada, combinando (já não superpondo) as respostas ou participações modais.

Como é pouco provável que todas as respostas máximas dos modos coincidam no tempo, somar os valores absolutos dos valores modais máximos é muito conservador.

O procedimento estabelece que se devem calcular os efeitos modais para a resposta desejada: deslocamentos, forças globais, efeitos locais nos elementos, e combiná-los seguindo diversos critérios.

Comumente calcula-se a raiz quadrada da soma dos quadrados dos máximos efeitos (*SRSS* - Square-Root-of-Sum-of-Squares), mas atualmente usam-se

outras aproximações, cada uma tratando de se acercar à resposta prevista pela análise tempo-história.

Aplicando-se o método **SRSS** (raíz quadrada da soma dos quadrados das contribuições modais), a resposta total pode ser aproximada por:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^N R_i^2} \quad (3.24)$$

onde  $R$  é a resposta estimada (força, deslocamento, etc) para uma coordenada especificada e  $R_i$  é a correspondente resposta máxima para o modo  $i$  para esta coordenada.

Também está-se usando a chamada *combinação quadrática completa* (*CQC = Complete Quadratic Combination*), que é mais laboriosa de se implementar, mas segundo os seus criadores é mais precisa que todas as conhecidas (ver referência [12]).

O método da *combinação quadrática completa* (*CQC*) requer que todos os termos da resposta modal sejam combinados pela aplicação da seguinte equação:

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i \rho_{ij} R_j} \quad (3.25a)$$

$\rho_{ij}$  é o fator de correlação modal e depende da frequência e do amortecimento da estrutura, e que para um amortecimento modal constante  $\gamma$  é dado por:

$$\rho_{ij} = \frac{8 \gamma^2 (1+q) q^{3/2}}{(1-q^2)^2 + 4\gamma^2 q (1+q)^2} \quad (3.25b)$$

onde:  $\gamma = \frac{c}{c_c}$ , é a relação entre o amortecimentos da estrutura ( c ) e o amortecimento

crítico ( $c_c$ ).

$q = \frac{\omega_j}{\omega_i}$  é a relação entre as frequências naturais j e i da estrutura.

Deve-se notar que esta fórmula de combinação é uma forma quadrática completa que inclui todos os termos modais; daqui o nome de ***combinação quadrática completa (CQC)***. Para maiores detalhes do método ver a referência [12].

### III.6 RESUMO DO PROCEDIMENTO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

1).-Equação de movimento:

$$[M]\left\{\ddot{U}\right\} + [C]\left\{\dot{U}\right\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad (3.26)$$

2).-Obtenção das frequências naturais / modos de vibração; resolução do problema matemático de autovalores e autovetores através da equação de vibrações livres:

$$([K] - \omega_n^2 [M]) \{\phi\} = \{0\} \quad (3.27)$$

3).-Ortogonalização das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Para cada  $\phi_i$  obtido tem-se:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{para } j \neq i \quad (3.28)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{para } j \neq i \quad (3.29)$$

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{para } j \neq i \quad (3.30)$$

4).-Normalização da matriz modal:

$$[\Phi] [M] [\Phi]^T = [I] \quad (3.31)$$

5).-Equações desacopladas para cada frequência natural e resolução delas para encontrar os valores modais  $a_i$ :



$$\ddot{a}_i(t) + 2 \gamma_i \omega_{ni} \dot{a}_i(t) + \omega_{ni}^2 a_i(t) = F_i(t) \quad (3.32)$$

6).-Resposta nas coordenadas geométricas. Tendo a resposta nas coordenadas modais ( $a_i$ ), obtém-se a resposta nas coordenadas geométricas:

6.1.- Superposição modal:

$$\{U(t)\} = [\Phi] \{a(t)\} = \{\phi\}_1 a_1(t) + \dots + \{\phi\}_n a_n(t) \quad (3.33)$$

6.2.- Superposição modal espectral. Para o modo  $i$  tem-se:

$$(U(t)) = u_{ri} = S_{di} \Gamma_i \{\phi\}_i \quad (3.34)$$

7).-Obtenção das forças elásticas:

$$\{F_e\} = [K] \{U(t)\} = [K] [\Phi] \{a_i(t)\} = [M] [\Phi] (\omega_{ni}^2 a_i(t)) \quad (3.35)$$

### III.7 ELABORAÇÃO DE UM ESPECTRO DE RESPOSTAS

Exposto brevemente, um espectro de respostas é uma representação gráfica da resposta máxima (deslocamento, aceleração, tensão, etc) de sistemas com um

grau de liberdade para uma dada excitação, versus algum parâmetro do sistema, geralmente a frequência natural não amortecida.

Um conjunto daquelas curvas, por exemplo curvas desenhadas para vários níveis de amortecimento do sistema é conhecido como um *espectro de respostas*.

O espectro de respostas tem conseguido ampla aceitação na prática da dinâmica estrutural e, particularmente, no projeto de engenharia sísmica.

Para ilustrar a construção de um gráfico espectral de respostas, considere-se o oscilador não amortecido da **Fig. III.2(a)** submetido à força de excitação mostrada na **Fig. III.2(b)** e eq.(3.37).

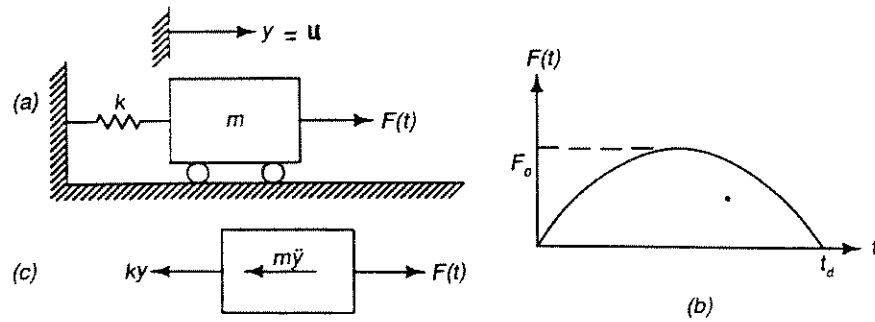
Assume-se o sistema inicialmente em repouso. O tempo de duração do impulso é denotado por  $t_d$

A equação diferencial do movimento no diagrama de corpo livre da **Fig. III.2(c)** é:

$$m \ddot{u} + k u = F(t) \quad (3.36)$$

$$\text{onde: } F(t) = \begin{cases} F_0 \sin \omega t & \text{para } 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & \text{para } t > t_d \end{cases} \quad (3.37)$$

$$\text{e } \omega = \frac{\pi}{t_d} \quad (3.38)$$



**Fig. III.2.- (a) Oscilador simples não amortecido submetido ao carregamento  $F(t)$ . (b) função de carregamento  $F(t)$ . © diagrama do corpo livre.**  
(do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.171.)

A solução da *eq. (3.36)* é:

$$u(t) = \frac{F_0/k}{1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2} \left[ \sin \omega t - \left(\omega/\omega_n\right) \sin \omega_n t \right] \quad (3.39)$$

$$\text{Fazendo-se: } u_{\text{est}} = F_0/k, \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}, \omega = \frac{\pi}{t_d}$$

Logo, a *eq. (3.39)* torna-se:

$$\frac{u}{u_{est}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{2 t_d}\right)^2} \left[ \text{sen} \pi \frac{t}{t_d} - \frac{T}{2 t_d} \text{sen} 2\pi \frac{t}{T} \right] \text{ para } 0 \leq t \leq t_d \quad (3.40a)$$

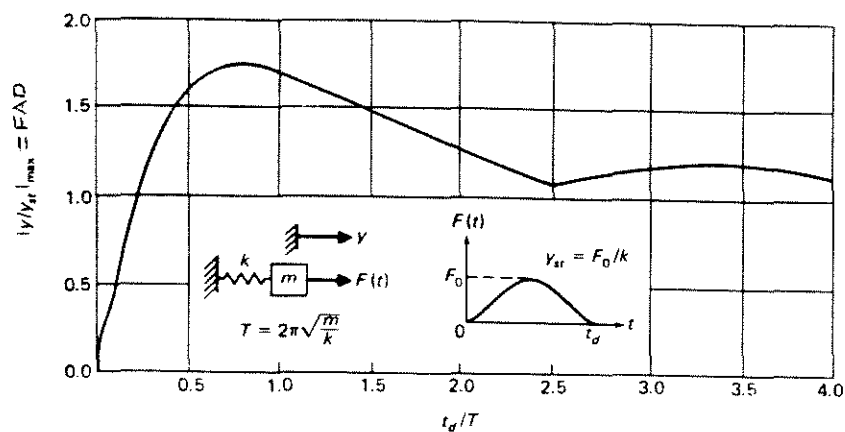
$$\frac{u}{u_{est}} = \frac{\frac{T}{t_d}}{\left(\frac{T}{2 t_d}\right)^2 - 1} \cos \pi \frac{t_d}{T} \text{sen} 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{t_d}{2T} \right) \text{ para } t > t_d \quad (3.40b)$$

Da *eq. (3.40)* pode-se observar que a resposta em termos de  $u / u_{est}$  (**FAD**) é uma função da relação entre o tempo de duração do pulso com o período natural do sistema ( $t_d / T$ ) e o tempo exprimido como ( $t / T$ .)

Daqui, para qualquer valor fixo do parâmetro ( $t_d / T$ ) pode-se obter a resposta máxima da *eq. (3.40)*.

O gráfico na **Fig.III.3** destes valores máximos como uma função de ( $t_d/T$ ) é o *espectro de respostas* para a força excitadora de duração  $t_d$  considerada neste caso.

Pode-se observar do espectro de respostas da **Fig. III.3** que o valor máximo da resposta (FAD ou fator de amplificação dinâmica)  $u / u_{est} = \text{FAD} = 1,76$  ocorre (para este particular pulso) quando  $t_d / T = 0,8$ .

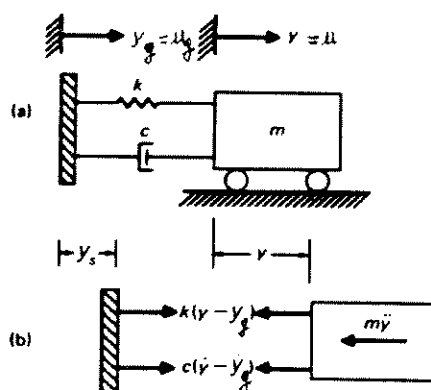


**Fig. III.3.- Espectro de respostas para uma força semi-sinusoidal  $F(t)$  de duração  $t_d$ .** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.173.)

### III.8 ESPECTRO DE RESPOSTAS PARA EXCITAÇÃO DA BASE

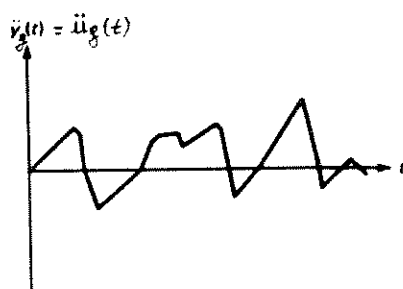
Um problema importante em dinâmica estrutural é a análise de um sistema submetido a uma excitação aplicada na base ou apoio da estrutura.

Mostra-se na *Fig. III.4* um exemplo deste tipo de excitação no apoio atuando sobre um oscilador amortecido.



**Fig. III.4.- (a) Oscilador simples amortecido submetido a uma excitação do apoio. (b) diagrama do corpo livre. (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.174.)**

A excitação neste caso é dado como uma função da aceleração que é representada na *Fig. III.5*.



**Fig. III.5.- A função aceleração excitando o apoio do sistema na Fig. III.4. (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.175).**

A equação do movimento é: (ver *Fig. III.4(b)*)

$$m \ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_g) + k(u - u_g) = 0 \quad (3.41)$$

Ou, com:  $\omega_n^2 = k/m$ , e  $\gamma = c/c_c$ , onde:  $c_c = 2\sqrt{k m}$ , tem-se:

$$\ddot{u} + 2\gamma\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \omega_n^2 u_g(t) + 2\gamma\omega_n\dot{u}_g(t) \quad (3.42)$$

A *eq. (3.42)* é a equação diferencial de movimento para um oscilador amortecido em termos do seu movimento absoluto.

A formulação mais conveniente para este problema é exprimir a *eq. (3.42)* em termos do movimento relativo da massa com respeito ao movimento do apoio, isto é, em termos do deslocamento da mola.

O deslocamento relativo é definido como:

$$u_r = u - u_g \quad (3.43)$$

Substituindo-se (3.43) em (3.42), tem-se:

$$\ddot{u}_r + 2 \gamma \omega_n \dot{u}_r + \omega_n^2 u_r = -\ddot{u}_g(t) \quad (3.44)$$

A formulação da equação do movimento *eq. (3.44)* como uma função do movimento relativo entre a massa e o apoio é particularmente importante, toda vez que no cálculo é o deslocamento ou a tensão no elemento o que se procura.

Também, os movimentos na base são usualmente especificados por meio de uma função da aceleração (por exemplo o registro acelerográfico dos terremotos); portanto, a *eq. (3.42)* contendo no lado direito a aceleração da excitação é a forma mais conveniente para estes casos

### III.9.- ESPECTRO DE RESPOSTA EM ESCALAS TRILOGARÍTMICAS

É possível representar em um gráfico simples usando escalas logarítmicas a máxima resposta em termos da aceleração ou deslocamento relativo e uma terceira quantidade conhecida como a pseudo- velocidade relativa.

A pseudo-velocidade não é exatamente o mesmo que a velocidade real, mas está intimamente relacionada com ela e serve para uma conveniente substituição da velocidade verdadeira.

Estas três quantidades: a *aceleração absoluta máxima*, o *deslocamento relativo máximo* e a *pseudo-velocidade relativa máxima* , são conhecidos



respectivamente como a *aceleração espectral*, o *deslocamento espectral* e a *velocidade espectral*.

O deslocamento espectral  $S_d$ , isto é, o máximo deslocamento relativo é proporcional à aceleração espectral  $S_a$  ou máxima aceleração absoluta.

Para demonstrar isto, da *eq. (3.41)*, tem-se, desprezando o amortecimento:

$$m \ddot{u} + k u_r = 0 \quad (3.45)$$

Nota-se desta equação que a aceleração absoluta em qualquer instante é proporcional ao deslocamento relativo.

Em particular, para valores máximos, a aceleração espectral é proporcional ao deslocamento espectral.

Assim, da *eq. (3.45)* tem-se:

$$S_a = - \omega_n^2 S_d \quad (3.46)$$

onde:

$$\omega_n^2 = k/m \text{ é a frequência natural do sistema,}$$

$$S_a = \ddot{u}_{\text{máx}} \text{ e } S_d = u_{r \text{ máx}}$$

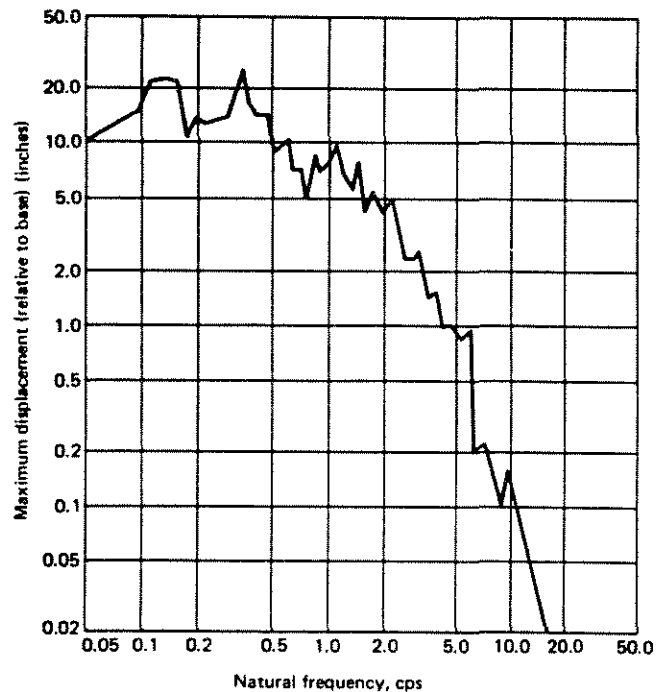
também:

$$S_v = \omega_n S_d = \frac{S_a}{\omega_n} \quad (3.47)$$

Um exemplo típico de espectro de resposta de deslocamento para um sistema com um grau de liberdade submetido ao movimento da base é mostrado na **Fig.**

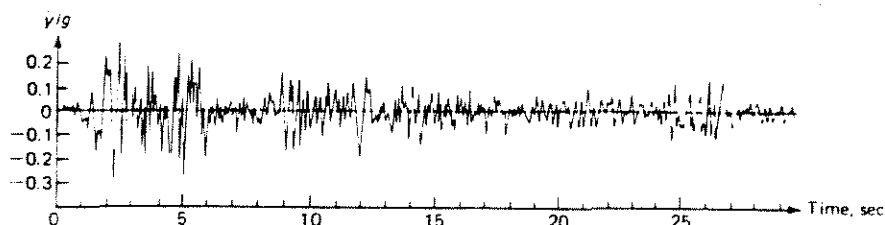
### III.6.

Esta representação é a resposta para a excitação de entrada (excitação sísmica) dada pela aceleração do solo registrada no *terremoto de 1940 em El Centro (California -EE.UU.)*.



**Fig. III.6.- Espectro de resposta de deslocamento para sistema elástico submetido ao movimento do solo para o terremoto em El Centro de 1940. (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.177.)**

O registro de aceleração deste terremoto tem sido utilizado amplamente em pesquisas na engenharia sísmica. Ver *Fig. III. 7*.



**Fig. III.7.- Registro de aceleração do solo para o terremoto em El Centro, California - 18 de maio de 1940. Componente norte-sul. (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.178).**

Na *Fig. III.8* os mesmos tipos de dados que foram usados para obter o espectro de respostas de deslocamentos da *Fig. III.6* são representados em termos da velocidade espectral para diversos valores do fator de amortecimento  $\gamma$ , com a diferença que a abcissa, assim como a ordenada, são nestes casos representadas numa escala logarítmica.

Neste tipo de representação gráfica, e por causa das *eqs. (3.46) e (3.47)*, é possível traçar escalas diagonais para o deslocamento inclinadas de  $135^\circ$  com a abcissa, e para a aceleração inclinadas de  $45^\circ$  também com a abcissa, de modo que se possa ler de um único gráfico simples valores da aceleração espectral, velocidade espectral e deslocamento espectral

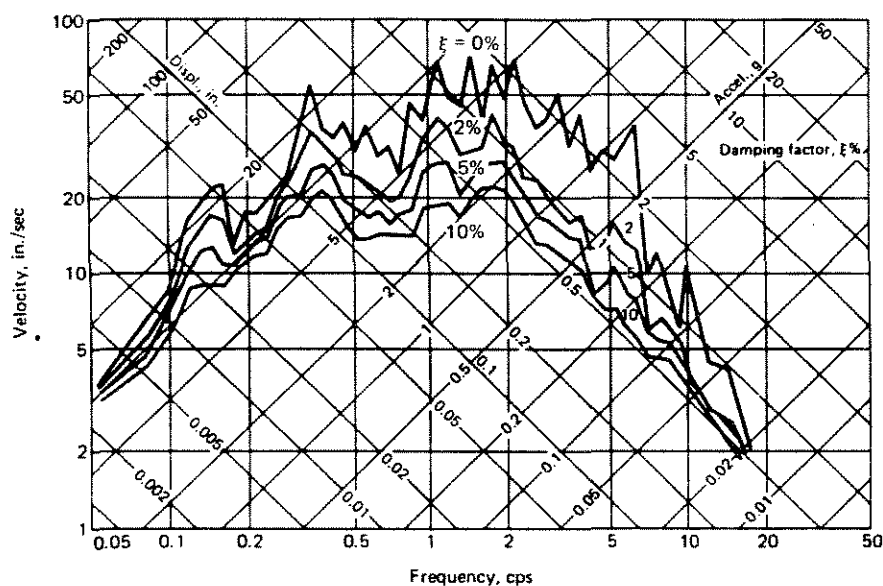
Para mostrar a construção de um diagrama em escalas trilogarítmicas tal como o mostrado na *Fig. III.8*, escreve-se a *eq. (3.47)* em termos da frequência natural  $f$  em ciclos por segundo (cps), e toma-se os logaritmos dos termos, de modo que:

$$S_v = \omega_n S_d = 2 \pi f S_d; \log S_v = \log f + \log (2 \pi S_d) \quad (3.48)$$

Para valores constantes de  $S_d$ , a *eq. (3.48)* é a equação de uma reta do  $\log S_v$  versus  $\log f$  com uma inclinação de  $45^\circ$ . Analogamente, da *eq. (3.45)* tem-se:

$$S_v = \frac{S_a}{\omega_n} = \frac{S_a}{2 \pi f} \quad (3.49)$$

Para valores constantes de  $S_a$  a *eq. (3.49)* é a equação de uma linha reta do  $\log S_v$  versus  $\log f$  com uma inclinação de  $135^\circ$ .



**Fig. III.8.- Espectro de resposta para sistema elástico para o terremoto de 1940 em El Centro, California. (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.178).**

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE SÍSMICO-ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS

#### IV.1.- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

As normas citadas abaixo estabelecem requisitos mínimos para que as edificações sejam resistentes ao abalo sísmico, porém, dentro de certos critérios de serviço.

Estas normas apresentam a fórmula a utilizar para encontrar a força cortante mínima na base da edificação para ser usada na análise estrutural sísmico-estática da mesma.

Apresentam-se a seguir as fórmulas incluídas nas seguintes normas:

- Norma Americana *UBC-88*.
- Norma Peruana *NPDSR-77*.
- Norma Chilena *NCh433.Of93*.

Apresenta-se também um resumo das principais considerações relativas ao cálculo da força cortante sísmica incluídas nas citadas normas.

## IV-2.- FÓRMULA PARA A DETERMINAÇÃO DA FORÇA CORTANTE SÍSMICO-ESTÁTICA NA BASE DA EDIFICAÇÃO.

### IV.2.1.- NORMA AMERICANA UBC-88

A *1988 Uniform Building Code (UBC-1988)*<sup>(27)</sup>, norma para edificações mais extensivamente utilizada nos EE.UU., e basicamente na parte oeste do país, estabelece que a estrutura deve ser calculada para uma força cortante total na base dada pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{ZIC}{R_w} W \quad (4.1)$$

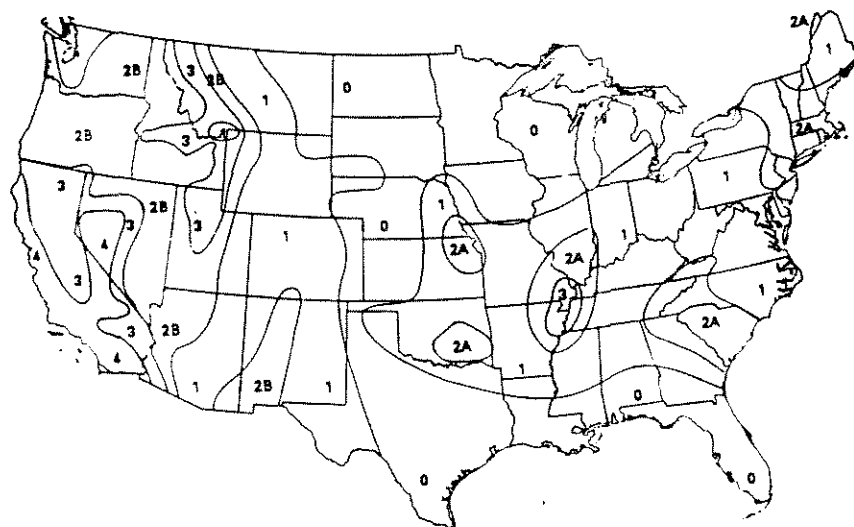
em que:

$$C = \frac{1,25S}{T^{2/3}} \leq 2,75 \quad (4.2)$$

A norma também estabelece um valor mínimo de 0,075 para a relação  $C / R_w$ .

Os fatores nas eqs.(4.1) e (4.2) são definidos a seguir:

- $Z$  é o *fator de zona sísmica* e depende do local como mostrado no mapa de zonificação sísmica da Fig. IV.1. O mapa mostra os Estados Unidos dividido em 5 zonas sísmicas como dado na tabela IV.1.



**Fig. IV.1.- Mapa de zonificação sísmica dos Estados Unidos (UBC-88).** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.547.)

**Tabela IV.1 Zonas sísmicas para os EE.UU.**

<b>Zona sísmica</b>	<b>Z</b>
1	0,075
2A	0,15
2B	0,20
3	0,30
4	0,40



- I é o *fator de uso e importância* relativo ao uso projetado da estrutura como classificado na tabela IV.2.

**Tabela IV.2 Fator de uso e importância** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.548.)

<b>Occupancy Importance Factor</b>		
Occupancy Categories	Occupancy Type or Functions of Structure	Factor I
I. Essential Facilities	Hospitals and other medical facilities having surgery and emergency treatment areas. Fire and police stations. Tanks or other structures containing, housing, or supporting water or other fire-suppression materials or equipment required for the protection of essential or hazardous facilities, or special occupancy structures. Emergency vehicle shelters and garages. Structures and equipment in emergency-preparedness centers. Standby power-generating equipment for essential facilities. Structures and equipment in government communication centers and other facilities required for emergency response.	1.25
II. Hazardous Facilities	Structures housing, supporting, or containing sufficient quantities of toxic or explosive substances to be dangerous to the safety of the general public if released.	1.25
III. Special Occupancy Structure	Covered structures whose primary occupancy is public assembly—capacity > 300 persons. Buildings for schools through secondary or day-care centers—capacity > 250 students. Buildings for colleges or adult education schools—capacity > 500 students.	1.0

(Continued)

Occupancy Categories	Occupancy Type or Functions of Structure	Factor I
	Medical facilities with 50 or more resident incapacitated patients, but not included above.	
	Jails and detention facilities.	
	All structures with occupancy > 5000 persons.	
	Structures and equipment in power-generating stations and other public utility facilities not included above, and required for continued operation.	
IV. Standard Occupancy Structure	All structures having occupancies or functions not listed above.	1.0

(Reprinted from the 1988 Uniform Building Code, © 1988, with permission of the publishers, the International Conference of Building Officials.)

- *S* é o *fator de solo* e depende das características do solo como descrito na tabela IV.3.

**Tabela IV.3 Fator de solo** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.549).

Site Coefficients		
Type	Description	Site factor, <i>S</i>
$S_1$	A rocklike material characterized by a shear-wave velocity greater than 2,500 feet per second or a stiff or dense soil condition where the soil depth is less than 200 feet.	1.0
$S_2$	A soil profile with dense or stiff soil conditions, where the soil depth exceeds 200 feet.	1.2
$S_3$	A soil profile 40 feet or more in depth and containing more than 20 feet of soft to medium stiff clay but not more than 40 feet of soft clay.	1.5
$S_4$	A soil profile containing more than 40 feet of soft clay.	2.0

(Reprinted from the 1988 Uniform Building Code, © 1988, with permission of the publishers, the International Conference of Building Officials.)

$R_w$  é o *fator estrutural* (ou fator de ductilidade da estrutura) variando entre 4 e 12 como mostrado na tabela IV.4.  $R_w$  é uma medida da capacidade do sistema estrutural de absorver energia no regime inelástico.

**Tabela IV.4 Fator estrutural** (do livro *Structural Dynamics*; theory and computations, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.557).

<b>Structural Factor</b>		
Lateral Load Resisting System	$R_w$	$H_{max}^*$
<b>A. BEARING WALL SYSTEM</b>		
1. Light-framed walls with shear panels		
a. Plywood walls for structures of three stories or less	8	65
b. All other framed walls	6	65
2. Shear walls		
a. Concrete	6	160
b. Masonry	6	160
3. Light steel-framed bearing walls with tension bracing	4	65
4. Braced frames where bracing carries gravity loads		
a. Steel	6	160
b. Concrete**	4	
c. Heavy timber	4	65
<b>B. BUILDING FRAME SYSTEM</b>		
1. Steel braced frame (EBF) <sup>o</sup>	10	240
2. Light-framed walls with shear panel		
a. Plywood walls for structures three stories or less	9	65
b. All other framed walls	7	65
3. Shear walls		
a. Concrete	8	240
b. Masonry	8	160
4. Concentrated braced frames		
a. Steel	8	160
b. Concrete**	8	
c. Heavy timber	8	65
<b>C. MOMENT-RESISTING FRAME SYSTEM</b>		
1. Special moment-resisting frames (SMRSF) <sup>o</sup>		
a. Steel	12	N.L.
b. Concrete	12	N.L.
2. Concrete intermediate moment-resisting frames (IMRSF) <sup>o</sup>	8	
3. Ordinary moment-resisting frames (OMRSF)		
a. Steel	6	160
b. Concrete***	5	
<b>D. DUAL SYSTEM<sup>†</sup></b>		
1. Shear walls		
a. Concrete walls with SMRSF	12	N.L.
b. Concrete with concrete IMRSF	9	160
c. Masonry with SMRSF	8	160
d. Masonry with concrete IMRSF	7	

(continued on next page)

(Continued)

Lateral Load Resisting System	$R_w$	$H_{\max}^*$
2. Steel EBF with steel SMRSF	12	N.L.
3. Concrete braced frames		
a. Steel with steel SMRSF	10	N.L.
b. Concrete with concrete SMRSF**	9	
c. Concrete with concrete IMRSF**	6	

\*H = height limit applicable to seismic zones 3 and 4

\*\*Prohibited in seismic zones 3 and 4

\*\*\*Prohibited in seismic zones 2, 3, and 4

†Structural system defined in the glossary, Appendix 2

NL = No Limit

(Reprinted from the 1988 Uniform Building Code, © 1988, with permission of the publishers, the International Conference of Building Officials.)

- $T$  é o *período fundamental da estrutura* que pode ser aproximado pela seguinte fórmula:

$$T = C_t (h_N^{3/4}) \quad (4.3)$$

onde:

$h_N$  = altura total da edificação em pés(feet).

$C_t = 0,030$  para pórticos de concreto armado.

- $W$  é o peso total da edificação que inclui o peso permanente mais 25% do peso acidental por piso (quando trata-se de uso para armazenagem).

#### IV.2.2.- NORMA PERUANA NPDSR-77

A Norma Peruana de Cálculo Sísmico-Resistente, **NPDSR-77<sup>(28)</sup>**, estabelece que a força horizontal ou força cortante total na base da edificação produzida pela ação sísmica determina-se pela seguinte fórmula:

$$H = \frac{ZUSC}{R_d} P \quad (4.4)$$

em que: 
$$C = \frac{0,8}{\frac{T}{T_s} + 1,0} \quad (4.5)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} 0,16 \leq C \leq 0,40 \\ 0,3\text{sec} \leq T_s \leq 0,9\text{sec} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Os fatores nas eqs. (4.4) e (4.5) são definidos a seguir:

- H é a força cortante total na base da edificação.
- Z é o fator que depende da zona sísmica onde está localizada a edificação. O território peruano considera-se dividido em três zonas segundo a sismicidade observada e a potencialidade sísmica dos locais. Esta divisão mostra-se no mapa da Fig. IV.2 e os valores de zonificação na tabela IV.5.

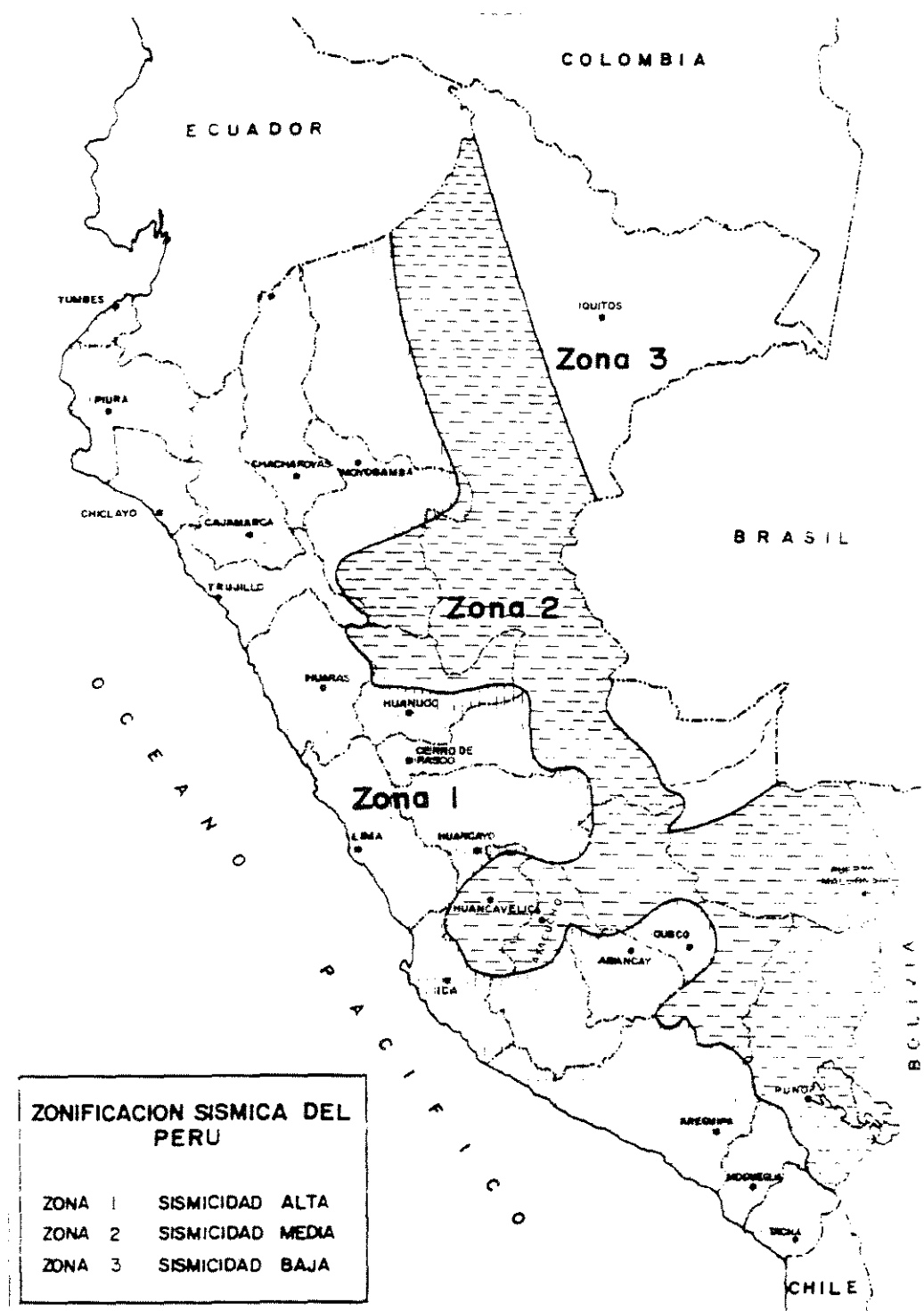


Fig. IV.2.- Mapa de zonificação sísmica do Peru (da NPDSR-77 p. 19).

**Tabela IV.5.- Zonificação sísmica no Peru.**

Zona sísmica	Z
1	1,00
2	0,70
3	0,30

- U é o fator de uso e importância e depende da categoria da edificação. Ver tabela IV.6.

**Tabela IV.6.- Valores do fator de uso e importância U (NPDSR-77 p. 8).**

Categoria	U	Características
A	Não especificado. O calculista deverá justificar detalhadamente a força cortante adotada. Como mínimo a estrutura deverá ser considerada como do tipo B.	Edificações especialmente importantes cuja falha além do perigo próprio do colapso, representam perigo adicional: reatores atômicos, usinas hidrelétricas, diques, etc.
B	1,3	Edificações com serviços vitais à população e que não deveriam ser interrompidas pela ação sísmica: hospitais, centrais telefônicas, creches, colégios, etc.
C	1,0	Edificações comuns: prédios habitacionais, hotéis, escritório setc.

- $S$  é o fator de solo e considera os efeitos da amplificação da ação sísmica produzida pelas características do sub-solo de fundação. Os valores de  $S$  referem-se ao comportamento de estruturas sobre um estrato duro. Ver tabela IV.7.

**Tabela IV.7.-** Fator do solo  $S$  e período predominante do solo  $T_s$  (NPDSR-77 p. 9).

Solo	$S$	$T_s$ (sec)	Características
I	1,00	0,3	rochas
II	1,20	0,6	areia densificada, solo coesivo duro.
III	1,40	0,9	solo coesivo brando

**OBS.-** Para solos intermediários poderá usar-se um valor intermediário entre os valores indicados na tabela IV.7.

- $C$  é o coeficiente sísmico da edificação e representa a fração do peso total da mesma que deverá-se tomar para determinar a força cortante na base.  $C$  é função do período fundamental da estrutura ( $T$ ) e o período predominante do solo ( $T_s$ ) indicado na tabela IV.7. O valor de  $C$  determina-se da eq. (4.5).

$R_d$  é o fator de ductilidade e corresponde basicamente à ductilidade global da estrutura, levando em conta também considerações de amortecimento e comportamento em níveis próximos da fluência. Os valores de  $R_d$  são mostrados na tabela IV.8 considerando os materiais utilizados e o sistema de estruturação concebido para resistir à ação sísmica.



**Tabela IV.8.-** Valores do fator de ductilidade  $R_d$  (NPDSR-77 p. 10 e 11).

Tipo	Características da Edificação	$R_d$
E1	-Edifícios de concreto armado com pórticos dúcteis especiais que resistem independentemente a 100 % da força sísmico-horizontal. -Edifícios de pórticos de aço.	6,0
E2	- Edifícios de concreto armado com pórticos dúcteis especiais e paredes de corte calculados segundo os seguintes critérios: a.- Os pórticos e paredes resistem à força sísmico-horizontal total segundo as suas rigidezes relativas considerando-se a interação entre os pórticos e as paredes. b.- Os pórticos resistem independentemente a mais de 25 % da força sísmico-horizontal.	5,0
E3	- Edifícios similares aos do caso anterior exceto que seus pórticos ou paredes não satisfazem integralmente os requisitos especiais de ductilidade. - Edifícios de madeira e de aço não incluídos em outros casos.	4,0
E4	- Edifícios em que as forças horizontais são resistidas basicamente por paredes ou estruturas similares. - Reservatórios elevados, silos e estruturas tipo pêndulo invertido.	3,0
E5	- Edifícios com paredes de alvenaria confinada ou armada.	2,5
E6	- Edifícios com paredes de alvenaria sem confinar e outras não contempladas nesta classificação.	1,5

- P é o peso total da estrutura calculada adicionando à carga permanente da edificação uma percentagem da carga accidental, que para o caso de edificações da categoria C (tabela IV.6) é de 25 %.
- T é o período fundamental de vibração da estrutura determinada segundo procedimentos teóricos concordantes com as equações da dinâmica e levando em conta as características estruturais e a distribuição de massas da edificação.

Alternativamente T poderá ser determinado pelas seguintes expressões:

T	Observações
0,08N	Para edificações cuja estrutura está definida por vigas e pilares (pórticos) exclusivamente.
$\frac{0,09h}{\sqrt{D}}$	Para edificações cujos elementos resistentes à ação sísmica são unicamente os pórticos e as paredes da caixa dos elevadores.
$\frac{0,05h}{\sqrt{D}}$	Para edificações cujos elementos resistentes correspondem principalmente a paredes de corte

Onde:

h é a altura total da edificação em metros (m).

D é a dimensão horizontal da edificação na direção do sismo em metros(m).

N é o número de pavimentos (andares) da edificação.

#### IV.2.3.- NORMA CHILENA NCh433.Of93

A Norma Chilena NCh433.Of93<sup>(29)</sup> estabelece que a força cortante na base da edificação está dado por:

$$Q_o = CIP \quad (4.7)$$

Onde:

- $Q_o$  é a força cortante total na base da edificação.
- $C$  é o coeficiente sísmico definido por:

$$C = \frac{A_o c}{gR} \left( \frac{T'}{T^*} \right)^n \quad (4.8)$$

levando em conta que:

$$A_o / 6g \leq C \leq 0,6 A_o / g \quad (4.9)$$

onde:

$c$ ,  $n$  e  $T'$  são parâmetros relativos ao tipo de solo de fundação especificados na tabela IV.10 segundo a classificação da tabela IV.9; e  $g$  é a aceleração gravitacional.

**Tabela IV.9.-** Definição dos tipos de solo de fundação

Tipo de solo	Descrição
I	rocha
II	gravilha densa, areia densa, solo coesivo duro
III	areia não saturada, gravilha não saturada, solo coesivo brando
IV	solo coesivo saturado

**Tabela IV.10.-** Valores dos parâmetros dependentes do tipo de solo

Tipo de solo	$T'$ (sec)	$c$	$n$
I	0,25	2,50	1,00
II	0,35	2,75	1,25
III	0,80	2,75	2,00
IV	1,50	2,75	2,00

$A_0$  é a aceleração efetiva máxima determinada na tabela IV.11 segundo a zonificação sísmica do Chile mostrada nas figuras IV.3 (a), IV.3 (b) e IV.3 (c).

**Tabela IV.11.-** Valores da aceleração efetiva máxima  $A_0$ 

Zona sísmica	$A_0$
1	0,20g
2	0,30g
3	0,40g

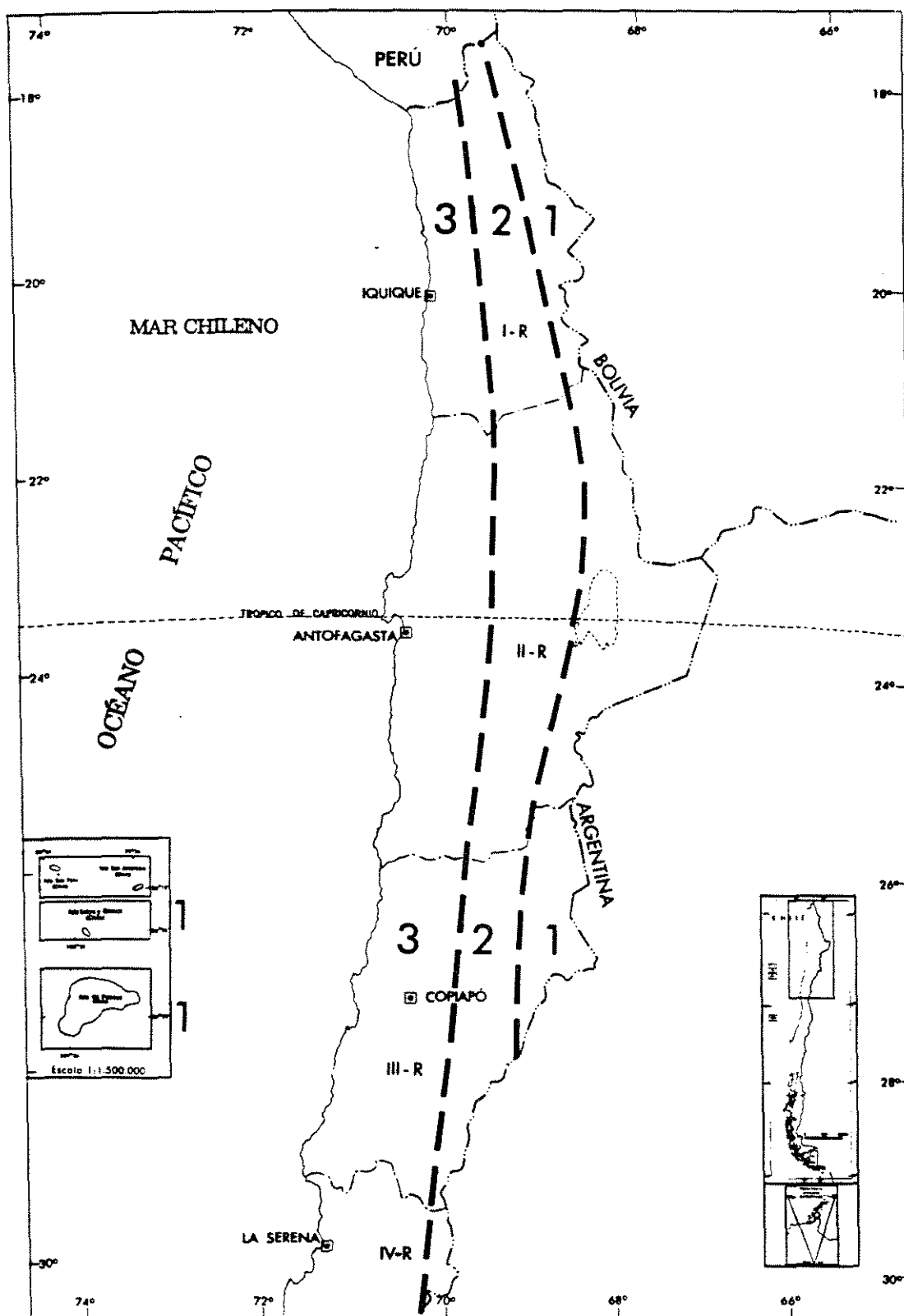


Fig. IV.3 (a).- Zonificação sísmica das Regiões I, II e III de Chile (NCh433.Of93 p. 13).

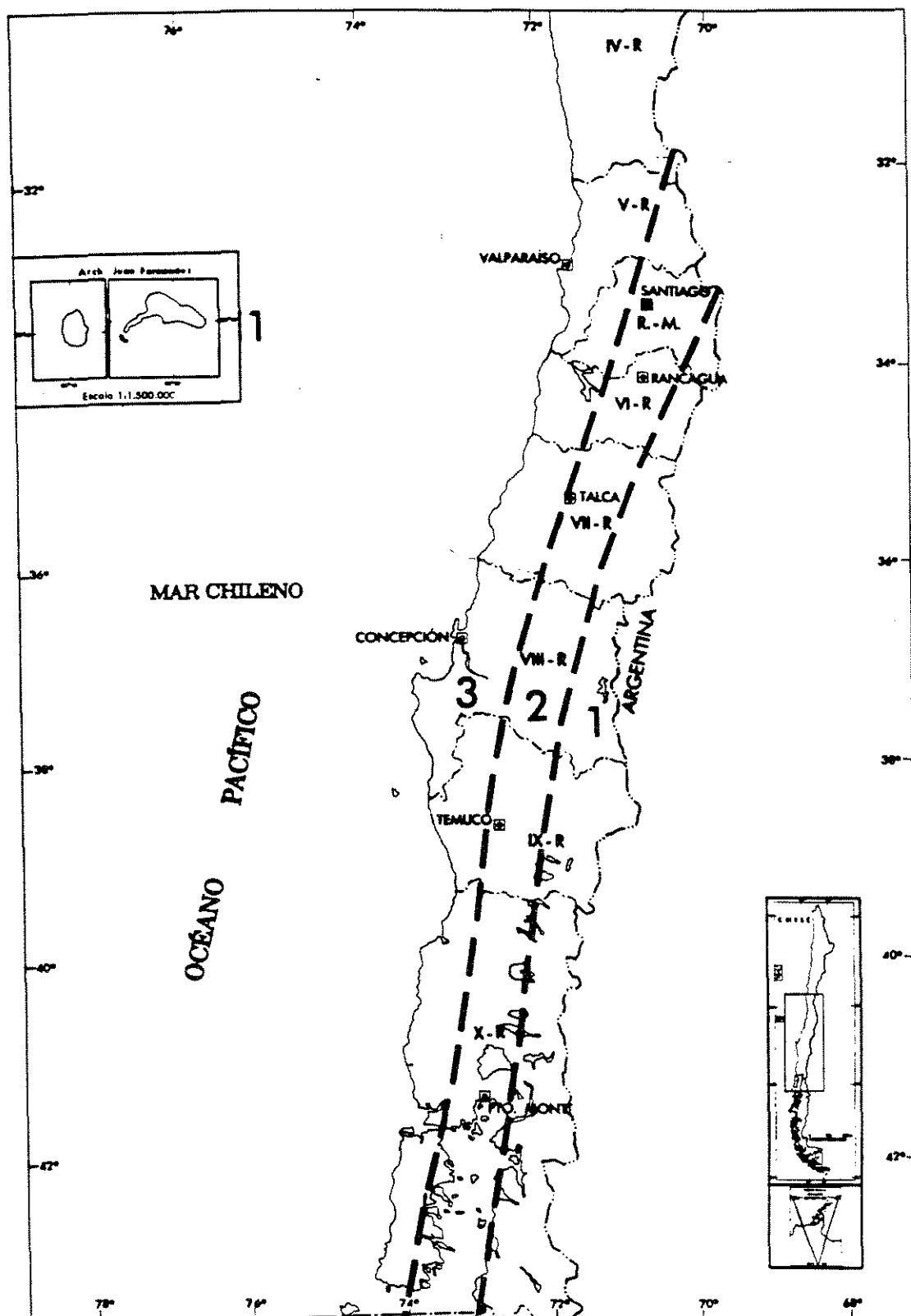


Fig. IV.3 (b).- Zonificação sísmica das Regiões IV até X de Chile (NCh433.Of93 p. 14).

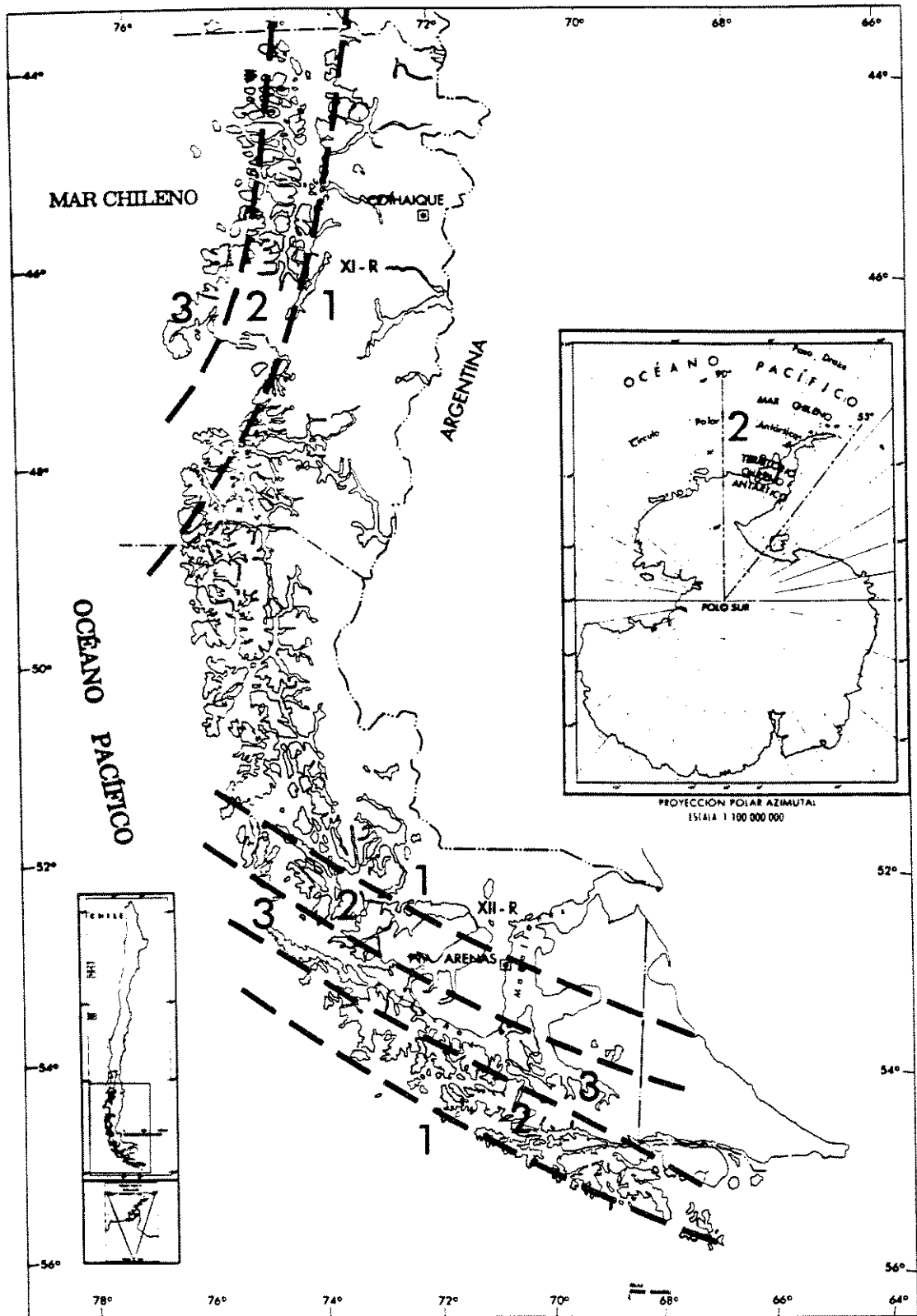


Fig. IV.3 (c).- Zonificação sísmica das Regiões XI e XII de Chile (NCh433.Of93 p. 15).

- **R** é o fator de modificação da resposta estabelecido na tabela IV.12. Este fator reflete as características de absorção da energia da estrutura resistente bem como a história sobre o comportamento sísmico dos diferentes tipos de estruturas e materiais utilizados.

**Tabela IV.12.- Valores do fator de redução R**

Sistema estrutural	Material estrutural	R
Pórticos	aço estrutural	8
	concreto armado	8
Paredes e sistemas contraventados	aço estrutural	8
	concreto armado	8
	concreto armado e alvenaria confinada	7
	madeira	6
	alvenaria armada	5
	alvenaria confinada	5
Qualquer outro tipo de material não classificado nas categorias anteriores		2

- $T^*$  é o período do modo com maior massa translacional equivalente na direção de análise.

**I** é o fator de uso e importância da edificação mostrado na tabela IV.14 segundo a classificação da tabela IV.13.



**Tabela IV.13.-** Classificação das edificações e estruturas segundo a sua importância, uso e risco de colapso.

Categoria	Descrição
A	edifícios governamentais, municipais, de serviços públicos ou de utilidade pública tais como: quartéis da polícia, centrais elétricas, hospitais, correios, quartéis de bombeiros, etc.
B	bibliotecas, museus, estádios, escolas, colégios, universidades, prisões, locais comerciais, salões de espetáculos, etc.
C	edifícios comuns de apartamentos e outros similares, armazens, etc.
D	construções isoladas não destinadas à moradia.

**Tabela IV.14.-** Valor do coeficiente I

Categoria da edificação	I
A	1,2
B	1,2
C	1,0
D	0,6

- **P** é o peso total da edificação. Calcula-se considerando o carregamento permanente e adiciona-se uma porcentagem do carregamento acidental não inferior a 25 % em construções destinadas à habitação ou uso público, sem aglomeração de pessoas ou materiais, e não inferior a 50 % em construções em que é usual a aglomeração de pessoas ou materiais.

### IV.3.- DISTRIBUIÇÃO DAS FORÇAS SÍSMICO-LATERAIS

#### IV.3.1.- NORMA AMERICANA UBC-88

A força cortante na base, calculada segundo a eq. (4.1), é distribuída nos diversos pisos da edificação de acordo com a seguinte fórmula:

$$F_x = \frac{(V - F_t) W_x h_x}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} \quad (4.10)$$

onde:

$$\begin{aligned} F_t &= 0,07 TV < 0,25 V & \text{para } T > 0,7 \text{ seg.} \\ F_t &= 0 & \text{para } T \leq 0,7 \text{ seg.} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e:

$$V = F_t + \sum_{i=1}^N F_i \quad (4.12)$$

onde: N = número total de pisos acima da base da edificação.

$F_x, F_i, F_N$  = força lateral aplicada no nível x, i ou N.

$F_t$  = porção da força cortante na base (V) que se adiciona à carga  $F_N$  no topo da edificação.

$h_x, h_i$  = altura do nível x ou i relativo à base;  $w_x, w_i$  = peso do nível x ou i da edificação.

A norma estabelece que a força  $F_x$  será aplicada no centro de massas do nível  $x$  da edificação.

A força cortante  $V_x$  para qualquer andar  $x$  é dada pela soma das forças laterais sísmicas acima do nível  $x$ , incluindo-se a do nível  $x$ , ou seja:

$$V_x = F_t + \sum_{i=x}^N F_i \quad (4.13)$$

#### IV.3.2.- NORMA PERUANA NPDSR-77

A força cortante na base, calculada segundo a eq. (4.4), para cada direção é distribuída na altura da edificação segundo a seguinte fórmula:

$$F_i = f H \frac{P_i h_i}{\sum P_i h_i} \quad (4.14)$$

onde:  $F_i$  = força horizontal correspondente ao nível  $i$

$h_i$  = altura do nível  $i$  relativo à base

$P_i$  = peso do piso considerado  $i$

$H$  = força cortante total na base da edificação

$f = 0,85$  para edifícios cuja relação altura / largura na direção considerada excede de 6

$f = 1,00$  para edifícios cuja relação altura / largura na direção considerada não excede de 3;

para relações altura / largura entre 3 e 6 deve-se interpolar linearmente.

### IV.3.3.- NORMA CHILENA NCh433.093

As forças sísmico-horizontais podem ser calculadas pela seguinte expressão:

$$F_k = \frac{A_k P_k}{\sum_{j=1}^N A_j P_j} Q_o \quad (4.15)$$

em que:

$$A_k = \sqrt{1 - \frac{Z_{k-1}}{H}} - \sqrt{1 - \frac{Z_k}{H}} \quad (4.16)$$

onde:

$F_k$  = força horizontal aplicada no nível k

$A_k$  = fator de ponderação para o peso associado ao nível k

$P_k$  = peso associado ao nível k

$Q_o$  = força cortante na base da edificação

$N$  = número de pavimentos (andares) da edificação

$Z_k$  = altura do nível k sobre a base da edificação

$H$  = altura total da edificação sobre a base

#### **IV.4.- OUTRAS CONSIDERAÇÕES DAS NORMAS PARA O CÁLCULO SÍSMICO-RESISTENTE**

As normas citadas no item anterior apresentam outras considerações que servem para clarificar o cálculo sísmico-resistente, algumas das quais apresentam-se a seguir:

- Define-se que o objetivo do cálculo sísmico-resistente é projetar edificações que devem comportar-se diante do sismo segundo os seguintes critérios:
  1. resistir sismos leves sem danos.
  2. resistir sismos moderados considerando-se a possibilidade de danos estruturais leves.
  3. resistir sismos excepcionalmente severos com a possibilidade de danos estruturais importantes e com uma possibilidade remota de ocorrência do colapso da edificação.
- Considera-se que as forças horizontais produzidas pelo sismo atuam segundo as duas direções principais da estrutura ou nas direções que resultem mais desfavoráveis. A análise far-se-á independentemente para cada direção e para o total da força sísmica em cada direção.
- A distribuição em planta das forças horizontais para o caso das edificações que apresentam diafragmas rígidos ao nível dos pavimentos, far-se-á levando em conta as rigidezes dos elementos resistentes, exigindo-se nestes elementos a compatibilidade de deformações para a condição de diafragma rígido.
- Considera-se que a força sísmica em cada nível atua horizontalmente no centro de massas do nível correspondente.

- Determina-se o momento de torção em cada nível - considerando-se a não coincidência entre o centro de massas e o centro de rigidezes dos elementos resistentes da estrutura, e uma torção accidental - utilizando as fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned} M_{Ti} &= H_i(1,5e_i + 0,05b_x) \\ M_{Ti} &= H_i(e_i - 0,05b_x) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde:

$M_{Ti}$  é o momento de torção no nível  $i$ ;

$H_i$  é a força cortante no nível  $i$ ;

$e_i$  é a excentricidade no nível  $i$ ;

$b_x$  é a dimensão da edificação no sentido transversal ao sismo.

- A ação sísmica é considerada como uma carga eventual não sendo necessário combiná-la com outras cargas eventuais.
- O método sísmico-estático executa-se em quaisquer zona sísmica para estruturas regulares com menos de 75 metros de altura e também para estruturas irregulares com não mais de 5 andares nem mais de 20 metros de altura.
- O método sísmico-dinâmico **pode** ser adotado para quaisquer estruturas em quaisquer zonas sísmicas, mas **deve** ser adotado para estruturas com mais de 75 metros de altura e estruturas irregulares de mais de 5 andares ou mais de 20 metros de altura.

## **CAPÍTULO V**

### **ANÁLISE DINÂMICA MODAL ESPECTRAL NO SOFTWARE SAP90**

#### **V.1.- CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

O programa SAP90 é um software para engenharia estrutural que pode ser utilizado em microcomputadores compatíveis com o IBM-PC.

A série de programas SAP (Structural Analysis Program) representa o trabalho de pesquisa desenvolvido ao longo de mais de 25 anos na Universidade da California, Berkeley, pela equipe liderada pelo Professor Edward L. Wilson, e atualmente tem-se convertido num dos programas de computador mais respeitados e extensivamente usados na área de análise estrutural.

A primeira versão do programa SAP90 apareceu no ano de 1970, e posteriormente tem sido revisada e acrescida de outros programas, resultando na versão atual do SAP90 que inclui a versão em ambiente gráfico (SAPIN-An Interactive Graphical Input Generator for SAP90, Berkeley, California - 1992).

Para utilizar o programa SAP90 é necessário um microcomputador compatível com o IBM-PC XT, AT ou PS/2 com 640 Kbytes de memória, disco rígido de 10 Mbytes e do coprocessador 8087, 80287 ou 80387. A versão SAP90 Plus pode resolver problemas de estruturas com mais de 4000 nós.

O SAP90 efetua análise estática e dinâmica dos mais diversos tipos de estruturas, possibilitando simular o seu comportamento real quando sujeitas às mais variadas solicitações e otimizá-las em custo e desempenho.

Utiliza avançados conceitos de Análise Matricial, Técnica dos Elementos Finitos, Métodos de Dinâmica de Estruturas, associados a modernas técnicas computacionais.

As áreas de aplicação são diversas: Estruturas Metálicas (treliças planas e espaciais, torres de transmissão e telecomunicação, etc), Concreto Armado (edifícios altos sob a ação do vento, cascas espaciais, reservatórios, etc), Geotecnia (túneis, barragens, etc), Mecânica (turbinas, pontes rolantes, etc), Naval e Offshore e Automotivas (ônibus, vagões, máquinas agrícolas, etc).

O programa apresenta os seguintes resultados: deslocamentos (translações e rotações em qualquer ponto do modelo estrutural), reações de apoio, esforços nos nós, tensões nos elementos finitos; frequências naturais e modos de vibração e seleção dos resultados (escolha apenas dos resultados desejados).

As famílias de Elementos Finitos utilizados pelo SAP90 são os seguintes:

- Elementos de Barra - FRAME:

- barra de pórtico espacial.

- barra de pórtico plano.

- barra de grelha plana

- barra de treliça espacial.

- barra de treliça plana.



- Elementos Laminares - SHELL:
  - elementos de placa.
  - elementos de membrana.
  - elementos de casca.
- Elementos Sólidos Bidimensionais - ASOLID:
  - elemento axissimétrico.
  - estado plano de tensões.
  - estado plano de deformações.
- Elementos Sólidos Tridimensionais - SOLID:
  - elasticidade tridimensional.

No presente trabalho utilizou-se o módulo de Análise Dinâmica para resolver uma estrutura sujeita ao abalo sísmico através da opção Análise Sísmico-Dinâmica Modal Espectral, a qual apresenta-se no capítulo VI.

Deve-se ainda indicar que o SAP90 executa tanto análise dinâmica determinística (análise para carregamento harmônico e outros), quanto análise dinâmica não-determinística (análise tempo-história e análise sísmica pelo espectro de respostas).

## V.2.- ANÁLISE DE AUTOVALORES NO SAP90

A análise sísmico-modal espectral precisa, para a sua solução, da determinação das formas dos modos de vibração livre não amortecidos, assim como também das frequências naturais da estrutura.

Deve-se então resolver um problema de autovalores generalizado que surge na análise dinâmica da forma:

$$[K]\{\phi\} = \omega_n^2[M]\{\phi\} \quad (5.1)$$

onde,  $[K]$  e  $[M]$  são as matrizes de rigidez e massa do sistema, e  $(\omega_{ni}^2, \phi_i)$  é o autopar  $i$ .

Se a ordem de  $[K]$  e  $[M]$  é  $n$ , então tem-se  $n$  autopares que podem ordenar-se como segue:

$$0 < \omega_{n1}^2 \leq \omega_{n2}^2 \leq \omega_{n3}^2 \leq \dots \leq \omega_{nn}^2, \quad (5.2)$$

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$$

A solução para os menores  $p$  autovalores, e correspondentes autovetores, pode ser escrita em forma matricial como:

$$[K][\Phi] = [M][\Phi][\Omega] \quad (5.3)$$

onde:  $[K]$  é a matriz de rigidez,

$[M]$  é a matriz diagonal de massas,

$[\Phi]$  é a matriz que contém nas colunas os autovetores requeridos e

$[\Omega]$  é a matriz diagonal com os autovalores na sua diagonal.

$$[\Phi] = [\phi_{1i}, \phi_{2i}, \dots, \phi_{pi}], \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_{n1}^2 & & \\ & \omega_{n2}^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \omega_{np}^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Entre as técnicas para calcular os  $p$  menores autovalores e correspondentes autovetores da eq. (5.1), o programa SAP90 usa o *método de iteração no subespaço*<sup>(18)</sup> que, segundo a referência [19], tem provado ser eficiente para o caso.

Durante a fase de solução, o programa imprime os *autovalores aproximados* depois de cada iteração.

À medida em que os autovetores convergem, eles são removidos do subespaço e novos vetores aproximados são inseridos.

Para melhores detalhes deste algoritmo ver as referências [18] e [19].

### V.3.- ANÁLISE SÍSMICO-DINÂMICA MODAL ESPECTRAL NO SAP90

As equações de equilíbrio dinâmico associadas com a resposta de uma estrutura ao movimento sísmico (no solo) são dados por:

$$[M]\left\{\ddot{\mathbf{U}}\right\} + [C]\left\{\dot{\mathbf{U}}\right\} + [K]\{\mathbf{U}\} = [M]\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (5.5)$$

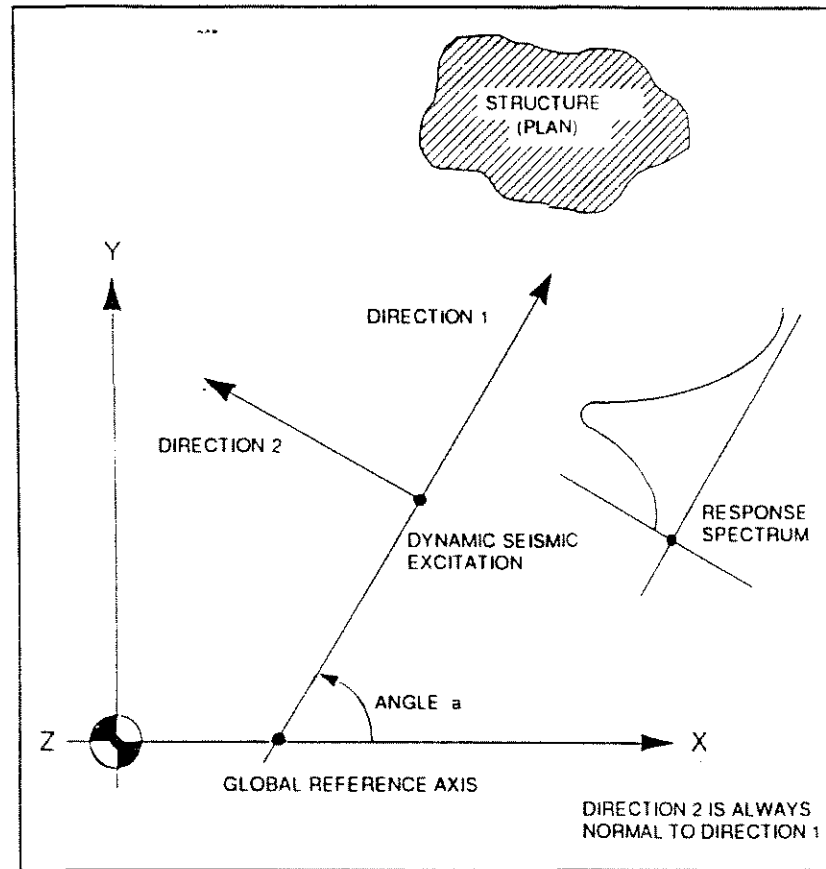
onde:  $[K]$  é a matriz de rigidez,  $[M]$  é a matriz diagonal de massas,  $[C]$  é a matriz de amortecimento,  $\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$  é a aceleração do solo produto do sismo, e  $\left\{\ddot{\mathbf{U}}\right\}$ ,  $\left\{\dot{\mathbf{U}}\right\}$  e  $\{\mathbf{U}\}$  são os vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos da estrutura respectivamente.

O programa SAP90 resolve este sistema de equações usando o *método da superposição modal pelo espectro de respostas* explicado no capítulo III.

Neste método a aceleração do solo é introduzida como dado para a curva do espectro de respostas de aceleração espectral versus o período do tempo.

A excitação do solo pode acontecer simultaneamente em três direções, isto é, quaisquer duas direções mutuamente perpendiculares contidas no plano XY, e na direção Z.

As duas direções no plano XY são definidas como 1 e 2, onde a direção 1 é determinada pelo ângulo  $\alpha$ , medido em sentido anti-horário a partir do eixo global X. A direção 2 é definida como normal à direção 1. Ver Fig. V.1.



**Fig V.1.- Convenção de direções para a excitação sísmico-dinâmica usada no SAP90.** (do SAP90 Structural Analysis Users Manual 1992).

Para se obter os deslocamentos e esforços internos máximos (ou tensões) nos elementos, primeiro são calculadas as respostas modais associadas com uma direção específica de excitação e logo estas respostas são combinadas usando a técnica da combinação quadrática completa (Complete Quadratic Combination-**CQC**), como mostrado no capítulo III (item III. 5).

Finalmente a resposta total é calculada pela combinação das respostas nas três direções através da raiz quadrada da soma dos quadrados (Square-Root-of-Sum-of-Squares-**SRSS**), ver item III. 5.

## **CAPÍTULO VI**

### **COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS**

#### **VI.1.- CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES**

Apresentam-se aqui duas estruturas a serem analisadas tanto estaticamente, mediante as normas sísmico-estáticas apresentadas no capítulo IV, quanto dinamicamente utilizando-se o método da superposição modal espectral apresentada nos capítulos III e V.

Para a determinação das forças sísmico-laterais na análise estática utiliza-se os requerimentos sísmico-resistentes estabelecidos nas normas de alguns países com problemas de abalo sísmico.

Estas normas reduzem as ações sísmicas a forças estáticas equivalentes e a análise é executada considerando um conjunto de forças aplicado estaticamente à estrutura. A edificação pode ser analisada tri ou bidimensionalmente, mas a análise segue sendo estática e única.

A análise estrutural estática executa-se utilizando o software SAP90 levando em conta que depois que as forças sísmico-laterais são calculadas com ajuda das normas, estas convertem-se em um outro tipo de carregamento estático (aplicado nos nós da estrutura) além dos carregamentos correspondentes à gravidade (permanente e acidental).

A análise dinâmica, também contemplada nos códigos modernos de cálculo sísmico, considera as características ou propriedades dinâmicas da estrutura na determinação das forças sísmicas e em cada efeito particular que se deseja calcular.

No entanto, a sua aplicação não foi muito difundida até a década passada considerando-se a quantidade de cálculo envolvido e a necessidade de dispor de aparelhos e procedimentos para a determinação das propriedades dinâmicas, assim como o trabalho posterior dedicado à determinação e combinação dos efeitos modais. Com a disponibilidade e potência dos computadores modernos, principalmente os pessoais (microcomputadores), a análise dinâmica é a ferramenta mais adequada para a determinação das forças sísmicas.

Deve-se observar ainda que a prática generalizada atual no cálculo sísmico considera que as solicitações sísmicas sobre a estrutura são determinadas por meio de uma análise elástica. A análise se faz tendo em consideração que a estrutura e seus elementos não excedem sua resistência e mantém sua forma inicial, hipóteses implícitas na análise estrutural no regime elástico.

As estruturas submetidas a sismos severos têm um comportamento altamente não-linear; todavia, os códigos permitem a análise linear com o fim de facilitar o trabalho com as ferramentas (hardware e software) disponíveis. Indiretamente, os códigos de cálculo sísmico-resistente reconhecem o comportamento não-linear nas reduções por *dutibilidade* dos *espectros* de cálculo e na exigência de detalhes para o reforço que permitam à estrutura alcançar grandes deformações e dissipar muita energia sem entrar em colapso.

A seguir apresenta-se primeiro uma estrutura regular a ser analisada estaticamente usando a norma americana UBC-88 (método da força sísmico-lateral

equivalente: Uniform Building Code-1988) e dinamicamente usando o método de superposição modal espectral incluído no software SAP90. Depois os resultados dos esforços nas barras para um pórtico desta estrutura analisada tanto estaticamente quanto dinamicamente são comparados.

Posteriormente apresenta-se uma estrutura bastante irregular a qual é analisada estaticamente pela norma peruana NPDSR-77 e dinamicamente utilizando-se o software SAP90 no seu módulo de análise dinâmica modal espectral. Nesta estrutura também comparam-se os esforços nas barras para um pórtico analisado tanto estaticamente quanto dinamicamente.

Também calcula-se para as duas estruturas a força cortante sísmica na base utilizando-se as três normas incluídas no capítulo IV, isto é: norma americana UBC-88; norma peruana NPDSR-77 e norma chilena NCh433.Of93. Depois estes valores são comparados.

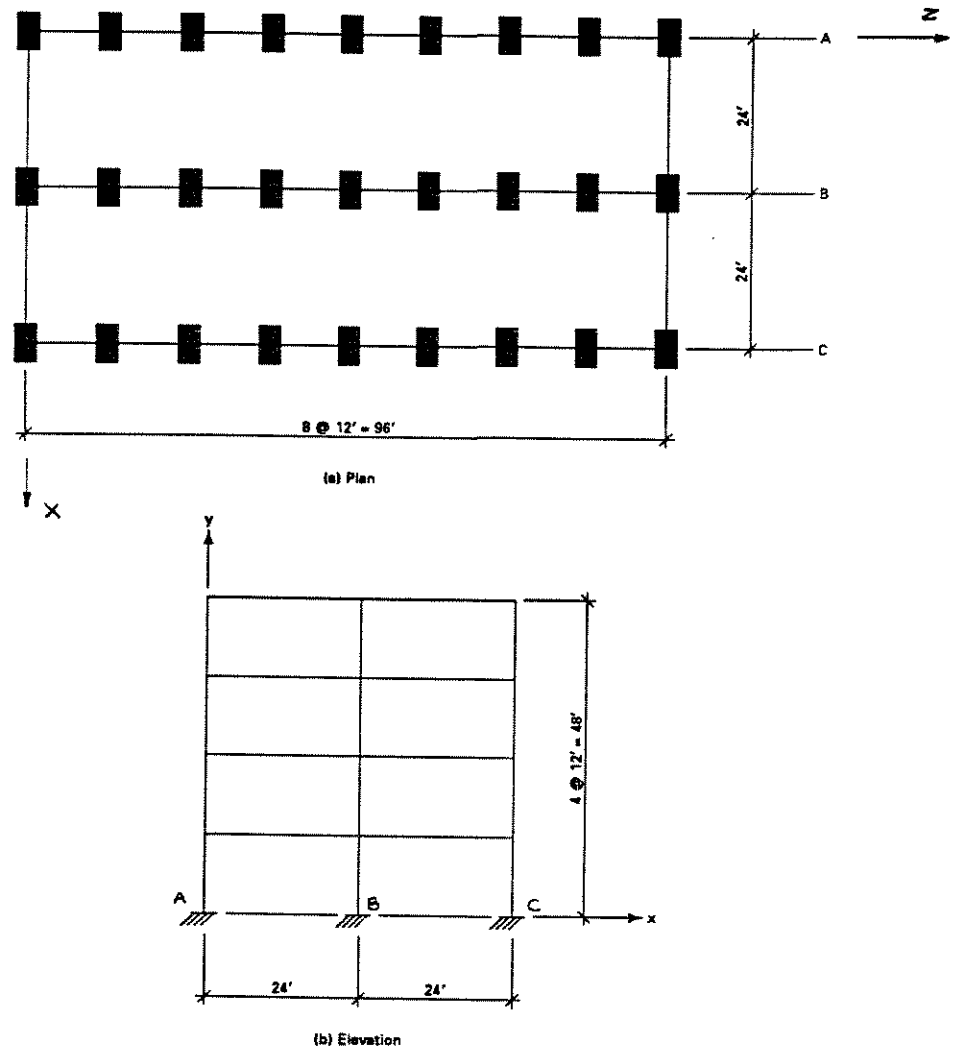
## **VI.2.- APRESENTAÇÃO DO PRIMEIRO EXEMPLO A SER ANALISADO**

**EXEMPLO 1.-** Um edifício aporticado de concreto armado de 04 andares tem suas dimensões em planta mostradas na Fig. VI.1. Tanto as seções transversais das colunas e vigas quanto os carregamentos permanente e acidental são mostrados abaixo. O solo de fundação assume-se ser de rocha dura. A edificação está localizada na zona sísmica 3 do mapa de zonificação sísmica dos EE.UU., mostrado na Fig.IV.1, e deverá ser usada para armazenagem. Deve-se executar uma análise sísmica para esta estrutura (na direção normal aos eixos A, B e C) da seguinte forma:

1. Uma análise sísmico-estática em concordância com a norma americana **UBC-88**.



2. Uma análise sísmico-dinâmica em concordância com a superposição modal espectral mediante o uso do software **SAP90**.
3. Faz-se uma comparação dos resultados estático e dinâmico para o **pórtico 3**.
4. Calcula-se e compara-se a força cortante sísmica na base da estrutura utilizando-se as três normas indicadas no item VI.1.



**Fig. VI.1.- Planta e elevação da edificação de 4 andares do exemplo 1.** (do livro *Structural Dynamics; theory and computations*, por M. Paz. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. p.526.).

## VI.2.1.- ANÁLISE SÍSMICO-ESTÁTICA DO EXEMPLO 1 PELA NORMA AMERICANA UBC-88

1.- Peso efetivo por andar e peso efetivo total:

- Para o caso de armazém, a carga de projeto deverá incluir 25% da carga acidental. Para o nível superior (último nível) não se considera carga acidental. Daquí:

$$W_D + 0,25 W_L = 140 + 0,25 \times 125 = 171,25 \text{ psf (1º, 2º e 3º andares).}$$

$$W_D + 0 = 140 \text{ psf (4º andar).}$$

- A área em planta da edificação é:

$$48 \text{ ft} \times 96 \text{ ft} = 4608 \text{ ft}^2.$$

- Então, os pesos dos vários pisos são:

$$W_1 = W_2 = W_3 = 4608 \times 0,17125 = 789,12 \text{ kips.}$$

$$W_4 = 4608 \times 0,140 = 645,12 \text{ kips.}$$

- O peso efetivo total é:

$$W = 789,12 \times 3 + 645,12 = 3012,48 \text{ kips.}$$

2.- Período fundamental da estrutura (T):

$$T = C_t (h_N^{3/4}) \quad (6.1)$$

onde:

$$C_t = 0,030 \text{ (para pórticos de concreto armado).}$$

$$h_N = 48 \text{ ft (altura total da edificação em pés).}$$

$$\text{Daquí: } T = 0,030 \times 48^{3/4} = 0,55 \text{ sec.}$$

### 3.- Força cortante na base da edificação:

$$V = \frac{ZIC}{R_w} W \quad (6.2)$$

onde:

$Z$  = fator de zona sísmica = 0,3 (localizado na zona sísmica 3 do mapa de zonificação sísmica dos EE.UU. Ver Fig. IV.1).

$I$  = fator de uso e importância = 1,0 (uso para armazém. Ver tabela IV.2).

$R_w$  = fator de ductilidade da estrutura = 12 (para estruturas aporticadas de concreto armado. Ver tabela IV.4).

$S$  = coeficiente que depende do tipo de solo. = 1,0 (para rocha é 1.0. Ver tabela IV.3).

Então:

$$C = \frac{1,25S}{T^{2/3}} \leq 2,75 \quad (6.3)$$

$$C = 1,25 (1,0) / (0,55)^{2/3} = 1,862 < 2,75 \quad \text{OK!}$$

Também:

$$C / R_w = 1,862 / 12 = 0,155 > 0,075 \quad \text{OK!}$$

Daqui:

$$V = \frac{ZIC}{R_w} W = 0,3 \times 1,0 \times 1,862 \times 3012,4 / 12$$

$$V = 140,23 \text{ kips. (aprox. 5\% de W).}$$

### 4.- Forças laterais na edificação:

$$F_x = \frac{(V - F_t) W_x h_x}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} \quad (6.4)$$

com:  $F_t = 0,07 TV < 0,25 V$  para  $T > 0,7 \text{ sec.}$

$F_t = 0$  para  $T \leq 0,7 \text{ sec.}$

e: 
$$V_x = F_t + \sum_{i=x}^N F_i \quad (6.5)$$

Daquí:  $F_t = 0$ , sendo  $T = 0,55 \text{ sec} < 0,7 \text{ sec.}$

Na tabela VI.1 mostram-se as forças laterais e a força cortante sísmica para cada nível.

**Tabela VI.1.- Forças laterais e força cortante sísmica para cada nível.**

Nível	$W_i$ (kips)	$h_i$ (feet)	$W_i h_i$ (k-f)	$F_i$ (kips)	$V_i$ (kips)
4	645,12	48	30965,76	49,47	49,47
3	789,12	36	28408,32	45,38	94,85
2	789,12	24	18938,88	30,25	125,12
1	789,12	12	9469,44	15,13	140,23
		$\sum_{i=1}^4 W_i h_i =$	87782,4		

##### 5.- Distribuição da força cortante nos pórticos da estrutura:

Distribui-se a força cortante em cada nível proporcionalmente às rigidezes (valores D) dos elementos resistentes da estrutura.

O valor “D” dos elementos resistentes em um piso qualquer é a força cortante que atua no elemento quando o deslocamento relativo do piso considerado tem um valor unitário.

O método de análise é o seguinte:

**5.1.- Avaliação dos valores “D”;**

**5.2.- Distribuição da força cortante do piso aos elementos através de:**

$$V_n = V_i \frac{D_n}{\sum D_n} \quad (6.6)$$

onde:  $V_n$  = força cortante num elemento ou conjunto de elementos resistentes.

$V_i$  = força cortante total no piso considerado.

$D_n$  = valor “D” de um elemento ou conjunto de elementos resistentes.

$\sum D_n$  = Soma dos valores “D” em todos os elementos resistentes no piso considerado.

**5.3.- Correção por torção.**

A seguir desenvolvem-se estes três itens (5.1, 5.2 e 5.3).

**5.1.- Avaliação dos valores “D” no sentido do sismo:**

**5.1.1.- Simbologia a usar:**

$I = bt^3 / 12$       inércia da seção retangular.

$K_v = I_v / L$       coeficiente de rigidez de vigas.

$K_c = I_c / h$       coeficiente de rigidez de pilares.

$k_v = K_v / K_0$       coeficiente de rigidez relativa de vigas.

$k_c = K_c / K_0$       coeficiente de rigidez relativa de pilares.

$K_0 = 10 \text{ in}^3$       coeficiente de rigidez de comparação.

### 5.1.2.- Pórtico típico no sentido do sismo:

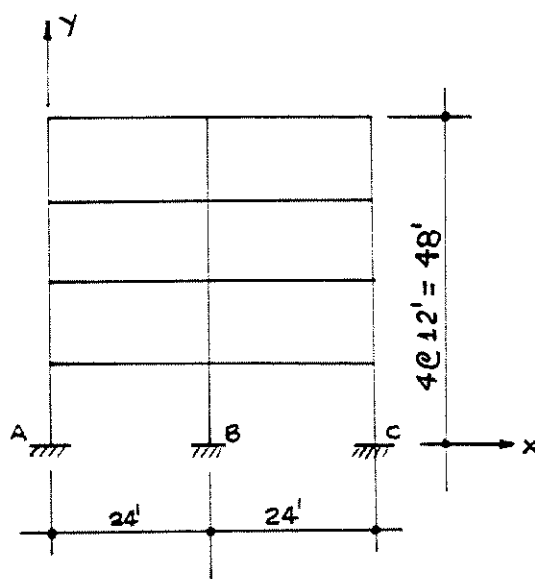


Fig. VI.2.- Pórtico típico 3.

### 5.1.3.- Tabela VI.2.- Cálculo de rigidezes no pórtico típico 3:

elementos	eixos	níveis	seção b x t (in x in)	I (in <sup>4</sup> )	K (in <sup>3</sup> )	k=K/K <sub>o</sub> K <sub>o</sub> =10 in <sup>3</sup>
colunas	A,C	4 e 3	12 x 16	4096	28,44	2,84
	A,C	2 e 1	12 x 20	8000	55,56	5,56
	B	4 e 3	12 x 20	8000	55,56	5,56
	B	2 e 1	12 x 24	13824	96,00	9,6
vigas	A-B	4 a 1	12 x 24	13824	48,00	4,8
	B-C	4 a 1	12 x 24	13824	48,00	4,8

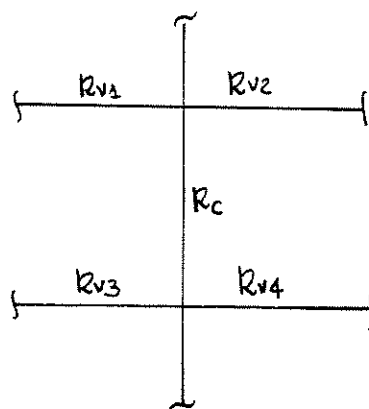
OBS.- Os pórticos 1 até 9 têm as mesmas características e portanto os mesmos coeficientes de rigidez relativa ( $k$ ) mostrados na tabela VI.2.

#### 5.1.4.- Cálculo de valores “D”.

##### 5.1.4.1.- Caso geral:

$$\bar{k} = \frac{k_{v1} + k_{v2} + k_{v3} + k_{v4}}{2k_c}$$

$$a = \frac{\bar{k}}{2 + \bar{k}}$$

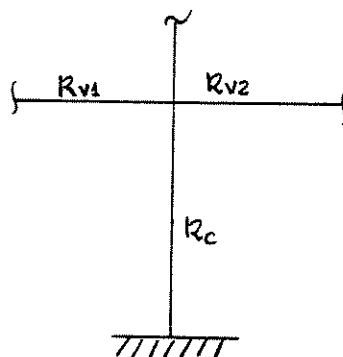


(6.7)

##### 5.1.4.2.- Extremo engastado:

$$\bar{k} = \frac{k_{v1} + k_{v2}}{k_c}$$

$$a = \frac{0,5 + \bar{k}}{2 + \bar{k}}$$



(6.8)

##### 5.1.4.3.- Para altura de piso uniforme:

$$D = a \times k_c$$

$$0 \leq a \leq 1$$

(6.9)

**5.1.5.- Tabela VI.3.- Valores “D” no pórtico típico 3 (direção Y).**

coluna		$\bar{k}$	a	$k_c$	$D = a \times k_c$	$\Sigma D_i$
nível	eixo					
4	A	1,69	0,63	2,84	1,79	7,08
	B	1,73	0,63	5,56	3,50	
	C	1,69	0,63	2,84	1,79	
3	A	1,69	0,63	2,84	1,79	7,08
	B	1,73	0,63	5,56	3,50	
	C	1,69	0,63	2,84	1,79	
2	A	0,86	0,30	5,56	1,67	6,51
	B	1,00	0,33	9,60	3,17	
	C	0,86	0,30	5,56	1,67	
1	A	0,86	0,48	5,56	2,67	10,14
	B	1,00	0,50	9,60	4,80	
	C	0,86	0,48	5,56	2,67	

onde:  $\bar{k}$  = relação de rigidezes entre as vigas que chegam ao pilar e a rigidez do pilar.

$(\bar{k} \geq 0,2)$ .

$\Sigma D_i$  = somatório dos valores “D” no nível i do pórtico considerado.

**5.1.6.- Tabela VI.4.- Resumo do somatório dos valores “D” dos elementos resistentes em cada nível ( $D_n$ , na direção Y).**



NÍVEL	D <sub>n</sub>
4	63,72
3	63,72
2	58,59
1	91,26

**5.2.- Tabela VI.5.- Distribuição do corte em pilares do pórtico típico 3:**

COLUNA		V <sub>i</sub> (kips)	D <sub>n</sub>	ΣD <sub>n</sub>	D <sub>n</sub> / ΣD <sub>n</sub>	V <sub>n</sub> = V <sub>i</sub> x D <sub>n</sub> / ΣD <sub>n</sub> (kips)
NÍVEL	EIXO					
4	A	49,47	1,79	63,72	0,0281	1,39
	B		3,50		0,0549	2,72
	C		1,79		0,0281	1,39
3	A	94,85	1,79	63,72	0,0281	2,67
	B		3,50		0,0549	5,21
	C		1,79		0,0281	2,67
2	A	125,10	1,67	58,59	0,0285	3,57
	B		3,17		0,0541	6,77
	C		1,67		0,0285	3,57
1	A	140,23	2,67	91,26	0,0293	4,11
	B		4,80		0,0526	7,38
	C		2,67		0,0293	4,11

5.2.1.- Tabela VI.6.- Forças sísmico-laterais no pórtico 3:

NÍVEL	FORÇA SÍSMICO-LATERAL (kips)
nível 4 (N4)	5,50
nível 3 (N3)	5,10
nível 2 (N2)	3,36
nível 1 (N1)	1,69

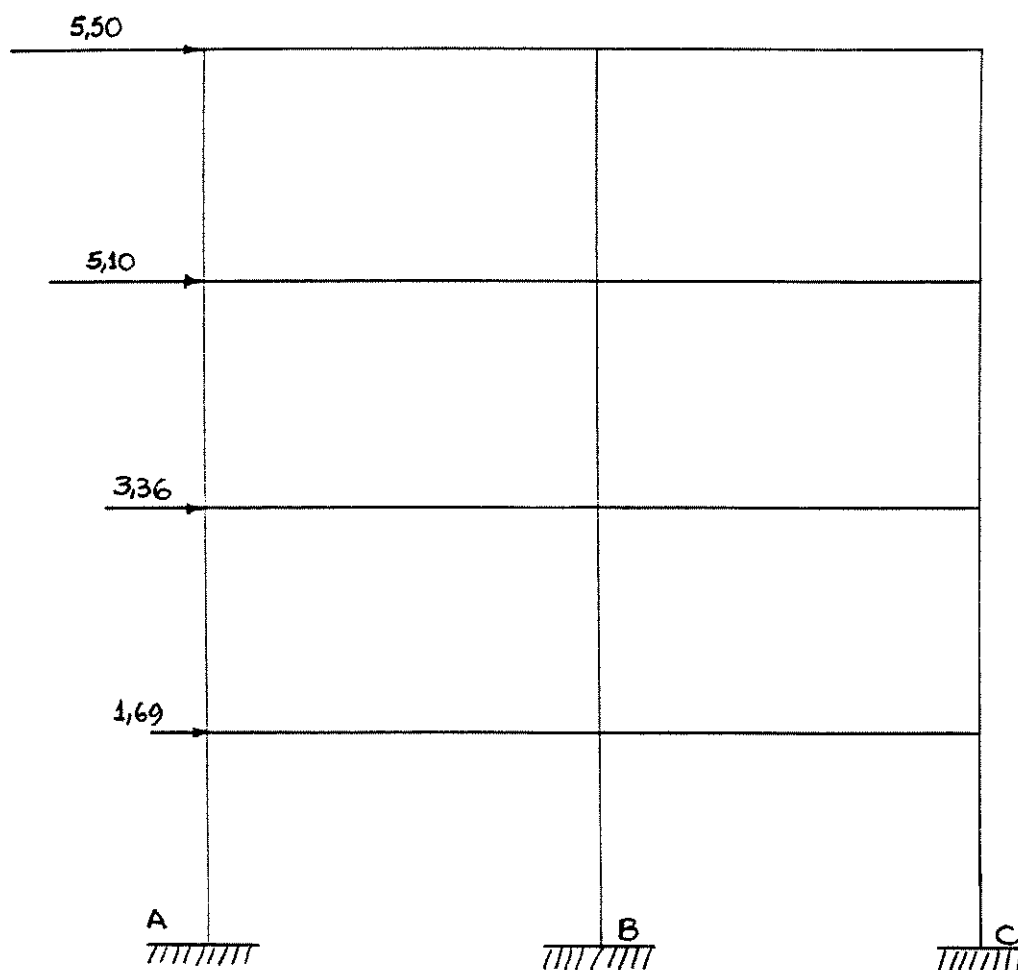


Fig. VI.3.- Forças sísmico-laterais no pórtico 3

### 5.3.- Correção da força cortante pela torção em planta da edificação

#### 5.3.1.- Centro de massas

É o centro de todas as cargas permanentes mais a percentagem correspondente da carga accidental acima do nível considerado.

A sua localização - para edificios regulares- coincide com o centro geométrico da planta.

As coordenadas do centro de massas (ou centro de corte) relativo a dois eixos normais são:

$$x_G = \frac{\sum W_i x_i}{\sum W_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum W_i y_i}{\sum W_i} \quad (6.10)$$

onde:

$x_G$  e  $y_G$  são as coordenadas do centro de massas.

$x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas do centro geométrico para cada piso.

$W_i$  é o peso do piso  $i$ .

$\sum W_i$  é o peso acumulativo.

No presente exemplo, e por se tratar de um edificio geometricamente regular, considera-se que o centro de massas coincide com o centro geométrico.

### 5.3.2.- Tabela VI.7.- Cálculo do centro geométrico e do centro de massas:

nível	W <sub>i</sub> (kips)	ΣW <sub>i</sub> (kips)	centro geométr. (feet)		momento estático (kips-feet)		ΣW <sub>i</sub> x <sub>i</sub> (kips- feet)	ΣW <sub>i</sub> y <sub>i</sub> (kips- feet)	centro de massas	
			x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	W <sub>i</sub> x <sub>i</sub>	W <sub>i</sub> y <sub>i</sub>			x <sub>G</sub>	y <sub>G</sub>
4	645,12	645,12	48	24	30965,76	15482,88	30965,76	15482,88	48	24
3	789,12	1434,24	48	24	37877,76	18938,88	68843,52	34421,76	48	24
2	789,12	2223,36	48	24	37877,76	18938,88	106721,3	53360,64	48	24
1	789,12	3012,48	48	24	37877,76	18938,88	144599,1	72299,52	48	24

### 5.3.3.- Centro de rigidez ou centro de valores “D”

É o centro das rigidezes dos elementos verticais resistentes. É o ponto em torno do qual produz-se a rotação por torção do edifício.

As coordenadas do centro de rigidez são:

$$x_r = \frac{\sum(D_y x)}{\sum D_y} \quad , \quad y_r = \frac{\sum(D_x y)}{\sum D_x} \quad (6.11)$$

Sabendo-se que a estrutura é duplamente simétrica (tanto para a geometria quanto para o carregamento), então o centro de rigidezes coincide com o centro de massas e o centro geométrico, resultando nula a excentricidade torsional, assim:

$$y_r = y_G \quad , \quad x_r = x_G \quad e \quad e_x = e_y = 0 \quad (6.12)$$

para todos os níveis (ver tabela VI.7).

### 5.3.4.- Cálculo da força cortante devida a torção accidental

#### 5.3.4.1.- Momento de torção accidental

As normas sísmico-resistentes consideram que deve levar-se em conta uma torção accidental dada pela fórmula:

$$M_{ti} = H_i(1,5e + 0,05b_x) \quad (6.13)$$

como para este exemplo a excentricidade “e” é nula, resulta:

$$M_{ti} = 0,05b_x H_i \quad (6.14)$$

onde: e = excentricidade.

$M_{ti}$  = momento de torção no nível i.

$H_i$  = cortante no nível i.

$b_x$  = dimensão da estrutura normal à direção do sismo.

#### 5.3.4.2.- Momento polar de inércia

É a resistência à rotação que a estrutura oferece como um todo. É igual à soma dos momentos de inércia nas duas direções normais.

$$\begin{aligned} I_x &= \sum (D_x y_e^2) - y_r^2 \sum D_x \\ I_y &= \sum (D_y x_e^2) - x_r^2 \sum D_y \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$M_P = I_x + I_y$$

onde:  $I_x, I_y$  = momentos de inércia relativos ao centro de rigidez nas direções X e Y.

$D_x, D_y$  = coeficientes de distribuição (rigidezes) nas direções X e Y respectivamente.

$x_e$  = distância do elemento considerado ao eixo Y (eixo global da estrutura).

$y_e$  = distância do elemento considerado ao eixo X (eixo global da estrutura).

$M_p$  = momento polar de inércia.

#### 5.3.4.2.1.- Cálculo de valores “D” em pórticos da direção X

##### a.- Tabela VI.8.- Cálculo de rigidezes nos pórticos A e C:

Elementos	Eixos	Níveis	Seção b x t (in x in)	I (in <sup>4</sup> )	K=I / L (in <sup>3</sup> )	k = K / K <sub>0</sub> K <sub>0</sub> = 10 in <sup>3</sup>
<b>colunas</b>	1 à 9	2 e 1	20 x 12	2880	20	2,0
	1 à 9	4 e 3	16 x 12	2304	16	1,6
<b>vigas</b>	1-2 até					
	8-9	4 à 1	12 x 24	13824	96	9,6

##### b.- Tabela VI.9.- Cálculo de rigidezes no pórtico B:

Elementos	Eixos	Níveis	Seção b x t (in x in)	I (in <sup>4</sup> )	K=I / L (in <sup>3</sup> )	k = K / K <sub>0</sub> K <sub>0</sub> = 10 in <sup>3</sup>
<b>colunas</b>	1 à 9	4 e 3	20 x 12	2880	20	2,0
	1 à 9	2 e 1	24 x 12	3456	24	2,4
<b>vigas</b>	1-2 até					
	8-9	4 à 1	12 x 24	13824	96	9,6

c.- Tabela VI.10.- Valores “D” nos pórticos A e C:

Coluna		$\bar{k}$	a	$k_c$	$D = a \times k_c$	$\Sigma D_i$
Nível	Eixo					
4	1 e 9	6,0	0,75	1,6	1,20	1,20 x 2 +
	2 à 8	12,0	0,86	1,6	1,37	1,37 x 7 =
						12,00
3	1 e 9	6,0	0,75	1,6	1,20	12,00
	2 à 8	12,0	0,86	1,6	1,37	
2	1 e 9	4,8	0,71	2,0	1,42	14,46
	2 à 8	9,6	0,83	2,0	1,66	
1	1 e 9	4,8	0,78	2,0	1,56	1,42 x 2 +
	2 à 8	9,6	0,87	2,0	1,74	1,74 x 7 =
						15,30

d.- Tabela VI.11.- Valores “D”no pórtico B:

Coluna		$\bar{k}$	a	$k_c$	$D = a \times k_c$	$\Sigma D_i$
Nível	Eixo					
4	1 e 9	4,8	0,71	2,0	1,42	1,42 x 2 +
	2 à 8	9,6	0,83	2,0	1,66	1,66 x 7 =
						14,46
3	1 e 9	4,8	0,71	2,0	1,42	14,46
	2 à 8	9,6	0,83	2,0	1,66	
2	1 e 9	4,0	0,67	2,4	1,61	16,66
	2 à 8	8,0	0,80	2,4	1,92	
1	1 e 9	4,0	0,75	2,4	1,80	1,80 x 2 +
	2 à 8	8,0	0,85	2,4	2,04	2,04 x 7 =
						17,88

e.- Tabela VI.12.- Resumo dos valores “D”na direção X:

NÍVEL	$D_n$
4	38,46
3	38,46
2	45,58
1	48,48



### 5.3.4.2.2.- Cálculo dos momentos de inércia e momento polar

a.- Tabela VI.13.- Valores  $D_y x_e^2$  e  $D_x y_e^2$  por níveis:

NÍVEL 4									
DIREÇÃO Y					DIREÇÃO X				
EIXO	$D_y$ ( $\Sigma D_p$ )	$x_e$ (feet)	$D_y x_e$	$D_y x_e^2$	EIXO	$D_x$ ( $\Sigma D_p$ )	$y_e$ (feet)	$D_x y_e$	$D_x y_e^2$
1	7,08	0,0	0,0	0,0	A	12,00	48	576,00	27648,00
2	7,08	12	84,96	1019,52	B	14,46	24	347,04	8328,96
3	7,08	24	169,92	4078,08	C	12,00	0,0	0,0	0,0
4	7,08	36	254,88	9175,68	$\Sigma =$	40,98		$\Sigma =$	35976,96
5	7,08	48	339,84	16312,32					
6	7,08	60	424,80	25488,00					
7	7,08	72	509,76	36702,72					
8	7,08	84	594,72	49956,48					
9	7,08	96	679,68	65249,28					
$\Sigma =$	63,72		$\Sigma =$	207982,08					

OBS:  $D_p$  = rigidezes dos pilares.

NÍVEL 3									
DIREÇÃO Y					DIREÇÃO X				
EIXO	D <sub>y</sub> (ΣD <sub>P</sub> )	x <sub>e</sub> (feet)	D <sub>y</sub> x <sub>e</sub>	D <sub>y</sub> x <sub>e</sub> <sup>2</sup>	EIXO	D <sub>x</sub> (ΣD <sub>P</sub> )	y <sub>e</sub> (feet)	D <sub>x</sub> y <sub>e</sub>	D <sub>x</sub> y <sub>e</sub> <sup>2</sup>
1	7,08	0,0	0,0	0,0	A	12,00	48	576,00	27648,00
2	7,08	12	84,96	1019,52	B	14,46	24	347,04	8328,96
3	7,08	24	169,92	4078,08	C	12,00	0,0	0,0	0,0
4	7,08	36	254,88	9175,68	Σ =	38,46		Σ =	35976,96
5	7,08	48	339,84	16312,32					
6	7,08	60	424,80	25488,00					
7	7,08	72	509,76	36702,72					
8	7,08	84	594,72	49956,48					
9	7,08	96	679,68	65249,28					
Σ =	63,72		Σ =	207982,08					

NÍVEL 2									
DIREÇÃO Y					DIREÇÃO X				
EIXO	$D_y$ ( $\sum D_P$ )	$x_e$ (feet)	$D_y x_e$	$D_y x_e^2$	EIXO	$D_x$ ( $\sum D_P$ )	$y_e$ (feet)	$D_x y_e$	$D_x y_e^2$
1	6,51	0,0	0,0	0,0	A	14,46	48	694,08	33315,84
2	6,51	12	78,12	937,44	B	16,66	24	399,84	9596,16
3	6,51	24	156,24	3749,76	C	14,46	0,0	0,0	0,0
4	6,51	36	234,36	8436,96	$\Sigma =$	45,58		$\Sigma =$	42912,00
5	6,51	48	312,48	14999,04					
6	6,51	60	390,60	23436,00					
7	6,51	72	468,72	33747,84					
8	6,51	84	546,84	45934,56					
9	6,51	96	624,96	59996,16					
$\Sigma =$	58,59		$\Sigma =$	191237,76					

NÍVEL 1									
DIREÇÃO Y					DIREÇÃO X				
EIXO	D <sub>y</sub> (ΣD <sub>P</sub> )	x <sub>e</sub> (feet)	D <sub>y</sub> x <sub>e</sub>	D <sub>y</sub> x <sub>e</sub> <sup>2</sup>	EIXO	D <sub>x</sub> (ΣD <sub>P</sub> )	y <sub>e</sub> (feet)	D <sub>x</sub> y <sub>e</sub>	D <sub>x</sub> y <sub>e</sub> <sup>2</sup>
1	10,14	0,0	0,0	0,0	A	15,30	48	734,40	35251,20
2	10,14	12	121,68	1460,16	B	17,88	24	429,12	10298,88
3	10,14	24	243,36	5840,64	C	15,30	0,0	0,0	0,0
4	10,14	36	365,04	13141,44	Σ =	48,48		Σ =	45550,08
5	10,14	48	486,72	23362,56					
6	10,14	60	608,40	36504,00					
7	10,14	72	730,08	52565,76					
8	10,14	84	851,76	71547,84					
9	10,14	96	973,44	93450,24					
Σ =	91,26		Σ =	297872,64					

**b.- Tabela VI.14.- Momento polar da estrutura:**

NÍVEL	$\Sigma(D_y x_e^2)$	$I_y$	$\Sigma(D_x y_e^2)$	$I_x$	$M_p = I_x + I_y$
4	207982,08	207982,08	35976,96	35976,96	243959,04
3	207982,08	207982,08	35976,96	35976,96	243959,04
2	191237,76	191237,76	42912,00	42912,00	234149,76
1	297872,64	297872,64	45550,08	45550,08	343422,72

**6.- Correção da força cortante pela torção em planta da edificação****6.1.- Cálculo do momento torsor na direção do sismo (eixo Y):( ver tabela VI.15)**

$$M_{Ty} = V_y (1,5 e_x + 0,05 b_x) \quad (6.16)$$

sendo que para nosso exemplo  $e_x = 0$  ; então:

$$M_{Ty} = 0,05 b_x V_y \quad (6.17)$$

onde:  $M_{Ty}$  = momento torsor na direção Y.

$b_x$  = dimensão da estrutura normal à direção do sismo.

$V_y$  = força cortante em cada nível na direção Y.

$e_x$  = excentricidade estática.

**Tabela VI.15.- Momento torsor na direção do sismo:**

<b>NÍVEL</b>	<b>b<sub>x</sub> (feet)</b>	<b>0,05 b<sub>x</sub></b>	<b>V<sub>y</sub> (kips)</b>	<b>M<sub>Ty</sub> = 0,05 b<sub>x</sub> V<sub>y</sub> (kips-feet)</b>
<b>4</b>	96	4,80	49,47	237,456
<b>3</b>	96	4,80	94,85	455,280
<b>2</b>	96	4,80	125,10	600,480
<b>1</b>	96	4,80	140,23	673,104

**6.2.- Força cortante devido à torção:**

$$V_T = \frac{M_T}{M_P} D_y x \quad (6.18)$$

onde:  $V_T$  = força cortante devido à torção.

$M_T$  = momento torsor.

$M_P$  = momento polar.

$D_y$  = coeficiente de distribuição do elemento resistente, quando analisa-se a estrutura na direção Y.

$x$  = distância do elemento considerado ao eixo X (eixo que passa pelo centro de rigidez da estrutura).

6.3.- Tabela VI.16.- Força cortante final no pórtico 3:

coluna		$D_y$	$x$	$D_y x$	$M_P$	$M_{Ty}$	$V_i$	$V_T$	$V_i$ (final)
N	eixo		(feet)				(kips)	(kips)	(kips)
4	A	1,79	24	42,96	243959,04	329,28	1,39	0,04	1,43
	B	3,50	24	84,00			2,72	0,08	2,80
	C	1,79	24	42,96			1,39	0,04	1,43
3	A	1,79	24	42,96	243959,04	631,20	2,67	0,08	2,75
	B	3,50	24	84,00			5,21	0,16	5,37
	C	1,79	24	42,96			2,67	0,08	2,75
2	A	1,67	24	40,08	234149,76	832,32	3,57	0,10	3,67
	B	3,17	24	76,08			6,77	0,20	6,97
	C	1,67	24	40,08			3,57	0,10	3,67
1	A	2,67	24	64,08	343422,72	932,64	4,11	0,12	4,23
	B	4,80	24	115,20			7,38	0,22	7,60
	C	2,67	24	64,08			4,11	0,12	4,23

OBS:  $V_i(\text{final}) = V_i + V_T$ .

6.4.- Tabela VL17.- Forças sísmicas finais no pórtico 3:

NÍVEL	FORÇA SÍSMICO-LATERAL FINAL (kips)
nível 4(N4)	5,66
nível 3(N3)	5,21
nível 2(N2)	3,44
nível 1(N1)	1,75

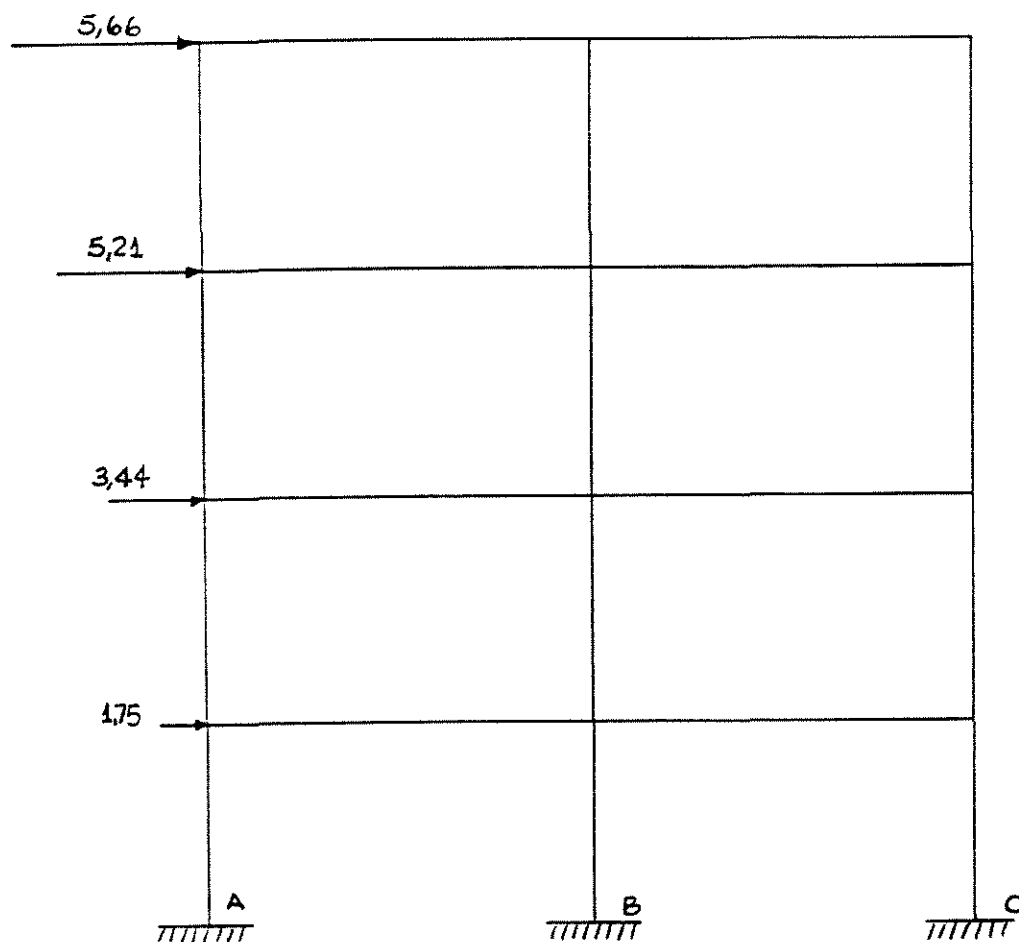


Fig. VL4.- Forças sísmicas finais no pórtico 3



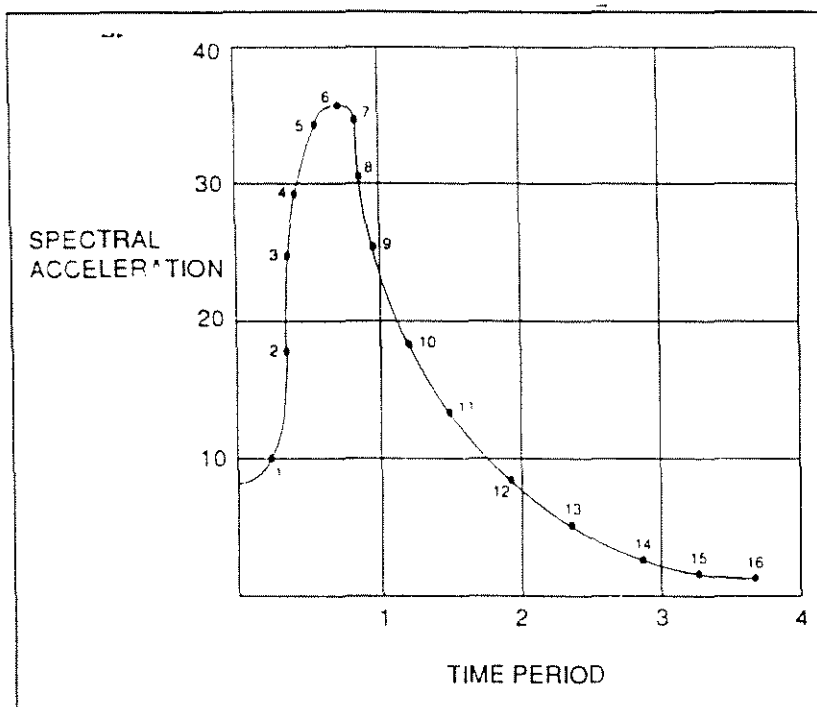
### **VI.2.2.- ANÁLISE SÍSMICO-DINÂMICA MODAL ESPECTRAL USANDO O SOFTWARE SAP90**

O programa **SAP90** executa a análise dinâmica modal espectral baseiando-se em teoria similar com a apresentada nos capítulos II,III e V.

O programa **SAP90** precisa de um arquivo de dados da estrutura para executar a análise dinâmica; arquivo onde, além dos dados ingressados para a massa inercial da estrutura, deve-se preparar um bloco de dados para definir o carregamento dinâmico espectral e que denomina-se com o nome de **SPEC**.

No bloco de dados **SPEC** do programa **SAP90** deve ser ingressado o ângulo **a** que indica a direção da excitação sísmica (ver Fig. V.1). Também devem ser ingressados os dados relativos à aceleração da gravidade, **S**, e à relação de amortecimento, **d**, medido como uma fração do amortecimento crítico. Ver referência [11]

Os dados espectris **s<sub>1</sub>**, **s<sub>2</sub>** e **s<sub>3</sub>**, são valores de aceleração espectral ingressados no **SPEC** correspondentes às direções sísmicas **1**, **2** e **Z** respectivamente, para o período dotempo **t<sub>p</sub>**. Uma curva espectral típica com estes dados é mostrada na **Fig. VI.5**.



**Fig. VI.5.- Típica curva de resposta espectral.**(do SAP90 Structural Analysis Users Manual por E. L. WILSON e A. HABIBULLAH, 1992).

Se a excitação ao longo de uma direção particular não é requerida, o correspondente ingresso de valor espectral deve ser nulo (0).

### **VI.2.3.- COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ESTÁTICO E DINÂMICO PARA O EXEMPLO 1**

A seguir apresentam-se os gráficos de saída fornecidos pelo SAP90 tanto para análise sísmico-estática quanto para análise sísmico-dinâmica modal espectral do pórtico 3.

Inicialmente mostram-se os gráficos dos quatro primeiros modos de vibração analisados para o pórtico 3.

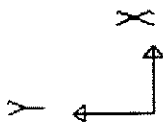
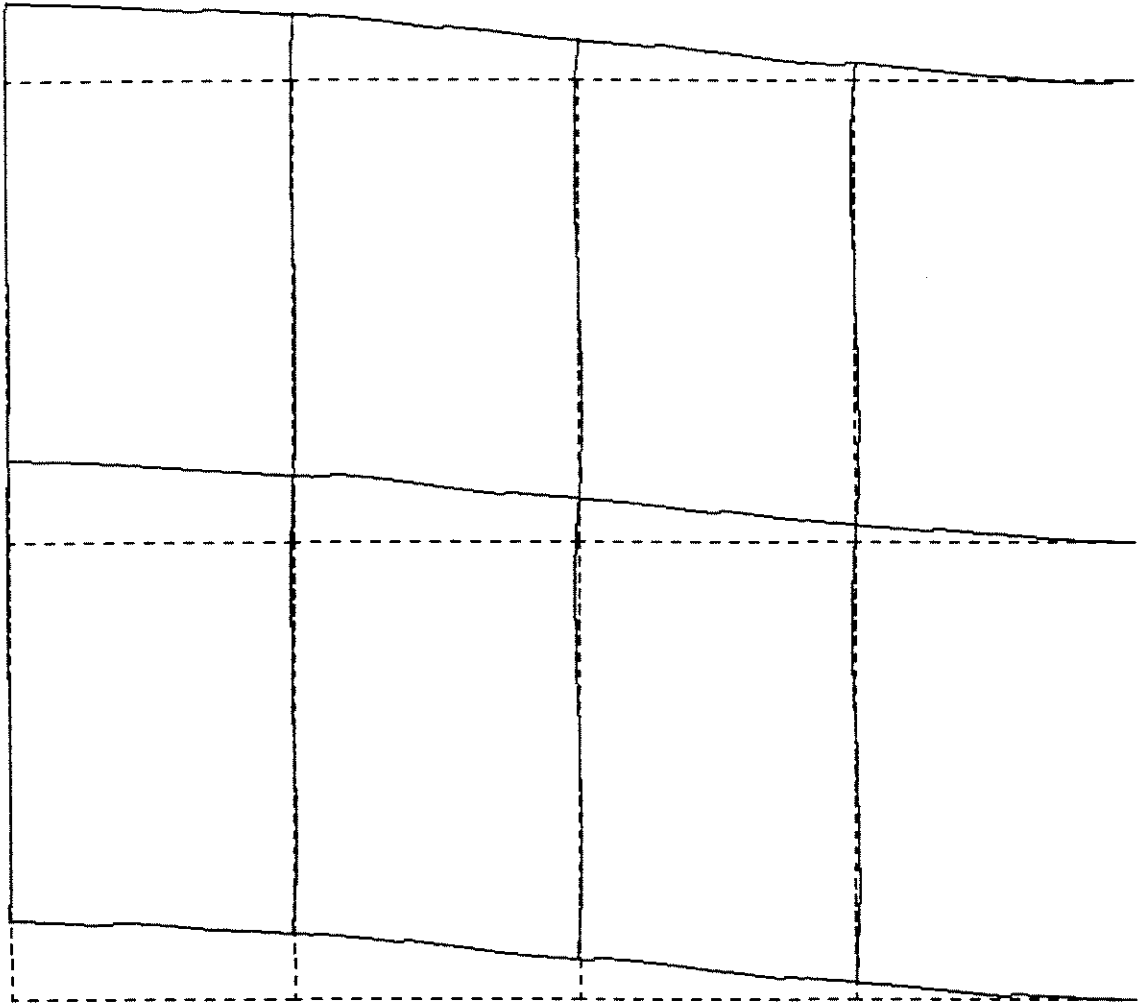
Logo apresentam-se os gráficos de deslocamentos para os seguintes carregamentos:

- permanente + acidental + sísmico-estático.
- permanente + acidental + sísmico-dinâmico modal espectral.

Observa-se que o deslocamento sísmico-dinâmico no nível superior (N4) corresponde a 62% do deslocamento sísmico-estático.

Finalmente apresentam-se os gráficos de envoltórias de momentos para o pórtico plano 3. Estas envoltórias são mostradas tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica modal espectral .

Observa-se que a envoltória sísmico-estática contém a envoltória sísmico-dinâmica.



part 2 mpa

NODE

SHAPE

MODE 1

MINIMA

X .0000E+00

Y -.1506E-01

Z .0000E+00

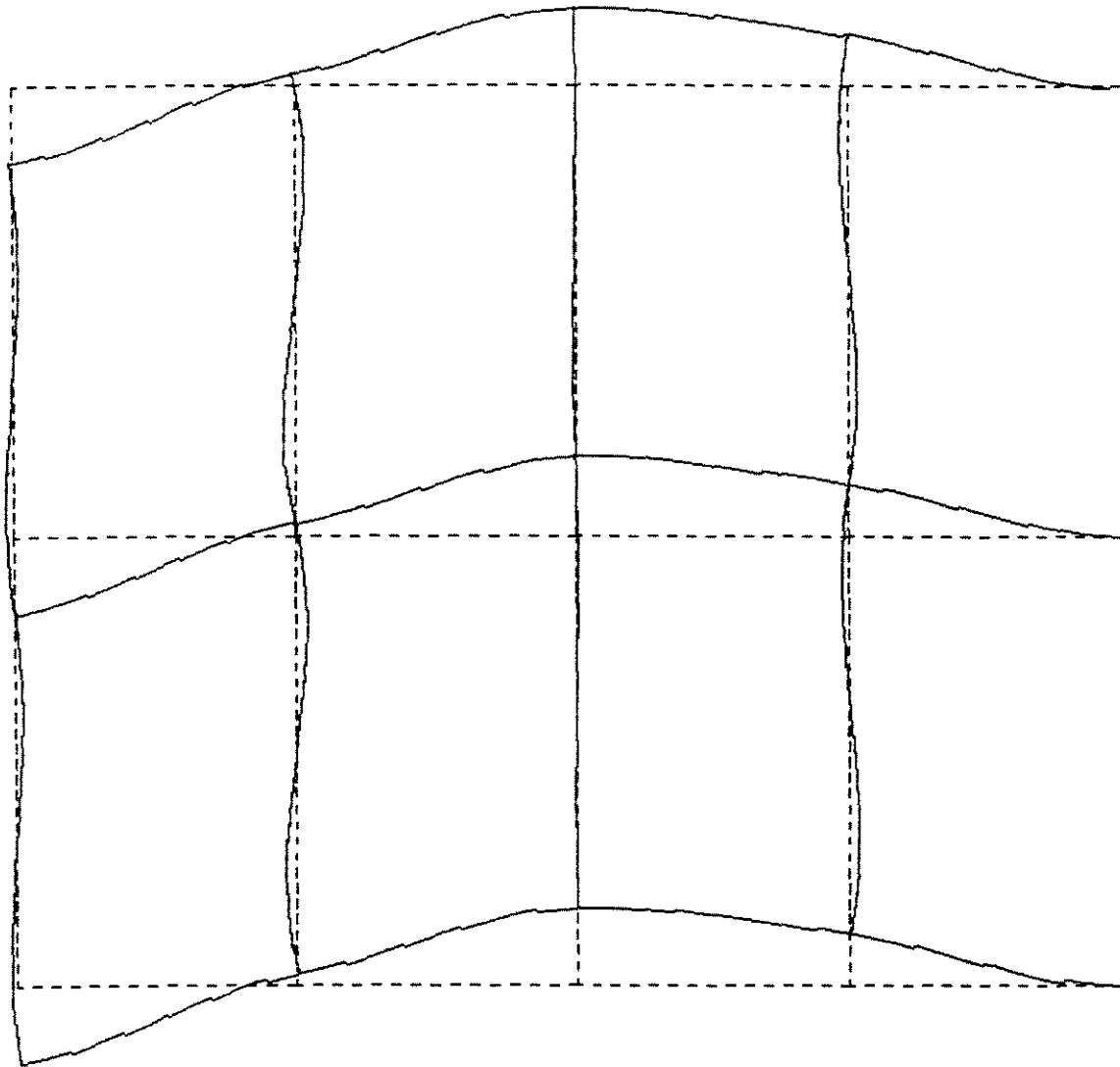
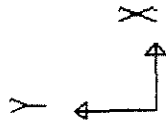
MAXIMA

X .1462E+01

Y .1506E-01

Z .0000E+00

SAP90



part 2 mpa

MODE

SHAPE

MODE

2

MINIMA

X -.1284E+01

Y -.3925E-01

Z .00000E+00

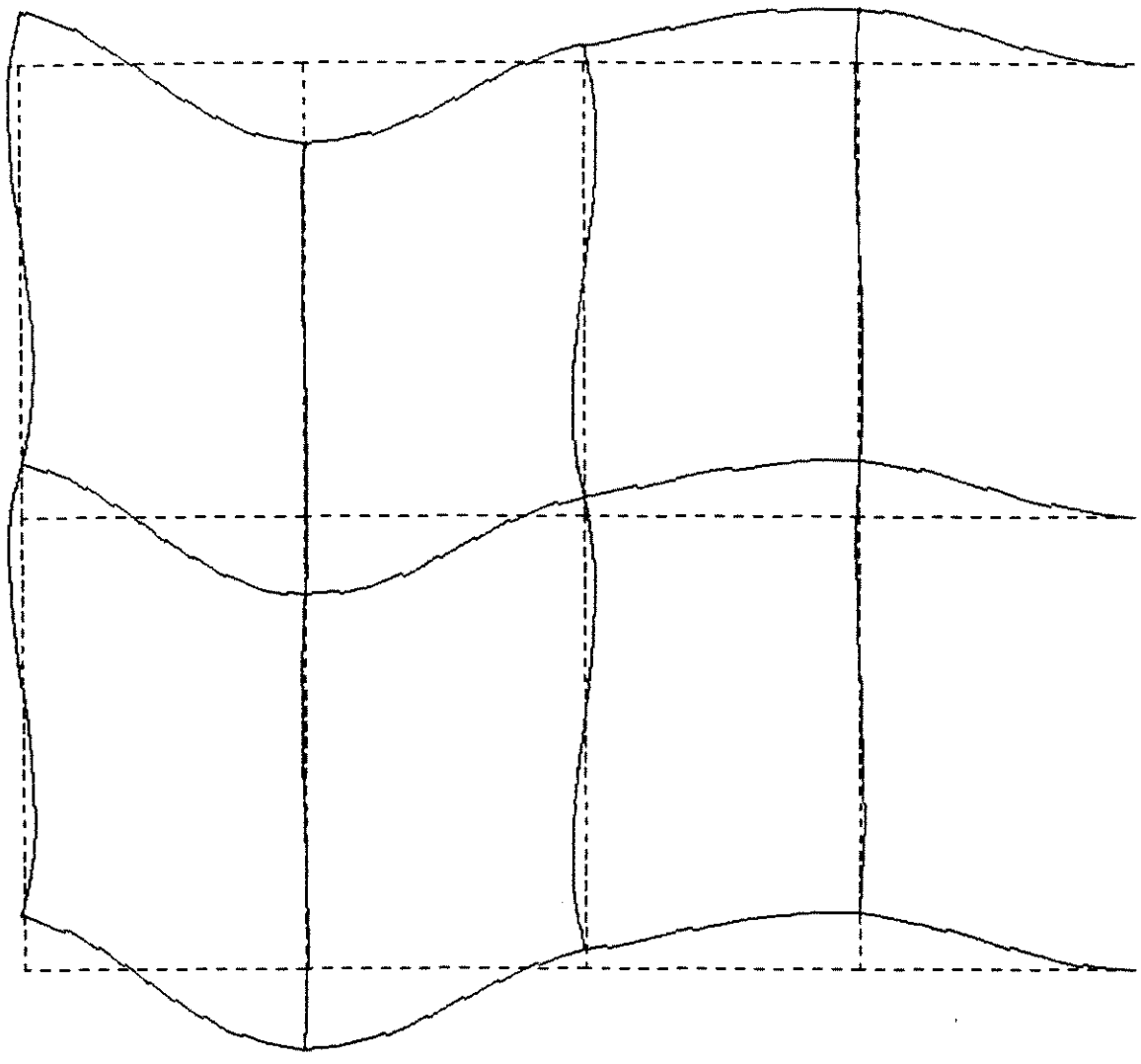
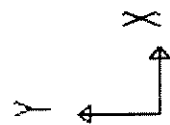
MAXIMA

X .1325E+01

Y .3925E-01

Z .00000E+00

SAP90



par12mpa

NODE

SHAPE

NODE

3

MINIMA

X -.1424E+01

Y -.3431E-01

Z .0000E+00

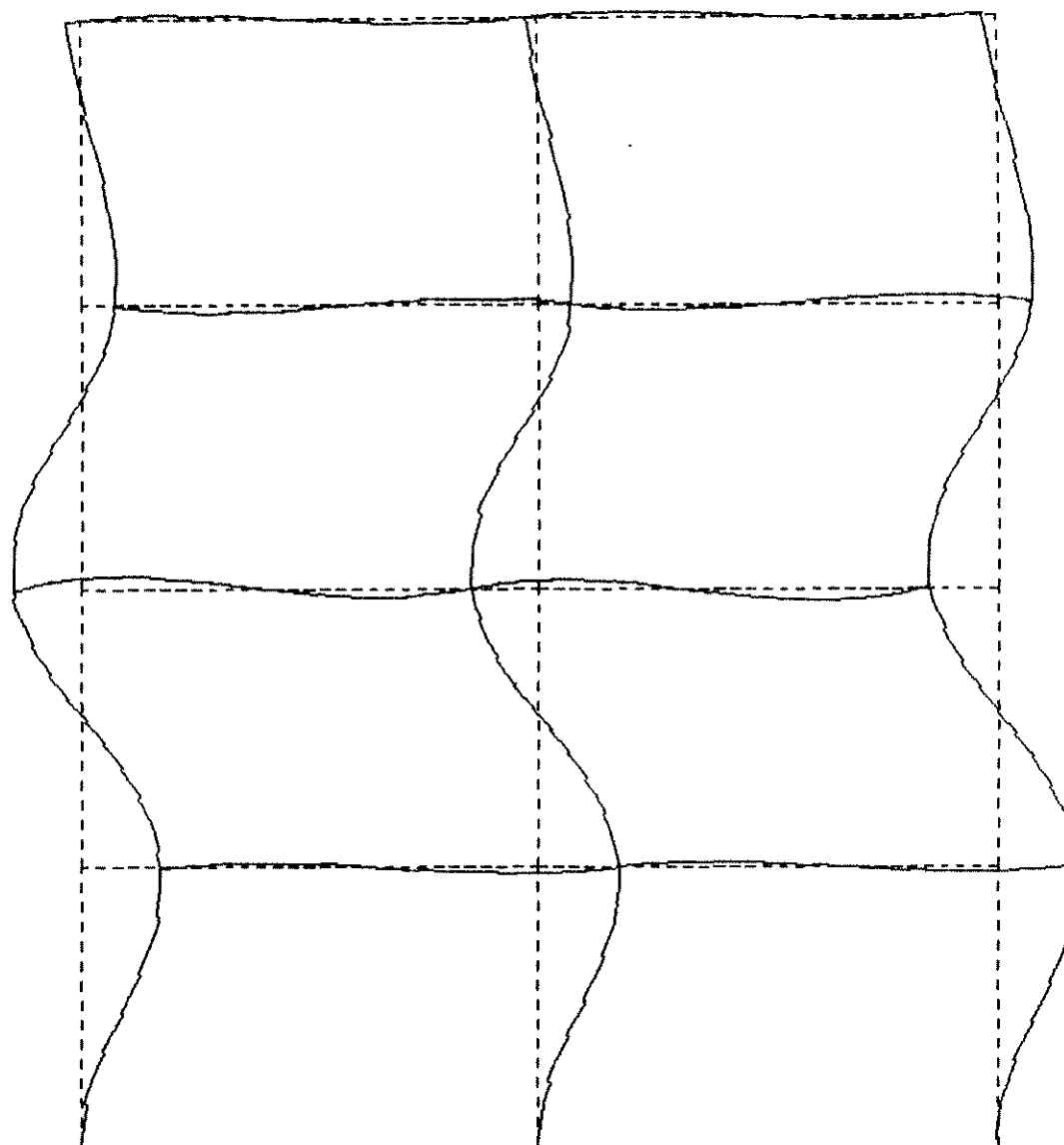
MAXIMA

X .1000E+01

Y .3429E-01

Z .0000E+00

SAP90  
06-JAS



part2mpa

MODE

SHAPE

MODE 4

MINIMA

X -.1213E+01

Y -.3123E-01

Z .0000E+00

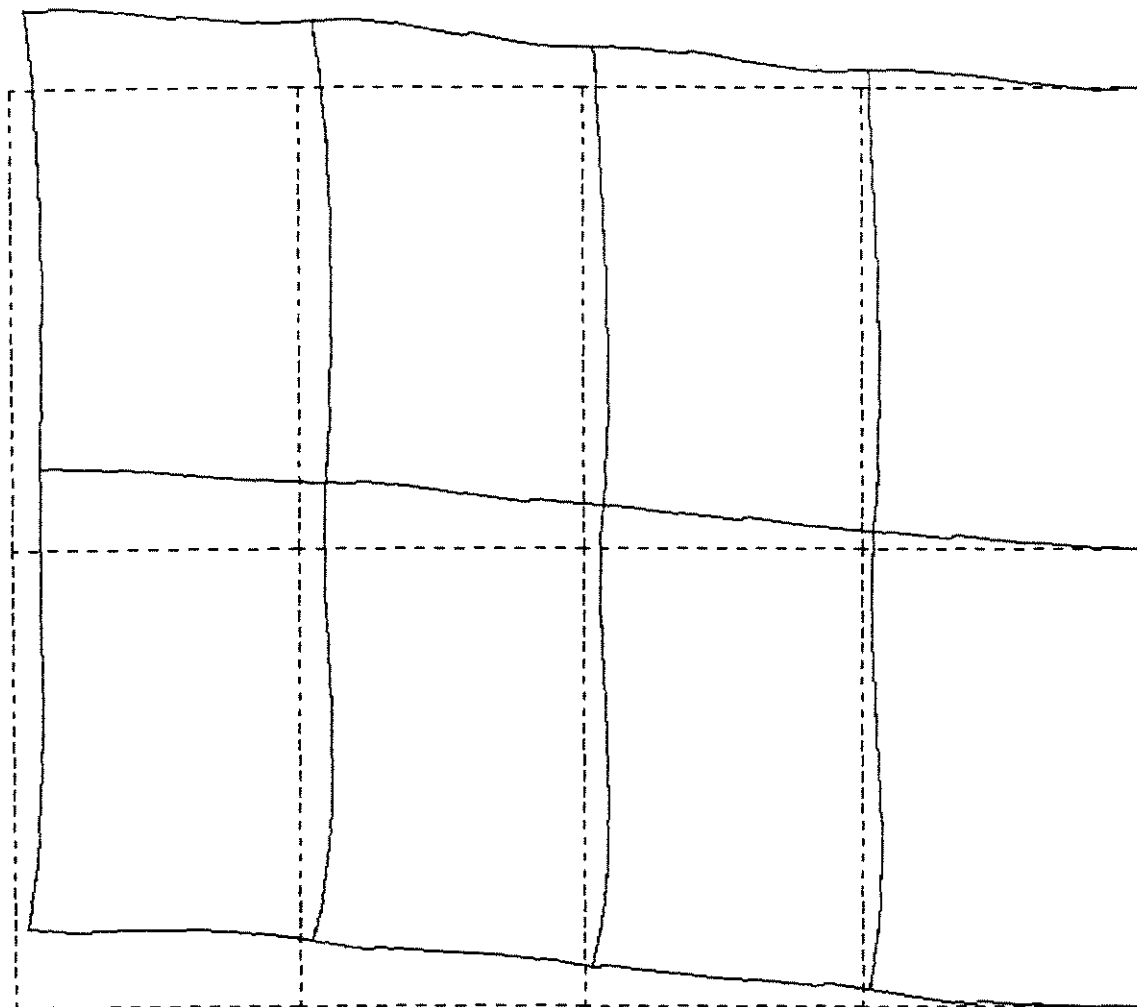
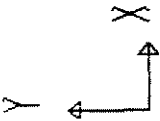
MAXIMA

X .1430E+01

Y .3116E-01

Z .0000E+00

SAP90



par 12 mpa

DEFORMED

SHAPE

LOAD

5

MINIMA

X .00001+00

Y -.10961+00

Z .00001+00

MAXIMA

X .38401+00

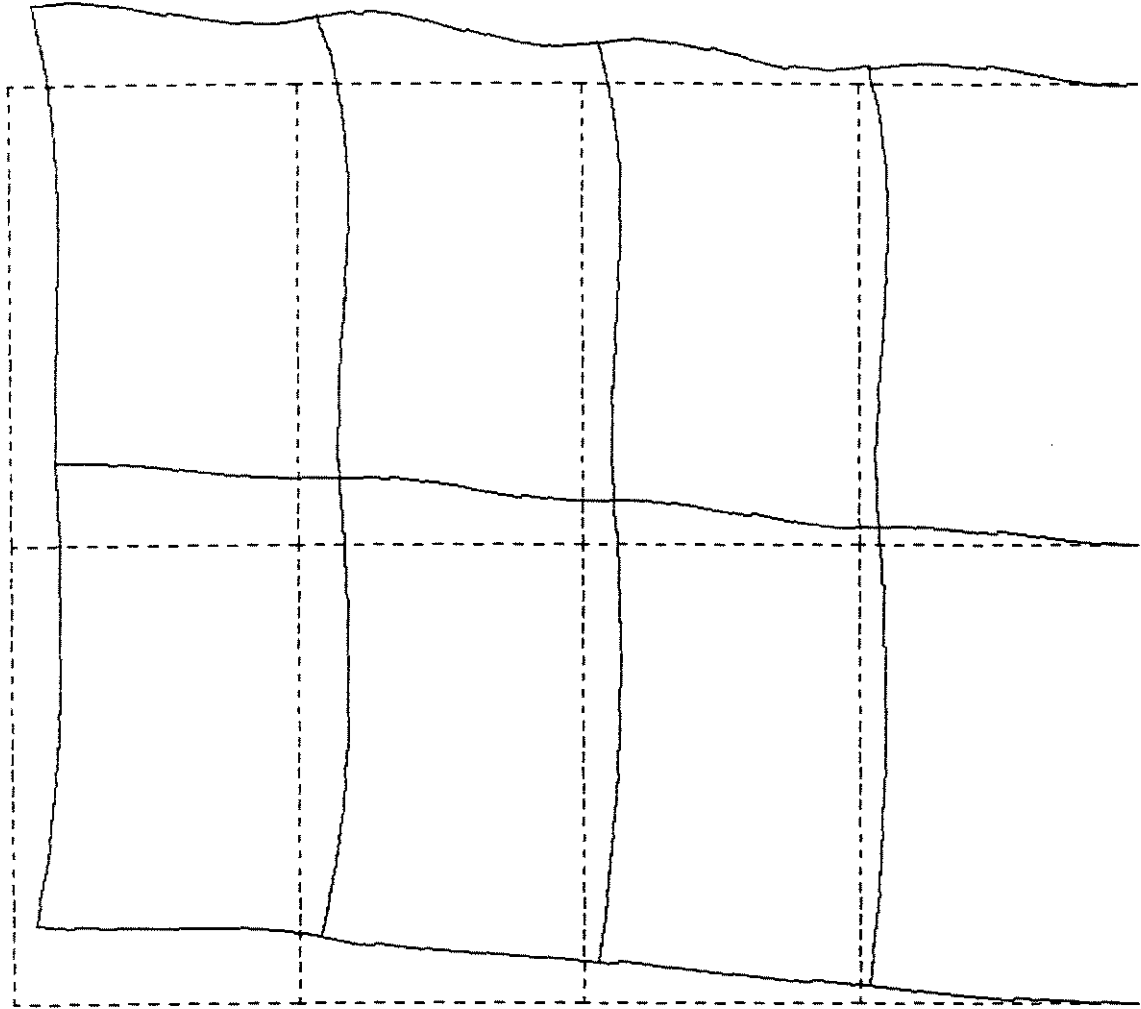
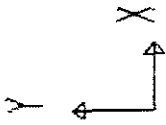
Y .00001+00

Z .00001+00

SAP90

06445





part2.mpa

DEFORMED

SHAPE

LOAD

7

MINIMA

X .00001+00

Y -.10961+00

Z .00001+00

MAXIMA

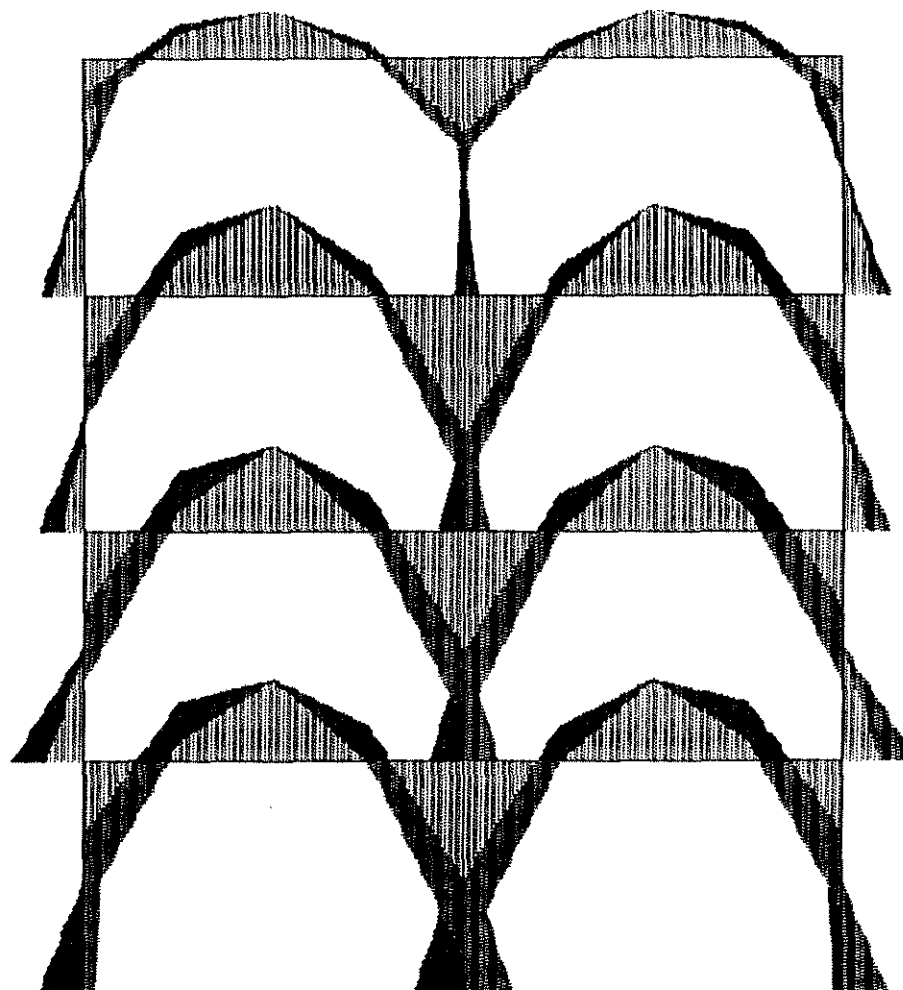
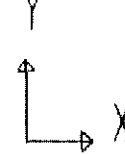
X .23891+00

Y .00001+00

Z .00001+00

SAP90

06JAS



part 1me

FRAME

OUTPUT 1133

ENVELOPE ALL

MIN < 4>

-.2369E+04

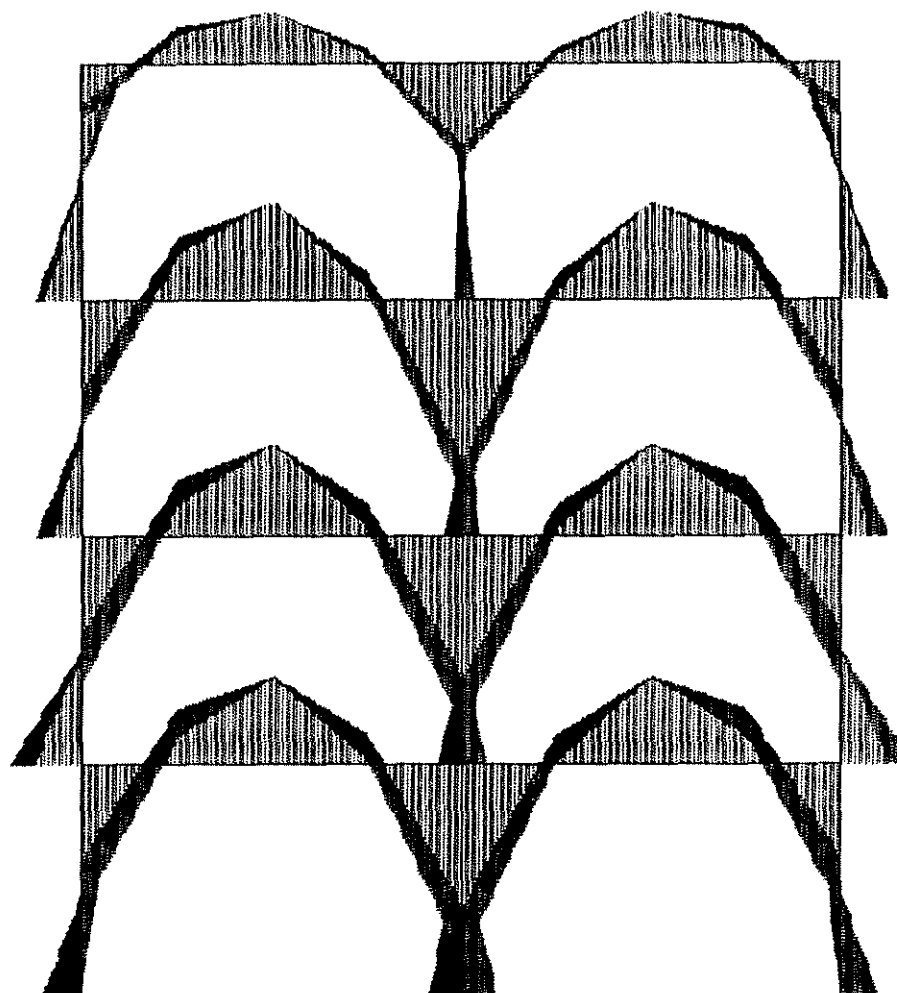
AT 288.00

MAX < 8>

.1112E+04

AT 144.00

SAP90



part2.mdp  
FRAME  
OUTPUT 133  
ENVELOPE ALL

MIN < 4>  
-.2201E+04  
AT 288.00  
MAX < 14>  
.1057E+04  
AT 144.00

SAP90

## **VI.2.4.- FORÇA CORTANTE SÍSMICO-ESTÁTICA NA BASE PELAS NORMAS PERUANA E CHILENA**

Calcula-se aqui a força cortante na base da edificação do exemplo 1 segundo as normas peruana e chilena. Logo estes valores são comparados com o valor da força cortante calculada segundo a norma americana UBC-88 e apresentada no item VI.2.1.

### **VI.2.4.1.- FORÇA CORTANTE NA BASE PELA NORMA PERUANA NPDSR-77**

Calcula-se a força cortante na base segundo a norma peruana NPDSR-77 apresentada no item IV.2.2.

1.- Peso efetivo total:  $P = 789,12 \times 3 + 645,12 = 3012,48$  kips.

2.- Período fundamental da estrutura:  $T = 0,08N = 0,08 (4) = 0,32$  sec.

3.- Coeficiente sísmico  $C$  :

$$C = \frac{0,8}{\frac{T}{T_s} + 1}; \text{ onde: } T = 0,32 \text{ sec}$$

$T_s = 0,30$  sec (período predominante do solo de fundação - rocha)

$$\text{Daquí: } C = \frac{0,8}{\frac{0,32}{0,30} + 1} = 0,387$$

Também:  $0,16 < 0,387 < 0,40$  OK!

4.- Força cortante na base. Da eq. (4.4) tem-se:

$$H = \frac{ZUSC}{R_d} P; \text{ onde:}$$

$Z = 1,0$  (edifício localizado na zona sísmica 1 do Peru).

$U = 1,0$  (edificação categoria C; a ser utilizada como armazém).

$S = 1,0$  (solo tipo I; rocha).

$R_d = 6,0$  (fator de ductilidade correspondente a estruturas aporticadas de concreto armado).

$C = 0,387$  (coeficiente sísmico).

Daqui:

$$H = \frac{1,0 \times 1,0 \times 1,0 \times 0,387}{6,0} \times 3012,48 = 194,3 \text{ kips } (\cong 6,5\% P).$$

#### **VL2.4.2.- FORÇA CORTANTE NA BASE PELA NORMA CHILENA NCh433.Of93**

Calcula-se a força cortante na base segundo a norma chilena NCh433.Of93 apresentada no item IV.2.3.

1.- Peso efetivo total:  $P = 789,12 \times 3 + 645,12 = 3012,48 \text{ kips}$ .

2.- Período fundamental da estrutura:  $T^* = 0,08N = 0,08 (4) = 0,32 \text{ sec}$ .

3.- Coeficiente sísmico  $C$  :

$$C = \frac{A_o c}{gR} \left( \frac{T'}{T^*} \right)^n; \text{ onde:}$$

$A_o = 0.40g$  = aceleração efetiva máxima para a zona sísmica 3 do Chile (tabela IV.11).

$c = 2,50$  = parâmetro do tipo de solo rocha (tabela IV.10).

$n = 1,00$  = parâmetro do tipo de solo rocha (tabela IV.10).

$T' = 0,25$  sec. = parâmetro do tipo de solo rocha (tabela IV.10).

$T^* = 0,32$  sec. = período fundamental da estrutura.

$g$  = aceleração da gravidade.

$R = 8$  = fator estrutural para pórticos de concreto armado (tabela IV.12).

Daqui: 
$$C = \frac{0,40 \times 2,50}{8} \left( \frac{0,25}{0,32} \right)^{1,0} = 0,098$$

também:  $0,067 < 0,098 < 0,240$  OK!

**4.- 4.-** Força cortante na base. Da eq. (4.7) tem-se:

$$Q_o = CIP; \text{ onde:}$$

$C = 0,098$  = coeficiente sísmico.

$I = 1,00$  = coeficiente relativo ao uso da edificação (no caso armazenagem; ver tabela IV.14)

$P = 3012,48$  kips = peso total da estrutura.

Daqui:

$$Q_o = 0,098 \times 1,0 \times 3012,48 = 295,20 (\cong 10\% \text{ de } P).$$

### VI.2.4.3.- COMPARAÇÃO DA FORÇA CORTANTE PARA AS TRÊS NORMAS (EXEMPLO 1)

Observa-se da tabela VI.18 que os valores da força cortante na base segundo as normas peruana (NPDSR-77) e chilena (NCh433.Of93), são maiores que para a norma americana UBC-88.

**Tabela VI.18.-** Comparação da força cortante na base para as três normas (exemplo 1).

<b>Norma</b>	<b>Peso total da edificação (kips)</b>	<b>Força cortante na base (kips)</b>	<b>Porcentagem do peso total da edificação (%).</b>
<b>UBC-88</b>	3012,48	140,23	4,65
<b>NPDSR-77</b>	3012,48	194,30	6,45
<b>NCh433.Of93</b>	3012,48	295,20	9,80

### **VI.3.- APRESENTAÇÃO DO SEGUNDO EXEMPLO A SER ANALISADO**

**EXEMPLO 2.-** Uma edificação irregular aporticada de concreto armado de 07 andares tem suas dimensões em planta mostradas na Fig. VI.6. A estrutura inclui também as paredes da caixa do elevador do edifício.

O solo de fundação assume-se ser de areia e gravilha densa. A edificação está localizada na zona sísmica 1 do mapa de zonificação sísmica do Peru, mostrado na Fig.IV.02, e projetou-se para escritórios e apartamentos.

Deve-se executar uma análise sísmica para esta estrutura (na direção normal aos eixos 2, 3 e 4) da seguinte forma:

1. Uma análise sísmico-estática em concordância com a norma peruana **NPDSR-77**.
2. Uma análise sísmico-dinâmica em concordância com a superposição modal espectral utilizando-se o software **SAP90**.
3. Faz-se uma comparação dos resultados obtidos para o **pórtico principal G**.
4. Calcula-se e compara-se a força cortante sísmica na base da estrutura utilizando-se as três normas indicadas no item VI.1.

O peso por nível e peso total da estrutura apresenta-se na tabela VI.19.



**Tabela VI.19.-** Peso por nível e peso total da estrutura.

<b>NÍVEL</b>	<b>PESO (T)</b>
7	32,59
6	65,01
5	124,00
4	125,70
3	126,41
2	127,22
1	141,15
<b>PESO TOTAL</b>	<b>742,08 toneladas (T).</b>

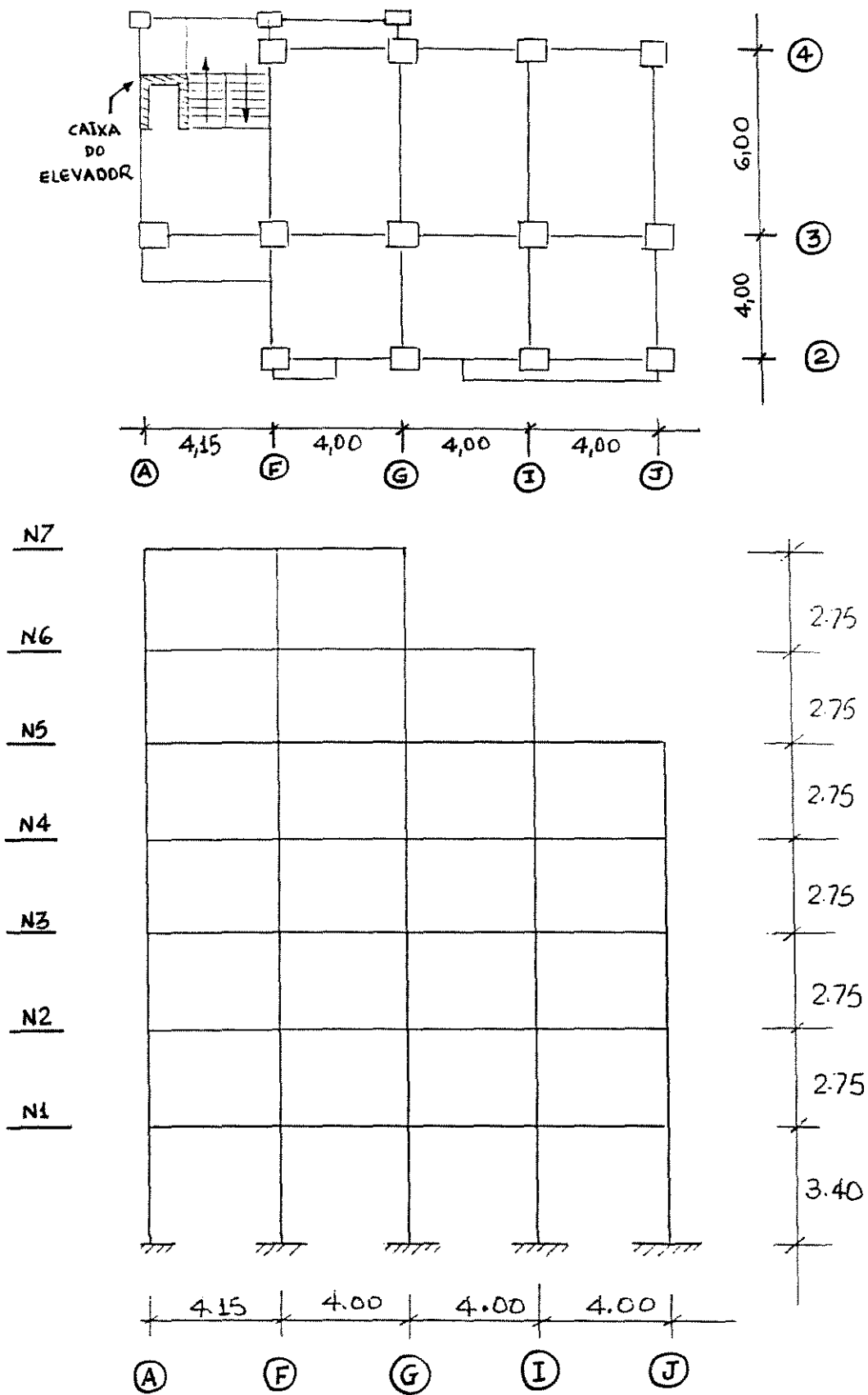


Fig. VI.6.- Planta e elevação da edificação de 7 andares do exemplo 2.

### VL.3.1.- ANÁLISE SÍSMICO-ESTÁTICA DO EXEMPLO 2 PELA NORMA PERUANA NPDSR-77

1.- Peso efetivo total:  $P = 742,08 \text{ T}$  (ver tabela VI.18).

2.- Período fundamental da estrutura (ver item IV.2.2): Trata-se de uma estrutura contendo pórticos e também as paredes da caixa do elevador, então:

$$T = \frac{0,09h}{\sqrt{D}}; \text{ onde: } h = 19,90\text{m (altura em metros (m) da edificação)}.$$

$D = 13,00\text{m}$  (dimensão horizontal em metros da edificação na direção do sismo). Daquí:

$$T = \frac{0,09(19,90)}{\sqrt{13}} = 0,50 \text{ seg.}$$

3.- Coeficiente sísmico  $C$ , da eq.(4.5) tem-se:

$$C = \frac{0,8}{\frac{T}{T_s} + 1}; \text{ onde: } T = 0,50 \text{ seg.}$$

$T_s = 0,45 \text{ seg.}$  (período de solo intermediário entre I e II na tabela IV.7 - solo de areia e gravilha densa).

$$\text{Daquí: } C = \frac{0,8}{\frac{0,50}{0,45} + 1} = 0,38$$

Também:  $0,16 < 0,38 < 0,40$  OK!

4.- Força cortante na base. Da eq. (4.4) tem-se:

$$H = \frac{ZUSC}{R_d} P; \text{ onde:}$$

$Z = 1,0$  (edificio localizado na zona sísmica 1 do Peru. Ver tabela IV.5).

$U = 1,0$  (edificação a ser utilizada para moradia. Categoria C; ver tabela IV.6).

$S = 1,10$  (tipo solo intermediário entre I e II na tabela IV.7 - solo de areia e gravilha densa).

$R_d = 4,0$  (fator correspondente a estruturas aporricadas de concreto armado comuns com paredes da caixa do elevador).  $C = 0,38$  (coeficiente sísmico).

Daqui: 
$$H = \frac{1,0 \times 1,0 \times 1,10 \times 0,38}{4,0} \times 742,08 = 77,55 \text{ T } (\cong 10\% P)$$

5.- Forças laterais na edificação; da eq.(4.14) tem-se:

$$F_i = f H \frac{P_i h_i}{\sum P_i h_i}; \text{ onde:}$$

$f = 1,00$  (para edificios cuja relação altura / largura na direção considerada não excede de 3)

A tabela VI.20 mostra a distribuição em altura da força cortante na base.

**Tabela VI.20.- Forças laterais e força cortante sísmica para cada nível.**

NÍVEL	$P_i$ (t)	$h_i$ (m)	$P_i \times h_i$ (t -m)	$F_i$ (t)	$V_i$ (t)
7	32,59	19,90	648,54	6,80	6,80
6	65,01	17,15	1114,98	11,68	18,48
5	124,00	14,40	1785,60	18,71	37,19
4	125,70	11,65	1464,41	15,35	52,54
3	126,41	8,90	1125,05	11,79	64,33
2	127,22	6,15	782,40	8,20	72,53
1	141,15	3,40	479,91	5,02	77,55
$\sum P_i h_i =$			7400,83		

## **6.- Distribuição da força cortante nos pórticos e paredes da estrutura:**

Distribuir-se a força cortante em cada nível proporcionalmente às rigidezes (valores  $D$ ) dos elementos resistentes da estrutura (ver item IV.4).

Seguindo-se um procedimento similar ao indicado no item VI.2.1-(5) calculam-se os valores das rigidezes (valores  $D$ ) nos pórticos da direção principal e nos pórticos da direção secundária. Igualmente calculam-se as rigidezes nas paredes da caixa do elevador.

Também avalia-se a interação pórtico-parede (da caixa do elevador) no eixo A com o propósito de calcular as rigidezes (valores  $D$ ) finais tanto nos elementos resistentes do pórtico (pilares) quanto na parede da caixa do elevador produto da interação pórtico-parede.

Levando-se em conta que a distribuição da força cortante aos pórticos e as paredes da estrutura depende das rigidezes (valores  $D$ ) destes elementos resistentes, então é claro que as mudanças de rigidezes produto da interação pórtico-parede no eixo A levam a uma redistribuição global da força cortante tanto nos pórticos quanto nas paredes da estrutura.

Executa-se também a correção (da força cortante) pela torção em planta da estrutura levando-se em conta a não coincidência entre o centro de massas (ponto de aplicação da força cortante) e o centro de rigidezes (ponto em torno ao que produz-se a

rotação da edificação). Existe então uma excentricidade afetada principalmente pela localização extrema da caixa do elevador.

Todos estes cálculos prévios para o exemplo 2 encontram-se na referência [30].

Feitos todos os cálculos acima mencionados, a tabela VI.21 mostra os valores finais para os valores das rigidezes e da força cortante tanto nos pórticos quanto nas paredes da direção principal da edificação do exemplo 2.

**Tabela VI.21.-Valores finais da força cortante nos pórticos e nas paredes do exemplo 2**

nível	valor D pórticos	valor D paredeA	valor D parede B	valores D(total)	cortante total (t)	cortante pórticos	cortante parede A	cortante parede B
6	11,32	10,24	0,53	22,09	18,48	9,47	8,57	0,44
5	17,51	18,12	1,87	37,50	37,19	17,37	17,97	1,86
4	17,49	27,75	5,01	50,25	52,54	18,29	29,02	5,24
3	22,40	26,90	7,10	56,40	64,33	25,55	30,68	8,10
2	22,53	37,19	5,76	65,48	72,53	24,96	41,19	6,38
1	37,94	106,86	47,36	192,16	77,55	15,31	43,13	19,11

A tabela VI.22 mostra os valores finais da força cortante no pórtico G

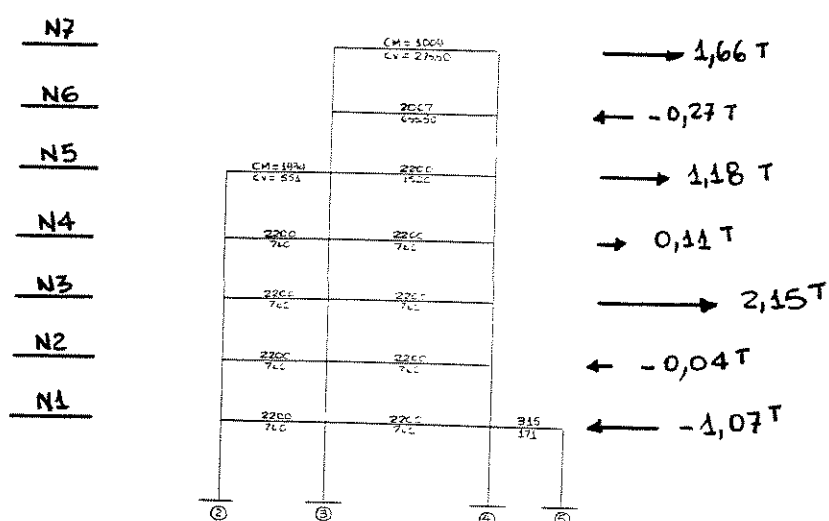
**Tabela VI.22.- Força cortante final nos elementos do pórtico principal G**

pilar		cortante total (t)	valores $D_n$	valores $\sum D_n$	$D_n / \sum D_n$	corte $V_i(t)$
nível	eixo		elementos	total		elementos
7	3	6,80	0,67	5,50	0,122	0,83
	4		0,67		0,122	0,83
6	3	18,48	0,90	22,09	0,041	0,76
	4		0,76		0,034	0,63
5	2	37,19	0,87	37,50	0,023	0,86
	3		0,97		0,026	0,97
	4		0,76		0,020	0,74
4	2	52,54	0,87	50,25	0,017	0,89
	3		0,97		0,019	1,00
	4		0,76		0,015	0,79
3	2	64,33	1,40	56,40	0,025	1,61
	3		1,69		0,030	1,93
	4		1,15		0,020	1,29
2	2	72,53	1,40	65,48	0,021	1,52
	3		1,69		0,026	1,89
	4		1,25		0,019	1,38
1	2	77,55	1,42	192,16	0,007	0,54
	3		3,75		0,020	1,55

	4		3,07		0,016	1,24
	5		0,92		0,005	0,39

**6.4.- Tabela VI.23.- Forças sísmico-laterais finais no pórtico G:**

NÍVEL	FORÇA SÍSMICO-LATERAL FINAL(t)
nível 7 (N7)	1,66
nível 6 (N6)	-0,27
nível 5 (N5)	1,18
nível 4(N4)	0,11
nível 3(N3)	2,15
nível 2(N2)	-0,04
nível 1(N1)	-1,07



**Fig. VI.4.- Forças sísmicas finais no pórtico G**



### **VI.3.2.- COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS ESTÁTICO E DINÂMICO PARA O EXEMPLO 2**

A seguir apresentam-se os gráficos de saída fornecidos pelo SAP90 tanto para análise sísmico-estática quanto para análise sísmico-dinâmica modal espectral do pórtico G.

Inicialmente mostram-se os gráficos dos sete primeiros modos de vibração para o pórtico G.

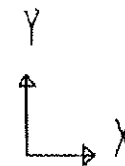
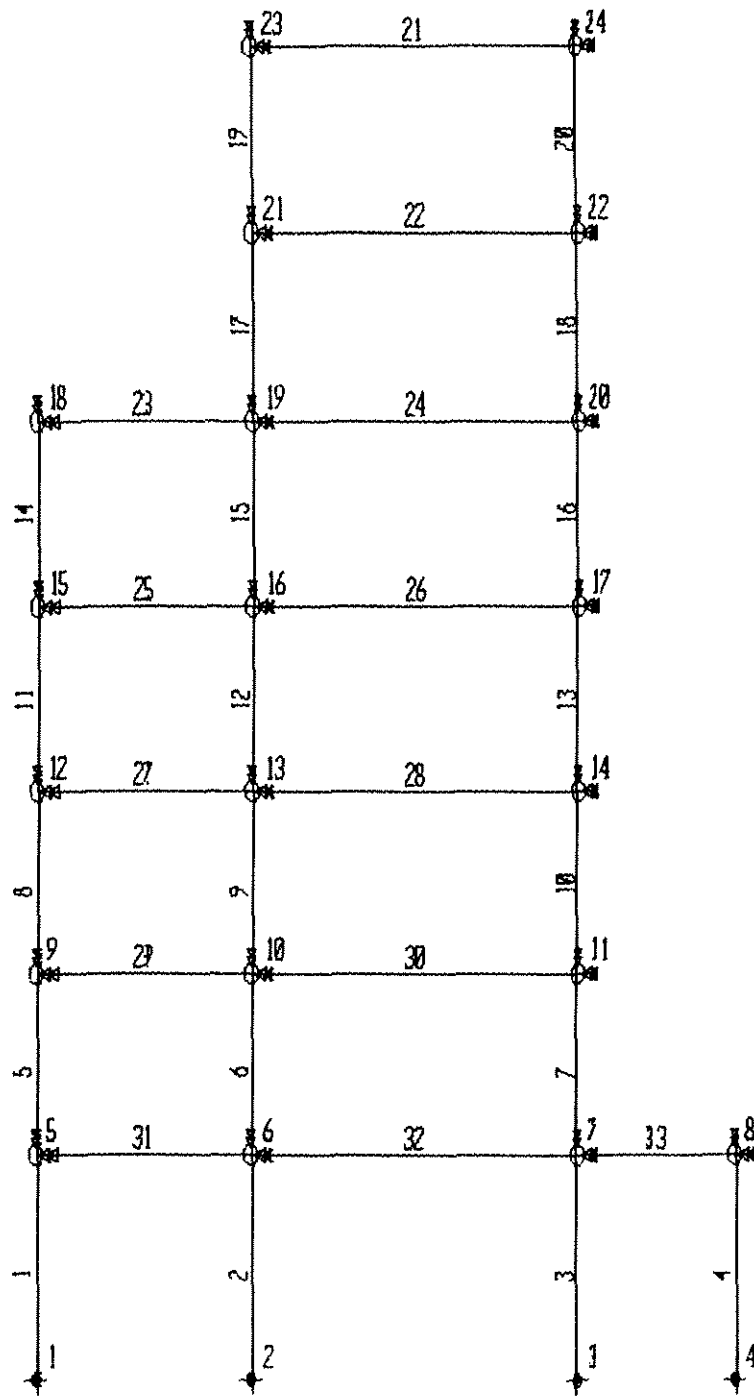
Logo apresentam-se os gráficos de deslocamentos para os seguintes carregamentos:

- permanente + acidental + sísmico-estático.
- permanente + acidental + sísmico-dinâmico modal espectral.

Observa-se que o deslocamento sísmico-dinâmico no nível superior (N7) é 36% maior que o deslocamento correspondente à análise sísmico-estático.

Finalmente apresentam-se os gráficos de envoltórias de momentos para o pórtico plano G. Estas envoltórias mostram-se tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica modal espectral .

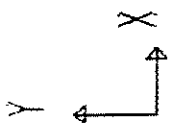
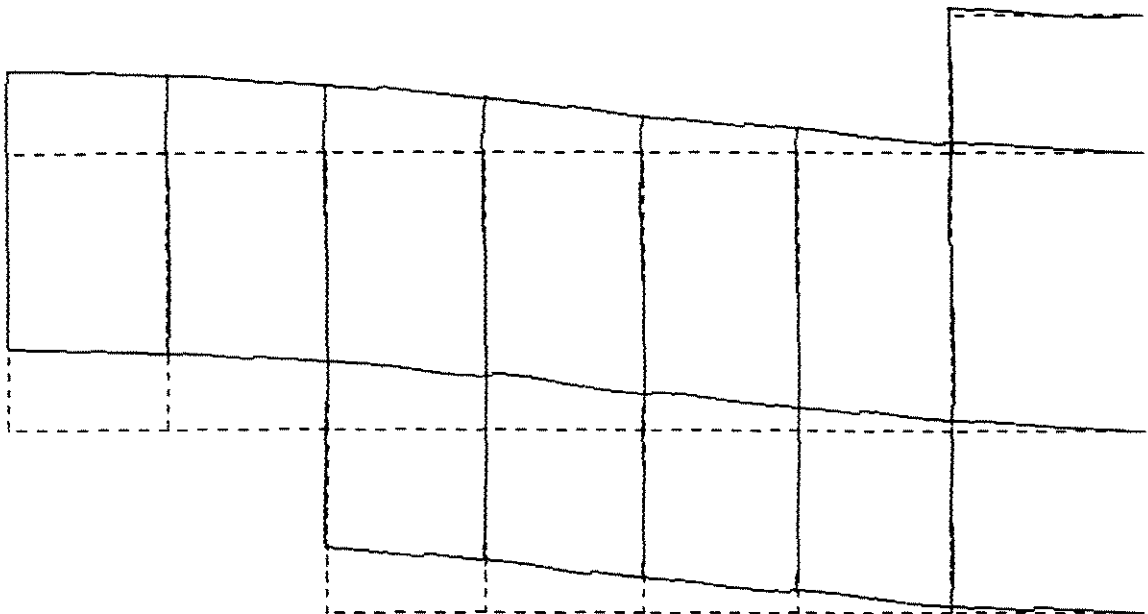
Observa-se que a envoltória sísmico-estática está contida na envoltória sísmico-dinâmica.



pp2d  
UNDEFORMED  
SHAPE  
PÓRICO G

OPTIONS  
JOINT IDS  
RESTRAINTS  
ELEMENT IDS  
WIRE FRAME

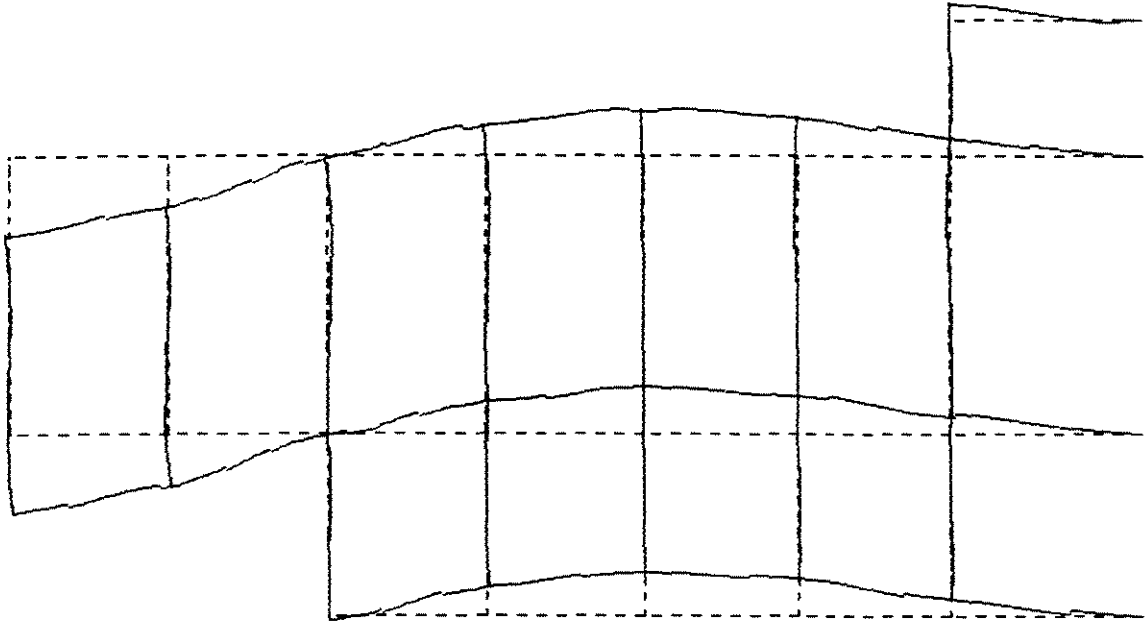
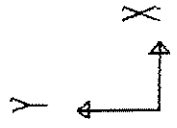
SAP90



pr2d  
 NODE  
 SHAPE  
 NODE 1

MINIMA  
 X .0000E+00  
 Y -.4280E-02  
 Z .0000E+00  
 MAXIMA  
 X .4342E+00  
 Y .6143E-02  
 Z .0000E+00

SAP90



pp2d

MODE

SHAPE

MODE

2

MINIMA

X -.5765E+00

Y -.8012E-02

Z .0000E+00

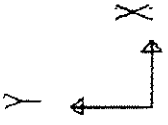
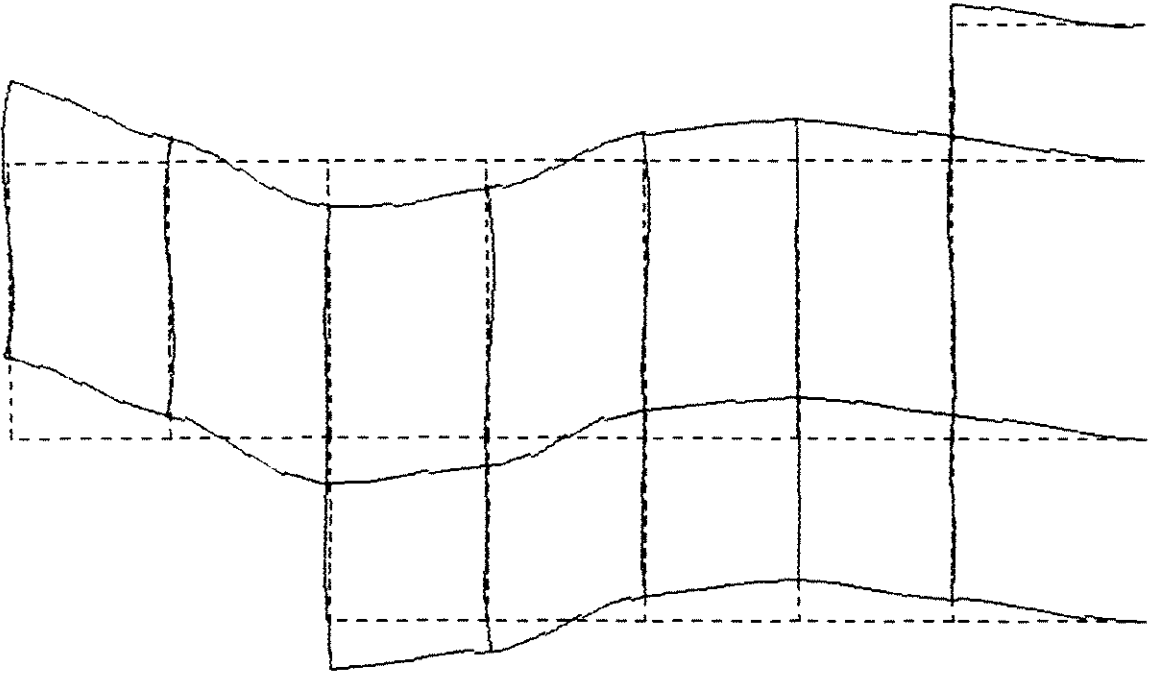
MAXIMA

X .3242E+00

Y .1491E-01

Z .0000E+00

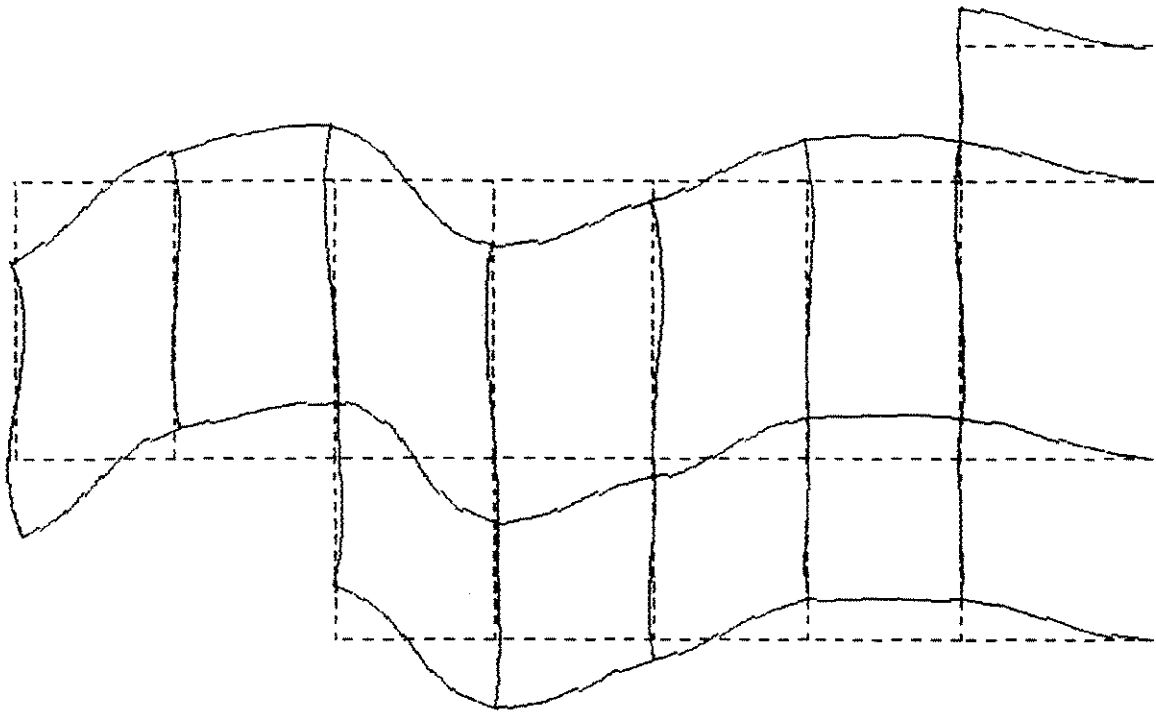
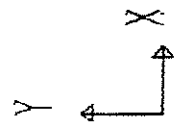
SAP90



pr2d  
 NODE  
 SHAPE  
 NODE 3

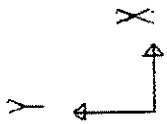
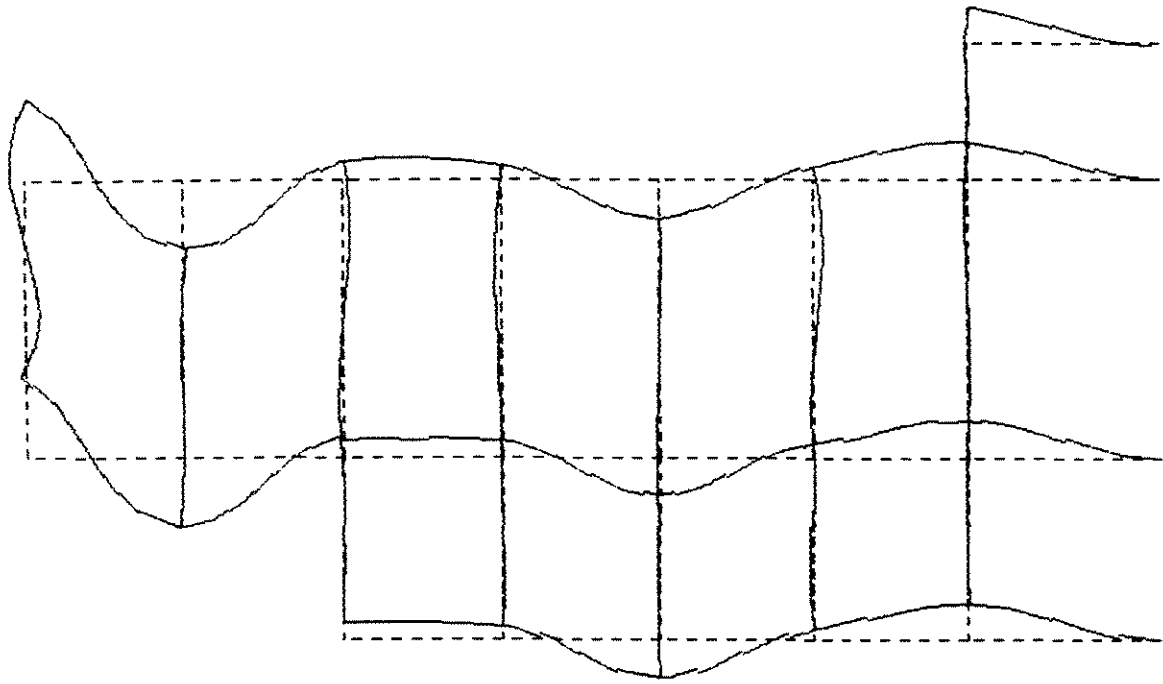
MINIMA  
 X -.3413E+00  
 Y -.1508E-01  
 Z .0000E+00  
 MAXIMA  
 X .5754E+00  
 Y .2327E-01  
 Z .0000E+00

SAP90



pp2d  
NODE  
SHAPE  
NODE 4

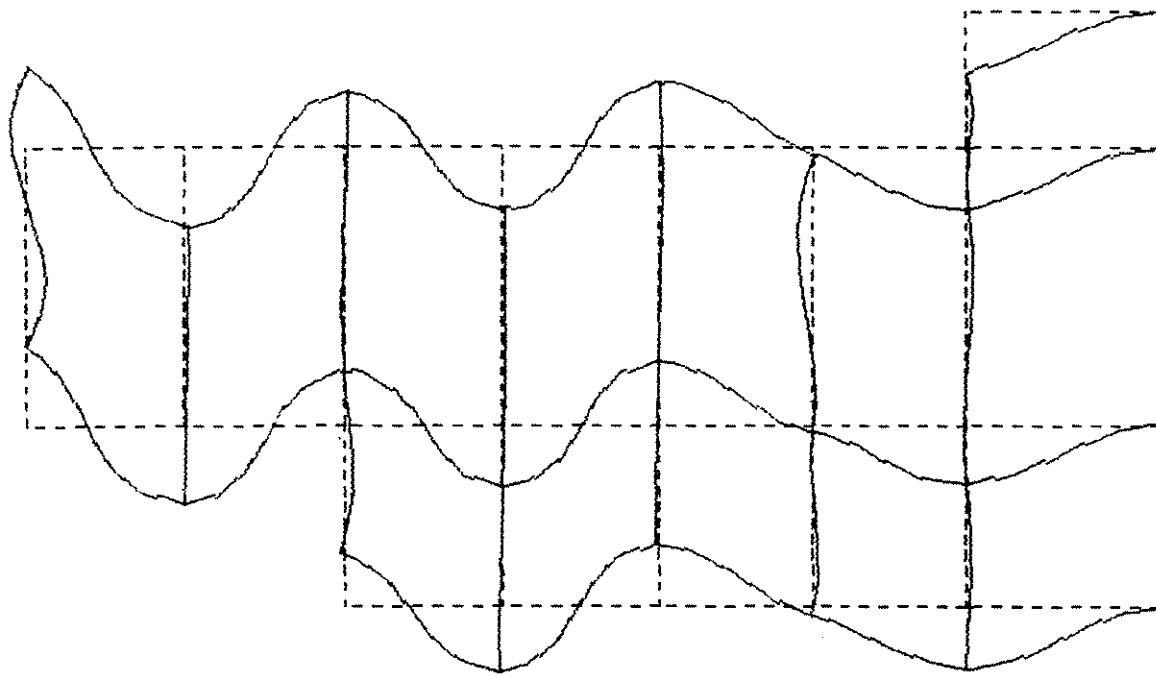
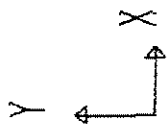
MINIMA  
X -.4461E+00  
Y -.2510E-01  
Z .0000E+00  
MAXIMA  
X .3004E+00  
Y .1749E-01  
Z .0000E+00



pp2d  
 NODE  
 SHAPE  
 NODE 5

MINIMA  
 X -.4926E+00  
 Y -.1699E-01  
 Z .0000E+00  
 MAXIMA  
 X .5741E+00  
 Y .2491E-01  
 Z .0000E+00

SAP90



pp2d

MODE

SHAPE

MODE

6

MINIMA

X -.361E+00

Y -.1846E-01

Z .0000E+00

MAXIMA

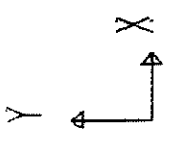
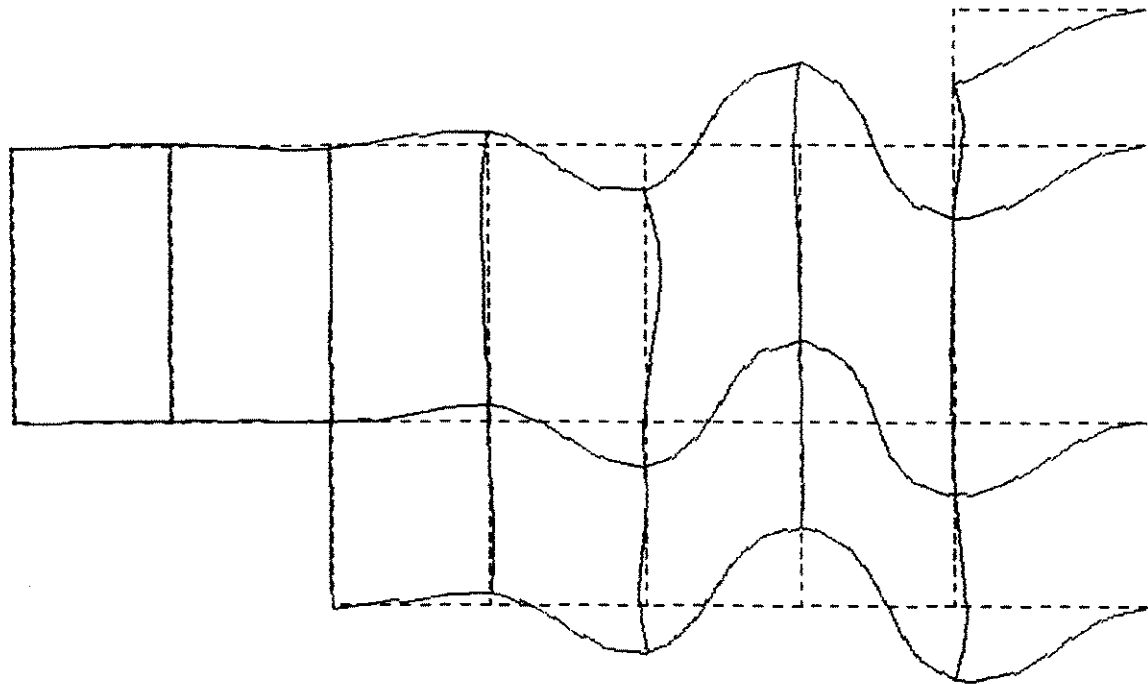
X .3566E+00

Y .1213E-01

Z .0000E+00

SAP90  
0645

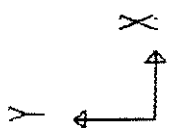
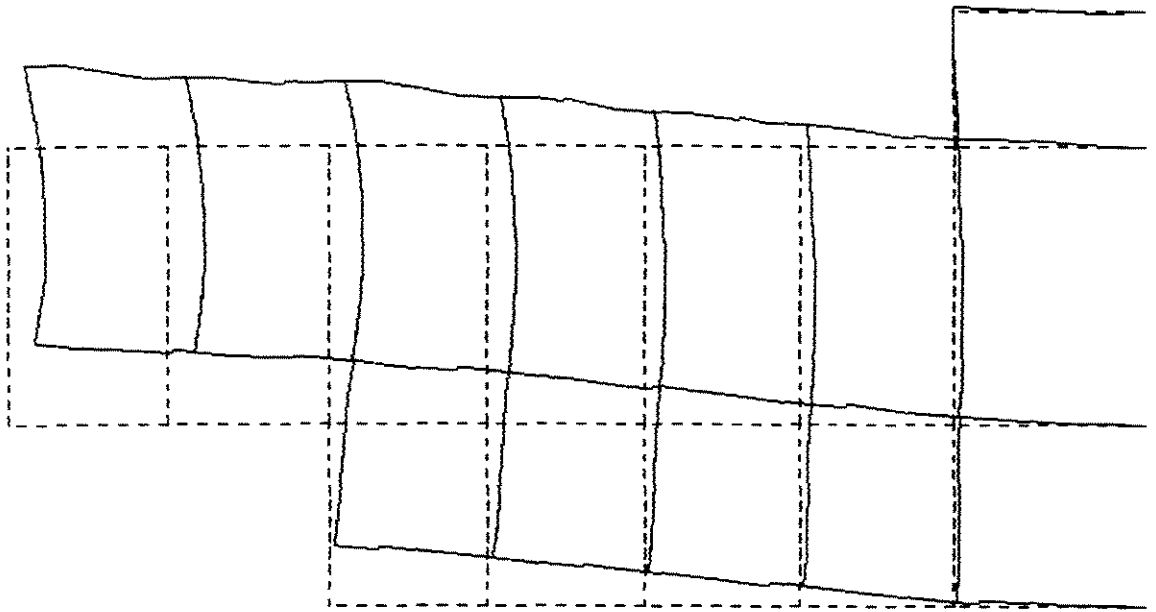




pr2d	
NODE	
SHAPE	
NODE	7

MINIMA	
X	-.3934E+00
Y	-.3578E-02
Z	.0000E+00
MAXIMA	
X	.4272E+00
Y	.8290E-02
Z	.0000E+00

SAP90



pp2edt

DEFORMED

SHAPE

LOAD

5

MINIMA

X .0000E+00

Y -.4673E-02

Z .0000E+00

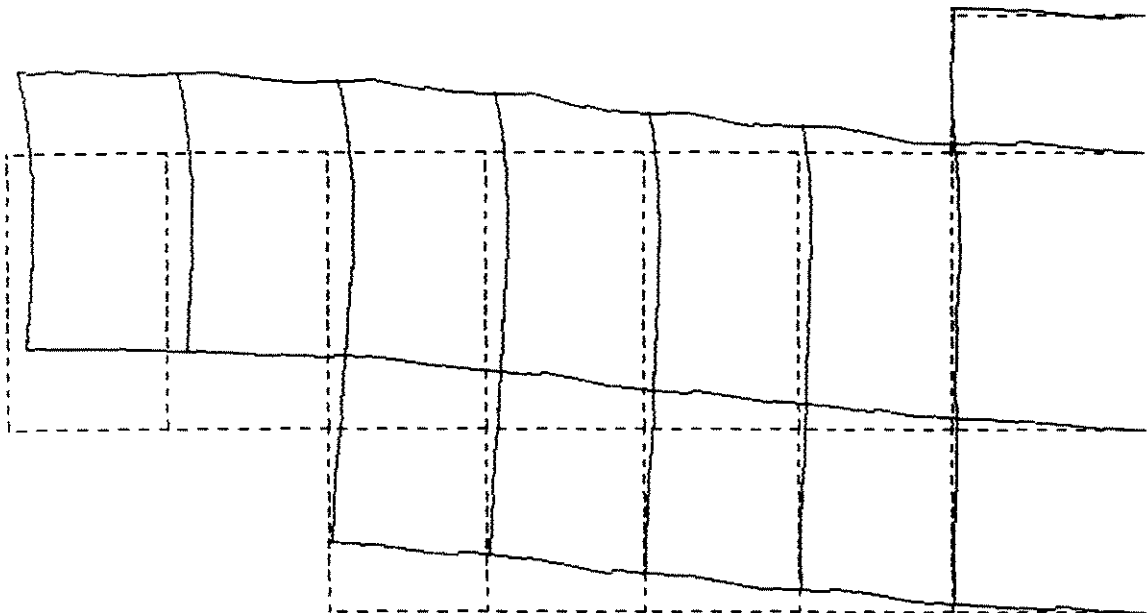
MAXIMA

X .1783E-01

Y .0000E+00

Z .0000E+00

SAP90



pp2edc

DEFORMED

SHAPE

LOAD

7

MINIMA

X .0000E+00

Y -.4632E-02

Z .0000E+00

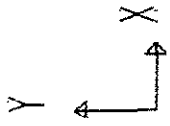
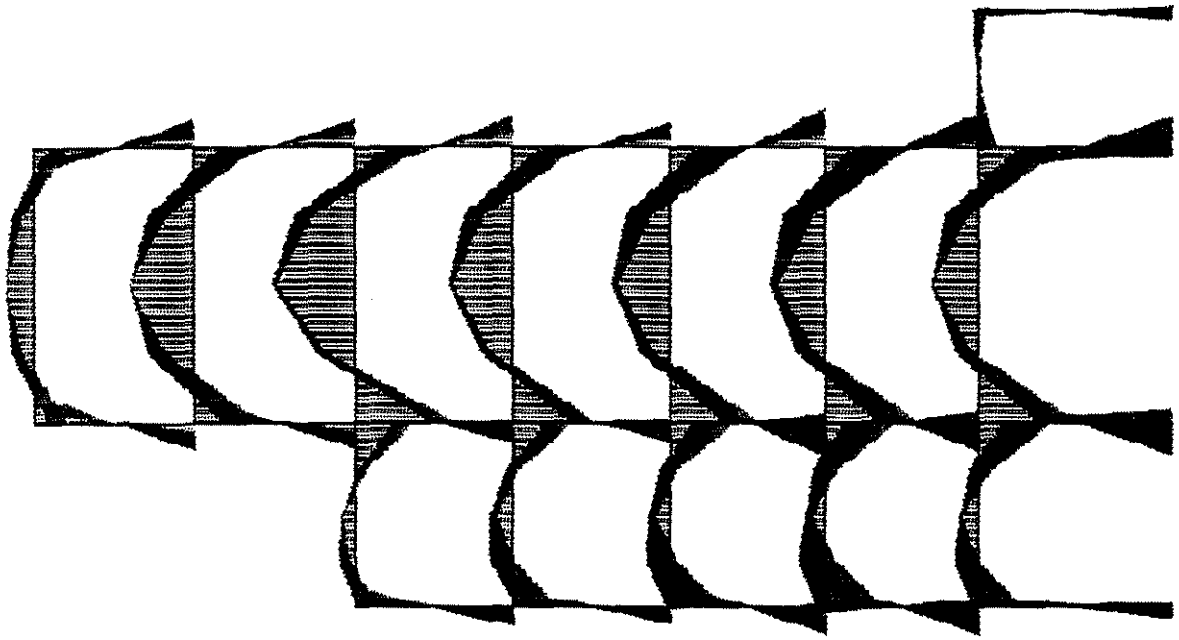
MAXIMA

X .2435E-01

Y .1070E-04

Z .0000E+00

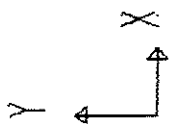
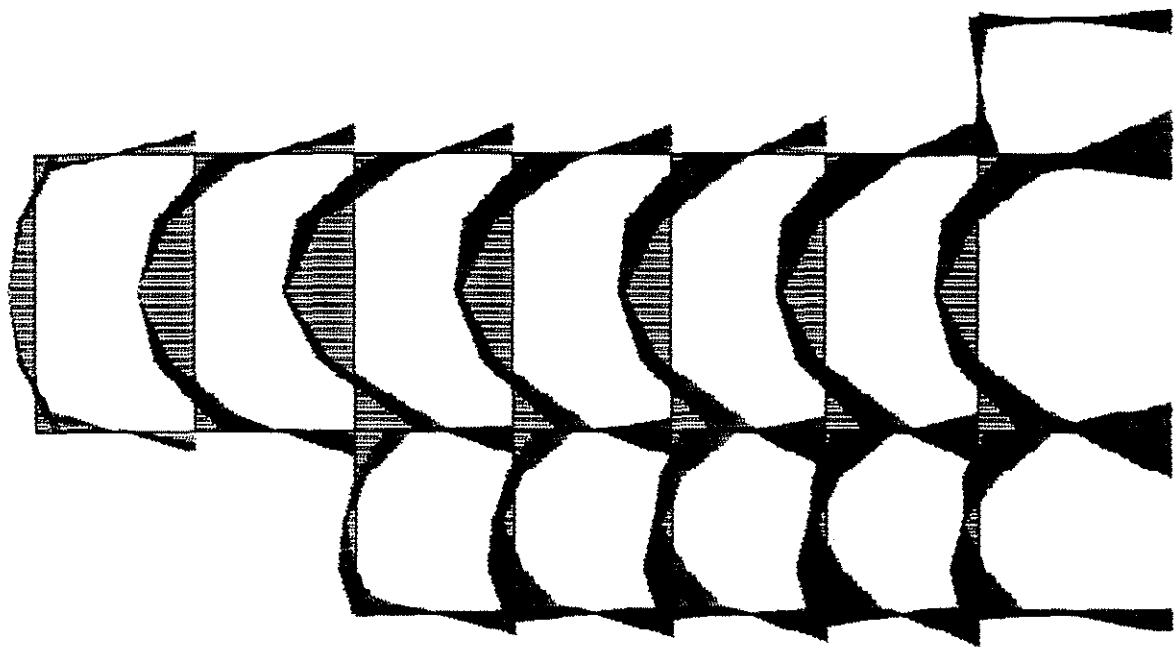
SAP90



pp2e  
FRAME  
OUTPUT M33  
ENVELOPE ALL

MIN < 24>  
- .1120E+02  
AT .00  
MAX < 24>  
.9098E+01  
AT 3.00

SAF90



pp2d  
 FRAME  
 OUTPUT M33  
 ENVELOPE ALL

MIN < 32>  
 -.1251E+02  
 AT .00  
 MAX < 24>  
 .9207E+01  
 AT 3.00

SAP90

### VI.3.3.- FORÇA CORTANTE SÍSMICO-ESTÁTICA NA BASE PELAS NORMAS AMERICANA E CHILENA PARA O EXEMPLO 2

#### VI.3.3.1.- FORÇA CORTANTE NA BASE PELA NORMA AMERICANA UBC-88

1.- Peso efetivo total:  $W = 742,08 \text{ T}$  (ver tabela VI.18)

2.- Período fundamental da estrutura: da eq.(4.3)  $T = C_t \left( h_N^{3/4} \right)$ ; onde:

$C_t = 0,030$  (para pórticos de concreto armado)

$h_N = 65,30 \text{ feet}$  (altura total da edificação em pés)

daquí:  $T = 0,030(65,30)^{3/4} = 0,69 \text{ sec}$

3.- Força cortante na base. Da eq. (4.1) tem-se:  $V = \frac{ZIC}{R_w} W$ ; onde:

$Z = 0,30$  (edifício localizado na zona sísmica 3 dos EE.UU; ver Fig. IV.1)

$I = 1,0$  (fator de uso IV; ver tabela IV.2)

$R_w = 12$  (fator de ductilidade para estruturas aporticadas de concreto armado; ver tabela IV.4)

$C = \frac{1,25S}{T^{2/3}} \leq 2,75$ ; onde:  $S = 1,20$  (fator do solo  $S_2$  para gravilha densa; ver tabela IV.3);

daquí tem-se:  $C = \frac{1,25(1,20)}{(0,69)^{2/3}} = 1,92 < 2,75 \text{ OK!}$

$C/R_w = 1,92/12 = 0,16 > 0,075 \text{ OK!}$

Daqui: 
$$V = \frac{ZIC}{R_w} W = \frac{0,30 \times 1,0 \times 1,92}{12} \times 742,08 = 35,62T \text{ (aprox 5 \% de W)}$$

### VI.3.3.2.- FORÇA CORTANTE NA BASE PELA NORMA CHILENA NCh433.Of93

1.- Peso efetivo total:  $P = 742,08T$

2.- Período fundamental da estrutura:  $T^* = 0,08N = 0,08 (7) = 0,56 \text{ sec.}$

3.- Coeficiente sísmico  $C$  :

$$C = \frac{A_o c}{gR} \left( \frac{T'}{T^*} \right)^n ; \text{ onde:}$$

$A_o = 0.40g$  = aceleração efetiva máxima para a zona sísmica 3 do Chile (tabela IV.11).

$c = 2,75$  = parâmetro do tipo de solo gravilha densa (tabela IV.10).

$n = 1,25$  = parâmetro do tipo de solo gravilha densa (tabela IV.10).

$T' = 0,35 \text{ sec.}$  = parâmetro do tipo de solo gravilha densa (tabela IV.10).

$T^* = 0,56 \text{ sec.}$  = período fundamental da estrutura.

$R = 8$  = fator estrutural para pórticos de concreto armado (tabela IV.12).

Daqui: 
$$C = \frac{0,40 \times 2,75}{8} \left( \frac{0,35}{0,56} \right)^{1,25} = 0,0764$$

também:  $0,0667 < 0,0764 < 0,240$  OK!

4.- 4.- Força cortante na base. Da eq. (4.7) tem-se:  $Q_o = CIP$ ; onde:

$C = 0,0764$  = coeficiente sísmico

$I = 1,00$  = coeficiente relativo ao uso da edificação (no caso habitação; ver tabela IV.14)

$P = 742,08T$  = peso total da estrutura.

Daqui:

$$Q_o = 0,0764 \times 1,0 \times 742,08 = 56,70T (\cong 8 \% \text{ de } P).$$

### **VI.3.3.3.- COMPARAÇÃO DA FORÇA CORTANTE PARA AS TRÊS NORMAS (EXEMPLO 2).**

Observa-se da tabela VI.24 que os valores da força cortante na base segundo as normas peruana (NPDSR-77) e chilena (NCh433.Of93), são maiores que para a norma americana UBC-88.

**Tabela VI.24.-** Comparação da força cortante na base para as três normas (exemplo 2).

<b>Norma</b>	<b>Peso total da edificação (T)</b>	<b>Força cortante na base (T)</b>	<b>Porcentagem do peso total da edificação (%).</b>
<b>UBC-88</b>	742,08	35,62	4,80
<b>NPDSR-77</b>	742,08	77,55	10,45
<b>NCh433.Of93</b>	742,08	56,70	7,64



## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

- A análise modal desacopla as equações de movimento, transformando a resolução de um sistema simultâneo de  $n$  equações diferenciais com  $n$  graus de liberdade na resolução de  $n$  equações diferenciais independentes de um grau de liberdade. Na maioria dos casos nem precisa resolver as  $n$  equações independentes, bastando resolver um número muito menor delas conseguindo-se uma boa precisão nos resultados. Também consegue-se um menor trabalho computacional decorrente de trabalhar com sistemas simples de equações e com um número menor que as  $n$  equações inicialmente desacopladas. Outra importante característica da análise modal é que não se perde o sentido físico do comportamento dinâmico das estruturas, uma vez que através dos modos de vibração visualiza-se o movimento vibratório destas estruturas.
- Considerando os dois exemplos desenvolvidos tem-se que:
  - Para o caso do exemplo 1, estrutura com uma distribuição relativamente simétrica de elementos resistentes ao sismo e geometricamente regulares, o cálculo modal espectral apresenta resultados menores para os esforços internos na estrutura quando comparada com a análise sísmico-estática segundo a norma americana UBC-88.

- Para o caso do exemplo 2, estrutura com distribuição não simétrica de elementos resistentes ao sismo e com geometria relativamente irregular, a resposta sísmico-dinâmica modal espectral apresenta maiores resultados quando comparada com a análise sísmico-estática segundo a norma peruana NPDSR-77.

- No entanto, análises sísmico-dinâmica tridimensionais para diferentes tipos de estruturas (simétricas ou não simétricas na distribuição de elementos resistentes ao sismo; geometricamente regulares ou irregulares, etc) fornecerão maior clareza nos resultados finais; de maneira especial para o caso de estruturas irregulares.

- No caso de estruturas mistas conformadas por pórticos e paredes, as paredes absorvem uma grande porcentagem do efeito sísmico, resultando em um menor trabalho dos pórticos o que é bastante aconselhável.
- O comportamento sísmico das estruturas melhora quando observam-se as seguintes (entre outras) condições: simetria (tanto na distribuição de massas quanto das rigidezes); peso mínimo da estrutura; continuidade da estrutura (tanto na planta quanto na elevação); ductilidade da estrutura; fornecer à estrutura de recursos sucessivos de resistência frente ao abalo sísmico (amortecimento, etc).
- As normas de cálculo sísmico-estática apresentam resultados competitivos quando comparadas com a análise sísmico-dinâmica modal espectral.

- Os parâmetros sísmicos adotados pelas normas de cálculo sísmico-resistente refletem com boa aproximação as características solo-estrutura durante a ação sísmica.
- As normas de cálculo sísmico-estática do Peru (NPDSR-77) e do Chile ( NCh433.Of93) são mais conservadoras que a norma Americana UBC-88.
- Recomenda-se para futuras linhas de pesquisa com base no presente trabalho, desenvolver a análise sísmico-dinâmica modal espectral de estruturas tridimensionais com diferentes graus de irregularidade e compará-lo com a análise sísmico-estática proposto pelas normas.
- Outra possível linha de pesquisa para a continuidade do presente trabalho seria comparar a análise dinâmica modal espectral com a análise no domínio do tempo ou das frequências.
- Levando em conta que parte de uma boa formação básica de um aluno de Pós-Graduação na área de estruturas inclui conhecimentos introdutórios de dinâmica de estruturas, recomenda-se a possibilidade de incluir como parte das disciplinas da área de estruturas a matéria “Introdução à Dinâmica de Estruturas”.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. HILDEBRAND, F.B. *Methods of Applied Mathematics*. 2. ed. New Jersey, Prentice-Hall Inc, 1965. p.148-172. 362p.
2. BATHE, K.J., WILSON, E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. New Jersey, Prentice-Hall Inc, 1976. 528p.
3. CRAIG Jr, R.R. *Structural Dynamics*; An Introduction to Computer Methods. New York, John Wiley & Sons, 1981. 527p.
4. CLOUGH, R.W., PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*. New York, Mc Graw-Hill, 1975. 634p.
5. ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London, Mc Graw-Hill, 1971. 521p.
6. BIGGS, J.M. *Introduction to Structural Dynamics*. New York, Mc Graw-Hill, 1964.
7. NEWMARK, N.M., ROSENBLEUTH, E. *Fundamentals of Earthquake Engineering*. New Jersey, Prentice-Hall Inc, 1971.
8. OKAMOTO, S. *Introduction to Earthquake Engineering*. New York, John Wiley & Sons, 1973.
9. PAZ, M. *Structural Dynamics*; Theory and Computation. 3. ed. New York, Van Nostrand Reinhold, 1991. 626p.
10. BLUME, J.A., NEWMARK, N.M., CORNING, L.H. *Design of Multistory Reinforced Building for Earthquake Motions*. Illinois, Portland Cement Association, 1961.

11. WILSON, E.L., HABIBULLAH, A. *SAP90 - Structural Analysis Users Manual*. Berkeley, California, Computers and Structures, Inc, 1992.
12. WILSON, E.L., KIUREGHIAN, A.D. BAYO, E.P. A replacement for the SRSS method in seismic analysis. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 9, p. 187-194, 1981.
13. ANAGNOSTOPOULOS, S.A. Response spectrum techniques for three-component earthquake design. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 9, p. 459-476, 1981.
14. BATHE, K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. New York, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982. 735p.
15. WILSON, E.L., YUAN, M.W., DICKENS, J.M. Dynamics analysis by direct superposition of ritz vectors. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, p. 813-821, 1982.
16. WILSON, E.L., BUTTON, M.R. Three-dimensional dynamic anlysis for multicomponent earthquake spectra. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 10, p. 471-476, 1982.
17. COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E. *Concepts and Aplications of Finite Element Analysis*. 3. ed. New York, John Wiley & Sons, 1989. 630p.
18. BATHE, K.J., RAMASWAMY, S. An accelerated subspace iteration method. *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 23, p.313-331, 1980.
19. WILSON, E.L., TETSUJI, I. An eigensolution strategy for large systems. *Journal of Computers & Structures*, v. 16, No. 1-4, p.259-265, 1983.

20. BIOT, M.A. Analytical and Experimental Methods in Engineering Seismology. *Journal ASCE*, v.108, p. 365 - 408, 1943.
21. HOUSNER, G.W. Characteristics of Strong-Motion Earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Amer.*, v. 37, p. 19-29, 1947.
22. HUDSON, D.E. Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology. *Proc. World. Conf. on Earthquake Eng.* Berkeley, CA, p. 4-1, 4-12, 1956.
23. PRODONOFF, V., PLÁCIDO, J.C., PEREIRA, M.J. *Progama ANESDE Análise Estática e Dinâmica de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos*. Rio de Janeiro, CENPES, 1990.
24. CORDOVIL, A.G.D.P. *Análise Dinâmica de Colunas de Perfuração via Superposição Modal*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Petróleo. Campinas, UNICAMP, 1991.
25. CZERWINSKI, R.J. *Aspectos de Resistência Mecânica de uma Coluna de Perfuração em Análise Tridimensional*. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Petróleo. Campinas, UNICAMP, 1994.
26. PIQUE Del P. J., SCALETTI F. H. *Análisis Dinámico de Edificios*. Lima, American Concrete Institute, 1991.
27. International Conference of Building Officials. *Uniform Building Code-1988 (UBC-88)*, Whittier, CA. EE. UU.
28. Instituto Nacional de Investigación y Normalización de la Vivienda. NPDSR - 77. *Diseño Sismo Resistente*. 2. ed. Lima, ININVI, 1991.

29. Instituto Nacional de Normalización. INN - Chile. NCh433. Of93 (Norma Chilena Oficial). *Diseño Sísmico de Edificios*. 1. ed. Santiago, INN, 1993.
30. BOBADILLA, U. *Diseño en concreto armado de un edificio multifuncional en La Oroya*. Trabalho de formatura em Engenharia Civil, UNFV, Lima, 1992.