

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL ARQUITETURA E URBANISMO**

Rodrigo Todeschini

**ENSAIOS UNIAXIAIS E BIAXIAIS PARA AVALIAÇÃO DE CRITÉRIO DE  
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS APLICADO À  
MADEIRA**

Campinas  
2009

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL ARQUITETURA E URBANISMO**

**Rodrigo Todeschini**

**ENSAIOS UNIAXIAIS E BIAXIAIS PARA AVALIAÇÃO DE CRITÉRIO DE  
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS APLICADO À  
MADEIRA**

Dissertação de mestrado apresentada à  
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e  
Urbanismo da Universidade Estadual de  
Campinas, como parte dos requisitos para  
obtenção do Título de Mestre em Estruturas.

**Orientador: Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia**

Campinas  
2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

T567e Todeschini, Rodrigo  
Ensaios uniaxiais e biaxiais para avaliação de critério de resistência de materiais anisotrópicos aplicado à madeira / Rodrigo Todeschini. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: Nilson Tadeu Mascia.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Madeira. 2. Madeira - Testes. 3. Anisotropia. 4. Materiais - propriedades. 5. Resistência de materiais. I. Mascia, Nilson Tadeu. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Título em Inglês: Uniaxial and biaxial tests for evaluation of failure criterion of anisotropic material applied to wood

Palavras-chave em Inglês: Wood, Wood - Testing, Anisotropy, Materials - Properties, Strength of materials

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Francisco Antonio Rocco Lahr, Ana Elisabete Paganelli  
Guimarães de Avila Jacintho

Data da defesa: 16/02/2009

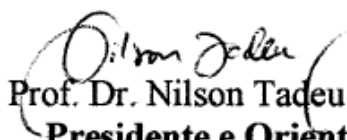
Programa de Pós Graduação: Engenharia Civil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO

ENSAIOS UNIAXIAIS E BIAXIAIS PARA AVALIAÇÃO DE CRITÉRIO DE  
RESISTÊNCIA DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS APLICADO À  
MADEIRA

Rodrigo Todeschini

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

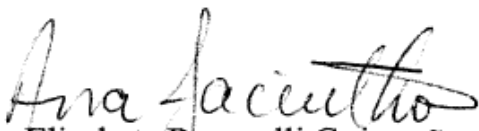


Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia  
**Presidente e Orientador**

**Universidade Estadual de Campinas**



Prof. Dr. Francisco Antonio Rocco Lahr  
**Escola de Engenharia de São Carlos – USP**



Prof. Dra. Ana Elisabete Paganelli Guimarães de Avila Jacintho  
**Universidade Estadual de Campinas**

Campinas, 16 de fevereiro de 2009.

*Dedico este trabalho aos meus pais,  
Antonia e Remígio, meu irmão, Márcio e  
minha noiva, Ana Paula.*

## **Agradecimentos**

A **Deus** pela minha vida e por ter sempre colocado pessoas verdadeiras e amigas no meu caminho.

Aos meus pais, **Antonia e Remígio**, pela formação do meu caráter, pelo incentivo aos estudos e pelo exemplo de persistência frente aos problemas da vida.

Ao meu irmão e cunhada, **Márcio e Andréia**, pela eterna amizade e pelo grande apoio em todas as minhas decisões.

A minha noiva, **Ana Paula**, que sempre me incentivou e teve paciência durante toda minha passagem acadêmica.

Ao grande amigo e orientador **Prof. Nilson** que sempre incentivou a busca por novos conhecimentos e desenvolvimento da pesquisa neste país.

Aos **amigos e familiares** que sempre estiveram presentes e não deixaram desanimar nos momentos de fraqueza.

Ao **Alex Julio Trinca** do SENAI de Itatiba e ao pessoal do CT da Unicamp que proporcionaram a realização dos ensaios dos corpos-de-prova.

A **todos** que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

*“O que sabemos é uma gota.  
O que ignoramos é um oceano.”*  
Isaac Newton (1643-1727)

## RESUMO

Todeschini, R. **Ensaio uniaxiais e biaxiais para avaliação de critério de resistência de materiais anisotrópicos aplicado à madeira**. Campinas: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo – UNICAMP, 2009. 143p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, UNICAMP, 2009.

A realização de ensaios uniaxiais e biaxiais permite uma melhor compreensão do comportamento mecânico de um material que possui direções principais de resistência e é sem dúvida uma forma que pesquisadores encontraram para obter resultados condizentes com a situação real que uma determinada estrutura apresenta. O presente trabalho teve como objetivo o estudo do critério de resistência proposto por Tsai e Wu, realizando-se ensaios uniaxiais e biaxiais. A avaliação do critério ficou restrita ao ensaio de compressão, devido às dificuldades de se realizar ensaios biaxiais de tração. Com o ensaio biaxial de compressão, tensões em duas direções principais foram simultaneamente desenvolvidas, utilizando-se um equipamento de ensaio tradicional para uma direção e na direção perpendicular um equipamento tipo alicate desenvolvido para este fim. O parâmetro estudado foi o  $F_{12}$ , parâmetro este que designa a possibilidade da superfície de ruptura ser aberta ou fechada, considerando-se que para a segurança de um projeto é imprescindível obter uma superfície fechada para o critério de resistência adotado. Observa-se, além disso, que o parâmetro  $F_{12}$  foi obtido no ensaio biaxial de compressão de forma direta. Para as espécies de madeira *Pinus elliottii* e *Goupia glabra* (Cupiúba), obtiveram-se valores experimentais satisfatórios, sendo algumas inconsistências observadas em função da heterogeneidade do material.

**Palavras-Chave:** Critérios de Resistência – Critério de Tsai-Wu – Anisotropia da Madeira - Ensaio Uniaxiais e Biaxiais – Formula de Hankinson



## ABSTRACT

Todeschini, R. **Uniaxial and biaxial tests for avaluation of failure criterion of anisotropic material applied to wood.** Campinas: Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo – UNICAMP, 2009. 143p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, UNICAMP, 2009.

The completion of the uniaxial and biaxial tests permits a better understanding of the mechanical behavior of a material that has main failure directions and it is undoubtedly a method that researchers identified to achieve consistent results with the actual situation that a particular structure presents. This study aimed at studying the strength criterion proposed by Tsai and Wu, performing uniaxial and biaxial tests. The evaluation of this criterion was restricted to compression biaxial tests due to the difficulties presented by tension biaxial tests. With a compression biaxial test, the stresses in two main directions were simultaneously carried out, using a standard equipment test for one direction and for the perpendicular direction an equipment type pliers especially developed for this purpose. The failure parameter studied was  $F_{12}$ , which evaluates the possibility of failure surface to be opened or closed, also considering that for the safety of design it is essential to obtain a closed surface for the failure criterion adopted. Furthermore, it was noted that in the compression biaxial test the parameter  $F_{12}$  was obtained directly. For the species of wood *Pinus elliottii* and *Goupia glabra* (Cupiúba), the experimental values obtained were satisfactory with some inconsistencies observed in the light of the heterogeneity of the material.

**Keywords:** Failure Criterion – Tsai-Wu Criterion – Wood Anisotropy – Uniaxial and Biaxial Tests – Hankinson's Formula

## SUMÁRIO

	Página
1 INTRODUÇÃO.....	17
2 OBJETIVO GERAL.....	19
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
3.1 Critérios de Resistência.....	21
3.2 Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (Critério de Tresca).....	23
3.3 Teoria da Máxima Tensão Normal (Teoria de Rankine).....	26
3.4 Teoria da Máxima Energia de Distorção (Critério de Von Mises).....	27
3.5 Teoria Geral de Resistência para Materiais Anisotrópicos.....	31
3.5.1 <i>Aplicação do critério de resistência anisotrópico para matérias ortotrópicos</i> .....	37
3.5.2 <i>Determinação dos coeficientes <math>F_i</math> e <math>F_{ii}</math></i> .....	40
3.5.3 <i>Determinação dos coeficientes <math>F_{ij}</math></i> .....	41
3.6 Ensaios em Direções Inclinadas ( <i>off-axis tests</i> ).....	43
3.7 Modos de Ruptura na Madeira.....	47
3.7.1 <i>Compressão paralela às fibras</i> .....	48
3.7.2 <i>Tração paralela às fibras</i> .....	51
3.8 Ensaios Biaxiais.....	56
4 MATERIAIS E MÉTODOS.....	63
4.1 Materiais.....	63
4.2 Métodos.....	64
4.3 Ensaios Uniaxiais de Tração e Compressão.....	65
4.3.1 <i>Tração</i> .....	65
4.3.2 <i>Compressão</i> .....	66
4.4 Dimensões dos Corpos-de-prova.....	67
4.5 Ensaios de Compressão Biaxial.....	70
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	75
5.1 Análise dos ensaios de tração.....	77
5.2 Análise dos ensaios de compressão.....	81
5.3 Análise dos ensaios biaxiais de compressão.....	84
6 MODELAGEM NUMÉRICA DO CORPO-DE-PROVA UTILIZANDO O SOFTWARE SAP2000.....	97
6.1 Análise do Círculo de Mohr.....	106
6.2 Comentários dos Resultados obtidos.....	111
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....	115
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	121
ANEXOS.....	125
ANEXO A – Notação Indicial.....	127
ANEXO B – Estudo de Classificação de Cônicas Aplicadas ao Critério de Resistência para Materiais Anisotrópicos.....	133

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Página</b>
FIGURA 1 Tensões atuantes e planos de deslizamentos.....	24
FIGURA 2 Critério da máxima tensão de cisalhamento (Tresca).....	26
FIGURA 3 Critério da máxima tensão normal (Rankine).....	27
FIGURA 4 Estado geral de tensões: Tensões Hidrostáticas + Tensões Desviatórias.....	28
FIGURA 5 Critério da máxima energia de distorção (Von Mises).....	30
FIGURA 6 Comparação entre os critérios de resistência.....	31
FIGURA 7 Planos de simetria.....	37
FIGURA 8 Efeitos de $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ .....	37
FIGURA 9 Inversão do eixo 1.....	38
FIGURA 10 Exemplo de obtenção dos coeficientes de Tsai-Wu.....	40
FIGURA 11 Ensaio biaxiais e uniaxiais (casos 1 a 6).....	42
FIGURA 12 Ensaio uniaxial de tração.....	43
FIGURA 13 Esmagamento.....	48
FIGURA 14 Fenda em cunha.....	49
FIGURA 15 Cisalhamento.....	49
FIGURA 16 Fenda.....	50
FIGURA 17 Esmagamento e fendas.....	50
FIGURA 18 Brooming.....	51
FIGURA 19 Lascamento.....	51
FIGURA 20 Combinação de tração e cisalhamento.....	52
FIGURA 21 Cisalhamento (tração).....	52
FIGURA 22 Ruptura frágil.....	53

FIGURA 23	Ruptura.....	54
FIGURA 24	Ruptura por cisalhamento.....	55
FIGURA 25	Ruptura por tração.....	55
FIGURA 26	Critério de ruptura da madeira (“Japanese Cedar”).....	57
FIGURA 27	Equipamento biaxial e detalhe do corpo-de-prova em mm.....	57
FIGURA 28	Envoltória de resistência segundo Tsai-Wu; relação tensão-deformação e modos de ruptura devidos a diferentes carregamentos biaxiais.....	58
FIGURA 29	Envoltória de resistência de um material ortotrópico .....	58
FIGURA 30	Critério de ruptura para papelão.....	60
FIGURA 31	Arranjo do Ensaio.....	61
FIGURA 32	Metodologia do ensaio de tração.....	65
FIGURA 33	Metodologia do ensaio de compressão.....	66
FIGURA 34	Dimensões do corpo-de-prova de tração (mm).....	67
FIGURA 35	Corpo-de-prova de tração.....	68
FIGURA 36	Corpo-de-prova de compressão (mm).....	68
FIGURA 37	Corpo-de-prova de cisalhamento (mm).....	69
FIGURA 38	Direções principais da peça de madeira.....	70
FIGURA 39	Modelo de corpo-de-prova para ensaio de compressão biaxial – cubo com 4cm de aresta.....	72
FIGURA 40	Modelo 3D da máquina de ensaio de compressão uniaxial e dimensões (mm).....	73
FIGURA 41	Equipamento de compressão axial (alicate).....	73
FIGURA 42	Ensaio de compressão biaxial.....	74
FIGURA 43	Ensaio de compressão biaxial.....	74
FIGURA 44	Superfície de ruptura (elipsóide) do critério de Tsai-Wu com $F_{12} = 0$ .....	77
FIGURA 45	Comparação do ensaio com Hankinson em relação aos ângulos.....	78
FIGURA 46	Comparação do critério de Tsai-Wu com ensaios fixando $F_{12}$ .....	80
FIGURA 47	Comparação de Hankinson e $F_{12}$ com os valores dos ensaios.....	81
FIGURA 48	Comparação de Hankinson com os ensaios.....	82
FIGURA 49	Comparação do critério de Tsai-Wu com ensaios fixando $F_{12}$ .....	83

FIGURA 50	Comparação de Hankinson e $F_{12} = +$ limite com os valores dos ensaios.....	84
FIGURA 51	Curvas provenientes da Equação 5.3.1 com valores de $F_{12}$ .....	90
FIGURA 52	Curvas provenientes da Equação 5.3.2 com valores de $F_{12}$ .....	94
FIGURA 53	Valores de $F_{12}$ médios.....	95
FIGURA 54	Corpo-de-prova modelado no SAP2000.....	98
FIGURA 55	Propriedades mecânicas do material no SAP2000.....	101
FIGURA 56	Análise linear.....	102
FIGURA 57	Resultados da combinação 1.....	103
FIGURA 58	Resultados da combinação 2.....	104
FIGURA 59	Resultados da combinação 3.....	105
FIGURA 60	Resultados da combinação 4.....	106
FIGURA 61	Ponto de análise para COMB1.....	107
FIGURA 62	Círculo de Mohr para ponto da COMB1.....	107
FIGURA 63	Ponto de análise para COMB2.....	108
FIGURA 64	Círculo de Mohr para ponto da COMB2.....	108
FIGURA 65	Ponto de análise para COMB3.....	109
FIGURA 66	Círculo de Mohr para ponto da COMB3.....	109
FIGURA 67	Ponto de análise para COMB4.....	110
FIGURA 68	Círculo de Mohr para ponto da COMB4.....	110
FIGURA 69	Fotos ampliadas - Influência do cisalhamento.....	113
FIGURA 70	Curvas de ruptura do critério de Tsai-Wu, utilizando os dados dos ensaios (elipse vermelha $F_{12} = 0$ ; elipse azul $F_{12} = -0,5 \times$ limite e elipse preta – $F_{12} = +0,5 \times$ limite).....	116
FIGURA B1	Elipse.....	140
FIGURA B2	Parábola.....	141
FIGURA B3	Hipérbole.....	141

## LISTA DE TABELAS

	Página
TABELA 1    Coeficientes $F_i$ e $F_{ii}$ .....	41
TABELA 2    Coeficiente de interação de tensões $F_{12}$ , usando diferentes combinações de tensões de acordo com TSAI e WU(1971).....	42
TABELA 3    Expressões do coeficiente $F_{12}$ de acordo alguns pesquisadores.....	46
TABELA 4    Determinação de $F_{12}$ de acordo com a teoria simplificada.....	47
TABELA 5    Propriedades mecânicas do papelão.....	59
TABELA 6    Resistências médias à tração, compressão e módulo de elasticidade da madeira Cupiúba.....	75
TABELA 7    Resistências à tração, compressão e cisalhamento.....	76
TABELA 8    Parâmetros de Tsai-Wu e valores limites de $F_{12}$ da madeira Cupiúba.....	76
TABELA 9    Resistências à tração, compressão e cisalhamento da madeira Pinus.....	85
TABELA 10   Parâmetros de resistência e limites de $F_{12}$ da madeira Pinus.....	86
TABELA 11   Resultado do ensaio biaxial de compressão e valores de $F_{12}$ da madeira Pinus.....	87
TABELA 12   Médias dos valores de $F_{12}$ (Pinus).....	88
TABELA 13   Valores limites de $F_{12}$ (Pinus).....	88
TABELA 14   Resultado do ensaio biaxial de compressão e valores de $F_{12}$ da madeira Cupiúba.....	91
TABELA 15   Médias dos valores de $F_{12}$ (Cupiúba).....	92
TABELA 16   Valores limites de $F_{12}$ (Cupiúba).....	92

TABELA 17 Média dos coeficientes de Poisson.....	100
TABELA 18 Constantes de Elasticidade para espécies de madeira nacionais segundo MASCIA (1991).....	100
TABELA 19 Resultados finais dos parâmetros elásticos da madeira de <i>Eucalyptus</i> <i>citriodora</i> , determinados a partir de ensaios de compressão paralela às fibras segundo BALLARIN (2003).....	100
TABELA A1 Cossenos Diretores.....	131

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon$	Deformação
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\lambda$	Autovalores
$\sigma_{\theta}$	Tensão normal inclinada de $\theta$ (anti-horário) em relação a um eixo principal
$\theta$	Ângulo de inclinação das fibras em relação ao carregamento
$f_d$	Resistência de cálculo
$f_t$	Resistência à tração
$f_c$	Resistência à compressão
$f_v$	Resistência ao cisalhamento
$f_0$	Resistência na direção paralela às fibras da madeira
$f_{90}$	Resistência na direção perpendicular às fibras da madeira
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Tensões normais
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões normais
$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$	Tensões de cisalhamento
$\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$	Tensões de cisalhamento
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Tensões principais
$\sigma_{esc}$	Tensão de escoamento



$\bar{\sigma}$	Tensão hidrostática
$\sigma_{rup}$	Tensão de ruptura
$F_i$ e $F_{ij}$	Coeficientes de resistência do critério de Tsai-Wu
$m, n$	Direções principais
$m$	$\cos \theta$
$n$	$\sin \theta$
$R_{ij}$ e $R_{ijkl}$	Coeficientes de resistência do critério de Tsai-Wu
p	Resistência à compressão em ensaios biaxiais
t	Resistência à tração em ensaios biaxiais
$U_p$	Resistência à compressão no ensaio uniaxial a 45°
$U_t$	Resistência à tração no ensaio uniaxial a 45°
$v_n$	Resistência ao cisalhamento negativo no ensaio a 45°
$v_p$	Resistência ao cisalhamento positivo no ensaio a 45°
$U_{distorção}$	Energia de deformação de distorção
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$\nu$	Coeficiente de Poisson

## 1 INTRODUÇÃO

De um modo geral, as pesquisas sobre a madeira, sob a ótica da teoria da elasticidade e da teoria geral da resistência dos sólidos anisotrópicos, em especial os modelos que descrevem os comportamentos, elástico e de resistência, estão em constante aprofundamento teórico e verificação experimental. Neste sentido, pode-se constatar que os modelos interpretam de maneira mais realista o comportamento mecânico deste material. Verifica-se, também, um importante avanço na aplicação destes modelos nos projetos de engenharia de estruturas e no desenvolvimento de materiais compostos, laminados, estruturas com seções mistas ou compostas, entre outros.

A madeira, devido a sua constituição microscópica e o seu padrão macroscópico, tem uma resposta mecânica anisotrópica, de um modo geral e direcional, de um modo específico. Neste contexto, planos principais de simetria elástica ou de resistência, definidos por eixos cartesianos, os quais seguem aproximadamente o padrão macroscópico da madeira, ou seja, eixos: longitudinal - L, radial - R e tangencial -T, constituindo o modelo ortotrópico linear, são usualmente adotados para a madeira. Este modelo de ortotropia elástica ou de resistência é interessante, pois a determinação de coeficientes, quer seja de elasticidade ou de resistência, em quaisquer outras direções diferentes da L, R e T é dependente apenas destas. Isto mostra que o comportamento mecânico da madeira associado as suas propriedades mecânicas é direcional.

Muitos dos critérios de resistência existentes apresentam restrições para aplicação a materiais heterogêneos e anisotrópicos, como a madeira, que possui propriedades de elasticidade e de resistência direcionais. Nesse sentido, torna-se

importante e necessário à investigação de um critério de resistência para que seja possível avaliar a ruptura desse material, para um estado de tensão axial ou biaxial, de um modo adequado.

Neste contexto, esta pesquisa visa buscar um aprofundamento de cunho científico em anisotropia e em teorias de resistência associada à madeira. A base teórica que envolve o desenvolvimento deste projeto advém, fundamentalmente, da teoria de resistência de materiais anisotrópicos apresentada por Tsai e Wu, aplicada e analisada para a madeira.

A escolha da teoria de Tsai-Wu foi em virtude de apresentar diversas vantagens em relação às inúmeras outras teorias existentes, como por exemplo: ser uma equação escalar e invariante, na qual os componentes de resistência são expressos em um tensor, e as propriedades de simetria do tensor podem ser determinadas rigorosamente.

A parte experimental de ensaios é também ampla e interessante com análises de resultados em direções não só principais de simetria da madeira, através de ensaios com estados uniaxiais e biaxiais de tensões além de análises das envoltórias de resistência e também dos tipos de ruptura que surgem devido às solicitações. Estes ensaios visam determinar os coeficientes que pertencem à equação geral, tensorial, do modelo de resistência. Assim é possível analisar o comportamento mecânico da madeira, descrito pelos tensores de resistência, de uma maneira mais geral.

Para a realização dos ensaios biaxiais é de fundamental importância destacar a construção do equipamento de compressão transversal denominado alicate de compressão, possibilitando melhores análises devidas a tais solicitações.

Por fim, é importante ressaltar que pesquisas desta natureza contribuem para divulgação de tópicos relacionados com a pesquisa em madeira e em estruturas de madeira.

## 2 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho consistiu na avaliação do critério de resistência para a madeira realizando-se um estudo sobre a classificação de cônicas aplicadas ao critério de resistência para materiais anisotrópicos (critério de Tsai-Wu), onde o principal parâmetro analisado é o  $F_{12}$ . Esse fator designa a possibilidade da superfície de ruptura ser aberta ou fechada e para a segurança estrutural de um critério de resistência, é imprescindível obter uma superfície fechada.

Para isso, foram ensaiados os corpos-de-prova de madeira, levando-se em consideração o ângulo de inclinação das fibras, para o caso uniaxial, e também ensaios biaxiais de compressão, obtendo, assim, os gráficos correspondentes aos ensaios de tração e compressão, comparando o critério de Tsai-Wu com a fórmula de Hankinson (uma das teorias estudadas) e as superfícies elípticas geradas através do parâmetro  $F_{12}$ .

Por fim, realizou-se uma análise numérica com o auxílio do software SAP2000, modelando um corpo-de-prova biaxial com a finalidade de comparar os resultados obtidos nos ensaios e verificar a influência de planos de cisalhamento que surgem na ruptura do material.

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 3.1 Critérios de Resistência

Com um critério de resistência pode-se descrever ou estimar a resistência de um material, ou seja, o quanto o material pode resistir até se romper ou até apresentar um comportamento mecânico que não seja adequado para uma determinada estrutura. Assim, um critério de resistência impõe, por natureza, limitações ao nível do estado de tensão em determinados pontos de um sólido.

Para a confecção de estruturas pode-se verificar que existe uma considerável gama de materiais na construção civil que podem ser utilizados. Alguns desses materiais mais comumente utilizados apresentam critérios definidos pelo conhecimento do seu comportamento mecânico e outros que só são definidos por meio da realização experimental devido à heterogeneidade de propriedades mecânicas do material em direções diferentes.

Os materiais de construção possuem capacidades limitadas de suportar cargas. Ultrapassados esses limites, atinge-se o colapso parcial ou global das estruturas por eles constituídas. Segundo TEIXEIRA (2004), estados limites são situações tais que, ao serem ultrapassadas por uma estrutura ou por uma de suas partes, colocam-na fora de utilização normal, ou seja, são estados a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção. Assim, deve-se conhecer os diferentes estados de limites que essa estrutura possui:

- *Estado Limite Último:* ocorre quando a estrutura esgota a sua capacidade de suporte, deixando de apresentar as características exigíveis para sua utilização. Neste caso, surge uma deficiência estrutural caracterizada pelo

aparecimento de danos estruturais, segundo TEIXEIRA (2004). Exemplos de estados limites últimos:

1. Perda de equilíbrio, global ou parcial, admitindo a estrutura como um corpo rígido;
2. Ruptura ou deformação plástica excessiva dos materiais;
3. Transformação da estrutura, no todo ou em parte, em um sistema hipostático;
4. Instabilidade por deformação;
5. Instabilidade dinâmica.

- *Estado Limite de Utilização*: ocorre quando fica comprometida a durabilidade da estrutura ou quando fica prejudicada a utilização funcional da construção. Não há, nesse caso, danos estruturais que, de imediato, comprometam a integridade da estrutura, mas apenas desempenhos inadmissíveis para a manutenção da própria estrutura ou para a utilização normal da construção. Exemplos de estados limites de utilização:

1. Danos ligeiros ou localizados que comprometam o aspecto estético da construção ou a durabilidade da estrutura;
2. Deformações excessivas que afetem a utilização normal da construção ou seu aspecto estético;
3. Vibração excessiva ou desconfortável.

Neste trabalho sobre critérios de resistência, procurou-se obter valores para que o estado limite último possa ser melhor caracterizado para a madeira em situações de estado duplo de tensões obtendo, assim, uma maior segurança estrutural.

Devido à grande dificuldade da análise dos esforços que uma estrutura pode sofrer, verifica-se que um critério de resistência pretende interpretar tais casos (solicitações complexas), partindo apenas de um ensaio simples (tração) ou pelo menos de um número restrito de parâmetros do material facilmente identificáveis. Segundo SCHIEL (1984), a finalidade de um critério de resistência é a interpretação de

solicitações combinadas (estado duplo ou triplo) quanto à eventual ruptura. Cada critério de resistência é uma hipótese de trabalho: primeiro discrimina-se de uma maneira arbitrária, mas plausível, o fenômeno responsável pela ruptura, depois tiram-se as conclusões a respeito das combinações possíveis de solicitação e finalmente se verifica a veracidade do critério pela comparação com o comportamento real do material em tais casos de solicitação combinada. A variedade dos materiais usados em engenharia não permite adotar um único critério.

Cada material possui um modo de ruptura. De acordo com POPOV (1978), os materiais podem ser classificados em dois tipos: os dúcteis e os frágeis. Os materiais dúcteis são capazes de suportarem grandes deformações antes de se romperem e o oposto se aplica aos materiais frágeis. No caso da madeira tem-se um modo de ruptura dúctil na compressão e um modo de ruptura frágil tanto na tração quanto no cisalhamento.

A seguir são apresentados os critérios mais usuais e recomendados pelo uso prático, levando-se em consideração o tipo de material a ser analisado.

### **3.2 Teoria da Máxima Tensão de Cisalhamento (Critério de Tresca)**

Essa teoria leva em consideração a máxima tensão de cisalhamento que executa o papel através de planos criticamente orientados segundo POPOV (1978). Para SCHIEL (1984), o critério da máxima tensão de cisalhamento, também chamado de Tresca, apresentou na época, a melhor interpretação do comportamento de materiais dúcteis até surgir o critério da energia de distorção. Neste caso, admite-se que o escoamento do material depende apenas da máxima tensão de cisalhamento alcançada no interior do elemento; assim, sempre que um valor crítico de cisalhamento  $\tau_{cr}$  for atingido, inicia-se o escoamento em um elemento. Pode-se obter esse critério através da tração simples ou compressão, que é igualado ao valor da tensão de cisalhamento máxima.

Considerando a aplicação de apenas uma tensão no corpo-de-prova, tem-se:

$$\tau_{\max} = \tau_{cr} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{esc}}{2} \quad (3.2.1)$$

na qual,  $\sigma_{esc}$  é a tensão encontrada no ponto do escoamento. Se uma determinada tensão for maior que este valor, a tensão de cisalhamento máxima romperá a peça. Com isso, deve-se considerar as duas situações em que os planos estão criticamente orientados, conforme ilustra a Figura 1:

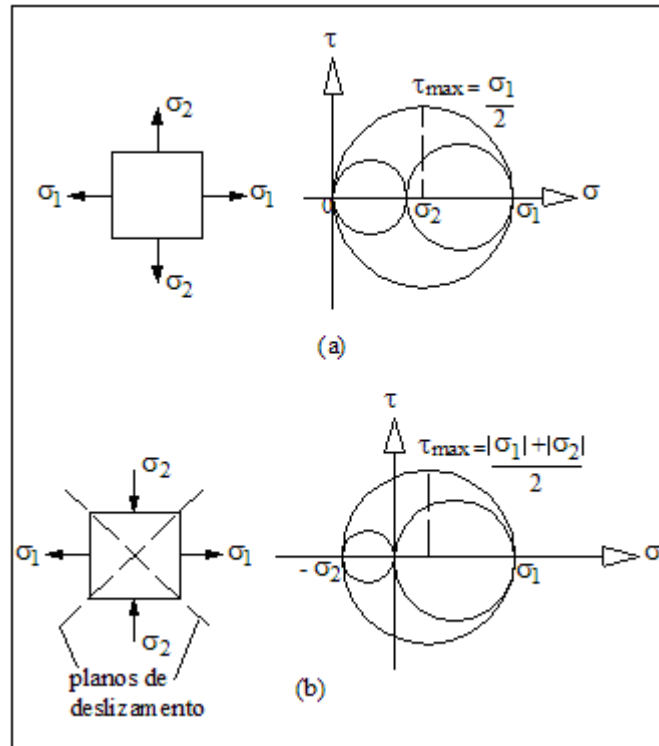


FIGURA 1 - Tensões atuantes e planos de deslizamentos.

No caso 1 (a), em que as tensões principais são ambas positivas ou negativas, verifica-se que a tensão máxima de cisalhamento depende somente do maior valor, assim pode-se obter as seguintes configurações:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$  ou  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_2}{2}$ , ou seja, uma



pode ultrapassar o limite sem que a outra tenha alcançado o mesmo também. Pode-se concluir que esses valores são independentes entre si, basta observar o círculo de Mohr indicado na Figura 2 para esta situação.

Como  $\tau_{\max} \leq \frac{\sigma_{esc}}{2}$  chega-se ao seguinte resultado:  $|\sigma_1| \leq \sigma_{esc}$  e  $|\sigma_2| \leq \sigma_{esc}$  (ver Figura 2).

No caso 1 (b), tem-se que a tensão máxima de cisalhamento alcançada é o raio da circunferência maior indicada na Figura 1. Esse valor é:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2|}{2}$$

Verifica-se que a tensão de cisalhamento máxima depende não só da tensão de tração como da de compressão, ou melhor, depende de uma tensão máxima positiva e mínima negativa. Pela definição desse critério chega-se ao seguinte resultado:

$$\left| \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{esc}}{2} \text{ (ver Figura 2)}$$

O critério da máxima tensão de cisalhamento pode ser expresso graficamente, para o estado plano de tensão, como se indica na Figura 2.

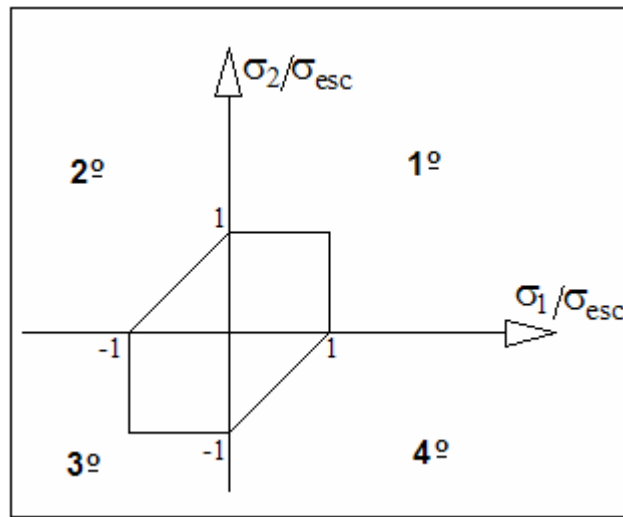


FIGURA 2 – Critério da máxima tensão de cisalhamento (Tresca).

### 3.3 Teoria da Máxima Tensão Normal (Teoria de Rankine)

Esse critério é aplicado para materiais frágeis, ou seja, que não resistem a grandes deformações. Para POPOV (1978), essa teoria estabelece que a falha ou ruptura de um material ocorre quando a máxima tensão normal em um ponto atinge um valor crítico independente das outras tensões. Apenas a maior tensão principal deve ser determinada para aplicar esse critério.

Verifica-se uma certa “independência” entre as tensões, ou seja, o estado limite último se dará a partir da ruptura causada pela maior tensão axial que está sendo aplicada no corpo.

Sendo assim tem-se que:  $\sigma_{lim} = \sigma_{rup}$  e verifica-se que  $\sigma_1 \leq \sigma_{rup}$  ou  $\sigma_2 \leq \sigma_{rup}$ . O critério da máxima tensão normal pode ser expresso graficamente pela Figura 3.

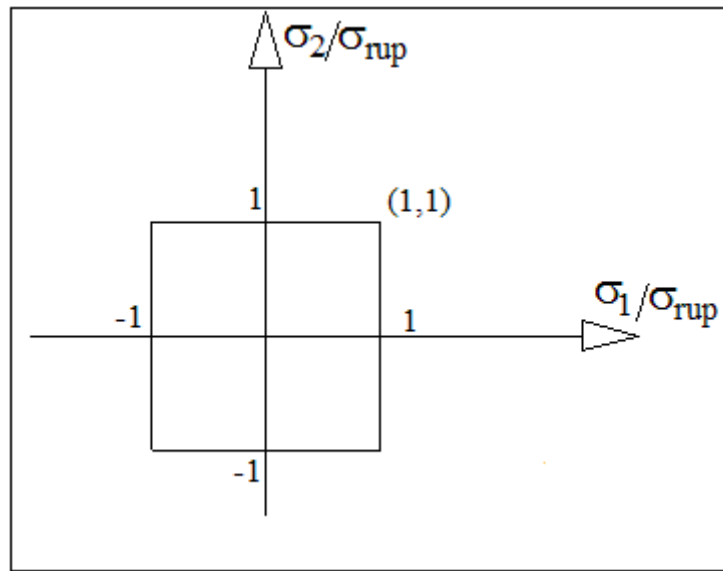


FIGURA 3 – Critério da máxima tensão normal (Rankine).

### 3.4 Teoria da Máxima Energia de Distorção (Critério de Von Mises)

Essa teoria, utilizada para materiais dúcteis e isotrópicos, é baseada no conceito de energia de acordo com POPOV (1978). Nesse critério, a energia elástica total é dividida em uma parte associada com as mudanças volumétricas do material e outra relacionada com as distorções de cisalhamento. Essa energia, denominada de energia de distorção, causa mudanças consideráveis no corpo analisado e constitui a base conceitual desse critério. Segundo SCHIEL (1984), as diferenças entre as tensões principais (ver tensor II da Equação 3.4.3) são responsáveis pela ruptura dos materiais e um estado hidrostático (ver tensor I da Equação 3.4.3) de tensões não produz ruptura. Pode-se deduzir dos ensaios que um acréscimo de um estado hidrostático (positivo ou negativo) a um estado de tensões existente não o afasta ou aproxima da condição de ruína.

Igualando-se a energia de distorção, devida ao cisalhamento, no ponto de escoamento à tração simples, com aquela sob tensão combinada, é estabelecido o critério de escoamento para tensão combinada.

Esse critério de escoamento, para tensão combinada, associa os estados gerais das tensões ao princípio da superposição.

Seja então o estado geral de tensões:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3.4.1)$$

Aplica-se o princípio da superposição de efeitos, como indicado na Figura 4, fazendo a seguinte consideração:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.4.2)$$

A partir das Equações (3.4.1) e (3.4.2), pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

Tensor I                      Tensor II

Na Figura 4 pode-se observar essa situação descrita:

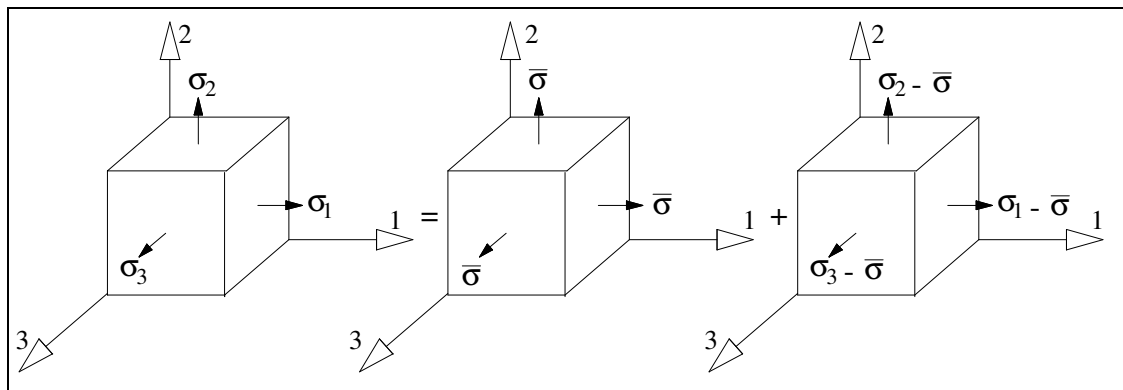


FIGURA 4 – Estado geral de tensões: Tensões Hidrostáticas + Tensões Desviatórias.

Nessa situação, verifica-se que o tensor I, por intermédio da análise do círculo de Mohr, se degenera em um ponto e dessa forma as tensões associadas a esse tensor são as mesmas em cada direção possível e, por essa razão, é chamado de tensor de tensão esférico. A Equação 3.4.4, que relaciona isotropicamente deformações ( $\varepsilon$ ) e tensões ( $\sigma$ ), sintetiza esse conceito do tensor de tensão esférico.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 3 \cdot \frac{1-2\nu}{E} \cdot \bar{\sigma} \quad (3.4.4)$$

Esse tensor também é denominado tensor de tensão de dilatação. O valor  $\bar{\sigma}$  representa um invariante de tensões que não é de interesse nesses estudos.

O que realmente é de importância é o tensor II que é denominado tensor de tensão desviador ou de distorção. Sabe-se que o estado de tensão que consiste em tração e compressão em planos mutuamente perpendiculares é equivalente ao de tensão de cisalhamento pura. Esse último sistema de tensões, como se conhece, não causa variações volumétricas, mas apenas distorções e desvios do elemento de sua forma cúbica inicial devido aos valores  $\sigma_1 - \bar{\sigma}$ ,  $\sigma_2 - \bar{\sigma}$  e  $\sigma_3 - \bar{\sigma}$  serem diferentes entre si.

Com isso pode-se chegar à equação da energia de distorção para tensão combinada:

$$U_{distorção} = \frac{1}{12 \cdot G} \cdot ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) \quad (3.4.5)$$

Para obter esse critério deve-se igualar a Equação (3.4.5) à máxima energia de distorção na tração simples (Equação 3.4.6). A última condição ocorre quando uma das tensões principais atinge o ponto de escoamento,  $\sigma_{esc}$ , do material, assim a energia de distorção fica sendo:

$$U_{distorção} = \frac{2 \cdot \sigma_{esc}^2}{12 \cdot G} \quad (3.4.6)$$

Igualando a Equação (3.4.5) à (3.4.6), obtém-se que:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2 \cdot \sigma_{esc}^2 \quad (3.4.7)$$

e particularmente para a situação plana  $\sigma_3 = 0$  essa equação pode ser escrita como:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 = 2 \cdot \sigma_{esc}^2 \quad (3.4.8)$$

Rearranjando-se os termos da Equação (3.4.8), pode-se escrever a Equação (3.4.9), a qual representa a equação de uma elipse:

$$\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} \right)^2 - \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}} \right) + \left( \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}} \right)^2 = 1 \quad (3.4.9)$$

Graficamente tem-se a seguinte situação mostrada na Figura 5:

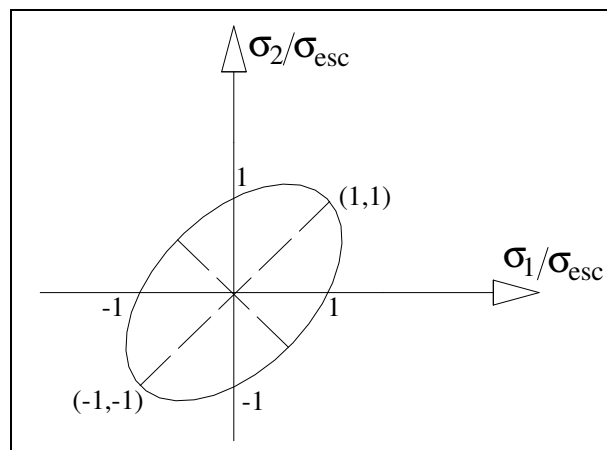


FIGURA 5 – Critério da máxima energia de distorção (Von Mises).

Com o intuito de ilustração e de comparação gráfica entre os critérios descritos até o momento nesse texto, é apresentada a Figura 6.

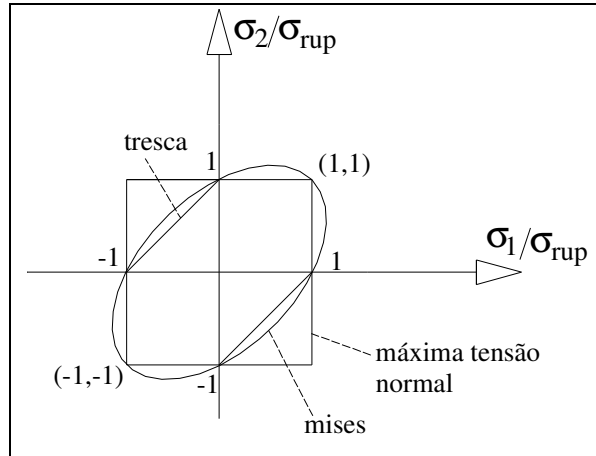


FIGURA 6 – Comparação entre os critérios de resistência.

### 3.5 Teoria Geral de Resistência para Materiais Anisotrópicos

De um modo geral, o estado de tensões em um ponto é caracterizado pelo tensor de 2ª ordem escrito em notação indicial por  $\sigma_{ij}$  (ver Anexo A), cujas componentes podem ser expressas pela matriz:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5.1)$$

Cada coluna dessa matriz representa a tensão resultante que atua na face de referência cuja normal tem a direção do eixo  $\vec{j}$ . A simetria do tensor de tensões permite que o estado de tensões possa ser representado pela matriz coluna:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_6 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_5 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

na qual:  $\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_5 = \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_6 = \sigma_{13} = \sigma_{31}$ .

Considerando-se materiais totalmente anisotrópicos, deve-se admitir que os modos de ruptura sejam condicionados tanto pelas tensões normais quanto pelas tensões tangenciais, uma vez que as rupturas podem ocorrer em virtude de diferentes conjuntos de tensões que agem sobre o elemento.

Tendo em vista não somente a anisotropia, mas também a assimetria da resistência do material, segundo TSAI e WU (1971) a condição geral de ruptura pode ser colocada sob a forma:

$$R_{ij} \cdot \sigma_{ij} + R_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kl} = 1 \quad (3.5.3)$$

Com  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .  $R_{ij}$  são coeficientes de termos lineares de resistência referentes à ação individual das tensões  $\sigma_{ij}$  e  $R_{ijkl}$  representam os coeficientes de termos quadráticos de resistência referentes à ação conjunta das tensões  $\sigma_{ij}$  e  $\sigma_{kl}$ .

As componentes dos tensores de resistência  $R_{ij}$  e  $R_{ijkl}$  são expressas pelas matrizes:

$$[R_{ij}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5.4)$$

e



$$[R_{ijkl}] = \begin{bmatrix} R_{1111} & R_{1122} & R_{1133} & R_{1112} & R_{1123} & R_{1131} \\ R_{2211} & R_{2222} & R_{2233} & R_{2212} & R_{2223} & R_{2231} \\ R_{3311} & R_{3322} & R_{3333} & R_{3312} & R_{3323} & R_{3331} \\ R_{1211} & R_{1222} & R_{1233} & R_{1212} & R_{1223} & R_{1231} \\ R_{2311} & R_{2322} & R_{2333} & R_{2312} & R_{2323} & R_{2331} \\ R_{3111} & R_{3122} & R_{3133} & R_{3112} & R_{3123} & R_{3131} \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

Assim, considerando o tensor  $R_{ij}$ , a componente  $R_{11}$  é o coeficiente de resistência correspondente à ação isolada de  $\sigma_{11}$  e o coeficiente  $R_{12}$  corresponde à ação isolada da tensão  $\sigma_{12}$ . Todavia como as tensões  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  aparecem simultaneamente, os coeficientes  $R_{12} = R_{21}$  referem-se à ação simultânea dessas duas componentes do tensor das tensões.

O tensor simétrico  $R_{ij}$  pode então ser representado de modo mais simples pela matriz simétrica:

$$[F_i] = \begin{bmatrix} F_1 & F_4 & F_6 \\ & F_2 & F_5 \\ sim. & & F_3 \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

Na qual,  $F_1 = R_{11}$ ,  $F_2 = R_{22}$ ,  $F_3 = R_{33}$ ,  $F_4 = R_{12}$ ,  $F_5 = R_{23}$  e  $F_6 = R_{13}$

Considerando o tensor  $R_{ijkl}$ , a componente  $R_{1111}$  corresponde à ação isolada da tensão  $\sigma_{11}$  e a componente  $R_{1122}$  corresponde à ação simultânea das tensões  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$ . Neste caso, os elementos da diagonal principal da matriz correspondem à ação isolada das respectivas tensões e os elementos simétricos em relação a essa diagonal são iguais entre si, pois se referem à resistência sob a ação do mesmo par de tensões.

A simetria do tensor de 4ª ordem  $R_{ijkl}$  permite que ele seja tratado como se fosse um tensor de 2ª ordem que está representado pela matriz simétrica:

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ & & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ & & & F_{44} & F_{45} & F_{56} \\ & & & & F_{55} & F_{56} \\ \text{sim.} & & & & & F_{66} \end{bmatrix} \quad (3.5.7)$$

Com as alterações feitas na representação dos tensores  $R_{ij}$  e  $R_{ijkl}$ , a condição de resistência, Equação 3.5.3, pode então ser escrita da seguinte forma:

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = 1 \quad (3.5.8)$$

Com  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

A Equação (3.5.8), elaborada por TSAI e WU (1971), representa a teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos. Pode-se, também, observar a forma expandida da expressão:

$$\begin{aligned} & F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_3 \cdot \sigma_3 + F_4 \cdot \sigma_4 + F_5 \cdot \sigma_5 + F_6 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + 2F_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 + 2F_{14} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4 + 2F_{15} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_5 + 2F_{16} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + 2F_{24} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_4 + 2F_{25} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_5 + 2F_{26} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{33} \cdot \sigma_3^2 + 2F_{34} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 + 2F_{35} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_5 + 2F_{36} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{44} \cdot \sigma_4^2 + 2F_{45} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 + 2F_{46} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{55} \cdot \sigma_5^2 + 2F_{56} \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{66} \cdot \sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

A Equação (3.5.9) é também conhecida como critério de resistência ou como tensor polinomial de resistência para materiais anisotrópicos.

Os termos lineares da teoria geral de ruptura para materiais anisotrópicos levam em conta as diferenças entre as tensões de tração e de compressão, ou seja, consideram a assimetria de resistência dos materiais. Os termos quadráticos definem, para materiais no estado plano de tensões, uma elipsóide no espaço das tensões.

Na hipótese básica, TSAI e WU (1971) ignoraram termos de ordem superior à quadrática no critério de resistência por não serem praticáveis do ponto de vista operacional, pois o número de componentes de um tensor de 6ª ordem aumenta significativamente se comparado a um tensor de 4ª ordem. Os termos cúbicos tornam a superfície de ruptura não-fechada.

As várias características do critério de resistência proposto por TSAI e WU (1971) são:

1. É uma equação escalar e automaticamente invariante. As interações entre todos os componentes de tensões são independentes das propriedades do material;
2. Os componentes de resistência são expressos em um tensor, suas relações de transformação e os invariantes associados são bem estabelecidos;
3. As propriedades de simetria do tensor de resistência e o número de componentes nulos e independentes podem ser rigorosamente determinados, da mesma forma que outras propriedades dos materiais anisotrópicos, tal como a matriz elástica de compliança;
4. Conhecendo as relações de transformação, pode-se facilmente rotacionar os eixos do material de  $F_i$  para  $F_i'$  e de  $F_{ij}$  para  $F_{ij}'$  na Equação (3.5.8) que descreve o tensor polinomial, ou equivalentemente mudar as tensões aplicadas de  $\sigma_i$  para  $\sigma_i'$  quando se quer estudar as propriedades fora dos eixos de simetria ou propriedades transformadas. A maioria dos critérios existentes são limitados para materiais ortotrópicos, e podem somente ser aplicados por transformação das tensões para os eixos de materiais. A rotação dos eixos do material não pode ser feita porque as transformações de coordenadas de termos de resistência não são conhecidas;

5. Sendo invariante, o critério de resistência é válido para todos os sistemas de coordenadas;

6. Algumas condições de estabilidade são incorporadas ao tensor de resistência. A magnitude dos termos de interação é restringida pela seguinte inequação:

$$F_{ii} \cdot F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0 \quad (3.5.10)$$

Na qual  $F_{ii}$  representam os termos da diagonal principal.

Para ter significado físico, todos os termos da diagonal principal da matriz devem ser positivos; os termos fora da diagonal principal podem ser negativos ou positivos dependendo da natureza de interação, mas suas magnitudes são restringidas pela inequação (3.5.10). Geometricamente esta inequação assegura que a superfície de ruptura interceptará cada um dos eixos coordenados de tensões. A forma da superfície será um elipsóide. Se a Inequação (3.5.10) não for respeitada, a superfície de ruptura se torna aberta (ver Anexo B).

Considerando o estado plano de tensões (plano 1-2), a Inequação (3.5.10) se divide em três condições, de acordo com TSAI e HAHN (1950):

(i) Se:  $-\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} < F_{12} < \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$ , a curva é uma elipse.

(ii) Se:  $F_{12} = \pm\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$ , as curvas são 2 linhas paralelas.

(iii) Se:  $F_{12} > \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$  ou  $F_{12} < -\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$ , a curva é um hipérbole.

A Inequação (3.5.10) pode ser obtida através da Equação (3.5.8) (tensor polinomial) para o caso de materiais estudados bidimensionalmente, como os plásticos reforçados por fibras e a madeira compensada, para os quais a condição de ruptura define uma superfície do 2º grau.

### 3.5.1 Aplicação do critério de resistência anisotrópico para matérias ortotrópicos

Os materiais ortotropicamente resistentes são aqueles que possuem três planos de simetria de resistência perpendiculares entre si.

De acordo com FUSCO (1995), admite-se que esses planos de simetria sejam os planos de referência 1-2, 2-3 e 3-1:

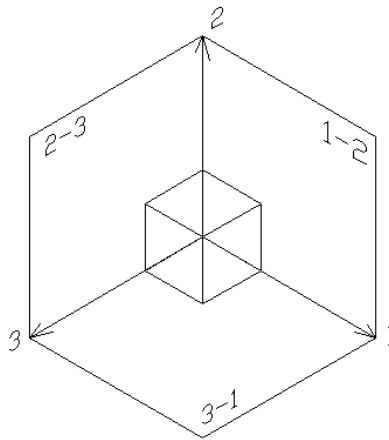


FIGURA 7 – Planos de simetria.

Como o plano 3-1 é de simetria, não é importante se as tensões de cisalhamento  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  são positivas ou negativas, pois em ambos os casos elas produzem os mesmos efeitos, correspondem a ações igualmente inclinadas em relação ao plano de simetria, conforme pode ser visto na Figura 8.

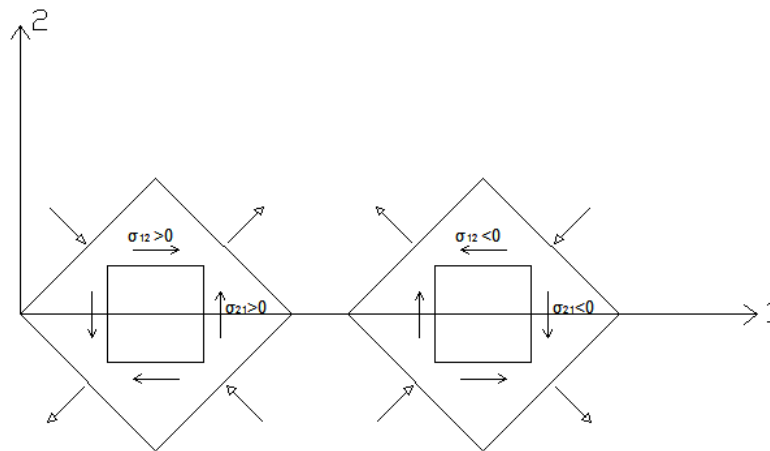


FIGURA 8 – Efeitos de  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ .

Desse modo, tem-se o coeficiente  $F_4 = 0$ . De modo análogo, como os planos 1-2 e 2-3 também são de simetria, o tensor  $F_i$  fica reduzido a seus termos da diagonal principal, ou seja:

$$[F_i] = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ & F_2 & 0 \\ sim. & & F_3 \end{bmatrix} \quad (3.5.1.1)$$

Quando se inverte o sentido de qualquer um dos eixos (1, 2 ou 3), o sentido da normal externa ao elemento em relação a esse eixo não se altera. Por esta razão não se anulam os coeficientes  $F_{12}$ ,  $F_{13}$  e  $F_{23}$ , pois ficam mantidos os sinais do tipo  $F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$ ,  $F_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3$  e  $F_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$ .

Pelo contrário, quando se consideram os termos  $F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$  em que comparece pelo menos uma tensão de cisalhamento, a inversão do sentido positivo de um eixo coordenado altera o sinal de duas tensões de cisalhamento, alterando-se o sinal do produto, sem que tenha ocorrido qualquer alteração no estado físico do sistema.

Admite-se, agora, a simetria da resistência em relação ao plano 2-3, que permite a alteração do eixo 1 como pode ser visto na Figura 9. As tensões  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  e  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  mudam de sinal, mas não se alteram os sinais das tensões  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{33}$ .

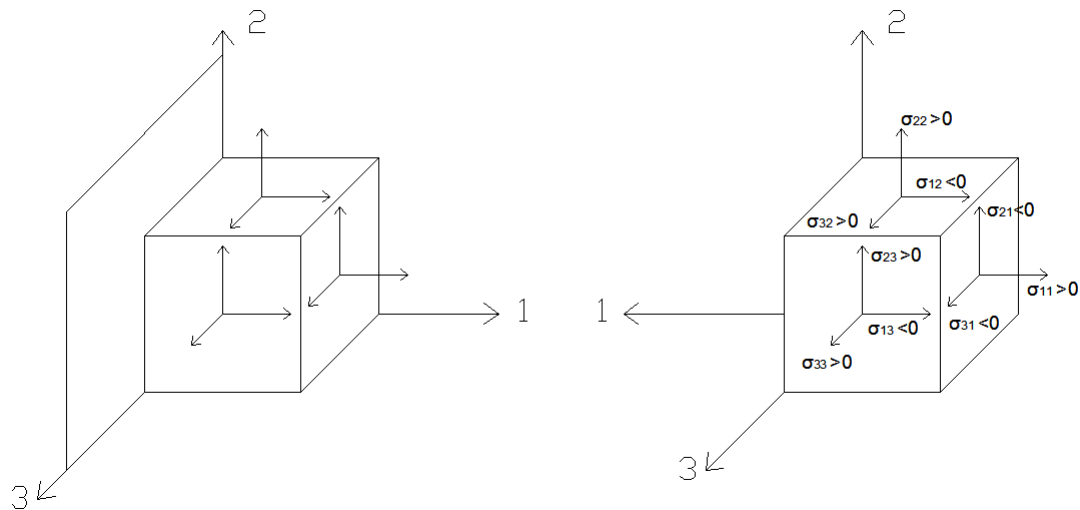


FIGURA 9 – Inversão do eixo 1.

A inversão do eixo 1 mostra que devem ser nulos os coeficientes  $F_{14}$ ,  $F_{16}$ ,  $F_{24}$ ,  $F_{26}$ ,  $F_{34}$ ,  $F_{36}$ ,  $F_{45}$  e  $F_{56}$ . Neste caso, com a simples consideração de simetria da resistência em relação ao plano 2-3, a matriz  $F_{ij}$  fica:

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & F_{15} & 0 \\ & F_{22} & F_{23} & 0 & F_{25} & 0 \\ & & F_{33} & 0 & F_{35} & 0 \\ & & & F_{44} & 0 & F_{46} \\ & & & & F_{55} & 0 \\ sim. & & & & & F_{66} \end{bmatrix} \quad (3.5.1.2)$$

Nota-se que o termo  $F_{46}$  não se anula, pois se invertem ambos os sinais de  $\sigma_{12}$  e de  $\sigma_{31}$ . Considerando-se agora a inversão do eixo 2, anulam-se os termos  $F_{15}$ ,  $F_{25}$ ,  $F_{35}$  e  $F_{46}$  e assim obtém-se a seguinte matriz:

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & F_{44} & 0 & 0 \\ & & & & F_{55} & 0 \\ sim. & & & & & F_{66} \end{bmatrix} \quad (3.5.1.3)$$

Observa-se que a inversão do eixo 3 levaria à inversão dos sinais de  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  e  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ , resultando daí a anulação dos mesmos termos já considerados anteriormente.

### 3.5.2 Determinação dos coeficientes $F_i$ e $F_{ii}$

Apresentadas as considerações sobre ortotropia, as quais podem ser sintetizadas através dos elementos das matrizes dos tensores de resistência  $F_i$  e  $F_{ii}$  (Equações 3.5.1.1 e 3.5.1.3, respectivamente), admitindo-se também a realização dos ensaios de tração e de compressão, segundo as direções principais 1, 2 e 3 e ainda considerando-se o ensaio de cisalhamento simples nas três famílias de planos de ortotropia, pode-se aplicar a equação do critério de resistência (Equação 3.5.8) para uma determinada direção principal. Além disso, pode-se encontrar seus respectivos valores dos coeficientes através da resolução de um simples sistema.

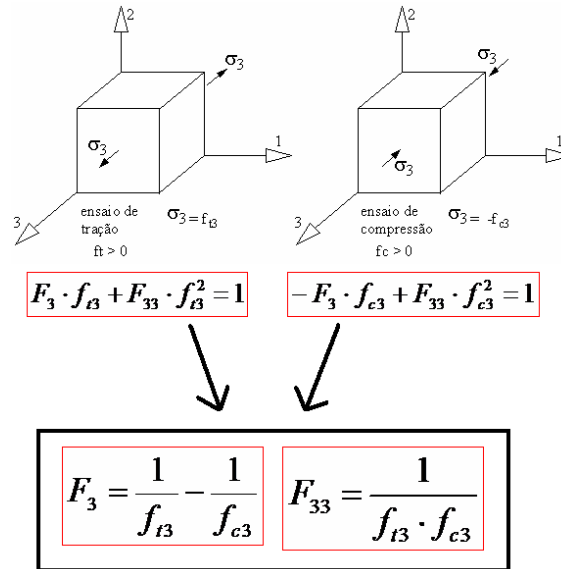


FIGURA 10 – Exemplo de obtenção dos coeficientes de Tsai-Wu.

Para este caso, tem-se a equação geral para materiais anisotrópicos, que através das considerações de simetria e do modelo ortotrópico, desenvolvida para o caso bidimensional 1-2, apresenta a seguinte forma:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (3.5.2.1)$$



Os coeficientes da equação (3.5.2.1) são apresentados na Tabela 1:

Tabela 1 – Coeficientes  $F_i$  e  $F_{ii}$ .

$F_1 = \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}}$	$F_2 = \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}}$
$F_{11} = \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1}}$	$F_{22} = \frac{1}{f_{t2} \cdot f_{c2}}$
$F_{44} = \frac{1}{f_{v4}^2}$	Limite de $F_{12}$ $-\sqrt{F_{11}F_{22}} < F_{12} < +\sqrt{F_{11}F_{22}}$

Os valores de  $f_{ti}$ ,  $f_{ci}$  e  $f_{v4}$  são, respectivamente, as resistências à tração, à compressão e ao cisalhamento para uma determinada direção principal  $i$ , as quais são obtidas através dos ensaios uniaxiais de tração, compressão e cisalhamento.

### 3.5.3 Determinação dos coeficientes $F_{ij}$

Considerando-se o caso plano 1-2 da Figura 11, para determinar o parâmetro  $F_{12}$ , a princípio, seria necessário realizar ensaios bidimensionais. Para estes ensaios têm-se combinações de tensões que variam de acordo com o tipo de maquinário desenvolvido, ou seja, pode-se, por exemplo, tracionar a peça nas duas direções principais, ou comprimir, ou ainda tracionar uma direção e comprimir a outra.

Para efeito de comparação de resultados, pode-se trabalhar com os seis casos de combinações de tensões sugeridos por TSAI e WU (1971) para a determinação do coeficiente de interação  $F_{12}$ , esses casos que envolvem tanto ensaios uniaxiais quanto biaxiais e estão apresentados na Figura 11. Na Tabela 2, mostra-se a expressão de  $F_{12}$  para cada um dos seis casos onde se obedece a relação  $|\sigma_1/\sigma_2|=1$ .

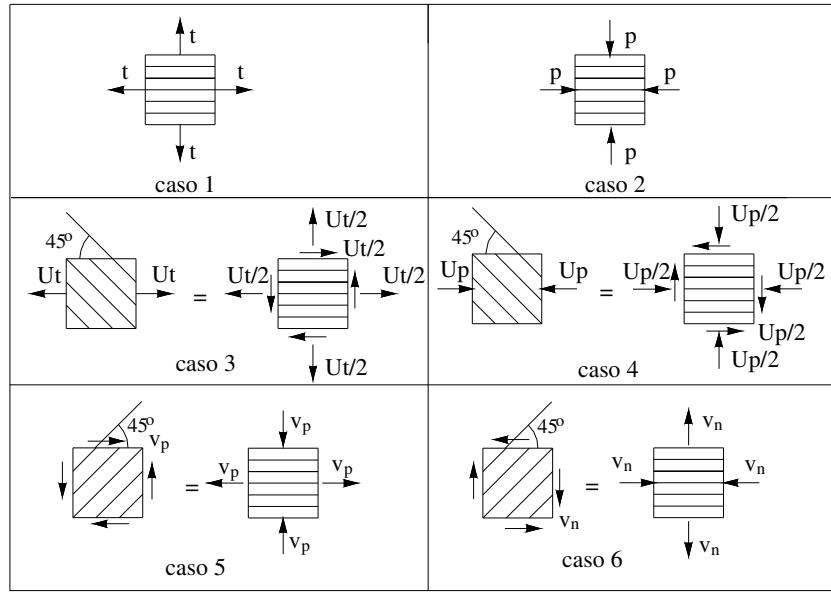


FIGURA 11 – Ensaio biaxiais e uniaxiais (casos 1 a 6).

Tabela 2 – Coeficiente de interação de tensões  $F_{12}$ , usando diferentes combinações de tensões de acordo com TSAI e WU(1971).

Caso	Tensões * $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12})$	$F_{12}$
1	$(t, t, 0)$	$\frac{1}{2t^2} \cdot [1 - t \cdot (F_1 + F_2) - t^2 \cdot (F_{11} + F_{22})]$
2	$(-p, -p, 0)$	$\frac{1}{2p^2} \cdot [1 + p \cdot (F_1 + F_2) - p^2 \cdot (F_{11} + F_{22})]$
3	$(U_t/2, U_t/2, U_t/2)$	$\frac{2}{U_t^2} \cdot \left[ 1 - \frac{U_t}{2} \cdot (F_1 + F_2) - \frac{U_t^2}{4} \cdot (F_{11} + F_{22} + F_{44}) \right]$
4	$(-U_p/2, -U_p/2, -U_p/2)$	$\frac{2}{U_p^2} \cdot \left[ 1 + \frac{U_p}{2} \cdot (F_1 + F_2) - \frac{U_p^2}{4} \cdot (F_{11} + F_{22} + F_{44}) \right]$
5	$(v_p, -v_p, 0)$	$-\frac{1}{2v_p^2} \cdot [1 - v_p \cdot (F_1 - F_2) - v_p^2 \cdot (F_{11} + F_{22})]$
6	$(-v_n, v_n, 0)$	$-\frac{1}{2v_n^2} \cdot [1 + v_n \cdot (F_1 - F_2) - v_n^2 \cdot (F_{11} + F_{22})]$

Os testes nos casos 1, 2, 5 e 6 necessitam de equipamentos experimentais especiais. Já os testes uniaxiais de tração e compressão (casos 3 e 4) são realizados com maior facilidade e menor custo.

### 3.6 Ensaios em Direções Inclinadas (*off-axis tests*)

Seja  $\sigma_\theta$  a tensão em uma direção orientada de um ângulo  $\theta$  com respeito às fibras ou em relação ao eixo 1 do material como é indicado na Figura 12:

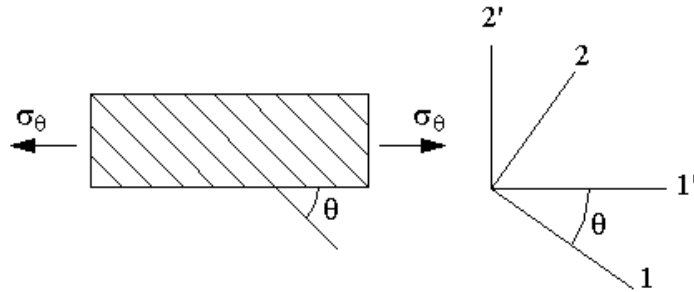


FIGURA 12 – Ensaio uniaxial de tração.

Expressando-se o tensor de resistência abaixo:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (3.6.1)$$

pode-se obter com respeito ao sistema de coordenadas 1'2' a equação:

$$F_1' \cdot \sigma_1' + F_{11}' \cdot \sigma_1'^2 = 1 \quad (3.6.2)$$

Com isso, o estado de tensão em relação aos eixos 1' - 2' é dado por:

$$(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_4') = (\sigma_\theta \quad 0 \quad 0) \quad (3.6.3)$$

Substituindo-se o estado de tensão no critério de resistência, tem-se:

$$F_1' \cdot \sigma_\theta + F_{11}' \cdot \sigma_\theta^2 = 1 \quad (3.6.4)$$

Utilizando-se as relações de transformação do tensor de resistência e considerando-se o princípio de transformação de coordenadas e os coeficientes  $F_i$  e  $F_{ii}$  determinados anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned} F_1' &= m^2 \cdot F_1 + n^2 \cdot F_2 \\ F_{11}' &= m^4 \cdot F_{11} + n^4 \cdot F_{22} + 2 \cdot m^2 \cdot n^2 \cdot F_{12} + m^2 \cdot n^2 \cdot F_{44} \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

na qual:  $F_1 = \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}}$ ,  $F_{11} = \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1}}$ ,  $m = \cos \theta$ ,  $n = \sin \theta$ ,  $F_2 = \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}}$ ,  
 $F_{22} = \frac{1}{f_{t2} \cdot f_{c2}}$  e  $F_{44} = \frac{1}{f_v^2}$ .

A equação do critério de resistência se reduz a:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2 \cdot \left[ \frac{\cos^4 \theta}{f_{t1} \cdot f_{c1}} + \frac{\sin^4 \theta}{f_{t2} \cdot f_{c2}} + \left( 2 \cdot F_{12} + \frac{1}{f_v^2} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \right] + \\ + \sigma_\theta \cdot \left[ \left( \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}} \right) \cdot \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}} \right) \cdot \sin^2 \theta \right] = 1 \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

A Equação (3.6.6) tem duas raízes para  $\sigma_\theta$ .

Colocando-se, agora, nesta análise a fórmula de Hankinson, que para compressão é:

$$\sigma_\theta = -\frac{f_{c1} \cdot f_{c2}}{f_{c1} \cdot \sin^2 \theta + f_{c2} \cdot \cos^2 \theta} \quad (3.6.7)$$

e, para tração vale:

$$\sigma_{\theta} = \frac{f_{t1} \cdot f_{t2}}{f_{t1} \cdot \sin^2 \theta + f_{t2} \cdot \cos^2 \theta} \quad (3.6.8)$$

pode-se agrupar estas duas fórmulas em apenas uma expressão e obter:

$$\left( \sigma_{\theta} + \frac{f_{c1} \cdot f_{c2}}{f_{c1} \cdot \sin^2 \theta + f_{c2} \cdot \cos^2 \theta} \right) \cdot \left( \sigma_{\theta} - \frac{f_{t1} \cdot f_{t2}}{f_{t1} \cdot \sin^2 \theta + f_{t2} \cdot \cos^2 \theta} \right) = 0 \quad (3.6.9)$$

Além disso, pode ser mostrado, por comparação das Equações (3.6.7) e (3.6.8), que as duas equações são idênticas se:

$$F_{12} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c2}} + \frac{1}{f_{c1} \cdot f_{t2}} + \frac{1}{f_v^2} \right) \quad (3.6.10)$$

Desprezando-se, agora, os termos lineares na equação do critério de resistência e fazendo as devidas substituições na Equação (3.6.1) para estado plano de tensões, tem-se:

$$\sigma_{\theta}^2 \cdot \left( F_{11} \cdot \cos^4 \theta + F_{22} \cdot \sin^4 \theta + \left( 2F_{12} + \frac{1}{f_v^2} \right) \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \right) = 1 \quad (3.6.11)$$

Considerando-se o valor adotado por COWIN (1979) para  $F_{12}$  apresentado na Tabela 3:

Tabela 3 – Expressões do coeficiente  $F_{12}$  de acordo com alguns pesquisadores.

Teoria	$F_{12}$
Gold'denblat - Kopnov	$\frac{1}{8} \cdot \left[ \left( \frac{1}{f_{t1}} + \frac{1}{f_{c1}} \right)^2 + \left( \frac{1}{f_{t2}} + \frac{1}{f_{c2}} \right)^2 - \left( \frac{1}{f_{vp}} + \frac{1}{f_{vn}} \right)^2 \right]$
HOFFMAN	$-\frac{1}{2 \cdot f_{t1} \cdot f_{c1}}$
COWIN	$\frac{1}{\sqrt{f_{t1} \cdot f_{c1} \cdot f_{t2} \cdot f_{c2}}} - \frac{1}{2 \cdot f_v^2}$
LIU	$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c2}} + \frac{1}{f_{c1} \cdot f_{t2}} + \frac{1}{f_v^2} \right)$

tem-se que:

$$F_{12} = \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} - \frac{1}{2 \cdot f_v^2} = \sqrt{\frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1} \cdot f_{t2} \cdot f_{c2}}} - \frac{1}{2 \cdot f_v^2} \text{ e, por fim da Equação 3.6.11}$$

tem-se:

$$\sigma_{\theta} = \pm \frac{\sqrt{f_{t1} \cdot f_{c1}} \cdot \sqrt{f_{t2} \cdot f_{c2}}}{\sqrt{f_{t2} \cdot f_{c2}} \cdot \cos^2 \theta + \sqrt{f_{t1} \cdot f_{c1}} \cdot \sin^2 \theta} \quad (3.6.12)$$

A Equação (3.6.12) é semelhante à fórmula de Hankinson.

Observa-se que o coeficiente  $F_{12}$  determinado por LIU (1984) é diferente do coeficiente obtido por COWIN (1979). Se os termos lineares do tensor polinomial forem desprezados, o coeficiente  $F_{12}$  de Liu se iguala ao coeficiente de Cowin.

Os coeficientes  $F_{12}$  propostos por HOFFMAN (1967) e COWIN (1979) não requerem a utilização de ensaios biaxiais. Assim, em ensaios uniaxiais de tração e de compressão em direções ( $0 < \theta < 90^\circ$ ), as quais não são as direções principais, pode-se, a partir da equação geral de resistência para materiais ortotrópicos para o estado plano de tensões expressar o coeficiente  $F_{12}$  igual a:

$$F_{12} = \frac{1}{2 \cdot \sigma_{\theta}^2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta} \right) - \sigma_{\theta} \cdot \left( \frac{F_1}{\sin^2 \theta} + \frac{F_2}{\cos^2 \theta} \right) - \sigma_{\theta}^2 \cdot \left( F_{44} + \frac{F_{11}}{\tan^2 \theta} + F_{22} \cdot \tan^2 \theta \right) \right] \quad (3.6.13)$$

Neste caso, o coeficiente  $F_{12}$  foi obtido para o caso de tração uniaxial. Para o caso de compressão uniaxial, basta substituir  $\sigma_{\theta}$  por  $-\sigma_{\theta}$  na Equação (3.6.13).

Quando  $\theta = 45^\circ$ , o coeficiente  $F_{12}$  terá o mesmo valor dos casos 3 e 4 da Tabela 4 a seguir:

Tabela 4 – Determinação de  $F_{12}$  de acordo com a teoria simplificada.

<b>Caso</b>	<b>Tensões (<math>\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}</math>)</b>	<b><math>F_{12}</math></b>
1	(t, t, 0)	$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{t^2} - \frac{1}{f_{t1}^2} - \frac{1}{f_{t2}^2} \right]$
2	(-p, -p, 0)	$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{p^2} - \frac{1}{f_{c1}^2} - \frac{1}{f_{c2}^2} \right]$
3	(Ut/2, Ut/2, Ut/2)	$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{4}{U_t^2} - \frac{1}{f_{t1}^2} - \frac{1}{f_{t2}^2} - \frac{1}{f_{v4}^2} \right]$
4	(-Up/2, -Up/2, -Up/2)	$\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{4}{U_p^2} - \frac{1}{f_{c1}^2} - \frac{1}{f_{c2}^2} - \frac{1}{f_{v4}^2} \right]$

### 3.7 Modos de Ruptura na Madeira

A interpretação do fenômeno de ruptura em um componente de uma estrutura requer o estudo de modelos de ruptura, os quais estão associados às tensões atuantes nesses componentes.

Para as madeiras, os modelos de ruptura são freqüentemente classificados a partir de testes realizados (ensaios). O estudo dos modos de ruptura é necessário para verificar se os ensaios estão apresentando os resultados esperados (rupturas esperadas), ou seja, se o ensaio num determinado tipo de madeira está de acordo com os modos de ruptura já conhecidos. Seguem os modos de ruptura na compressão e tração segundo BODIG (1982).

### **3.7.1 Compressão paralela às fibras**

Têm-se os seguintes modelos de ruptura, considerando as fibras paralelas ao eixo de aplicação da carga de compressão:

- *Ruptura por esmagamento:*

Descreve o modelo no qual as fibras são esmagadas em um plano aproximadamente paralelo a superfície.



FIGURA 13 – Esmagamento.



- *Fenda em cunha:*

Podem ser facilmente identificadas por formar um “Y”. Esse tipo de ruptura é causado por cisalhamento no plano inclinado.



FIGURA 14 – Fenda em cunha.

- *Cisalhamento:*

Causado por tensões cisalhantes num plano inclinado.



FIGURA 15 – Cisalhamento.

- *Fenda:*

Ruptura ao longo do comprimento longitudinal causado por defeitos internos da espécie.



FIGURA 16 – Fenda.

- *Esmagamento e Fendas:*

Geralmente ocorre em espécies com diferentes tipos de composições internas. Essas diferentes composições são visivelmente identificadas por diferenças de cores, espaços vazios etc. Nesses tipos de materiais a ruptura se dá na junção entre eles.



FIGURA 17 – Esmagamento e fendas.

- *Brooming (desalinhamento das fibras):*

Isso geralmente ocorre pelo fato da superfície apresentar elevada umidade ou imperfeições no esquadrejamento do corpo-de-prova.



FIGURA 18 – Brooming.

### **3.7.2 Tração paralela às fibras**

No caso da tração paralela às fibras, tem-se quatro tipos de ruptura observados com frequência:

- *Splintering tension (lascamento):* Tração que causa lascamento, o material tem a aparência de estar lascado, formando pontas em suas superfícies.



FIGURA 19– Lascamento.

- *Combinação de tração e cisalhamento:* Rompe-se num plano inclinado.



FIGURA 20 – Combinação de tração e cisalhamento.

- *Cisalhamento:*

Ocorre cisalhamento num plano diagonal.



FIGURA 21 – Cisalhamento (tração).

- *Ruptura frágil à tração:*

Ocorre para casos em que o material é muito frágil.



FIGURA 22- Ruptura frágil.

Para entender de um modo mais adequado o fenômeno de ruptura deve-se apresentar, em linhas gerais, algumas observações sobre o crescimento de árvores.

Em uma árvore, na região central do tronco, se localiza a medula, resultante do crescimento vertical inicial da árvore. Em geral ela tem características específicas, menos favoráveis em relação à madeira das outras regiões do tronco. Segundo GEMMEL (1980), a partir da medula, as camadas de crescimento se dispõem em arranjos concêntricos que também são conhecidas como zonas de lenho inicial e de lenho tardio. O desenvolvimento da árvore não ocorre de modo uniforme ao longo do ano. Em função das estações, a disponibilidade de luz, calor e água experimenta grandes variações, fazendo com que os anéis de crescimento sejam constituídos por duas porções distintas. Uma delas é mais clara, mais porosa, menos resistente: trata-se da madeira crescida em condições favoráveis de luz, calor e água. A outra é mais escura, menos porosa, mais resistente: trata-se da madeira crescida em condições menos favoráveis de luz, calor e água.

As camadas externas e mais jovens de crescimento constituem o alburno. São responsáveis pela condução da seiva bruta desde as raízes até as folhas. Segundo MOREY (1980) tratam-se de camadas com menor resistência à demanda biológica, têm coloração mais clara, aceitando com maior facilidade a aplicação de tratamentos preservativos. As camadas mais internas do tronco – o cerne – são mais antigas, tendem a armazenar resinas, taninos e outras substâncias de alto peso molecular, tornando-se mais escuras, com maior resistência à demanda biológica. Revestindo o lenho, entendido como a composição de medula, cerne e alburno, encontra-se a casca. Sob esta, existe uma finíssima película do câmbio vascular (a chamada parte "viva" da árvore) que origina os elementos anatômicos integrantes da casca (floema) bem como do lenho (xilema).

A zona de lenho inicial ou tardio de uma madeira frágil, submetida à tração paralela às fibras, exibe diferentes modelos de ruptura. A zona de lenho tardio mostra tipicamente uma combinação de cisalhamento e tração. Na zona de lenho inicial, a ruptura se dá de forma frágil.

Além dos casos de rupturas apresentados anteriormente outros freqüentes, observados por defeitos na madeira, considerando tração perpendicular às fibras, são:

- *Ruptura na zona de lenho inicial:*



FIGURA 23 – Ruptura.

- *Ruptura por cisalhamento ao longo dos anéis de crescimento*



FIGURA 24 – Ruptura por cisalhamento.

- *Ruptura por tração na direção dos raios dos anéis de crescimento da madeira*



FIGURA 25 – Ruptura por tração.

### 3.8 Ensaios Biaxiais

A realização de ensaios biaxiais e triaxiais permite uma análise geral do comportamento das propriedades mecânicas do material simultaneamente em suas direções principais e é, sem dúvida, a forma que engenheiros pesquisadores encontraram para obter resultados que permitem a calibração dos modelos teóricos adotados.

Uma das grandes dificuldades enfrentadas nestes tipos de ensaios é a elaboração de um maquinário que possa corresponder fielmente às situações de carregamento em uma estrutura real, assim como obter dispositivos eficientes para a fixação do corpo-de-prova. O alicate desenvolvido na realização do ensaio biaxial de compressão para a madeira é muito sensível à calibração.

Além da madeira, pode-se observar a existência de ensaios biaxiais ou triaxiais em outros tipos de materiais. O modelo ortotrópico é comumente utilizado nos materiais para estes tipos de ensaios.

Como exemplo, pode-se observar uma aplicação do critério de Tsai-Wu em estimativas de resistências aplicadas à madeira e ao papelão.

Neste sentido, HASEBE e USUKI (1989) aplicaram a teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos como a madeira, considerando o estado plano de tensões, na qual a direção 1 paralela às fibras da madeira e a direção 2 perpendicular às fibras, obtendo a equação:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (3.8.1)$$

Como a influência da tensão ( $\sigma_2$ ), na direção perpendicular às fibras, é pequena, pode ser desprezada. Desse modo a Equação 3.8.1 se reduz a forma:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (3.8.2)$$



A madeira utilizada foi o “Japanese Cedar” e foram realizados ensaios uniaxiais de tração, compressão e cisalhamento em corpos-de-prova. Com os resultados dos ensaios foram determinados os coeficientes da Equação 3.8.2 e foram construídas as superfícies de ruptura, que podem ser observadas na Figura 26.

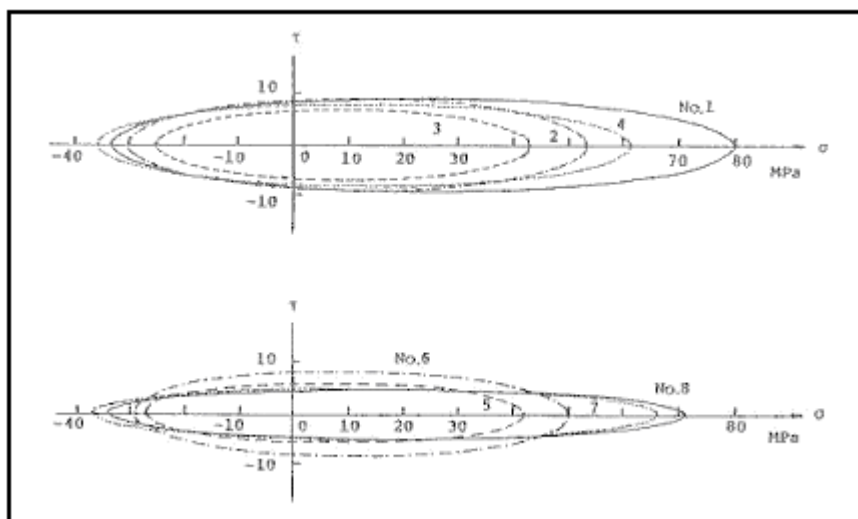


FIGURA 26 – Critério de ruptura da madeira (“Japanese Cedar”).

EBERHARDSTEINER (2002) realizou ensaios biaxiais em madeira de “Spruce” (madeira resinosa) com o objetivo de obter as superfícies de Tsai-Wu e os modos de ruptura. Por meio da Figura 27 observa-se o equipamento de testes e o corpo-de-prova da madeira. Observa-se que a espessura do corpo-de-prova é muito pequena em relação às outras dimensões, evidenciando assim, um estado plano de tensões.

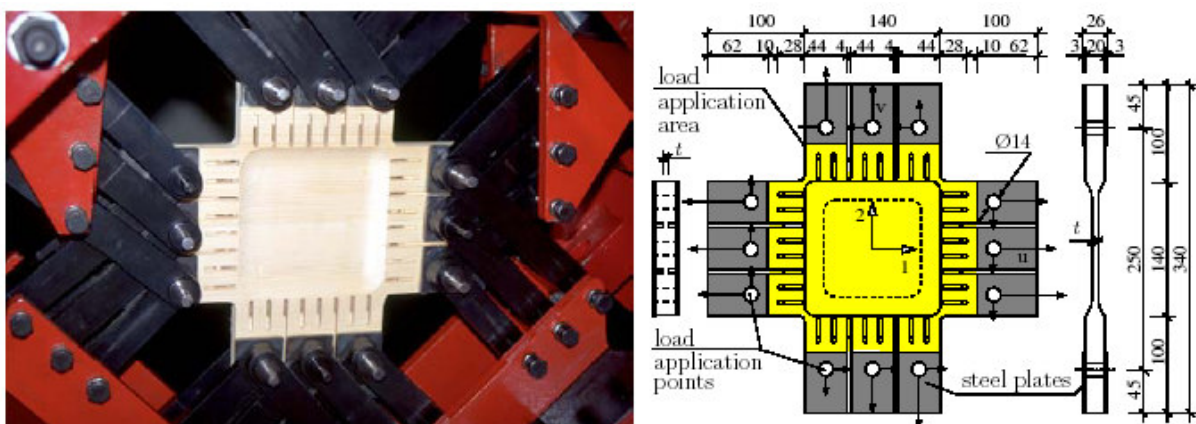


FIGURA 27 – Equipamento biaxial e detalhe do corpo-de-prova em mm.

Os modos de ruptura foram obtidos, juntamente com a envoltória de resistência proveniente da teoria de Tsai-Wu apresentam-se nas Figuras 28 e 29.

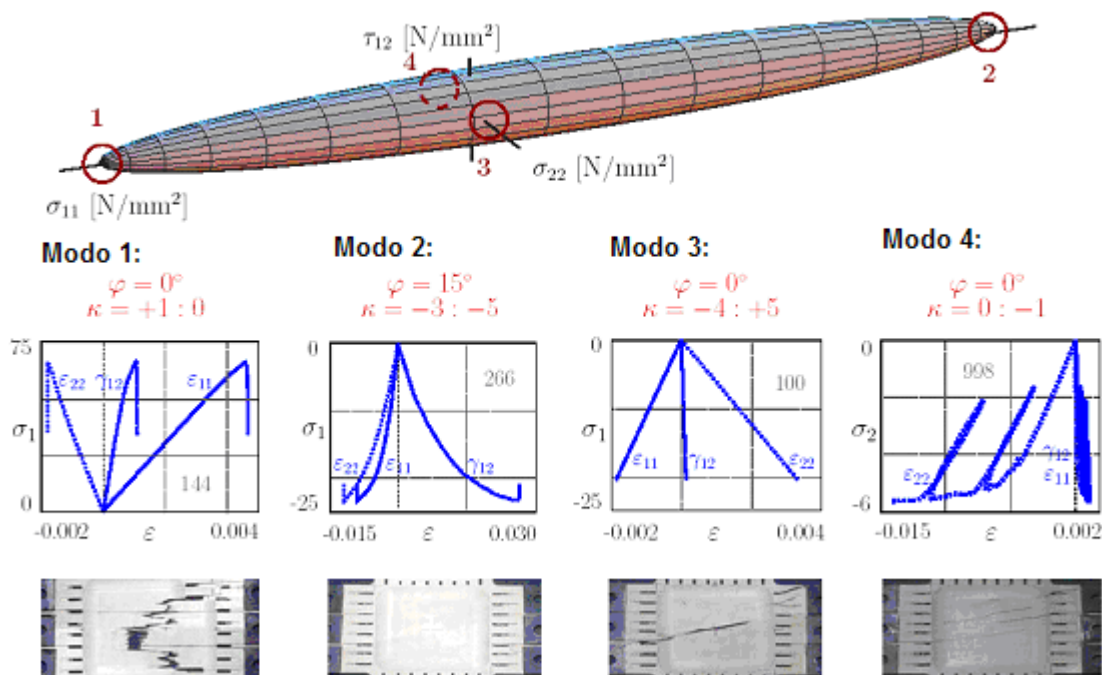


FIGURA 28 – Envoltória de resistência segundo Tsai-Wu; relação tensão-deformação e modos de ruptura devidos a diferentes carregamentos biaxiais.

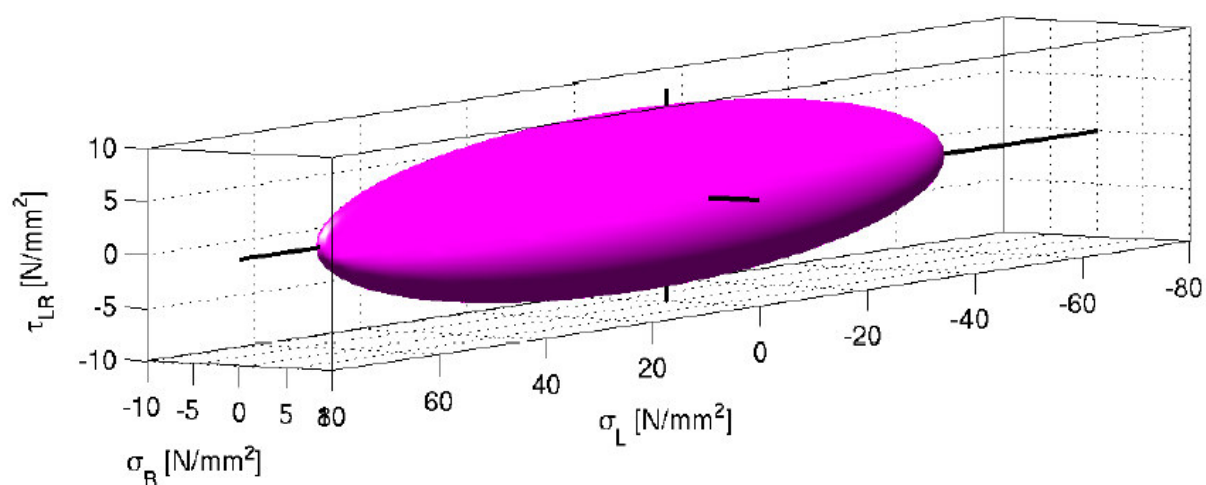


FIGURA 29 –Envoltória de resistência de um material ortotrópico.

SUHLING (1985) realizou ensaios biaxiais no papelão e comparou os resultados com a teoria geral de ruptura de Tsai-Wu. Na Tabela 5 estão os resultados das propriedades mecânicas do material.

TABELA 5 – Propriedades mecânicas do papelão.

Propriedades	Valores (MPa)
$f_{t0}$	55,90
$f_{t90}$	20,50
$f_{c0}$	30,80
$f_{c90}$	12,70
$f_v$	16,60

Com os resultados da Tabela 5 foram calculados os parâmetros do critério de resistência. O coeficiente  $F_{12}$  foi determinado de acordo com os limites abaixo:

$$-\sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \leq F_{12} \leq \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$$

$$-15 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-2} \leq F_{12} \leq 15 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-2}$$

Na Figura 30 pode-se observar várias curvas de ruptura calculadas com diferentes valores de  $F_{12}$ , com todos os valores de  $F_{12}$  dentro dos limites do critério de Tsai-Wu. Os resultados foram comparados com ensaios experimentais, representados no gráfico por pontos.

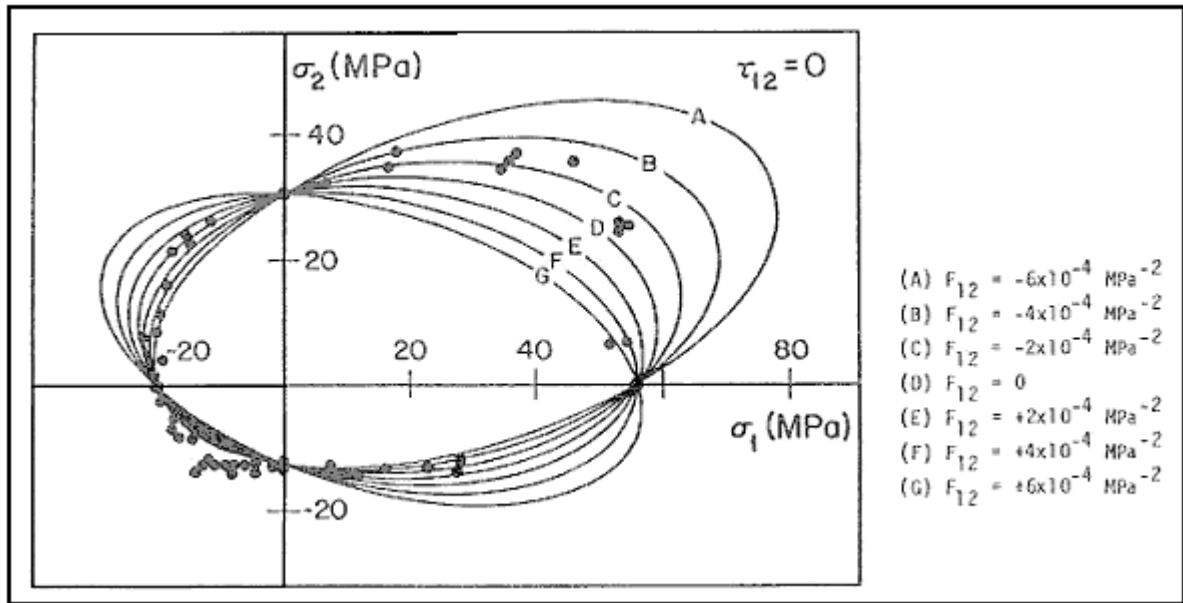


FIGURA 30 – Critério de ruptura para papelão.

Na Figura 30 pode se observar o quanto o parâmetro  $F_{12}$  tem influência na determinação da superfície de ruptura. Apenas no terceiro quadrante (compressão biaxial) não há variação significativa. A maior variação ocorre no primeiro quadrante (tração biaxial). Isto indica a importância do coeficiente na determinação da superfície de ruptura do material. No primeiro quadrante dependendo do valor de  $F_{12}$ , os dados experimentais ficam fora da curva.

Os valores utilizados acima são apenas uma pequena faixa dos valores possíveis do parâmetro  $F_{12}$ . Isto demonstra a grande sensibilidade do critério de resistência quando utilizado na comparação com ensaios biaxiais.

Pode-se citar, também, o trabalho de ALVIM (2003), em que o principal objetivo foi avaliar as propriedades mecânicas dos tecidos estruturais e para isso foi desenvolvido um arranjo de ensaio (Figura 31) que permite a aplicação das forças de tração (semelhante ao caso 1 proposto por Tsai-Wu).



FIGURA 31 – Arranjo do ensaio.

Neste trabalho, realizaram-se ensaios uniaxiais e biaxiais para estes tipos de tecidos. Para os ensaios uniaxiais os tecidos estruturais foram ensaiados com o carregamento paralelo às fibras (tramas e urdumes) e para os ensaios biaxiais as amostras foram submetidas a esforços ortogonais de tração, simultaneamente e de mesma intensidade, alinhados com as direções da trama e do urdume.

Note-se a grande semelhança na realização dos ensaios uniaxiais do tecido com a madeira, devido a aplicação da carga ser paralela e perpendicular às fibras de crescimento. Já nos ensaios biaxiais tem-se o ensaio de tração para o tecido e o ensaio de compressão para a madeira, pois o tecido só apresenta estrutura resistente ao ser tracionado, ao contrário da madeira que pode ser tracionada e comprimida por ter estrutura mais rígida.

Na Unicamp, pesquisas sobre a avaliação do critério de Tsai-Wu foram desenvolvidas, a partir de resultados de ensaios uniaxiais e biaxiais. Pode-se citar os trabalhos de: NICOLAS (2006); MASCIA, NICOLAS E TODESCHINI (2007); MASCIA, NICOLAS E SVERZUT (2007) e TODESCHINI, MASCIA E NICOLAS (2008).

Esses trabalhos e essa dissertação de mestrado seguiram a metodologia que esta descrita no capítulo 4.

Destaca-se, ainda, que estes estudos estão em sintonia com a atual revisão da NBR 7190 (naturalmente também com futuras revisões e alterações), elaborado, sob a

supervisão do Prof. Dr. Carlito Calil Jr (LaMEM-EESC-USP), por um grupo de pesquisadores de diversas instituições de pesquisa do Brasil, entre as quais os professores da UNICAMP. Em questões normativas, este assunto, referente a critérios de resistência, deve ser destacado, pois visa buscar um conhecimento mais adequado dos critérios utilizados para as verificações das tensões na etapa de dimensionamento das estruturas de madeira.

## 4 MATERIAIS E MÉTODOS

### 4.1. Materiais

Nesta pesquisa foram utilizadas as espécies de madeira: *Pinus elliottii* e *Goupia glabra*, as quais são de fácil aquisição na região de Campinas. Para cada uma, a seguir, são apresentadas suas características de acordo com IPT (2003).

A espécie *Goupia glabra* (Cupiúba) também é conhecida como Cachaceiro, Copiúba, Copiúva, Cupiúba-rosa, Peniqueiro, Peroba-do-norte, Peroba-fedida, Vinagreiro. Ocorre principalmente na Amazônia além de países como Colômbia, Guiana, Guiana Francesa, Suriname e Venezuela.

A utilização da Cupiúba na construção civil se dá em: postes, estruturas de pontes, postes, mourões, cruzetas, esteios, pranchas de contenção de valas, vigas e caibros. Pode ser também utilizada em: cabos de ferramentas, carrocerias e vagões de trem, construção naval e embalagens pesadas.

A espécie *Pinus elliottii* (Pinus-Eliote) também é conhecida como Pinus, Pinheiro, Pinheiro-americano. Esta espécie foi introduzida nos estados de Espírito Santo, Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Paraná, Rio de Janeiro, Rio Grande do Sul, Santa Catarina, São Paulo, sendo sua maior ocorrência nos EUA.

Quanto ao uso na construção civil pode-se citar como utilidade geral: cordões, guarnições, rodapés, forros, lambris, fôrmas para concreto, pontaletes e andaimes. Pode ser utilizada também como: móveis estândar, partes internas de móveis, móveis torneados (para exportação), cabos para vassouras, palitos de fósforo, compensados, laminados, torneados, brinquedos, embalagens, paletes, bobinas, carretéis, pincéis etc.

É uma madeira tipicamente de reflorestamento. Suas propriedades mecânicas são influenciadas acentuadamente pelas práticas de manejo florestal adotadas nos plantios. Portanto, deve-se precaver quanto a esta característica em usos estruturais. Também apresenta alta permeabilidade às soluções preservantes, podendo, quando devidamente tratada, ser empregada em usos de alta classe de risco de biodeterioração.

## **4.2 Métodos**

Os corpos-de-prova para realização dos ensaios uniaxiais foram extraídos de 6 vigas com as seguintes dimensões: 4,5 cm x 30 cm x 150 cm. O teor de umidade variou entre 12% a 14%.

Foram realizados ensaios em corpos-de-prova de madeira para determinação das resistências que foram utilizadas para a determinação dos parâmetros de resistência utilizados no critério de Tsai-Wu.

Os ensaios realizados foram os seguintes:

- Ensaio de tração,
- Ensaio de compressão,
- Ensaio de cisalhamento.

Nos ensaios de tração, compressão e cisalhamento uniaxial, realizados no laboratório de ensaios do SENAI, em Itatiba, foi utilizada uma máquina de ensaio universal EMIC com capacidade de 300 kN.

Nos ensaios de compressão, para a determinação do módulo de elasticidade ( $E_c$ ), realizados no LaMEM de EESC-USP, foi utilizada uma máquina de ensaio universal AMSLER. O módulo de elasticidade foi determinado através de resultados de deformações dos extensômetros elétricos.



Os ensaios biaxiais foram realizados no Centro de Tecnologia (CT) da Unicamp e será descrito detalhadamente no item 4.5.

### 4.3 Ensaios Uniaxiais de Tração e Compressão

#### 4.3.1 Tração

Para esse ensaio os corpos-de-prova foram confeccionados considerando-se a direção das fibras da madeira em relação à direção de aplicação da carga. Foram considerados os seguintes desvios da direção da carga em relação à direção das fibras (Figura 32).

- $0^{\circ}$  (paralela às fibras)
- $15^{\circ}$
- $30^{\circ}$
- $60^{\circ}$
- $75^{\circ}$
- $90^{\circ}$  (perpendicular às fibras)

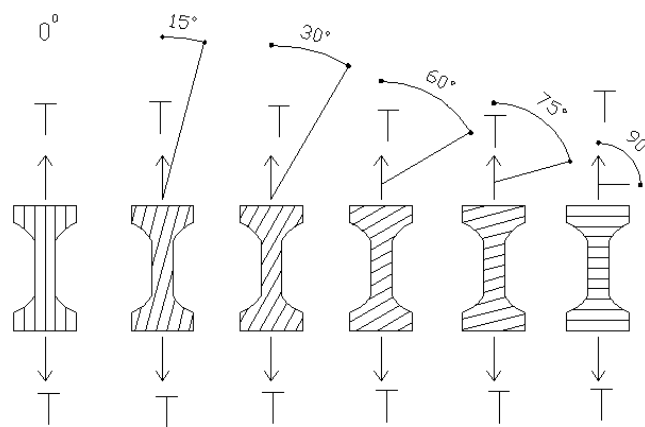


FIGURA 32- Metodologia do ensaio de tração.

O corpo-de-prova de tração foi confeccionado em dimensões menores do que o prescrito pela NBR 7190 (ABNT, 1996). A redução de tamanho foi considerada, pois a peça bruta comercial (peça cujos corpos-de-prova foram extraídos) não possibilitava a extração de corpos-de-prova com as dimensões da norma concomitantemente com a variação da inclinação das fibras.

#### 4.3.2 Compressão

Para este ensaio, também realizou-se o mesmo procedimento quanto à orientação das fibras (Figura 33), ou seja, variação do ângulo a partir do eixo de aplicação da carga. Assim, tem-se a configuração do ensaio de compressão.

- $0^{\circ}$  (paralela às fibras)
- $15^{\circ}$
- $30^{\circ}$
- $60^{\circ}$
- $75^{\circ}$
- $90^{\circ}$  (perpendicular às fibras)

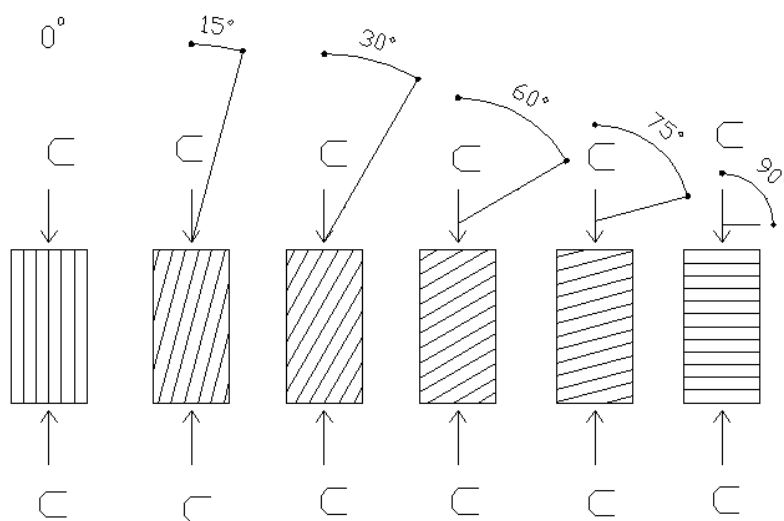


FIGURA 33 – Metodologia do ensaio de compressão.

#### 4.4 Dimensões dos corpos-de-prova

As dimensões dos corpos-de-prova foram elaboradas de acordo com a *NBR 7190: Projeto de estruturas de madeira*, exceto, para os corpos-de-prova de tração, que tiveram suas dimensões reduzidas. Segue abaixo a configuração dos corpos-de-prova.

- **Tração**

Estes corpos-de-prova apresentam a configuração ilustrada nas Figuras 34 e 35.

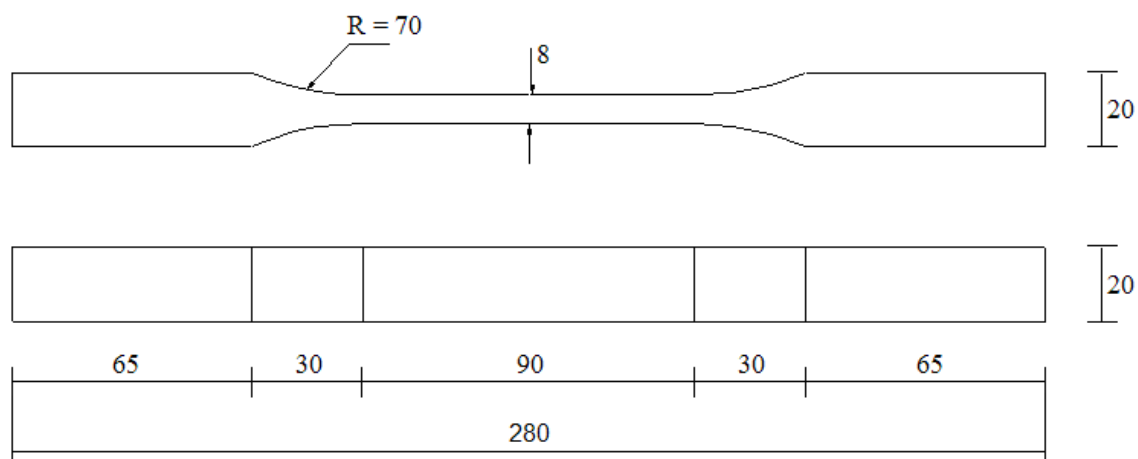


FIGURA 34 – Dimensões do corpo-de-prova de tração (mm).

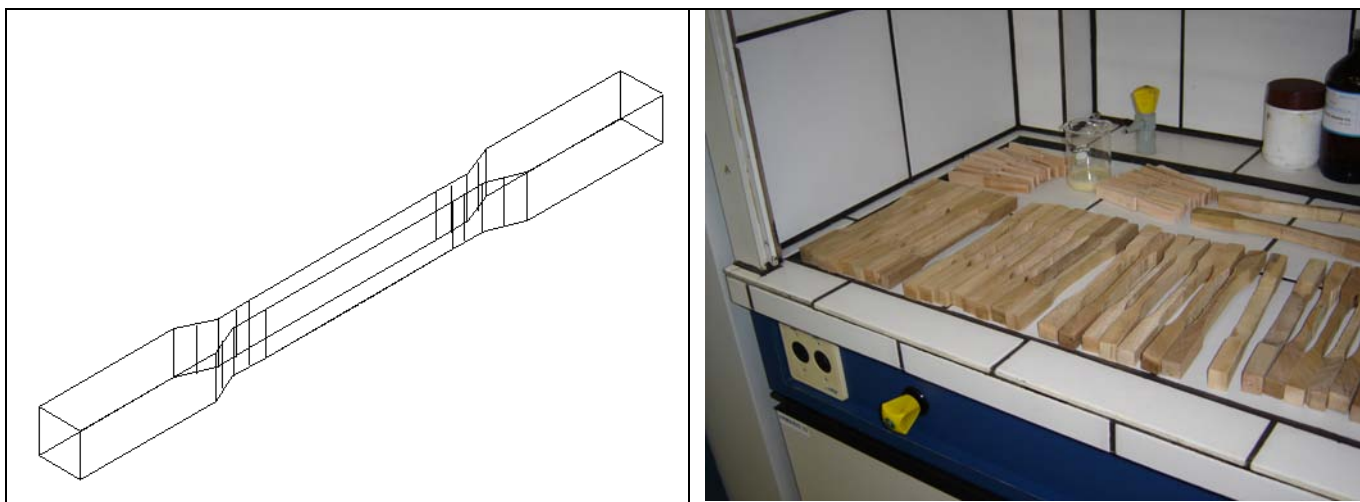


FIGURA 35 - Corpo-de-prova de tração.

- **Compressão**

Estes corpos-de-prova apresentam a configuração ilustrada na Figura 36.

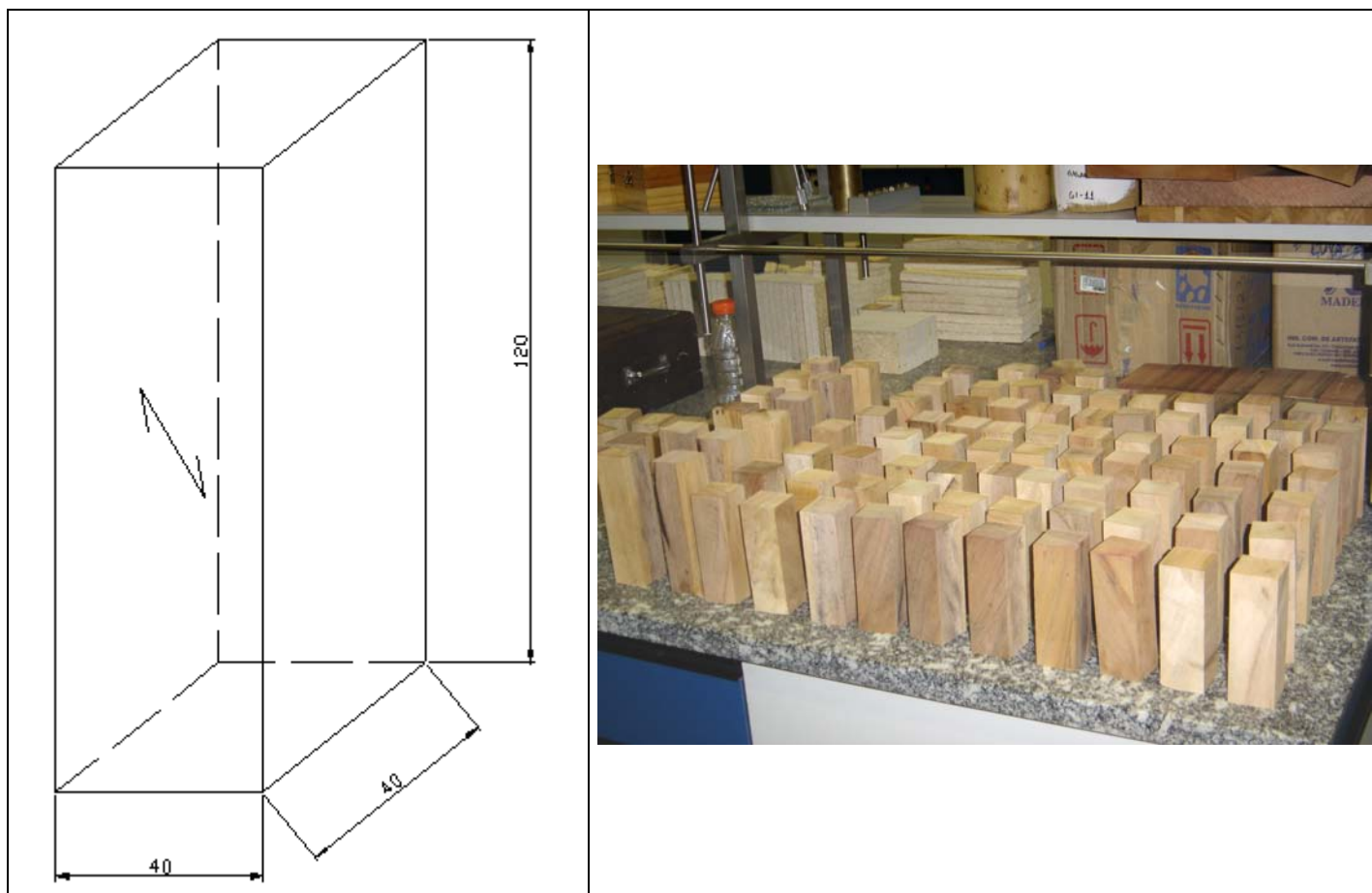


FIGURA 36 – Corpo-de-prova de compressão (mm).

- **Cisalhamento**

Mesmo para a análise dos ensaios uniaxiais, precisou-se obter o valor da tensão de ruptura de cisalhamento para que houvesse a possibilidade da utilização do critério de Tsai-Wu. Assim, o corpo-de-prova de cisalhamento foi confeccionado da seguinte forma, segundo a NBR7190:

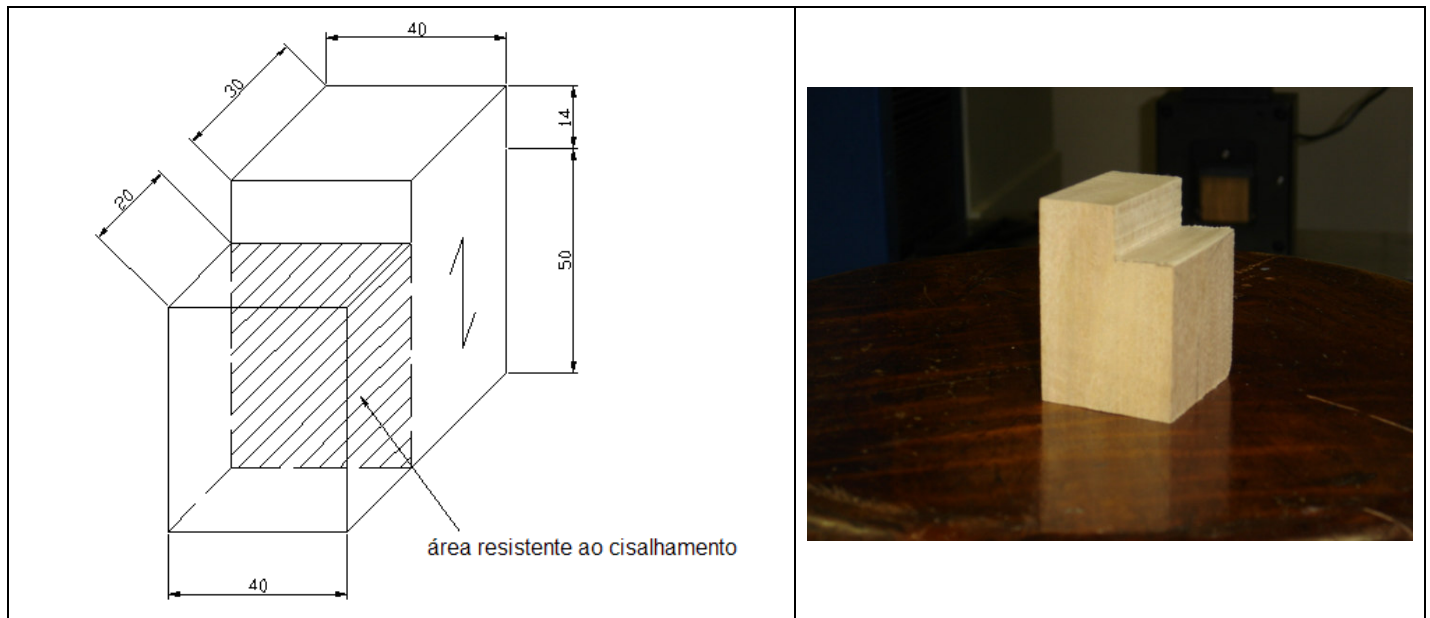


FIGURA 37 – Corpo-de-prova de cisalhamento (mm).

A confecção dos corpos-de-prova foi obtida de acordo com a inclinação das fibras da madeira em relação ao eixo de aplicação da carga. Os ângulos considerados foram:  $0^\circ$  (paralela às fibras),  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  e  $90^\circ$  (perpendicular às fibras), onde  $0^\circ$  corresponde à direção principal um (1) e  $90^\circ$  corresponde à direção principal dois (2). O número de corpos-de-prova ensaiados para o ângulo de inclinação considerado foi doze (12). Com os 12 valores da tensão de ruptura obteve-se apenas um valor médio ( $\sigma_\theta$ ) que condiciona as características mecânicas do material para a determinada situação.

#### 4.5 Ensaio de Compressão Biaxial

Conforme explicitado anteriormente, tem-se a equação geral para materiais anisotrópicos, que através das considerações de simetria e do modelo ortotrópico e desenvolvida para o caso bidimensional 1-2, apresenta a seguinte forma:

$$F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (4.5.1)$$

Pode-se obter os valores de  $F_i$  e  $F_{ij}$  através da aplicação do critério de resistência (Equação 3.5.8) mostrados na Tabela 1. Observa-se que os valores de  $f_{ii}$ ,  $f_{ci}$  e  $f_{v4}$  são as tensões de ruptura nas direções 1 e 2 da peça, obtidas nos ensaios uniaxiais de tração, compressão e cisalhamento.

Nota-se que, no ensaio de compressão biaxial, o fator  $F_{12}$  pode ser isolado na Equação 4.5.1 e sua obtenção é direta, pois as tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  estão agindo simultaneamente na peça.

Os índices 1 e 2 correspondem às direções principais da peça, respectivamente, paralela e perpendicular à direção das fibras da madeira.

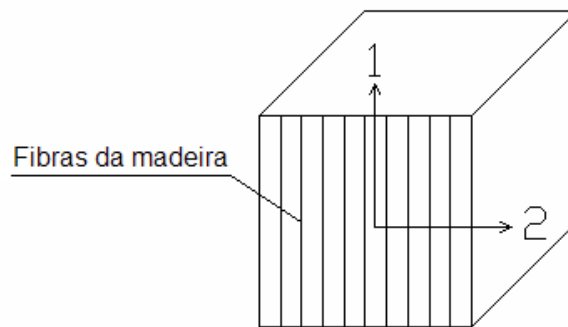


FIGURA 38 - Direções principais da peça de madeira.

A escolha do arranjo para o ensaio de compressão biaxial foi devido à dificuldade de se elaborar dispositivos de fixação da peça de madeira para as situações de tração na peça, sendo mais simples e mais econômico comprimir a peça de madeira através

de uma máquina uniaxial de compressão, junto com um alicate de compressão desenvolvido para este fim.

O alicate de compressão atua na direção perpendicular (2) às fibras de crescimento da madeira, enquanto que na direção paralela (1) às fibras a força de compressão foi aplicada pela máquina de ensaio universal EMIC, de 300 kN de capacidade.

Na Figura 39, pode-se observar o modelo de corpo-de-prova utilizado nos ensaios de compressão biaxial e já confeccionado para o ensaio de compressão biaxial. Nas Figuras 42 e 43 tem-se o ensaio de compressão biaxial.

As Figuras 40 e 41 mostram o equipamento de compressão axial (alicate) desenvolvido para o ensaio biaxial de compressão e construído pelo Centro de Tecnologia (CT) da UNICAMP. Neste ensaio foi utilizada uma máquina de ensaio universal MOHR-FEDERHAFF com capacidade de 400 kN.

O alicate foi confeccionado com o aço CGR SAE 1045 com espessura de 2" e tensão de escoamento de 310 MPa.

Para a aplicação da carga na máquina de compressão transversal (alicate) foi utilizado um cilindro ENERPAC DESF C101, calibrado pela célula de carga HBM Typ z12, #H0748, certificado INMETRO/DIMCI 1064/2002. O cilindro foi posicionado entre as hastes maiores do alicate, aplicando uma força na tentativa de abri-lo (Figuras 41 e 43). Desse modo, houve transferência de esforços para o ponto de contato entre o alicate e a madeira.

Para o sistema de aquisição dos dados da máquina de compressão foi utilizada uma ponte HBM 6 canais, amplificador nº 22648, indicador nº 98860 para o cilindro ENERPAC e uma ponte HBM DK 8, canal 11 para a célula de carga HBM.

Apresentadas as descrições técnicas dos equipamentos para a realização do ensaio de compressão biaxial, segue o procedimento e a atuação em conjunto desses equipamentos:

- Com a máquina de compressão axial (alicate) fixou-se uma carga de compressão no corpo-de-prova de madeira (cubo de 4 cm de aresta), sem atingir a ruptura nesta direção;
- Aplicou-se o carregamento com a máquina universal de ensaios até atingir a ruptura, determinando o par de tensões ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ) que o corpo-de-prova suportou;
- Com os vários pares de tensões obtidos no ensaio construiu-se o gráfico com os pontos no gráfico  $\sigma_1 \times \sigma_2$ , verificando a hipótese do critério de resistência.
- Ao todo foram ensaiados 32 corpos-de-prova da madeira pinus e 62 corpos-de-prova da madeira Cupiúba.

Para a aplicação da carga de compressão no equipamento de compressão (alicate) foi utilizado um macaco hidráulico. Foram utilizados oito extensômetros elétricos (KFG-5-120-C1-11 da KYOWA) no equipamento de compressão axial, adotando um sistema de ponte completa dupla. De acordo com a deformação do equipamento sob aplicação de carga, pode-se medir a força de compressão aplicada.

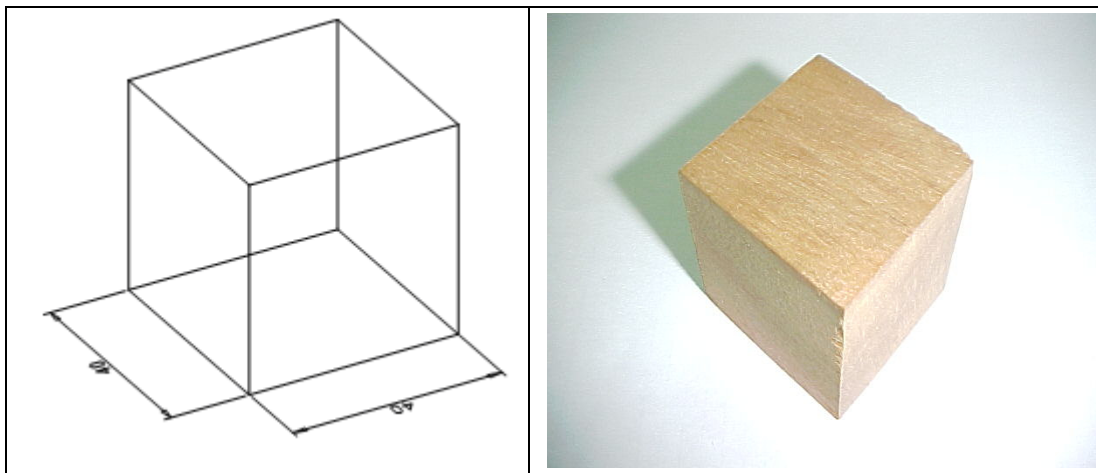
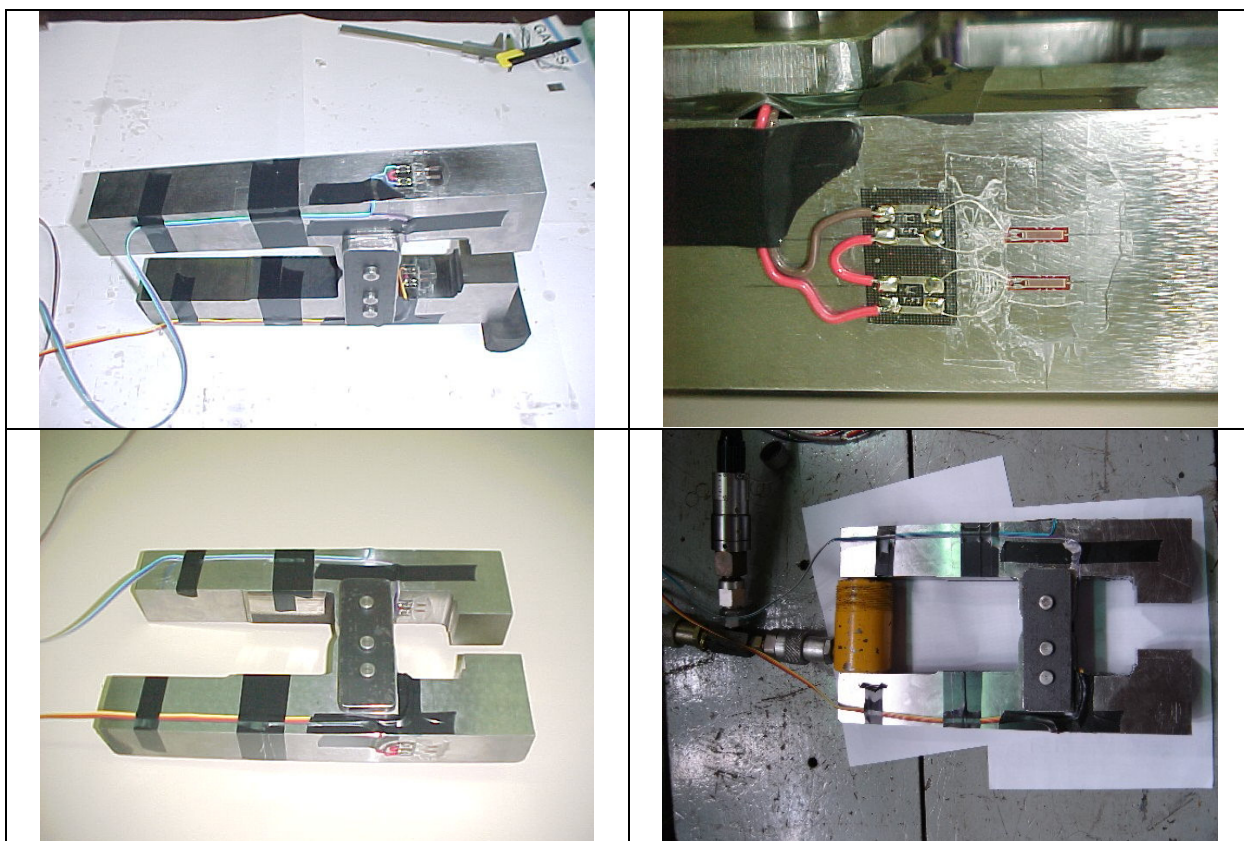
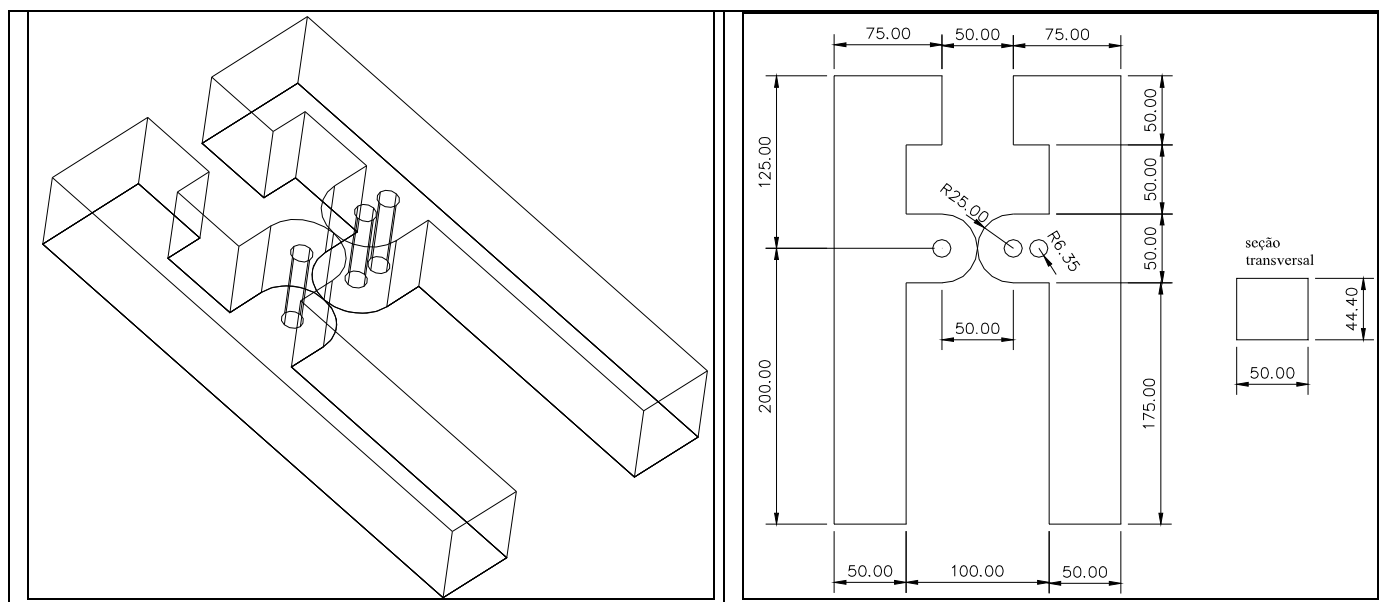


FIGURA 39 – Modelo de corpo-de-prova para ensaio de compressão biaxial - cubo com 4cm de aresta.





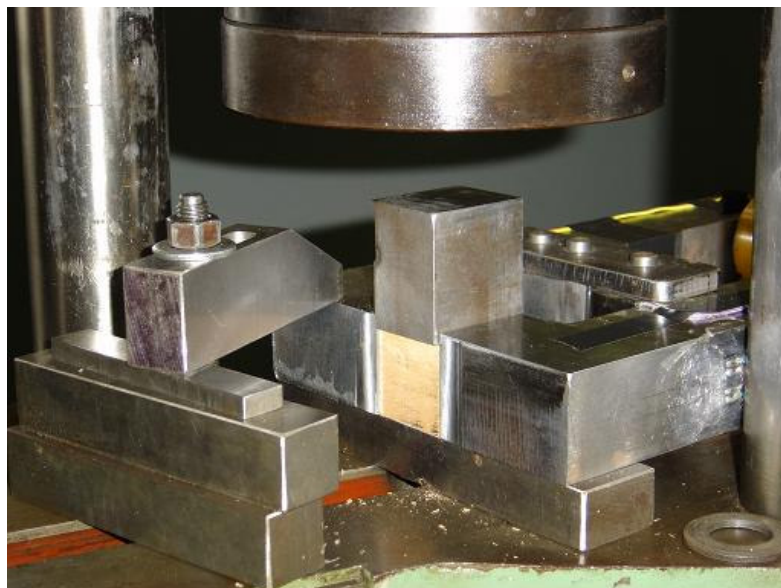


FIGURA 42 - Ensaio de compressão biaxial.

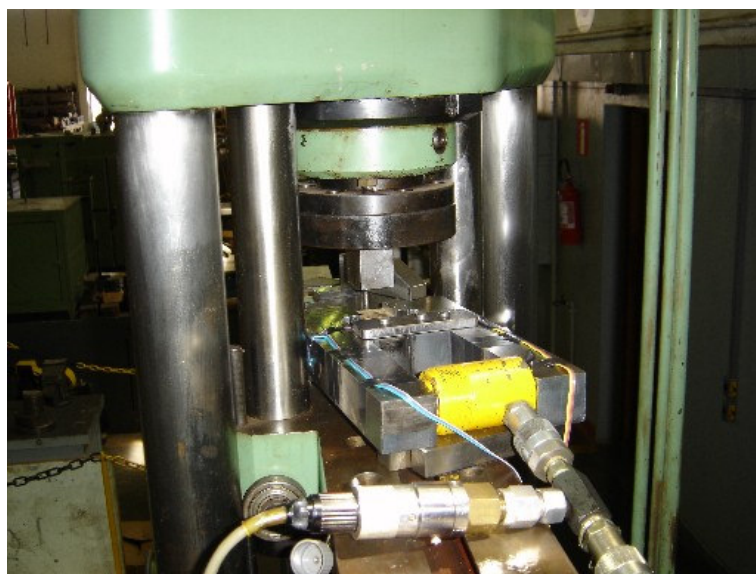


FIGURA 43 – Ensaio de compressão biaxial.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os valores médios das resistências à tração e à compressão, a variação dos ensaios, assim como o módulo de elasticidade, são apresentados na Tabela 6:

Tabela 6-Resistências médias à tração compressão e módulo de elasticidade da madeira Cupiúba.

Ângulo (Graus)	Variação Ensaio Tração (MPa)	Resistência à Tração ( $f_t$ ) (MPa)	Variação Ensaio Compressão (MPa)	Resistência à Compressão ( $f_c$ ) (MPa)	Módulo de Elasticidade ( $E_c$ ) (MPa)
0	93,58 (máx)	72,90	65,91 (máx)	58,06	15188
	51,55 (min)		52,62 (min)		
15	39,95 (máx)	28,51	50,76 (máx)	39,10	4741
	22,61 (min)		30,53 (min)		
30	19,77 (máx)	13,03	25,74 (máx)	22,01	2678
	6,17 (min)		16,18 (min)		
45	12,41 (máx)	7,23	23,36 (máx)	20,59	742
	4,08 (min)		17,28 (min)		
60	11,17 (máx)	6,17	30,67 (máx)	26,68	-
	2,54 (min)		23,62 (min)		
75	9,47 (máx)	5,29	39,81 (máx)	33,55	-
	1,79 (min)		29,28 (min)		
90	8,31 (máx)	4,65	23,43 (máx)	20,09	649
	2,01 (min)		16,16 (min)		

Observa-se que para os valores de resistência à compressão para os ângulos de inclinação das fibras à 60° e 75°, os valores correspondentes deveriam diminuir em função do ângulo de inclinação das fibras, assim esses valores foram descartados, pois prejudicariam as análises dos resultados.

Observa-se, também, que os valores do módulo de elasticidade foram determinados quando da realização dos ensaios de resistência.

O valor médio de resistência ao cisalhamento obtido foi de 19,75 MPa. Conforme mencionado anteriormente, as direções principais 1 e 2, tanto para o caso de tração quanto de compressão, são dadas pela Tabela 7, juntamente com o valor de cisalhamento ( $f_{v4} = f_{44}$ ) que será utilizado para o cálculo de  $F_{44}$   $\left( F_{44} = \frac{1}{f_{v4}^2} \right)$ .

Tabela 7 - Resistências à tração, compressão e cisalhamento.

<b>Resistência</b>	<b>MPa</b>
$f_{t0} = f_{t1}$	72,90
$f_{t90} = f_{t2}$	4,65
$f_{c0} = f_{c1}$	58,06
$f_{c90} = f_{c2}$	20,09
$f_{v4} = f_{44}$	19,75

Com os resultados de resistência da Tabela 7, obtidos nos ensaios de tração, compressão e cisalhamento, foram determinados os parâmetros de resistência do critério de TSAI e WU (1971) e também os valores máximos e mínimos de  $F_{12}$  determinados a partir da Equação (3.5.10). Os valores seguem na Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros de Tsai-Wu e valores limites de  $F_{12}$  da madeira Cupiúba.

<b>Parâmetro</b>	<b>Expressão</b>	<b>Valor</b>
$F_1$	$\frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}}$	$-3,5061 \cdot 10^{-3} MPa^{-1}$
$F_2$	$\frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}}$	$1,6528 \cdot 10^{-1} MPa^{-1}$
$F_{11}$	$\frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1}}$	$2,3626 \cdot 10^{-4} MPa^{-2}$
$F_{22}$	$\frac{1}{f_{t2} \cdot f_{c2}}$	$1,0705 \cdot 10^{-2} MPa^{-2}$
$F_{44}$	$F_{44} = \frac{1}{f_{v4}^2}$	$2,5637 \cdot 10^{-3} MPa^{-2}$
$F_{12}$	$\pm \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}}$	$\pm 1,5903 \cdot 10^{-3} MPa^{-2}$

## 5.1 Análise dos ensaios de tração

Com os valores obtidos na Tabela 8 e substituindo-os na Equação (3.6.1) para o estado plano (1-2), ou seja, com as fibras paralelas ao eixo de aplicação da carga, tem-se:

$$-\frac{1}{285,214} \cdot \sigma_1 + \frac{1}{6,050} \cdot \sigma_2 + \frac{1}{4232,57} \cdot \sigma_1^2 + \frac{1}{93,4185} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \frac{1}{390,063} \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (5.1.1)$$

A Equação (5.1.1) representa um elipsóide e, para valores de  $F_{12}$  maiores, em módulo, que os limites, a superfície de ruptura torna-se uma superfície aberta. Ao assumir  $F_{12}$  igual a zero e que o termo  $\sigma_4$  permaneça constante, por exemplo, a Equação (5.1.1) leva ao seguinte gráfico:

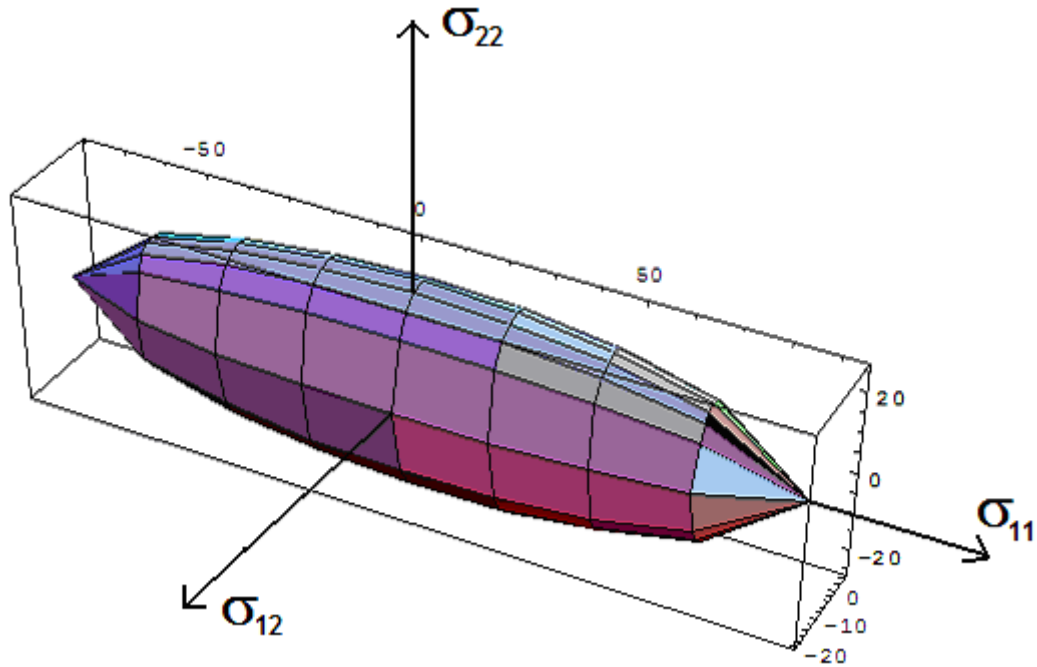


FIGURA 44 – Superfície de ruptura (elipsóide) do critério de Tsai-Wu com  $F_{12} = 0$ .

A Figura 44 comprova que o critério para materiais anisotrópicos pode resultar em uma superfície fechada dependendo dos valores obtidos em ensaios.

Ao se comparar os resultados dos ensaios, em relação aos ângulos das fibras, com a fórmula de Hankinson:

$$\sigma_{\theta} = \frac{f_0 \cdot f_{90}}{f_0 \cdot \sin^n \theta + f_{90} \cdot \cos^n \theta} \quad (5.2.2)$$

Adotando-se  $n=1,5$ ;  $n=2,0$  e  $n=2,5$  e onde  $\theta$  é o ângulo de inclinação das fibras, obteve-se o seguinte gráfico para os corpos-de-prova de tração:

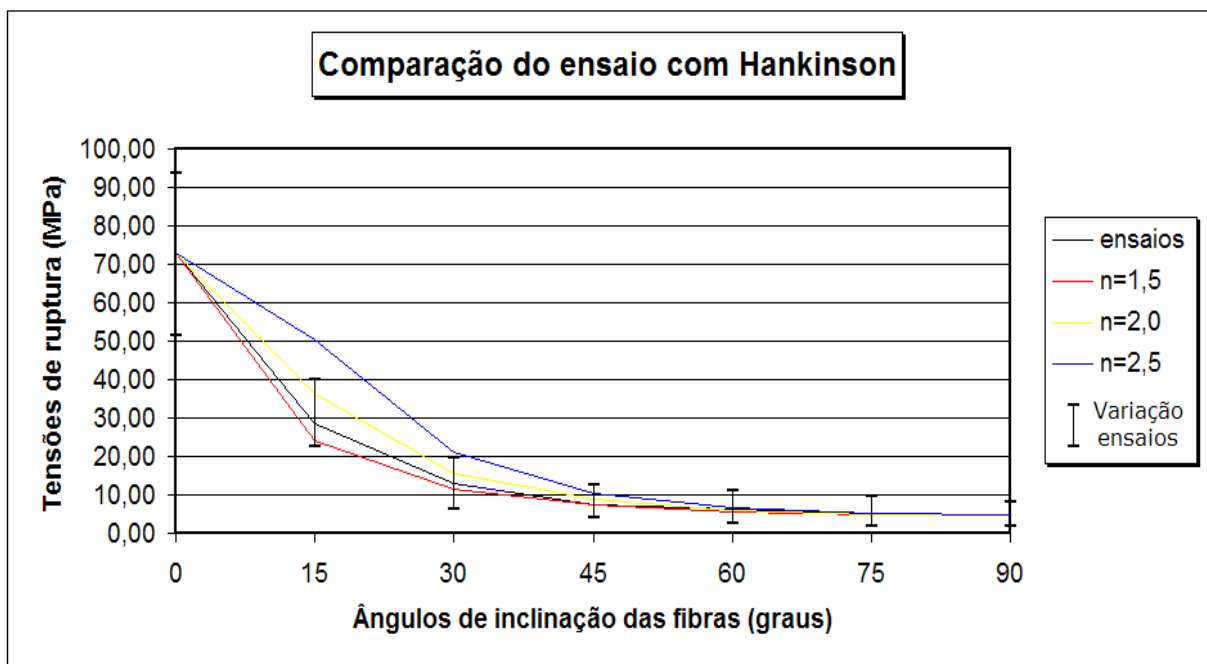


FIGURA 45 -Comparação do ensaio com Hankinson em relação aos ângulos.

Os valores do expoente  $n$  da fórmula de Hankinson foram escolhidos baseados em indicações de normas como o Eurocode e pesquisadores, entre os quais NICOLAS (2006).

Na Figura 45 pode-se observar a grande variação de resistência conforme se diminui o ângulo de inclinação das fibras. Para ângulos acima de  $30^\circ$  não há variação significativa de resistência. Para ângulos abaixo de  $30^\circ$  ocorrem grandes diferenças entre as estimativas da fórmula de Hankinson, considerando os diversos expoentes. Os valores dos ensaios aproximam-se dos valores de Hankinson com  $n=1,5$  e  $n=2,0$ .

Para obter a equação do critério de TSAI e WU (1971) basta substituir:  $\sigma_1 = \sigma_\theta \cdot \cos^2 \theta$ ;  $\sigma_2 = \sigma_\theta \cdot \sin^2 \theta$  e  $\sigma_4 = \sigma_\theta \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$  na Equação (5.1.1):

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{285,214} \cdot \sigma_\theta \cdot \cos^2 \theta \right] + \left[ \frac{1}{6,050} \cdot \sigma_\theta \cdot \sin^2 \theta \right] + \left[ \frac{1}{4232,57} \cdot (\sigma_\theta \cdot \cos^2 \theta)^2 \right] + \\ & + \left[ \frac{1}{93,4185} \cdot (\sigma_\theta \cdot \sin^2 \theta) \right] + \left[ 2F_{12} \cdot \sigma_\theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \sigma_\theta \cdot \sin^2 \theta \right] + \left[ \frac{1}{390,063} \cdot \sigma_\theta \cdot \sin \theta \cdot \sigma_\theta \cdot \cos \theta \right] = 1 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Pela Equação (5.1.3) pode-se calcular os valores de  $F_{12}$  substituindo os valores das tensões de ruptura ( $\sigma_\theta$ ) para cada ângulo de inclinação, ou pode-se fixar os valores limites de  $F_{12}$  e achar os valores das tensões de ruptura ( $\sigma_\theta$ ) para cada ângulo de inclinação e compará-los com os valores obtidos nos ensaios de tração. Para esta última situação foi obtido o seguinte gráfico:

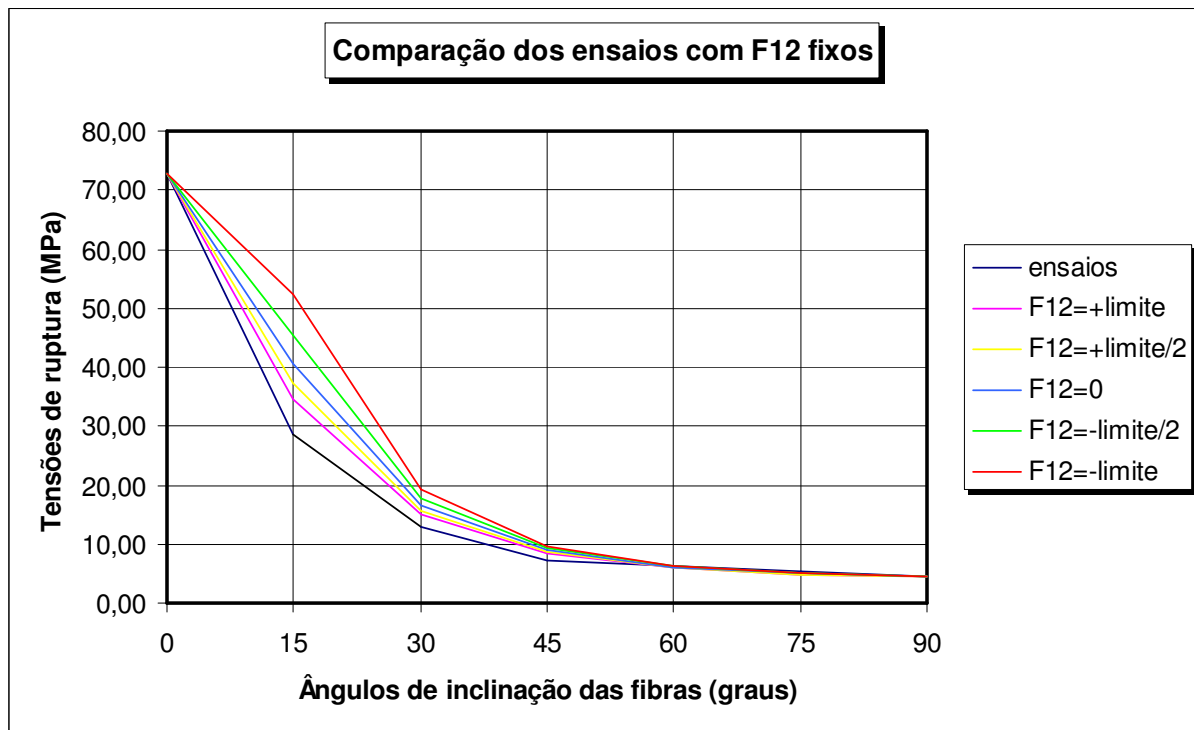


FIGURA 46 - Comparação do critério de Tsai-Wu com ensaios fixando  $F_{12}$ .

Na Figura 46 verifica-se que os valores mais próximos dos ensaios foram obtidos quando fixamos  $F_{12} = +$  limite na Equação (5.1.3) e encontram-se as tensões de ruptura ( $\sigma_{\theta}$ ) para cada ângulo de inclinação. Neste gráfico observa-se que os valores dos ensaios de tração uniaxial ficaram abaixo das estimativas do critério de resistência de Tsai-Wu.

Comparando-se os valores dos ensaios com os valores mais próximos obtidos da fórmula de Hankinson para  $n=1,5$  e do critério de resistência de Tsai-Wu com  $F_{12} = +$  limite, obteve-se o seguinte gráfico:



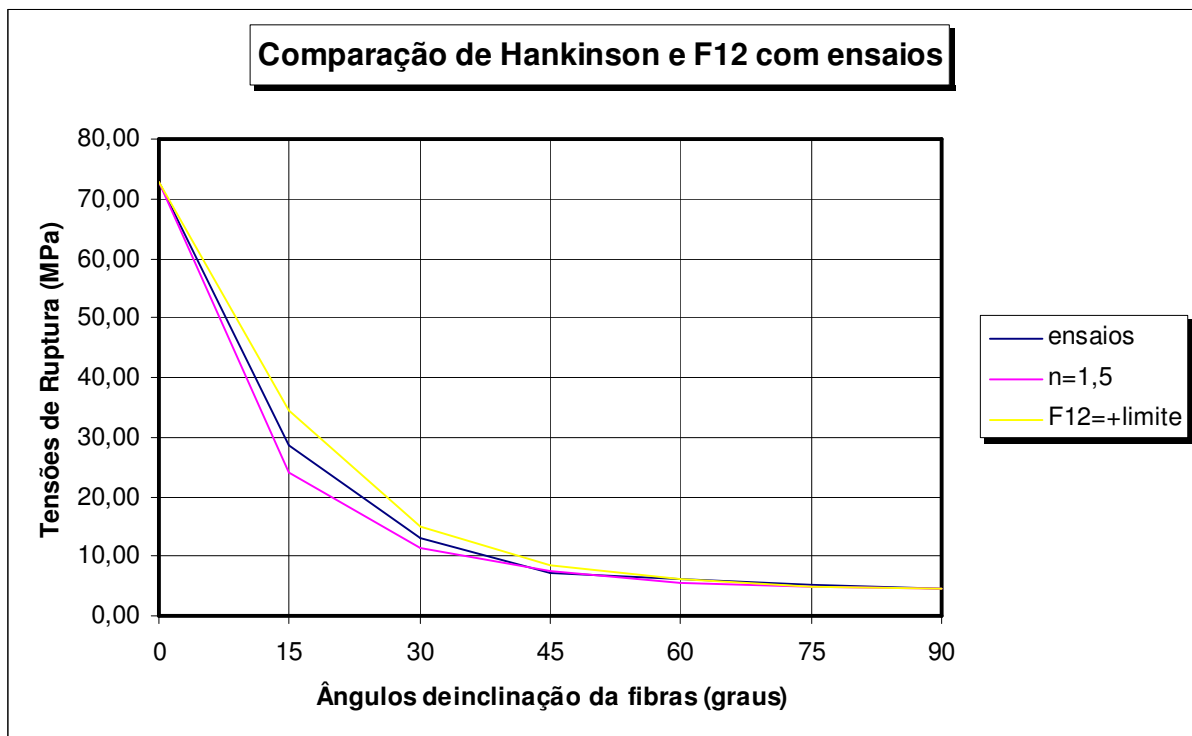


FIGURA 47 – Comparação de Hankinson e  $F_{12}$  com os valores dos ensaios.

A Figura 47 apresenta as melhores estimativas em relação aos ensaios realizados, verificando uma grande proximidade das análises teóricas com a análise prática.

## 5.2 Análise dos ensaios de compressão

Para os ensaios de compressão foram feitas as mesmas considerações dos ensaios de tração. Deve-se apenas, manipulando a Equação (5.1.3), substituir  $\sigma_\theta$  por  $-\sigma_\theta$  pelo fato de se trabalhar com ensaios de compressão. Os valores da tensão de ruptura para os ângulos de  $60^\circ$  e  $75^\circ$  apresentaram valores maiores que o maior valor obtido na compressão do corpo-de-prova à  $0^\circ$  e por este motivo foram descartados, pois só prejudicariam a análise do conjunto.

Na análise dos ensaios de compressão utilizou-se o mesmo procedimento, comparando, primeiramente com Hankinson para valores do expoente  $n$  variando entre 1.5, 2.0 e 2.5. Pode-se, pela Figura 48, verificar estes resultados:

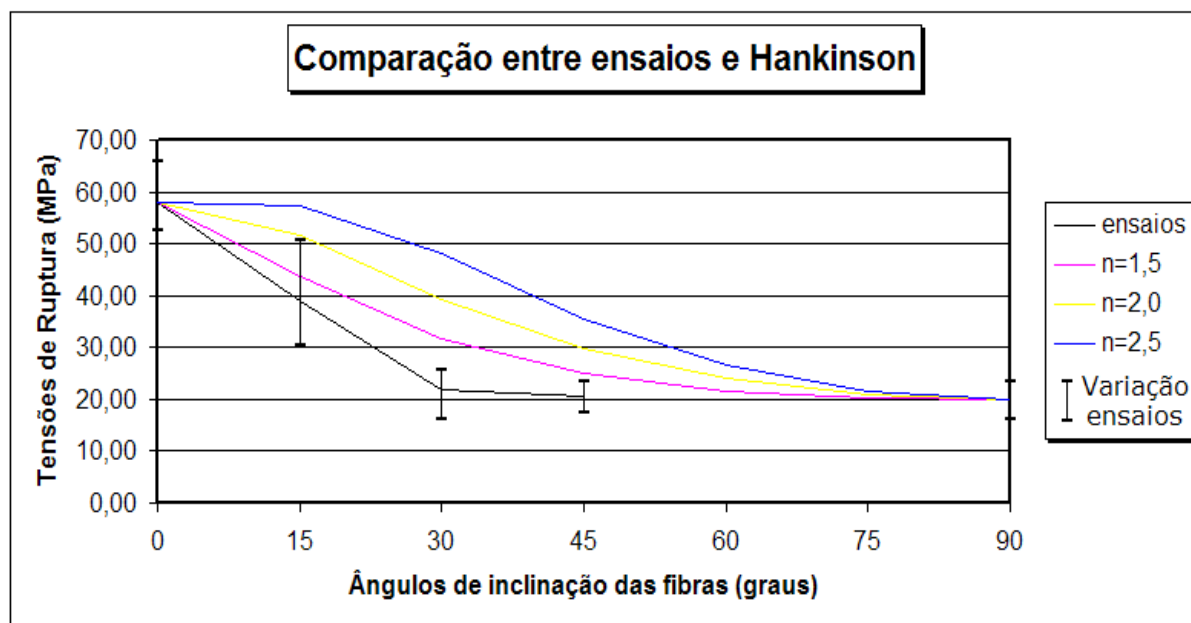


FIGURA 48 - Comparação de Hankinson com os ensaios.

Para ângulos abaixo de  $45^{\circ}$  observam-se grandes variações dos valores obtidos por Hankinson em relação aos ensaios de compressão. Para os ângulos acima de  $45^{\circ}$  apenas pode-se analisar as tensões de ruptura para o ângulo de  $90^{\circ}$ , pois, as tensões de ruptura dos ângulos de  $60^{\circ}$  e  $75^{\circ}$  foram descartadas. Neste gráfico, os valores de Hankinson que mais se aproximam dos valores dos ensaios referem-se àqueles obtidos com o expoente  $n=1,5$ .

Os valores dos ensaios foram comparados com os valores obtidos pelo critério de resistência de Tsai-Wu. Também se utilizou o mesmo procedimento feito para os ensaios de tração. Na Equação 5.1.3 basta substituir  $\sigma_{\theta}$  por  $-\sigma_{\theta}$  e fixar, para  $F_{12}$ , seus valores limites, obtendo assim o seguinte gráfico:

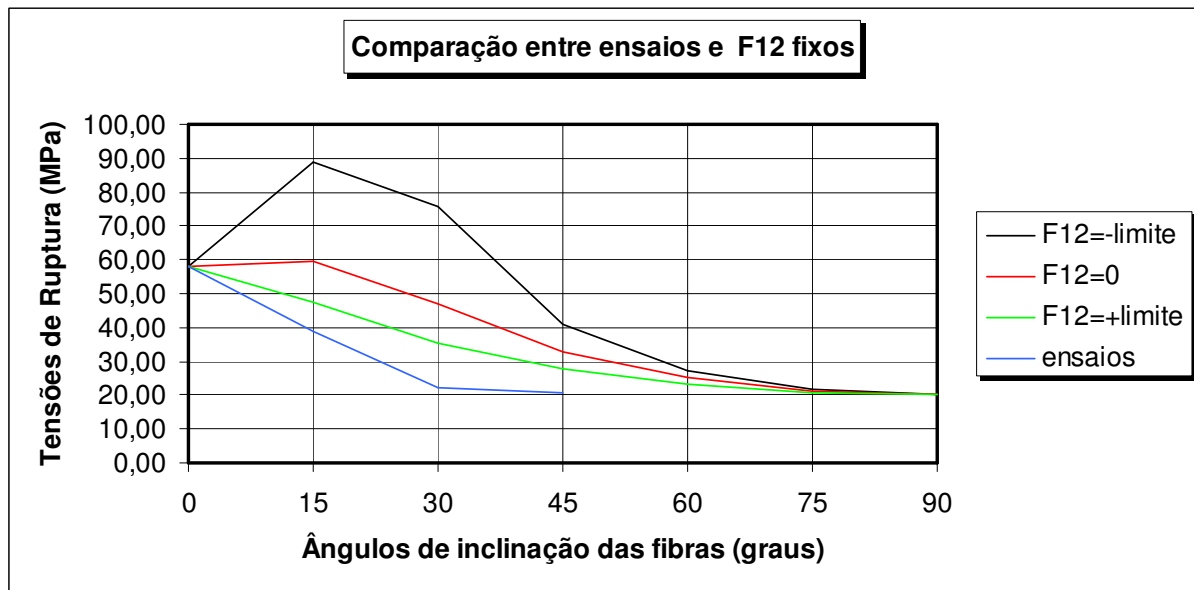


FIGURA 49 – Comparação do critério de Tsai-Wu com ensaios fixando  $F_{12}$ .

Observa-se uma grande dispersão dos resultados para os ângulos inferiores à  $45^{\circ}$ , principalmente quando  $F_{12} = -$  limite, fato que não ocorre para o ângulo de  $90^{\circ}$ . Nos ângulos de  $15^{\circ}$  e  $30^{\circ}$ , para  $F_{12} = -$  limite, os resultados apresentaram valores maiores que para o ângulo de  $0^{\circ}$ , evidenciando um valor discrepante, pois a expectativa para estes ângulos eram para valores menores que os valores obtidos em  $0^{\circ}$ . Os valores que mais se aproximam dos ensaios realizados, em geral para todos os ângulos, foram obtidos quando fixou-se  $F_{12} = +$  limite na Equação (5.1.3) e encontraram-se as respectivas tensões de ruptura ( $\sigma_{\theta}$ ), mesmo assim esses valores não estão de acordo com os ensaios.

Comparando-se os valores dos ensaios com os valores mais próximos obtidos da fórmula de Hankinson para  $n=1,5$  e do critério de resistência de Tsai-Wu com  $F_{12} = +$  limite, obteve-se o seguinte gráfico:

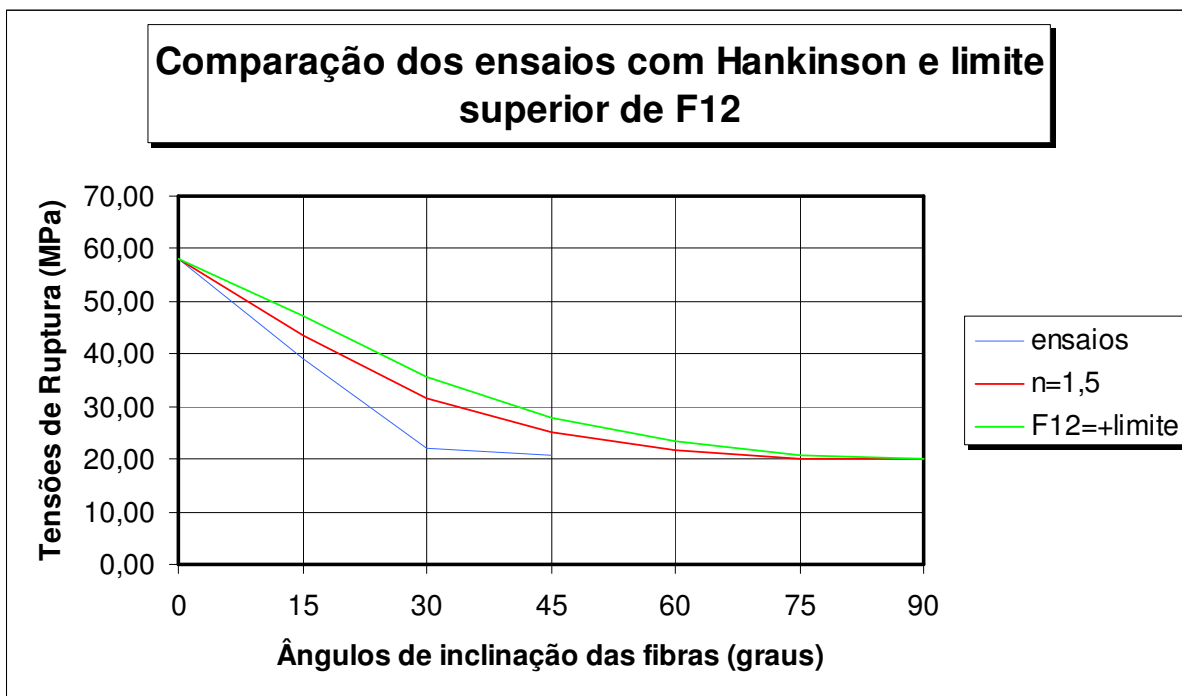


FIGURA 50 - Comparação de Hankinson e  $F_{12} = +$  limite com os valores dos ensaios.

Diferentemente das estimativas de resistência à tração, as de compressão apresentaram maiores dispersões dos resultados para os valores de coeficiente de interação  $F_{12} = +$  limite e para  $n=1,5$ .

Tanto na estimativa de resistência à tração quanto à compressão, as estimativas que mais se aproximaram foram as de Hankinson ( $n = 1,5$ ) e Tsai-Wu ( $F_{12} = +$ limite). Sendo que os ensaios de tração apresentaram maior regularidade ou homogeneidade.

### 5.3 Análise dos ensaios biaxiais de compressão

A partir de ensaios uniaxiais de compressão das espécies de madeira estudadas (*Pinus elliottii* e *Goupia glabra*) serão apresentados seus respectivos resultados.

Para o cálculo das outras resistências da espécie *Pinus elliottii*, a partir da resistência à compressão, foram obtidas de acordo com relações fornecidas pela NBR 7190 para valores característicos.

$$f_{c1} = f_{co} = 32,0 \text{ MPa}$$

O valor de  $f_{t0}$  foi obtido da seguinte relação, baseada na NBR 7190:

$$\frac{f_{c0}}{f_{t0}} = 0,77$$

Logo:

$$f_{t0} = f_{t1} = \frac{f_{c0}}{0,77} = \frac{32,0}{0,77} = 41,56 \text{ MPa}$$

O valor  $f_{c90}$  foi obtido da seguinte relação, baseada na NBR 7190:

$$\frac{f_{c90}}{f_{c0}} = 0,25$$

Logo:

$$f_{c90} = f_{c2} = 32,0 \times 0,25 = 8,0 \text{ MPa}$$

Os valores de  $f_{t90}$  e  $f_v$  foram obtidos da tabela E.3 – Valores médios de madeira coníferas nativa e reflorestamento – considerando a espécie estudada (*Pinus elliottii*), logo tem-se:

$$f_{t90} = f_{t2} = 2,5 \text{ MPa} ;$$

$$f_v = f_{v4} = 4,8 \text{ MPa} ;$$

Assim, tem-se a seguinte tabela correspondente às resistências características:

Tabela 9 - Resistências à tração, compressão e cisalhamento da madeira Pinus.

Resistência	MPa
$f_{c1}$	32,0
$f_{t1}$	41,56
$f_{c2}$	8,0
$f_{t2}$	2,50
$f_{v4}$	4,80

Com os valores das resistências características da Tabela 9, calculam-se os parâmetros de resistência da Tabela 1. Seguem-se os resultados na Tabela 10:

Tabela 10 – Parâmetros de resistência e limites de  $F_{12}$  da madeira Pinus.

Parâmetro	Expressão	Valor
$F_1$	$\frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}}$	$-7,19 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}$
$F_2$	$\frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}}$	$2,75 \times 10^{-1} \text{ MPa}^{-1}$
$F_{11}$	$\frac{1}{f_{t1}} \times \frac{1}{f_{c1}}$	$7,52 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-2}$
$F_{22}$	$\frac{1}{f_{t2}} \times \frac{1}{f_{c2}}$	$5,0 \times 10^{-2} \text{ MPa}^{-2}$
$F_{44}$	$\frac{1}{f_{v4}^2}$	$4,34 \times 10^{-2} \text{ MPa}^{-2}$
Limite de $F_{12}$	$\pm \sqrt{F_{11} \times F_{22}}$	$\pm 6,13 \times 10^{-3} \text{ MPa}^{-2}$

Com os valores da Tabela 10, pode-se substituí-los na Equação (3.6.1) e deixá-la em função apenas das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . A tensão de cisalhamento  $\sigma_4$  é perpendicular ao plano 1-2 e, portanto seu valor será adotado igual à zero. Assim tem-se:

$$\begin{aligned} (-7,19 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (2,75 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (7,52 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (5,0 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (4,34 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Nos ensaios biaxiais de compressão, as tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  apresentam sinais negativos e devem ser considerados na equação.

A seguir, são apresentados os resultados dos ensaios biaxiais de compressão com o cálculo do parâmetro  $F_{12}$ .

Tabela 11 – Resultados do ensaio biaxial de compressão e valores de  $F_{12}$  da madeira Pinus.

CP	Carga Vertical (daN)	Carga no Alicata (daN)	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_2$ (MPa)	$F_{12} (MPa^{-2})$
1	5000	0	-31,25	0,00	-1,00E+12*
2	3850	0	-24,06	0,00	8,40E12*
3	4300	0	-26,88	0,00	9,05E12*
4	0	2550	0,00	-15,94	1,61E12*
5	0	2950	0,00	-18,44	2,09E12*
6	4650	672	-29,06	-4,20	0,00176
7	4950	711	-30,94	-4,44	0,001070
8	4600	711	-28,75	-4,44	0,00159
9	5750	1409	-35,94	-8,81	-0,00267
10	4100	1293	-25,63	-8,08	-0,00174
11	4600	1267	-28,75	-7,92	-0,00173
12	3850	517	-24,06	-3,23	0,00488
13	4400	517	-27,50	-3,23	0,00338
14	4150	517	-25,94	-3,23	0,00402
15	4450	1019	-27,81	-6,37	-0,000166
16	4400	1016	-27,50	-6,35	-0,000104
17	4750	1034	-29,69	-6,46	-0,000486
18	4000	323	-25,00	-2,02	0,00695
19	4450	352	-27,81	-2,20	0,00475
20	4150	336	-25,94	-2,10	0,0061
21	4400	776	-27,50	-4,85	0,00147
22	4200	776	-26,25	-4,85	0,00177
23	4200	776	-26,25	-4,85	0,00177
24	4950	1163	-30,94	-7,27	-0,001300
25	4950	1163	-30,94	-7,27	-0,001300
26	4900	1163	-30,63	-7,27	-0,001280

\* valores descartados \*\*1daN=1kgf

Notam-se variações nos valores do parâmetro  $F_{12}$ , mostrando a grande variabilidade do mesmo. Deve-se observar que na cor lilás estão aplicadas as maiores tensões e que ao se fixar um dos valores das tensões atuantes e variar de 1 a 3 MPa o outro, o parâmetro se mantém negativo. Nos valores em verde e azul percebe-se que ao reduzir a tensão do alicate há uma inversão de sinal de  $F_{12}$ , ficando positivo. Mesmo com as variações observadas do parâmetro das respectivas cores, verifica-se que eles obedecem à condição limite (3.5.10) apresentando uma superfície fechada.

Os valores descartados de  $F_{12}$  apresentaram-se elevados, pois ao se isolar este fator na equação 5.3.1 tem-se a divisão por zero pelo fato das tensões estarem se multiplicando. Assim, caso  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  apresentem o valor zero, o parâmetro  $F_{12}$  crescerá, sendo desconsiderado na análise.

Para uma melhor análise dos resultados, obtiveram-se médias para  $F_{12}$  para cada cor indicada. E que ao substituir esses valores na Equação (5.3.1) obteve-se a equação do critério de resistência de Tsai-Wu. Assim tem-se:

Tabela 12 - Médias dos valores de  $F_{12}$  (Pinus).

<b>Médias de <math>F_{12}</math> (<math>MPa^{-2}</math>)</b>
0,001572
-0,001670
0,005013
-0,000252

Valores limites de  $F_{12}$  para comparação:

Tabela 13 – Valores limites de  $F_{12}$  (Pinus).

<b>Limites de <math>F_{12}</math> (<math>MPa^{-2}</math>)</b>
0,00613
-0,00613

Ao comparar os valores da Tabela 12 com os valores limite da Tabela 13, verifica-se que todos estão dentro do intervalo e, portanto apresentam a equação de uma elipse no plano.

Assim, para cada valor de  $F_{12}$ , serão montadas as seguintes curvas, provenientes da Equação (5.3.1) e que podem observadas na Figura 51:



$$\begin{aligned} &(-7,19 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (2,75 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (7,52 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (5,0 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,001572) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (4,34 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (I - azul) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-7,19 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (2,75 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (7,52 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (5,0 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (-0,001670) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (4,34 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (II - lilás) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-7,19 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (2,75 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (7,52 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (5,0 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,005013) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (4,34 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (III - verde) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-7,19 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (2,75 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (7,52 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (5,0 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (-0,000252) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (4,34 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (IV - amarelo) \end{aligned}$$

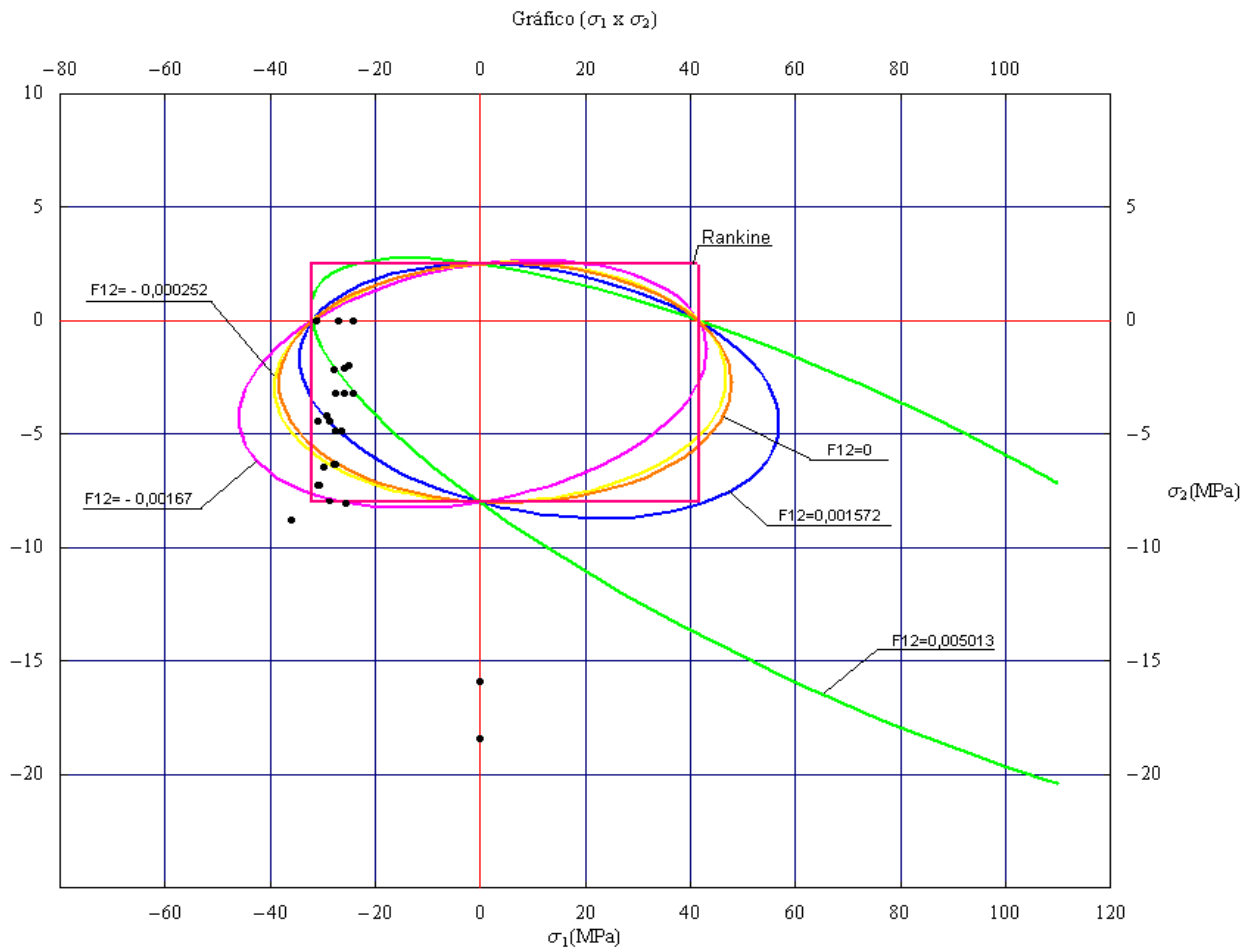


FIGURA 51 – Curvas provenientes da Equação 5.3.1 com valores de  $F_{12}$ .

Para a análise da espécie *Goupia glabra*, foram considerados os resultados dos ensaios uniaxiais mostrados no item 5. As Tabelas 7 e 8 mostram respectivamente os valores das resistências à tração, compressão e cisalhamento e os valores dos parâmetros de resistência de Tsai-Wu. O procedimento utilizado será similar ao da Pinus.

A partir dos valores da Tabela 8, pode-se substituí-los na Equação (3.6.1) e deixá-la em função apenas das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . A tensão de cisalhamento  $\sigma_4$  é perpendicular ao plano 1-2 e, portanto seu valor será adotado igual à zero. Assim tem-se:

$$\begin{aligned} & (-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ & + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Nos ensaios biaxiais de compressão, as tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  apresentam sinais negativos e devem ser considerados na equação.

A seguir, são apresentados os resultados dos ensaios biaxiais de compressão com o cálculo do parâmetro  $F_{12}$ .

Tabela 14 – Resultados do ensaio biaxial de compressão e valores de  $F_{12}$  da madeira Cupiúba.

CP	$\sigma_1$ (MPa)	$\sigma_2$ (MPa)	$F_{12}$ (Mpá <sup>2</sup> )
1	-64,69	-4,79	5,33E-04
2	-61,06	-4,37	7,92E-04
3	-58,75	-9,64	5,09E-04
4	-60,00	-13,66	1,22E-04
5	-61,88	-9,24	4,30E-04
6	-64,69	-13,66	2,53E-05
7	-63,44	-14,79	-3,75E-05
8	-61,56	-13,82	7,55E-05
9	-57,50	-13,18	2,22E-04
10	-59,06	-16,07	-7,35E-05
11	-59,38	-17,36	-1,93E-04
12	-64,06	-18,80	-3,61E-04
13	-63,44	-20,41	-4,86E-04
14	-63,13	-20,09	-4,58E-04
15	-9,64	-18,75	7,75E-04
16	-10,45	-16,56	2,14E-03
17	-11,09	-15,63	2,60E-03
18	-19,93	-17,19	7,51E-04
19	-20,25	-14,38	1,71E-03
20	-18,76	-14,69	1,76E-03
21	-29,73	-15,00	8,50E-04
22	-30,05	-18,13	1,46E-04
23	-28,29	-17,19	4,01E-04
24	-38,65	-17,19	1,43E-04
25	-38,28	-16,25	3,04E-04
26	-37,98	-18,13	2,96E-06
27	-46,93	-14,38	3,54E-04
28	-46,88	-16,56	7,59E-05
29	-48,86	-18,13	-1,45E-04
30	-56,89	-13,75	1,82E-04
31	-57,70	-14,38	1,05E-04
32	-58,18	-15,31	9,88E-06
33	-35,36	-15,00	6,14E-04
34	-36,32	-18,13	2,96E-05
35	-37,49	-13,13	8,75E-04
36	-56,80	-15,63	3,85E-06
37	-56,25	-18,75	-2,89E-04
38	-56,25	-14,69	1,05E-04
39	-28,45	-18,13	1,81E-04
40	-29,31	-14,38	1,02E-03
41	-28,93	-14,69	9,63E-04
42	-64,69	-13,66	2,53E-05
43	-63,13	-13,93	3,54E-05
44	-57,50	0,00	1,48E+04
45	-60,63	0,00	-6,70E+04
46	-59,06	0,00	-2,66E+05
47	0,00	-17,19	1,97E+06
48	0,00	-16,56	2,42E+05
49	0,00	-17,50	1,76E+06
50	-61,25	-13,50	1,08E-04
51	-60,94	-19,29	-3,77E-04
52	-55,31	-10,93	5,05E-04
53	-60,00	-13,18	1,63E-04
54	-59,38	-12,70	2,20E-04
55	-60,63	-8,87	5,05E-04
56	-55,00	-6,25	1,03E-03
57	-47,89	-14,38	3,29E-04
58	-46,96	-16,38	9,72E-05
59	-47,17	-13,75	4,30E-04
60	-19,45	-13,75	2,04E-03
61	-19,29	-17,81	5,72E-04
62	-20,48	-15,63	1,25E-03

Notam-se variações nos valores do parâmetro  $F_{12}$ , mostrando a grande variabilidade do mesmo. Deve-se observar que os valores positivos do parâmetro apresentam valores relativamente altos para  $\sigma_1$  e variados para a tensão  $\sigma_2$ . Ao se diminuir o valor de  $\sigma_1$  e aumentar o valor de  $\sigma_2$  o parâmetro  $F_{12}$  apresenta valores fora do intervalo que garante a superfície de ruptura fechada. Ao se manterem altos os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  o sinal do parâmetro se inverte passando a ficar negativo.

Os valores destacados em vermelho apresentaram-se elevados, pois ao se isolar fator  $F_{12}$  na Equação 5.3.2 tem-se a divisão por zero pelo fato das tensões estarem se multiplicando. Assim, caso  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  apresentem o valor zero, o parâmetro  $F_{12}$  crescerá, sendo desconsiderado na análise.

Para uma melhor análise dos resultados, obtiveram-se médias para  $F_{12}$  para cada cor indicada. E que ao substituir esses valores na Equação (5.3.2) obteve-se a equação do critério de resistência de Tsai-Wu. Assim tem-se:

Tabela 15 - Médias dos valores de  $F_{12}$  (Cupiúba).

<b>Médias de <math>F_{12}</math> (<math>MPa^{-2}</math>)</b>
0,000486
0,000803
0,000192
-0,000056
0,000026
0,000097
-0,000330
0,001692
0

Valores limites de  $F_{12}$  para comparação:

Tabela 16 – Valores Limites de  $F_{12}$  (Cupiúba).

<b>Limites de <math>F_{12}</math> (<math>MPa^{-2}</math>)</b>
0,00159
-0,00159

Ao comparar os valores da Tabela 15 com os valores limites da Tabela 16, verifica-se que apenas o valor  $1,692 \times 10^{-3}$  esta fora do intervalo, evidenciando provável superfície de ruptura aberta.

Assim, para cada valor de  $F_{12}$ , serão montadas as seguintes curvas, provenientes da Equação (5.3.2) e que podem observadas na Figura 52:

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,000486) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (I - \text{preto}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,000803) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (II - \text{azul}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,000192) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (III - \text{marrom}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (-0,000056) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (IV - \text{amarelo}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,000026) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (V - \text{laranja}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,000097) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (VI - \text{verde escuro}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (-0,000330) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (VII - \text{lilás}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + \\ &+ 2 \cdot (0,001692) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (VIII - \text{azul claro}) \end{aligned}$$

$$(-3,51 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_1 + (1,65 \times 10^{-1}) \cdot \sigma_2 + (2,36 \times 10^{-4}) \cdot \sigma_1^2 + (1,07 \times 10^{-2}) \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot (0) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + (2,56 \times 10^{-3}) \cdot \sigma_4^2 = 1 \quad (IX - \text{vermelho})$$

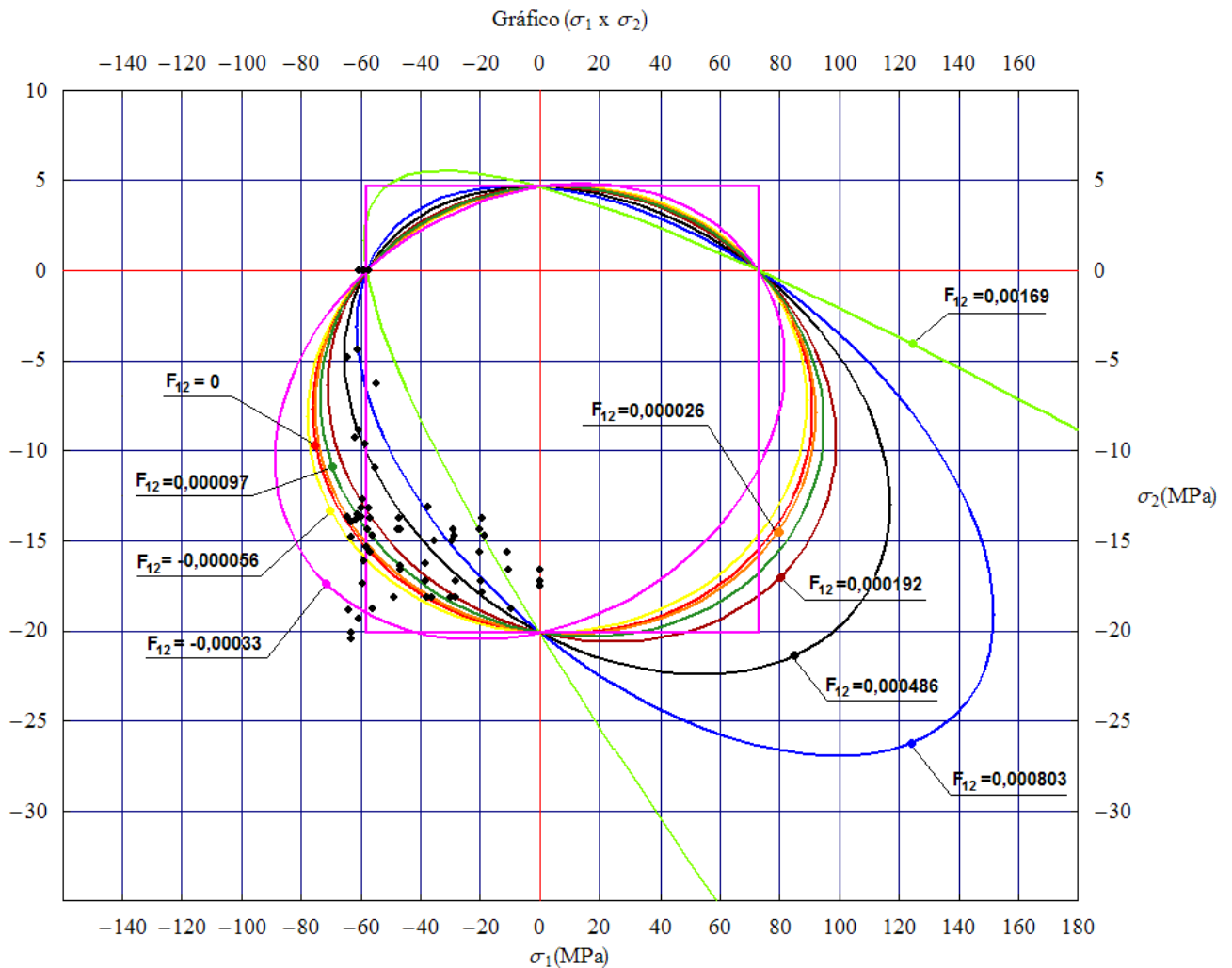


FIGURA 52 – Curvas provenientes da Equação 5.3.2 com valores de  $F_{12}$ .

Considerando a média dos valores positivos e negativos para  $F_{12}$  e também o valor zero (Figura 53).

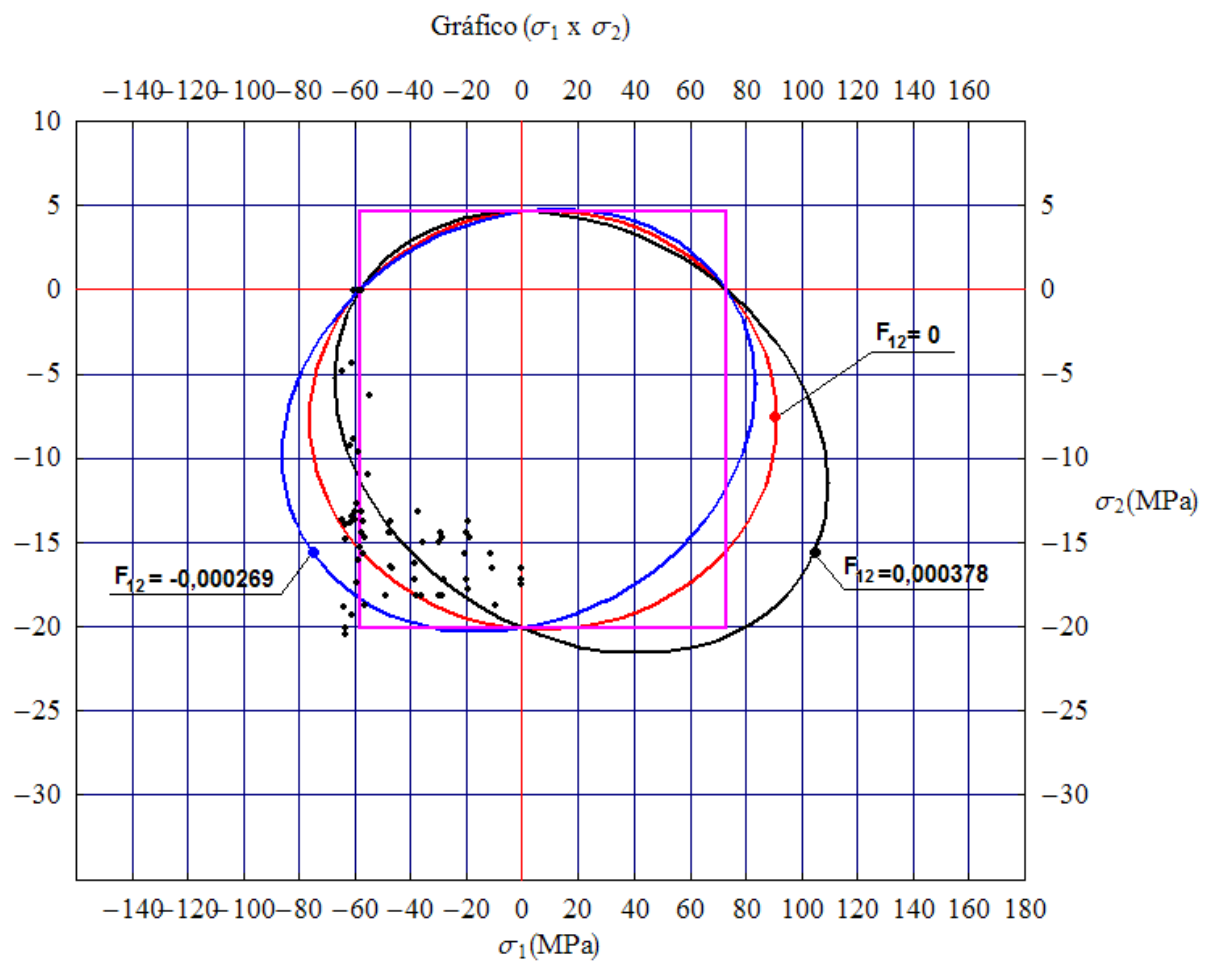


FIGURA 53 – Valores de  $F_{12}$  médios.

## 6 MODELAGEM NUMÉRICA DO CORPO-DE-PROVA UTILIZANDO O SOFTWARE SAP2000.

Nessa modelagem foi considerada a madeira da espécie *Pinus elliottii* com as seguintes propriedades, de acordo com IPT (2003):

- **Propriedades Físicas:** *densidade de massa:* 480 kg/m<sup>3</sup>.
- **Propriedades Mecânicas:**

*Compressão paralela às fibras:*

- *Resistência  $f_{c0}$ :*  $\begin{cases} \text{Madeira verde (MPa)} : 18,5 \\ \text{Madeira a 15\% de umidade (MPa)} : 31,5 \end{cases}$
- *Limite de Proporcionalidade – madeira verde (MPa):* 13,7
- *Módulo de Elasticidade – madeira verde (MPa):* 8 846
- *Coeficiente de influência de umidade (%):* 6,7

Para a realização da modelagem, utilizou-se o software SAP2000 que é baseado no método dos elementos finitos. Nessa análise simulou-se um corpo-de-prova cúbico com arestas de 4 cm e com as disposições das fibras paralelas à direção da aplicação da carga da prensa universal, ou seja, a 0°. A aplicação do alicate se dá na direção perpendicular às fibras, ou seja, a 90°.

O esquema estático adotado visou simular a situação real na qual o corpo de prova se encontrava. Como o corpo-de-prova era simplesmente apoiado, considerou-se



esse ponto de apoio com apoio móvel nas direções 1 e 2, apenas restringiu-se a direção 3 (Z). Como o alicate pressionava na direção perpendicular de ambos os lados, não houve necessidade de restringir essa direção (no caso, direção 2). Logo, obteve-se o seguinte modelo sólido:

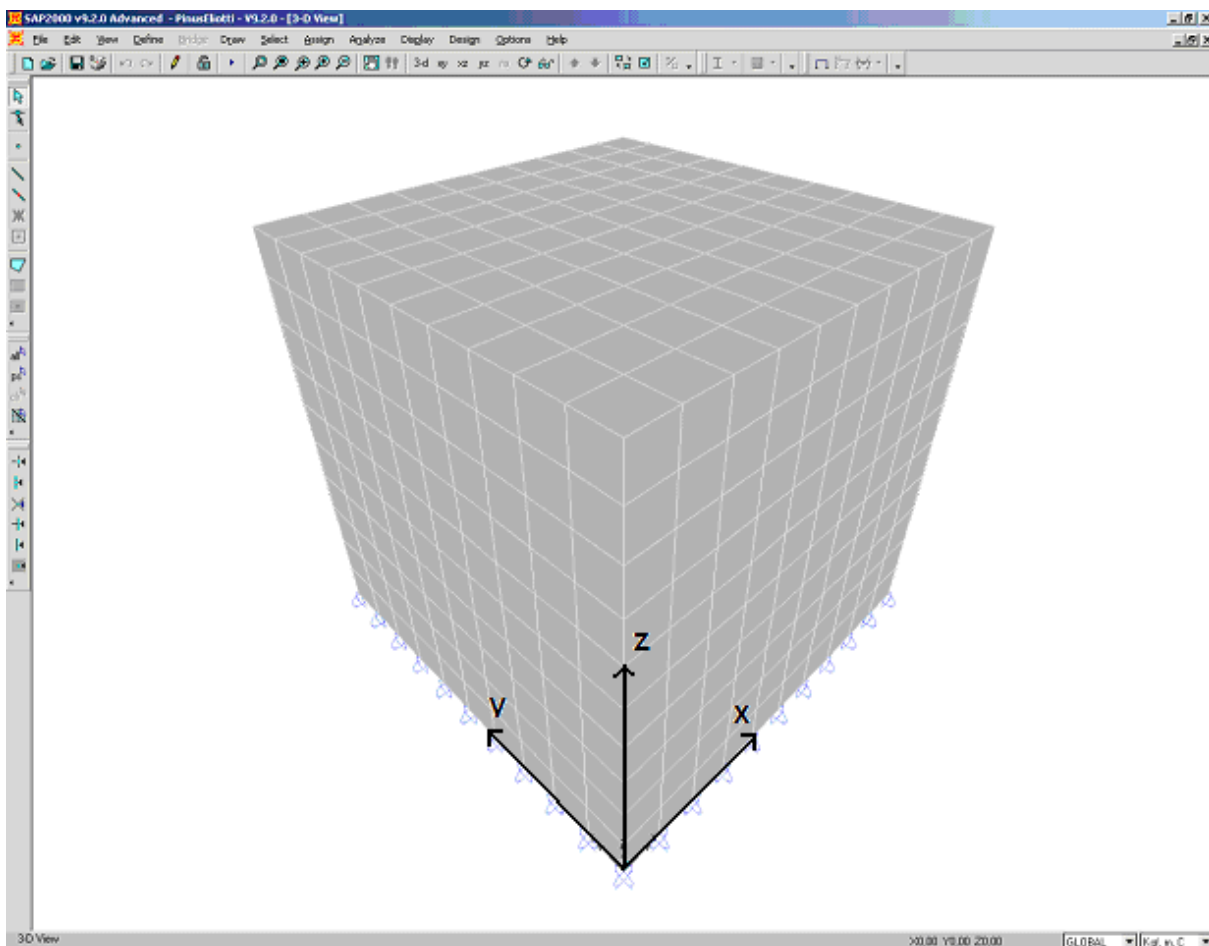


FIGURA 54 – Corpo-de-prova modelado no SAP2000.

Observa-se que a madeira possui comportamento anisotrópico, mas por simplificação no modelo proposto é considerada como ortotrópica, possuindo diferentes propriedades mecânicas nas três direções principais: direção longitudinal (L) que adotou-se como direção 3 do eixo do SAP; direção radial (R) que adotou-se como direção 1 e direção tangencial (T) que adotou-se como direção 2. Para cada direção

considerada existem um módulo de elasticidade e também um módulo de elasticidade transversal (que age entre os planos).

Surgem, devido a ortotropia, coeficientes de Poisson diferentes, pois a relação entre os planos não é isotrópica. Por exemplo, aplicando-se uma tensão na direção 3, considerando a superposição de efeitos devido a linearidade, surgem deformações nesta própria direção e também nas direções 1 e 2. Mas em cada direção tem-se comportamentos mecânicos diferentes; as deformações nas direções 1 e 2 têm proporcionalidades diferentes entre elas. Exemplificando numericamente:

- Tensão aplicada:  $-\sigma_{33}$ ,
- Deformação na direção 3 :  $-\epsilon_{33}$ ,
- Deformação na direção 2:  $+\nu_{13} \cdot \epsilon_{33}$ ,
- Deformação na direção 1:  $+\nu_{23} \cdot \epsilon_{33}$ .

Caso o material fosse isotrópico teria-se uma deformação na direção 3 de  $-\epsilon_{33}$  e nas outras duas  $+\nu \cdot \epsilon_{33}$ .

Como se deseja realizar uma modelagem teórica para o corpo-de-prova de madeira, observou-se que alguns autores descrevem as relações entre as propriedades mecânicas.

BODIG e JAYNE (1993), por exemplo, sugerem as seguintes relações entre constantes elásticas da madeira:

$$E_L : E_R : E_T \approx 20 : 1,6 : 1$$

$$G_{LR} : G_{LT} : G_{RT} \approx 10 : 9,4 : 1$$

$$E_L : G_{LR} \approx 14 : 1$$

Os mesmos autores apresentam, ainda, os valores médios dos coeficientes de Poisson para coníferas e folhosas de clima temperado (Tabela 17). Lembrando que a direção L (3), direção R (1) e direção T (2).

Tabela 17 - Média dos coeficientes de Poisson.

Índice	Coníferas	Folhosas
$\nu_{LR}$	0,37	0,37
$\nu_{LT}$	0,42	0,50
$\nu_{RT}$	0,47	0,67
$\nu_{TR}$	0,35	0,33
$\nu_{RL}$	0,041	0,044
$\nu_{TL}$	0,033	0,027

A nível nacional, encontram-se na literatura dois interessantes trabalhos: MASCIA (1991) e BALLARIN (2003) que apresentam, respectivamente, as seguintes relações para algumas espécies brasileiras:

Tabela 18 – Constantes de Elasticidade para espécies de madeira nacionais segundo MASCIA (1991)

Espécie	$E_L$	$E_T$	$E_R$	$G_{LT}$	$G_{LR}$	$G_{RT}$
Guapuruvu	3507,5	287,2	519,5	420,8	377,8	72,9
Ipê	18043,9	960,5	1748,1	831,2	620,2	356,3
Angico	8558,5	462,1	759,0	727,1	542,4	248,6
Pinus	5471,0	737,6	1049,4	307,0	542,6	116,3
	$\nu_{LT}$	$\nu_{LR}$	$\nu_{RT}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{TR}$
Guapuruvu	0,5019	0,4818	0,6802	0,0448	0,0662	0,3458
Ipê	0,4790	0,4345	0,6136	0,0270	0,0371	0,3532
Angico	0,4549	0,5089	0,80068	0,0239	0,0484	0,4975
Pinus	0,3346	0,3701	0,6393	0,0477	0,0858	0,4509

Tabela 19 - Resultados finais dos parâmetros elásticos da madeira de *Eucalyptus citriodora*, determinados a partir de ensaios de compressão paralela às fibras segundo BALLARIN (2003).

Parâmetros elásticos – ensaios de compressão paralela às fibras						
$E_L$ (MPa)	$E_R$ (MPa)	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{RT}$	$G_{LR}$ (MPa)
16.981	1.825	0,23	0,48	0,013	0,70	861

No SAP2000 existe a possibilidade de adotar um material com características ortotrópicas, sendo assim, criou-se o material chamado de PinusElliotti que pode ser observado na Figura 55.

The screenshot shows the 'Material Property Data' dialog box in SAP2000. The material name is 'PinusElliotti', the material type is 'Other', and the symmetry type is 'Orthotropic'. The modulus of elasticity values are E1: 70,768, E2: 44,23, and E3: 884,6. The weight and mass values are Weight per Unit Volume: 4,618E-05 and Mass per Unit Volume: 4,707E-08. The units are set to 'KN, cm, C'. The Poisson's ratio values are U12: 0,47, U13: 0,041, and U23: 0,033. The coefficient of thermal expansion values are A1: 1,170E-05, A2: 1,170E-05, and A3: 1,170E-05. The shear modulus values are G12: 6,3186, G13: 63,186, and G23: 59,395. The dialog box also includes buttons for 'Nonlinear Material Data...', 'Material Damping Properties...', 'Time Dependent Properties...', and 'Thermal Properties...'. The 'OK' and 'Cancel' buttons are at the bottom.

Property	Value
Material Name	PinusElliotti
Material Type	Other
Symmetry Type	Orthotropic
Modulus of Elasticity (E1)	70,768
Modulus of Elasticity (E2)	44,23
Modulus of Elasticity (E3)	884,6
Weight per Unit Volume	4,618E-05
Mass per Unit Volume	4,707E-08
Units	KN, cm, C
Poisson's Ratio (U12)	0,47
Poisson's Ratio (U13)	0,041
Poisson's Ratio (U23)	0,033
Coeff of Thermal Expansion (A1)	1,170E-05
Coeff of Thermal Expansion (A2)	1,170E-05
Coeff of Thermal Expansion (A3)	1,170E-05
Shear Modulus (G12)	6,3186
Shear Modulus (G13)	63,186
Shear Modulus (G23)	59,395

FIGURA 55 – Propriedades mecânicas do material no SAP2000.

Optou-se pela análise linear, pois a madeira possui um comportamento elástico-linear, valendo a superposição de efeitos nas relações constitutivas (Figura 56).

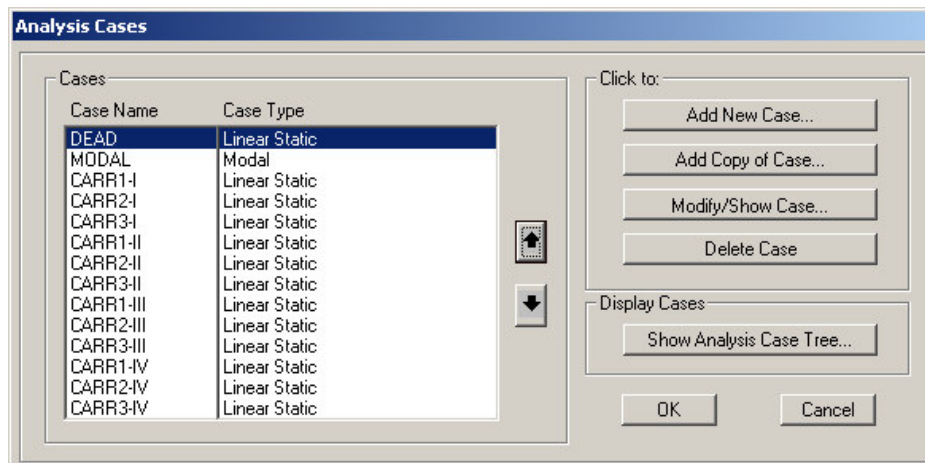


FIGURA 56 – Análise linear.

Nesta simulação, foram considerados os pares de atuação das forças aplicadas. A convenção de tensão no SAP2000 é a seguinte:

- Direção 1: corresponde a direção X apresentada no modelo.
- Direção 2: corresponde a direção Y apresentada no modelo.
- Direção 3: corresponde a direção Z apresentada no modelo.

Por exemplo, a tensão  $S_{11}$  corresponde a  $\sigma_{xx}$  e assim sucessivamente.

Como o carregamento atua simultaneamente nas direções 1 e 3, optou-se por criar carregamentos independentes e depois combiná-los. Assim foram consideradas as seguintes combinações:

- Combinação 1: Para a direção 3 aplicou-se uma pressão de 2,5 KN/m<sup>2</sup>. Para a direção 1 aplicou-se uma pressão de 0,202 KN/m<sup>2</sup>.
- Combinação 2: Para a direção 3 aplicou-se uma pressão de 2,563 KN/m<sup>2</sup>. Para a direção 1 aplicou-se uma pressão de 0,808 KN/m<sup>2</sup>.
- Combinação 3: Para a direção 3 aplicou-se uma pressão de 2,781 KN/m<sup>2</sup>. Para a direção 1 aplicou-se uma pressão de 0,22 KN/m<sup>2</sup>.
- Combinação 4: Para a direção 3 aplicou-se uma pressão de 3,594 KN/m<sup>2</sup>. Para a direção 1 aplicou-se uma pressão de 0,881 KN/m<sup>2</sup>.

Os valores das pressões foram obtidos dos ensaios biaxiais de compressão. Para esta simulação foram observados e adquiridos os pares de valores maiores (COMB4), os pares menores (COMB1) e os pares intermediários (COMB2 e 3), observando o comportamento do material.

**Para a combinação 1 obteve-se os seguintes resultados:**

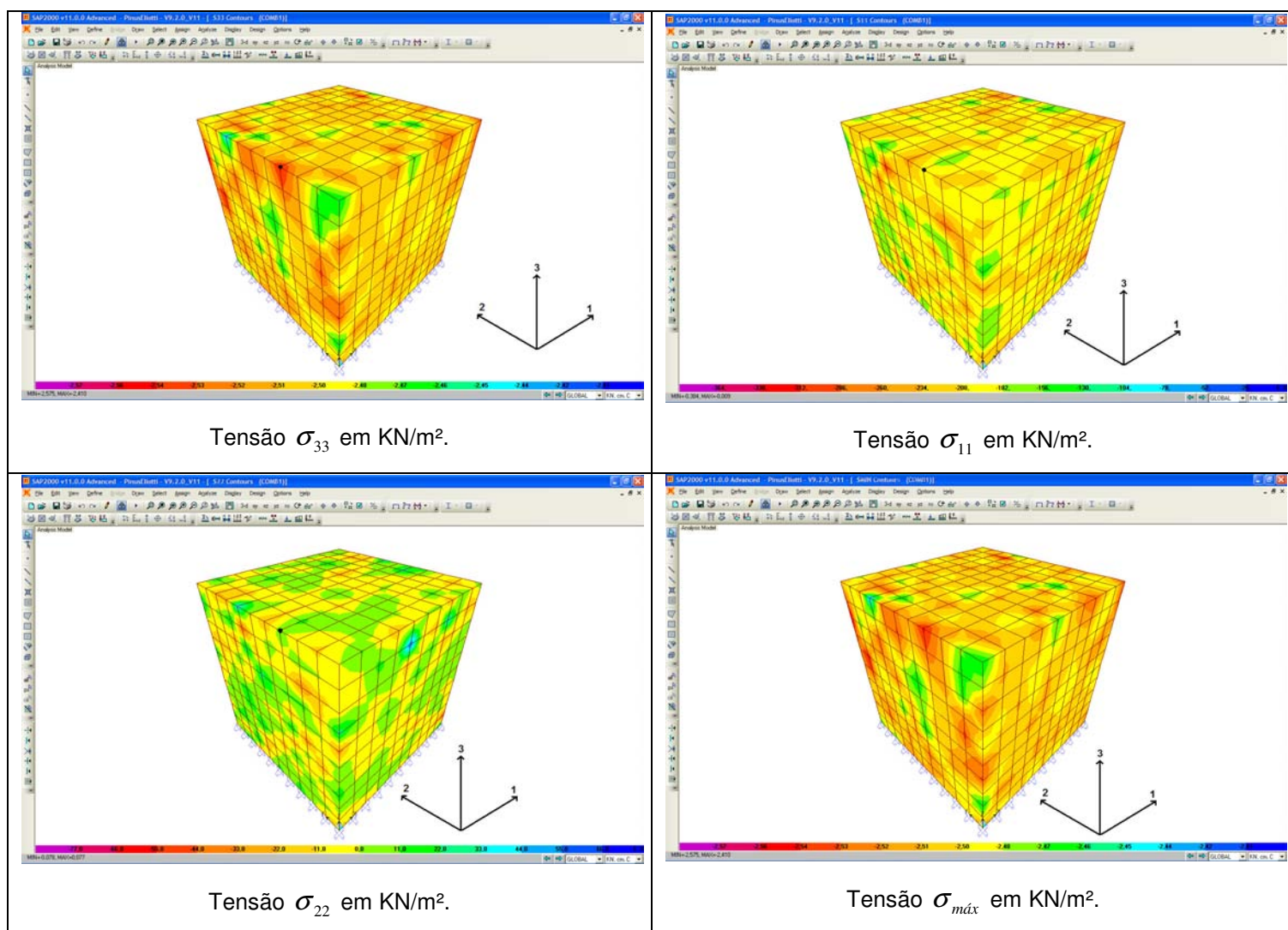
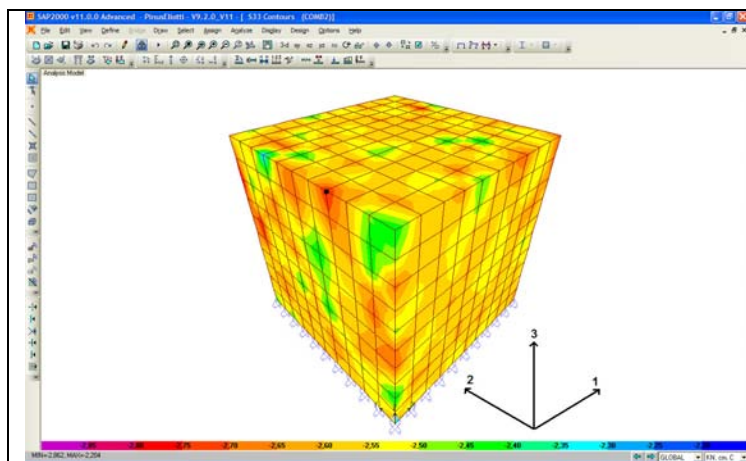
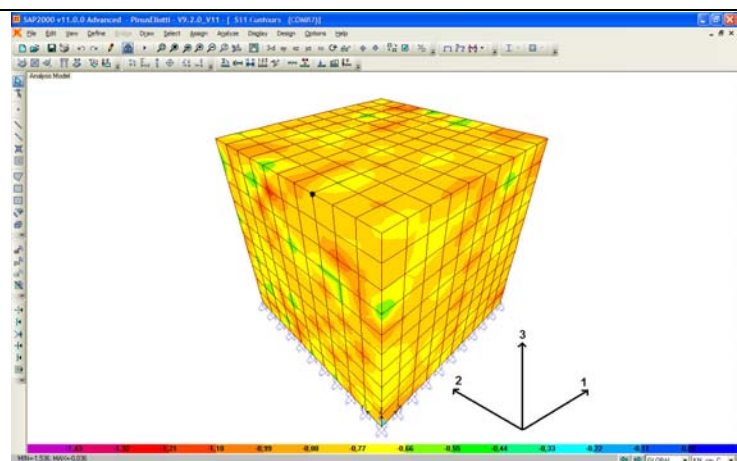


FIGURA 57 – Resultados da combinação 1.

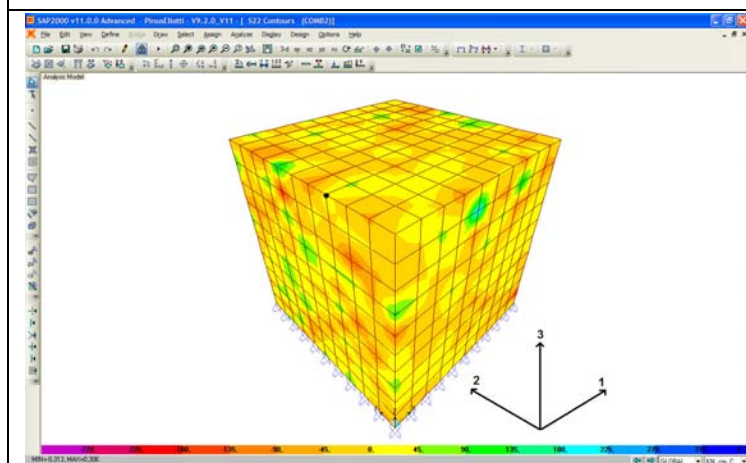
Para a combinação 2 obteve-se os seguintes resultados:



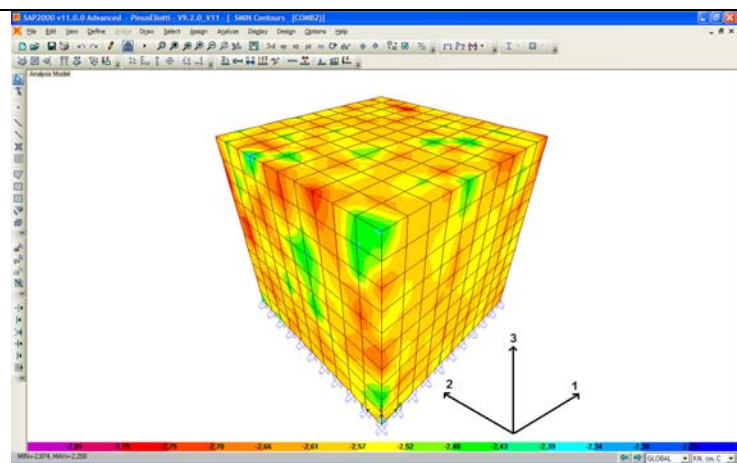
Tensão  $\sigma_{33}$  em KN/m<sup>2</sup>.



Tensão  $\sigma_{11}$  em KN/m<sup>2</sup>.



Tensão  $\sigma_{22}$  em KN/m<sup>2</sup>.



Tensão  $\sigma_{max}$  em KN/m<sup>2</sup>.

FIGURA 58 – Resultados da combinação 2.



Para a combinação 3 obteve-se os seguintes resultados:

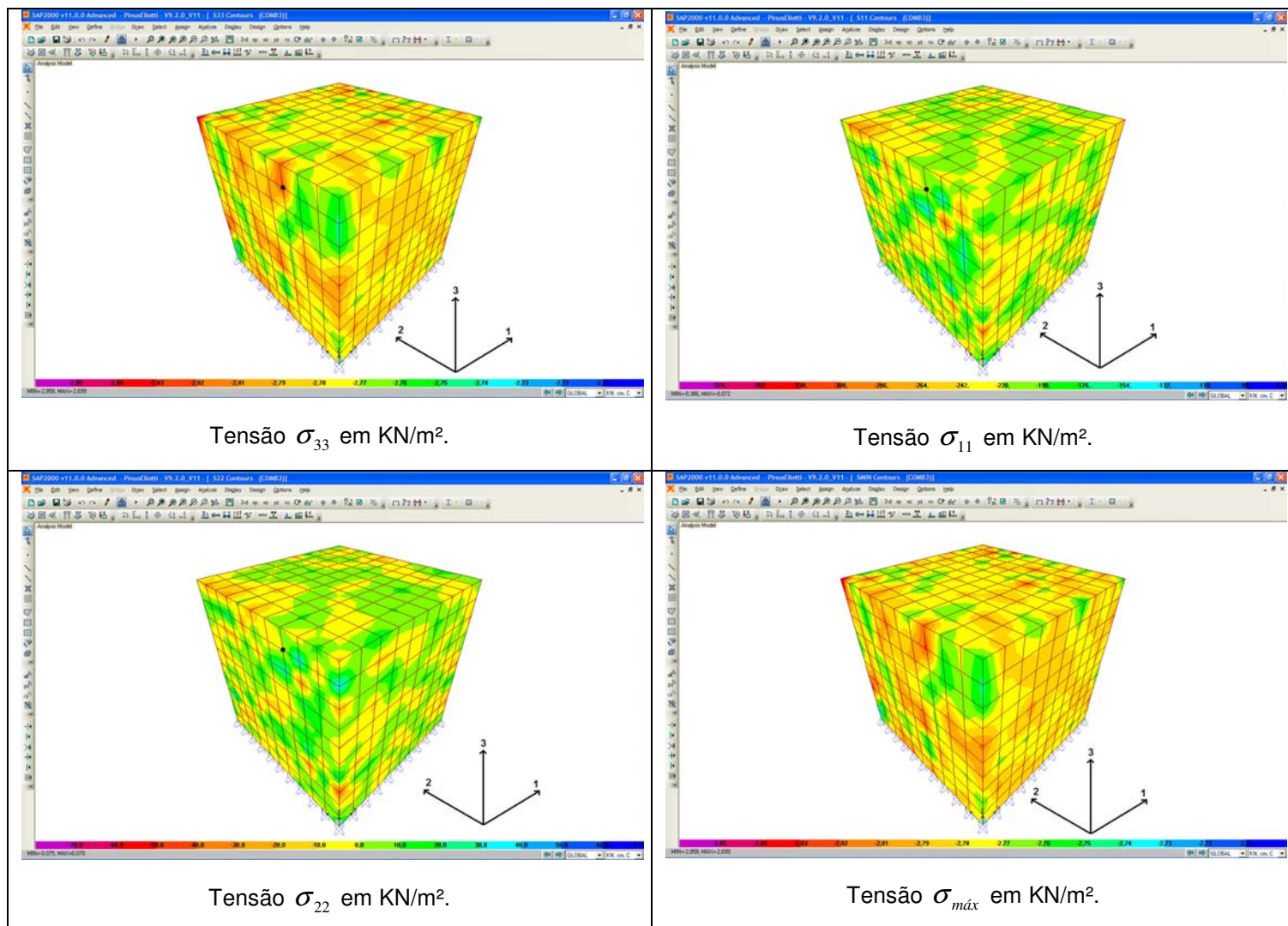


FIGURA 59 – Resultados da combinação 3.



Finalmente para a combinação 4 obteve-se os seguintes resultados:

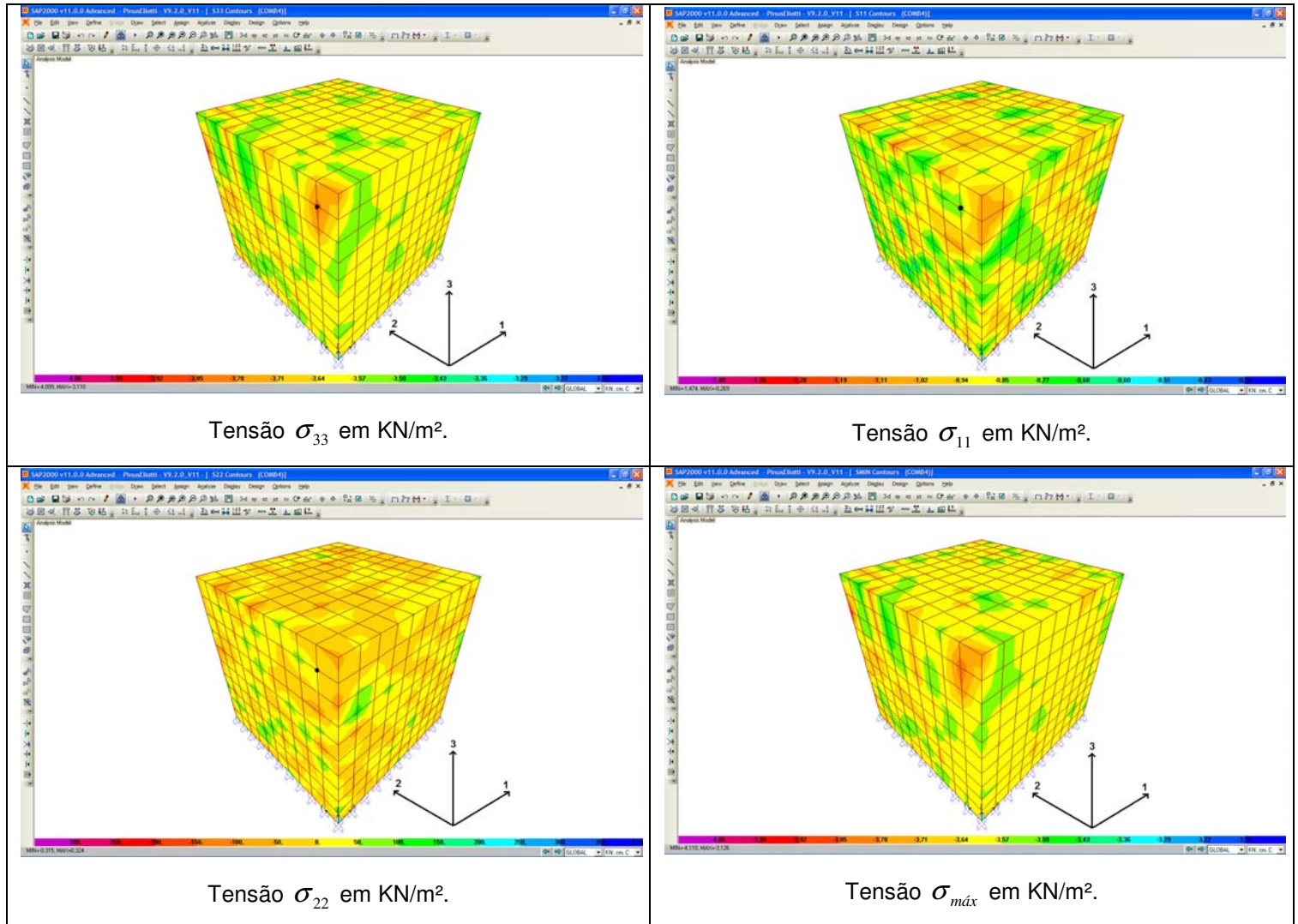


FIGURA 60 – Resultados da combinação 4.

## 6.1 Análise do Círculo de Mohr

Para cada combinação adotou-se um determinado ponto, preferencialmente os pontos que apresentaram os maiores valores de tensões. Observa-se que aqui não se segue a convenção usual ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) para o desenho do Círculo de Mohr. Assim, para a análise de tensões tem-se:

➤ **Combinação 1:**

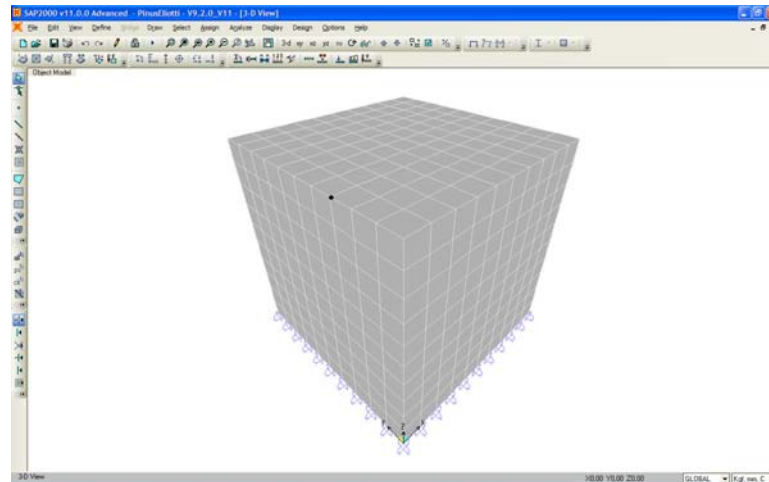


FIGURA 61 – Ponto de análise para COMB1.

As tensões principais encontradas neste ponto foram as seguintes, considerando a convenção adotada na SAP2000:

$$\sigma_{33} = -25,60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{11} = -2,08 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = +0,22 \text{ MPa}$$

e o correspondente Círculo de Mohr:

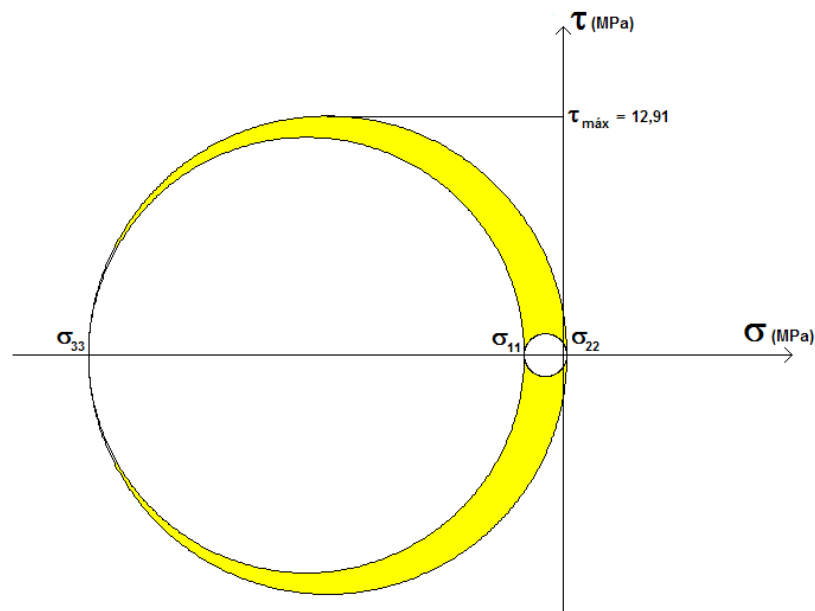


FIGURA 62 – Círculo de mohr para ponto da COMB1.

➤ **Combinação 2:**

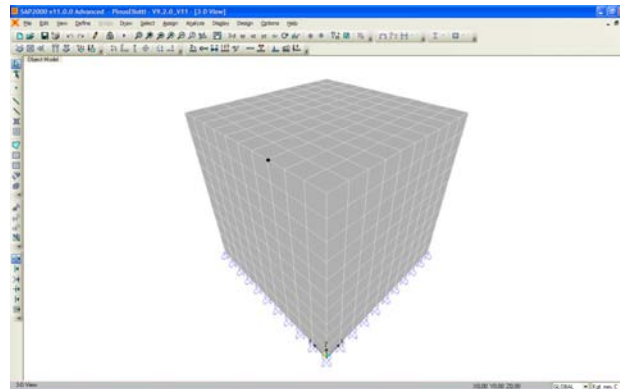


FIGURA 63 – Ponto de análise para COMB2.

As tensões principais encontradas neste ponto foram as seguintes:

$$\sigma_{33} = -28,00 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{11} = -9,90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = +0,45 \text{ MPa}$$

e o correspondente Círculo de Mohr:

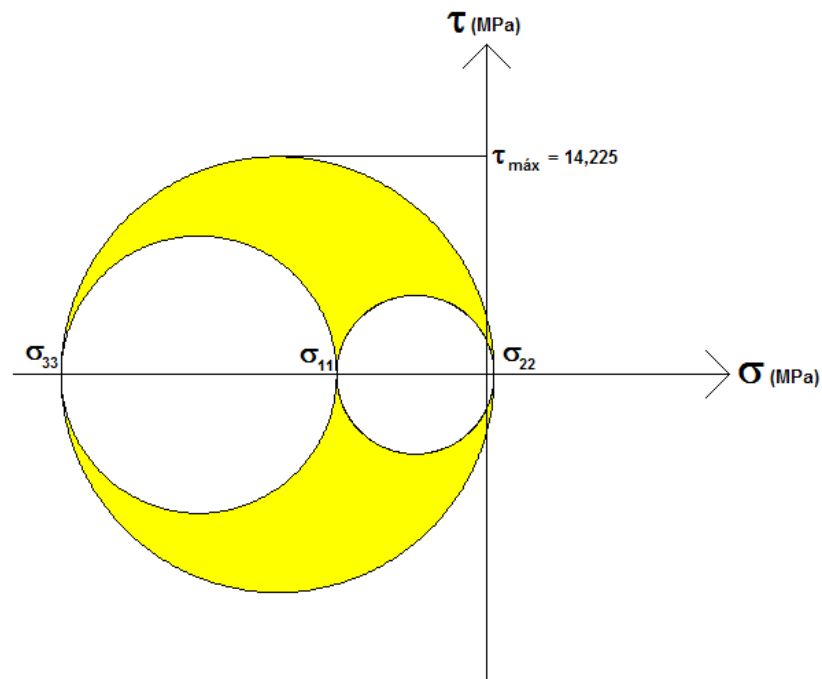


FIGURA 64 – Círculo de mohr para ponto da COMB2.

➤ **Combinação 3:**

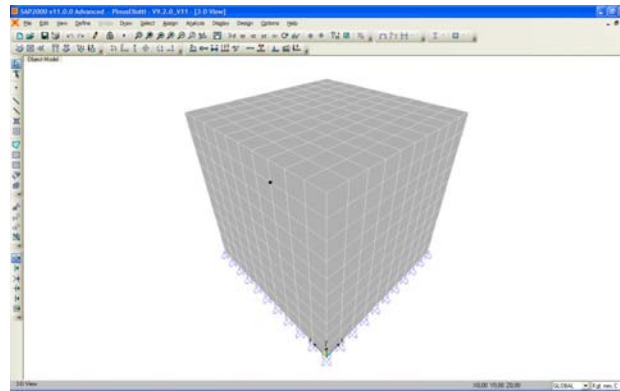


FIGURA 65 – Ponto de análise para COMB3.

As tensões principais encontradas neste ponto foram as seguintes:

$$\sigma_{33} = -28,30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{11} = -2,20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = +0,10 \text{ MPa}$$

e o correspondente Círculo de Mohr:

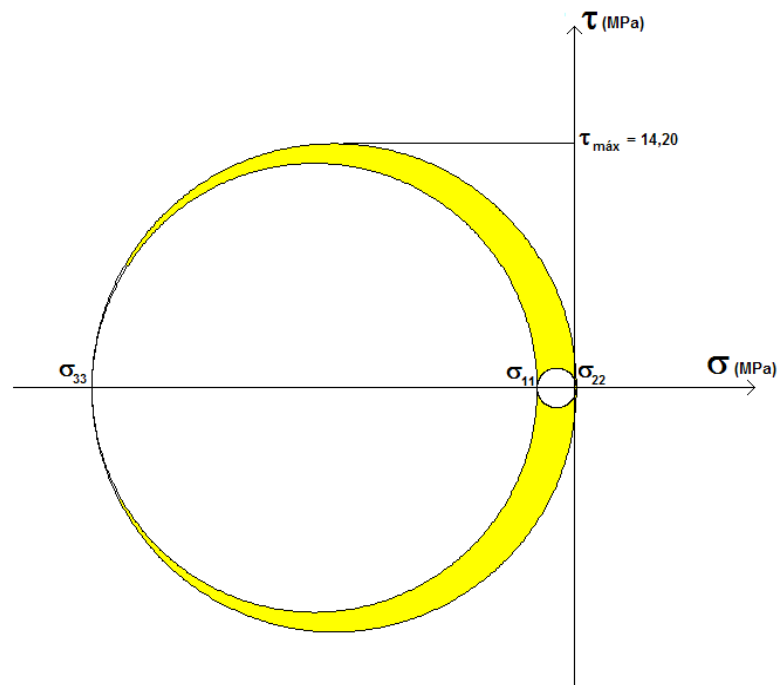


FIGURA 66 – Círculo de mohr para ponto da COMB3.

➤ **Combinação 4:**

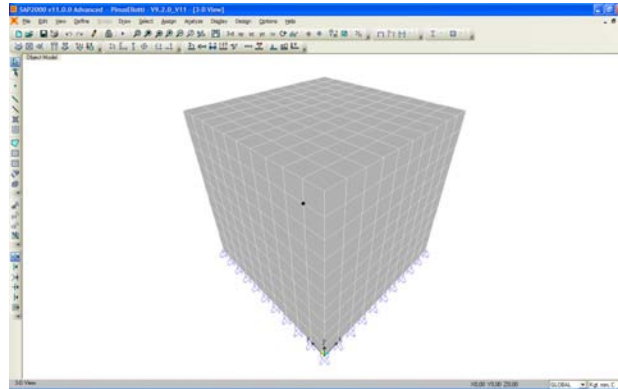


FIGURA 67 – Ponto de análise para COMB4.

As tensões principais encontradas neste ponto foram as seguintes:

$$\sigma_{33} = -38,50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{11} = -8,50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{22} = +0,50 \text{ MPa}$$

e o correspondente Círculo de Mohr:

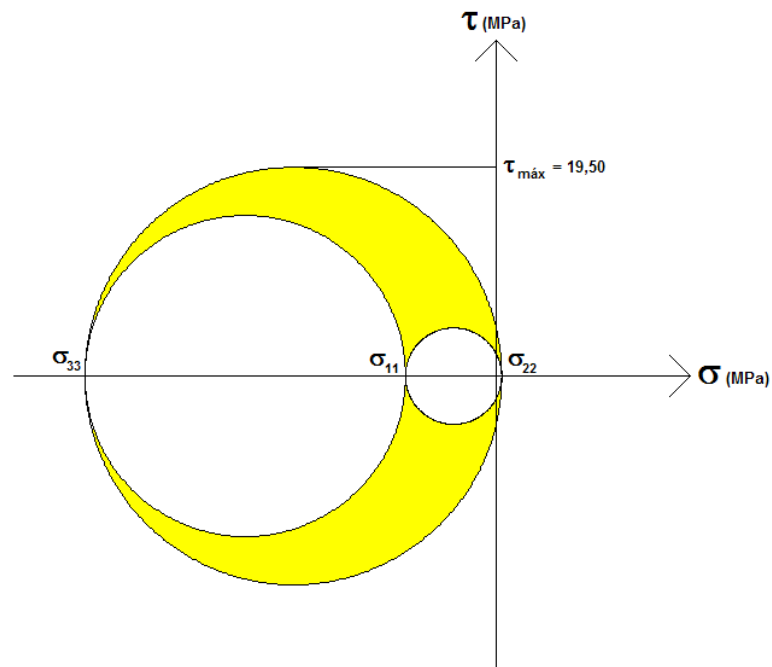


FIGURA 68 – Círculo de mohr para ponto da COMB4.

## 6.2 Comentários dos Resultados obtidos

- Todos os valores das faces (superfícies) do corpo-de-prova apresentaram dispersões nos resultados, pois são zonas de concentrações de tensões. Isso pode ser observado principalmente na região onde foram definidos os apoios do elemento, sendo que estes sustentam apenas os quatro pontos da face de cada cubo pequeno, o que seria muito diferente se o elemento estivesse dividido em infinitas partes. Mas devido à limitação de hardware e também de processamento, optou-se pela configuração atual.
- Observando todas as combinações, verifica-se que as tensões  $\sigma_{22}$  apresentam valores positivos de tração. Esses valores já eram esperados, pois o corpo-de-prova só recebe carga de compressão nas direções 1 e 3 e que, pelas relações constitutivas do material, a direção 2 só poderia apresentar uma expansão, confirmando o exemplo citado anteriormente.
- Em geral as tensões  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{33}$  de todas as combinações apresentaram aumento de valores. As tensões  $\sigma_{33}$ , as de maiores intensidades aplicadas, apresentaram uma distribuição mais uniforme ao longo do elemento estudado, apresentando os maiores valores na região central do corpo-de-prova.
- Comparando as combinações 1 e 2, mantendo praticamente a mesma carga vertical e aumentando a carga na direção 1 em torno de 25%, as tensões  $\sigma_{33}$  apresentaram quase que a mesma distribuição no elemento. Já as tensões  $\sigma_{11}$  apresentaram distribuições diferentes, principalmente quando mantida a carga vertical e aumentando a carga na direção 1. Na combinação 1 as tensões  $\sigma_{11}$  diminuíram seus valores em relação ao carregamento aplicado. Já, na combinação 2 as tensões  $\sigma_{11}$  aumentaram de valores, pois sofrem pouca influência da carga vertical.

- Nas combinações 3 e 4, onde foram aumentados os valores das cargas verticais e para a direção 1 adotados os valores 0,22 KN/m<sup>2</sup> e 0,881 KN/m<sup>2</sup> respectivamente, as tensões  $\sigma_{33}$  apresentam pouca sensibilidade quanto ao aumento, pois são em torno de 4 vezes maiores que as tensões  $\sigma_{11}$ . Já as tensões  $\sigma_{11}$  apresentaram, em grande parte do elemento, valores menores do que aqueles aplicados na direção 1. Essa diminuição é consequência do grande valor aplicado na direção 3 em relação ao da direção 1. Pela mesma idéia de contração e expansão das outras direções é que esta diminuição é visível. Quando se aplica uma carga de valor alto na direção 3, tem-se uma grande deformação negativa (contração) na mesma direção e para as outras tem-se uma expansão da ordem de  $+\nu_{ij} \cdot \epsilon_{33}$ . Na direção 1 tem-se uma carga menor em torno de 4 vezes a vertical, logo, a deformação nesta direção será  $-\epsilon_{11} + \nu_{ij} \cdot \epsilon_{33}$ . É claro que o valor  $+\nu_{ij} \cdot \epsilon_{33}$  não é predominante nesta direção, pois depende do valor do coeficiente Poisson, mas acarreta uma diminuição expressiva da deformação na direção 1, diminuindo consequentemente as tensões  $\sigma_{11}$ , fato observado na modelagem.
- Através dos gráficos que representam os círculos de mohr, verifica-se que existe a influência da tensão de cisalhamento (região indicada pela cor amarela do gráfico) que também é responsável pela ruptura do material. Isso comprova a validade do critério de Tsai-Wu onde a ruptura é causada tanto pelas tensões normais quanto pelas tangenciais. Seguem-se algumas fotos ampliadas (fotos realizadas na Engenharia Química da Unicamp, no sistema de microscópio eletrônico por varredura – MEV) dos corpos-de-prova do ensaio biaxial de compressão que mostram a influência da tensão cisalhante:

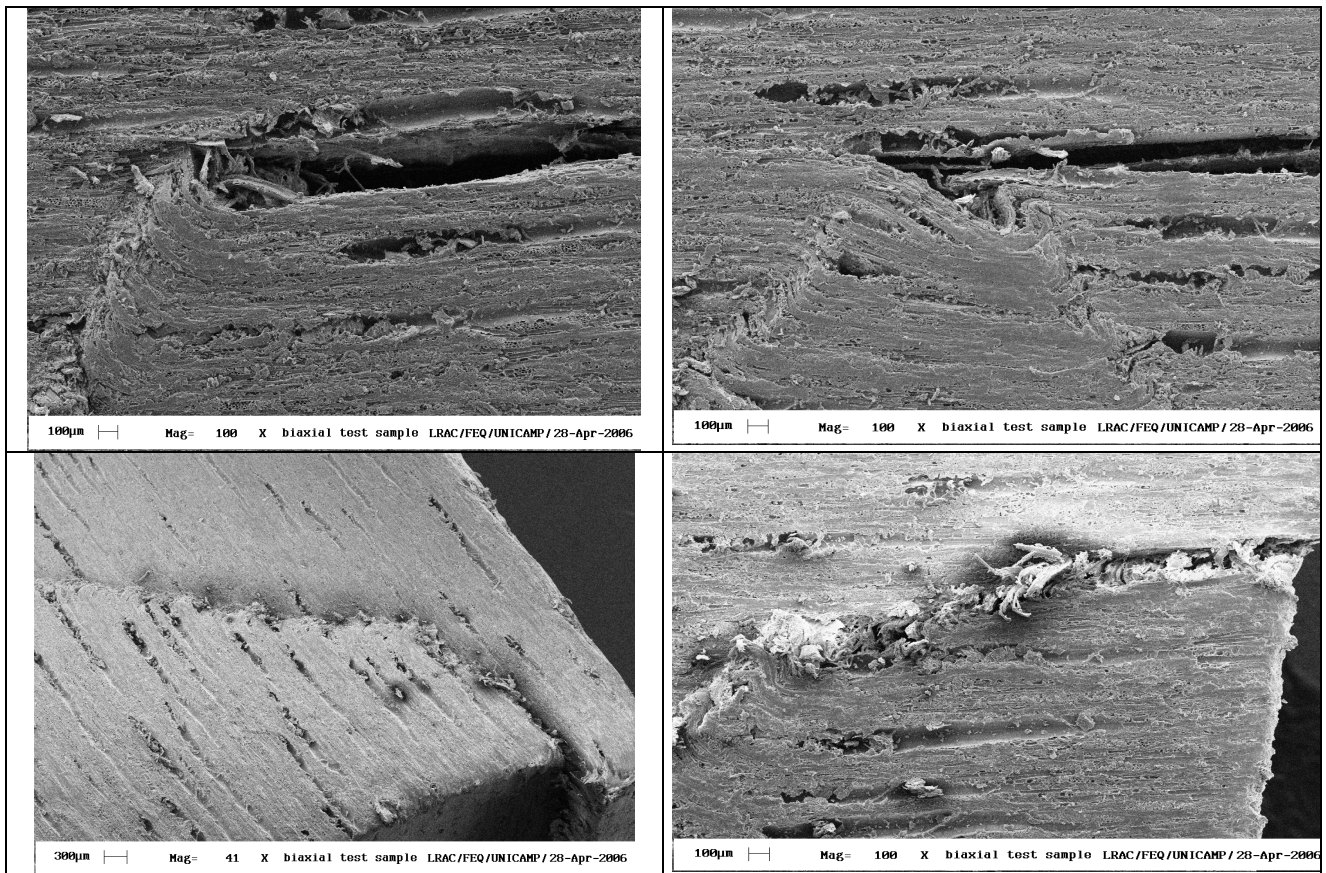


FIGURA 69 – Fotos ampliadas - Influência do cisalhamento.



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

O trabalho desenvolvido teve como objetivo geral o estudo de critérios de resistência e suas teorias para a aplicação nos estudos do material a ser analisado. Verifica-se que cada material possui um tipo de resistência e que estes são analisados por determinados critérios de resistência que levam em consideração seu comportamento elástico em diferentes direções.

Para os principais materiais que são utilizados na construção civil (madeira, aço, concreto) foram desenvolvidas e estão sendo desenvolvidas teorias que explicam e condizem com o comportamento mecânico de cada um. Mais especificamente, essa pesquisa teve como objetivo a aplicação do critério de Tsai-Wu, adequado para materiais anisotrópicos, à madeira, e também o uso da tradicional fórmula de Hankinson. A madeira (material ortotrópico) tem comportamento mecânico de suas propriedades completamente diferente do comportamento das propriedades do aço (material isotrópico) e do concreto.

Pela análise dos resultados obtidos no ensaio uniaxial de compressão e os ensaios biaxiais de compressão, verificou-se que o critério de Tsai-Wu apresentou, em média, resultados satisfatórios e coerentes. Ao se utilizar o critério de Tsai-Wu, para o estado plano de tensões múltiplas, observou-se a grande influência do coeficiente de interação  $F_{12}$  nas estimativas de resistência, principalmente nos ensaios biaxiais de compressão. Fato também que é observado por NICOLAS (2006) onde conclui que para estados múltiplos de tensões, há necessidade de utilização do critério de Tsai-Wu que leva em consideração a interação entre as tensões.

Através das Figuras 46 (ensaios de tração) e 49 (ensaios de compressão) verifica-se a sensibilidade do fator  $F_{12}$ , pois ao se fixarem os valores limites e substituí-

los na Equação 5.1.3, para cada ângulo de inclinação, obtiveram-se tensões que não correspondiam com as ensaiadas. O caso mais próximo ocorreu no ensaio de tração. Ao se calcular, pela Equação 5.1.3, o correspondente valor de  $F_{12}$  para cada ângulo de inclinação, verificou-se que a condição 3.5.10 não foi totalmente satisfeita para alguns ângulos calculados. Como exemplo, pode-se observar a Figura 70 que foi determinada utilizando a Equação (3.6.6) para o estado plano (1-2), adotando três valores diferentes do coeficiente de interação:  $F_{12} = -0,5$  limite,  $F_{12} = 0$  e  $F_{12} = +0,5$  limite, obedecendo aos valores da Inequação (3.5.10).

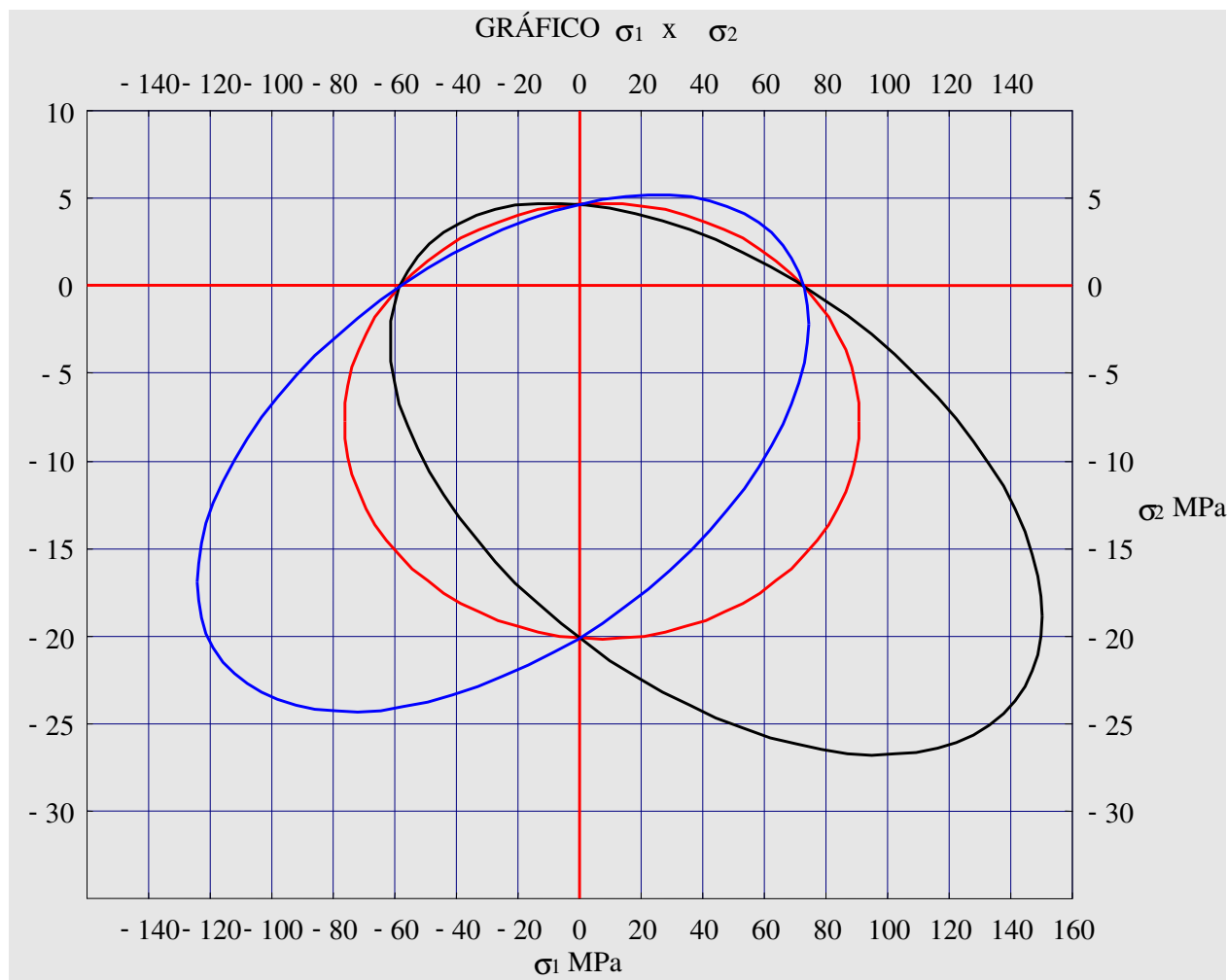


FIGURA 70 – Curvas de ruptura do critério de Tsai-Wu, utilizando os dados dos ensaios (elipse vermelha  $F_{12} = 0$ ; elipse azul  $F_{12} = -0,5 \times \text{limite}$  e elipse preta –  $F_{12} = +0,5 \times \text{limite}$ ).

Uma pequena alteração no valor do coeficiente  $F_{12}$  provoca alterações significativas nas estimativas de resistência, logo, o critério de Tsai-Wu foi relativamente satisfatório. Pela fórmula de Hankinson obteve-se uma conveniente proximidade dos resultados dos ensaios de tração, de acordo com as Figuras 45 e 47.

Através da Figura 51, curvas obtidas da espécie *Pinus elliottii*, verificou-se que cada curva possui um grupo de pontos que estão em suas proximidades. As melhores curvas foram: verde e azul, as quais correspondem respectivamente aos valores de  $5,013 \times 10^{-3}$  e  $1,572 \times 10^{-3}$  para  $F_{12}$ . Nestas melhores curvas, observam-se que ambos os valores de  $F_{12}$  (Tabela 12) são positivos e aproximam-se do valor zero e que pela Tabela 11 são obtidos pelos menores pares de tensão aplicados na vertical e na horizontal (respectivamente  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ). Percebeu-se que ao aumentar, em módulo, as tensões aplicadas nos corpos-de-prova, principalmente àquelas correspondentes ao alicate, verificou-se que as curvas passam a apresentar valores negativos para  $F_{12}$  (Tabela 12) e que estes correspondem às curvas amarela e lilás de acordo com a Figura 51.

Através da Figura 52, curvas obtidas da espécie *Goupia glabra*, verificou-se um melhor resultado, pois o número de corpos-de-prova ensaiados foi maior. As melhores curvas obtidas foram: verde escura, laranja e vermelha, as quais correspondem respectivamente aos valores de:  $9,7 \times 10^{-5}$ ,  $2,6 \times 10^{-5}$  e 0 para  $F_{12}$ . Nestas melhores curvas observa-se que esses valores de  $F_{12}$  (Tabela 15) são positivos e aproximam-se do valor zero e que pela Tabela 14 são obtidos pela pequena variação (13 a 18 MPa) de tensão aplicadas na horizontal e por grande variação (35 a 60 MPa) dos valores de tensão aplicados na vertical (respectivamente  $\sigma_2$  e  $\sigma_1$ ). Verificou-se que ao aumentar, em módulo, as tensões aplicadas nos corpos-de-prova, principalmente àquelas correspondentes ao alicate, verificou-se que as curvas passam a apresentar valores negativos para  $F_{12}$  (tabela 14) e que estes correspondem às curvas amarela e lilás de acordo com a Figura 52.

Através da Figura 53, considerando valores médios positivos e negativos de  $F_{12}$  e também o valor zero, verificou-se que os ensaios se aproximam das curvas  $3,78 \times 10^{-4}$

e 0, mostrando que a aplicação axial de compressão possui maior influência do que a compressão transversal realizada pelo alicate. NICOLAS (2006) verifica a relação  $F_{12} / |F_{12} \text{ lim}|$  que mais se aproxima dos dados dos ensaios biaxiais:  $0 \leq F_{12} / |F_{12} \text{ lim}| \leq 0,2$ .

Também conclui que o coeficiente adotado por COWIN,  $F_{12} = \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} - \frac{1}{2 \cdot f_v^2}$ , foi o que mais apresentou resultados próximos aos valores dos ensaios biaxiais.

Assim, considerando-se ensaios biaxiais de compressão, para obtenção do melhor critério, observou-se que os menores pares de valores (em módulo) das tensões aplicadas verticalmente e horizontalmente podem definir o parâmetro  $F_{12}$ , verificando-se sua grande sensibilidade quanto às variações das tensões aplicadas nos corpos-de-prova. Vale ressaltar que um dos problemas enfrentados nos ensaios biaxiais dos corpos-de-prova foi manter a calibração do equipamento de compressão axial (alicate).

Observa-se, também, que na confecção dos corpos-de-prova foram verificados os ângulos de inclinação das fibras, assim como o controle de umidade, e de temperatura (20°C). Concluiu-se, então, que as causas principais das dispersões podem estar relacionadas com a heterogeneidade do material nas direções ortotrópicas (falhas pré-existent de constituição) e possíveis defeitos provenientes da variação dimensional após a elaboração dos corpos-de-prova.

Observa-se, ainda, que um fator de grande influência no sucesso da pesquisa e na modelagem via SAP2000 foi a utilização das espécies de madeira *Pinus elliottii* e *Goupia glabra*, madeiras estas que apresentam características mecânicas homogêneas em cada direção ortotrópica (radial, tangencial e longitudinal).

Por fim destaca-se que, a formulação de ensaios biaxiais para diversos materiais pode ser muito útil para o desenvolvimento de novas tecnologias e também para otimização de estruturas. Os principais fatores que definem o arranjo para esse tipo de ensaio são: tipo de material, dificuldades na montagem do ensaio, sua execução e interpretação dos resultados. Especificamente, para a madeira e as estruturas de madeira, o estudo do critério de Tsai-Wu é importante, pois desse estudo advém um melhor entendimento de suas propriedades elásticas e de resistência, as quais

contribuem para formulações mais adequadas e completas no campo da mecânica estrutural.

Para futuras pesquisas nessa área, sugere-se a realização de um número maior de ensaios biaxiais para uma interpretação mais geral de resultados em outras espécies de madeira e desse modo, uma definição mais específica dos parâmetros envolvidos no critério de resistência de Tsai-Wu.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: Projeto de Estruturas de Madeira. Rio de Janeiro: ABNT, 1996.

ALVIN, R. A. A. **Avaliação Experimental de propriedades Mecânicas dos tecidos estruturais**. *Dissertação (mestrado)*, Escola Politécnica, USP, São Paulo, 2003.

BALLARIN, A. W., NOGUEIRA, M. **Caracterização elástica da madeira de *Eucalyptus citriodora***. *Cerne*, <http://www.dcf.ufla.br>, v. 9, n. 1, p. 69-83, 2003.

BOLDRINI, J., L. **Algebra linear**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BODIG, J., JAYNE B. A. **Mechanics of Wood and Wood Composites**. New York: Van Renhold, 1982. Bibliografia: p. 291-302.

CHEN, W. F., SALEEB, A. **Constitutive equations for engineering materials**. New York: John Wiley & Sons, 1982. V. 1: Elasticity and Modeling, p1-181.

COWIN, S. C. **On the strength anisotropic of bone and wood**. *Journal of Applied Mechanics*, v.46, p.832-838. Dec. 1979.

EBERHARDSTEINER, J. **Mechanisches Verhalten von Fichtenholz – Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften**. Springer, in German. 2002.

FUSCO, P. B. **Resistência dos materiais anisotrópicos** In: Encontro regional em madeiras e em estruturas de madeira, 1, 1993, São Carlos. *Anais*. São Carlos, Nov. 1993. v.1, p. 159-188.

GEMMEL, A. R. **Anatomia do vegetal em desenvolvimento**. São Paulo, Coleção Temas de Biologia, v.19, 1980.

HOFFMAN, O. **The brittle strength of ortotropic materials**. *Journal of Composite Materials*, n. 2, v.1, p.200-206. 1967.

IPT. Instituto de Pesquisas Tecnológicas: SVMA: SINDUSCON-SP. Coordenador Oswaldo Poffo Ferreira. **Madeira: Uso Sustentável na Construção Civil**. São Paulo, 2003. 57p.

LIU, J. Y. **Evaluation of the tensor polynomial strength theory for wood**. *Journal of Composite Material*, v.18, p.216-226. May. 1984.

MASCIA, N.T. **Considerações à respeito da anisotropia na madeira**. São Carlos, *Tese de Doutorado* - Escola de Engenharia de São Carlos/USP, 295p. 1991.

MASCIA, N. T. **Critérios de Resistência**. Campinas: julho de 1999.

MASCIA, N. T., NICOLAS, E. A., TODESCHINI, R. **Evaluation of off-axis wood compression strength** In: International Conference on Experimental Mechanics, Alexandroupolis: European Association for Experimental Mechanics (EURASEM), 2007. v.1. p.1 – 8.

MASCIA, N. T., NICOLAS, E. A., SVERZUT, C. B. **Ensaio Biaxiais e a Determinação de Parâmetros de Resistência da Madeira** In: 9a. Coteq - Conferência Internacional sobre Tecnologia de Equipamentos, 2007, Salvador: Abende, 2007. v.1. p.1 – 17.

MOREY, P. R. **O crescimento das árvores**. São Paulo, Coleção Temas de Biologia, v.12, 1980.

NICOLAS, E. A. **Critérios de Resistência de Materiais Anisotrópicos Aplicados à Madeira**. *Tese (Doutorado)*, Faculdade de Engenharia Civil, UNICAMP, Campinas, 289f, 2006.

OCTÁVIO, R. G. **Introdução à Resistência dos materiais**. Campinas: Editora da Universidade de Campinas, 1977. Bibliografia p174-182.

POPOV, E. G. **Introdução à Mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgar Blumer Ltda, 1978. 534p.

SCHIEL, F. **Introdução à Resistência dos Materiais**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984. 395p.

TEIXEIRA, M. C. A. S. **Ações, carregamentos e combinações**. Campinas: 2004.

TODESCHINI, R., MASCIA, N. T., NICOLAS, E. A. **Ensaio Biaxiais e Critérios de Resistência de Materiais Anisotrópicos Aplicados à Madeira** In: XI Encontro Brasileiro em Madeiras e Estruturas de Madeira, 2008, Londrina. p.1 – 15.

TSAI, S. W., HAHN, H. T. **Introduction to composite materials**. Pennsylvania: Technomic Publishing Company, 1980. 455p.

TSAI, S. W., WU, E. M. **A general theory of strength for anisotropic materials.** Journal of Composite Materials. New York: n. 1, v.5, p.58-80. Nov. 1971.

WU, E. M. **Optimal experimental measurements of anisotropic failure tensors.** Journal of Composite Materials. New York: n. 4, v.6, p.472-489. Nov. 1972.

WU, E. M. **Phenomenological anisotropic failure criterion.** Mechanis of Composite Materials. New York: n. 4, v.6, p.353-431. Nov. 1974.



## **ANEXOS**

## ANEXO A - Notação Indicial

No texto apresentado são utilizados os eixos cartesianos na forma  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  em substituição dos respectivos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , segundo CHEN & SALEEB (1994). Considera-se a indicação positiva dos eixos através da mão direita.

Para cada eixo temos um vetor unitário, assim para  $x_1$  tem-se  $e_1$ , para  $x_2$  tem-se  $e_2$  e para  $x_3$  tem-se  $e_3$ . Com isso pode-se escrever qualquer vetor em função dessas coordenadas. Por exemplo, o vetor  $V$  ( $v_1, v_2, v_3$ ) pode ser escrito da seguinte forma:

$$V = (v_1, v_2, v_3) = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 \quad (A.1)$$

Assim o vetor  $V$ , em notação indicial, pode ser escrito generalizadamente como  $v_i$ . Num outro exemplo, o vetor  $X$  é representado por  $x_i$  onde  $x_i = 0$  e  $i = 1, 2$  e  $3$ . Com isso tem-se que o vetor  $X$  é um vetor nulo, pois suas componentes  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são iguais a zero. Pode-se verificar também a convenção de notação indicial na convenção de somatório. Por exemplo: o produto escalar entre dois vetores  $U$  e  $V$  pode ser expresso:

$$U.V = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i.v_i \quad (A.2)$$

Na convenção de somatório pode-se eliminar o uso do símbolo de soma, pois nesta convenção indica-se que o índice  $i$  seja repetido, ou seja, já está implícito. Assim, o produto vetorial pode ser expresso por  $u_k.v_k$  ou  $u_l.v_l$  ou  $u_w.v_w$ , veja que a escolha do índice é livre, pois representa a mesma soma (produto escalar). Em notação indicial, verifica-se que o índice em um termo da equação ou expressão, deve só ocorrer duas vezes no mesmo termo para que a convenção de somatório seja válida, assim, uma expressão como  $u_i.v_{ii}$  não tem significado especial.

Um outro exemplo de notação indicial:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \equiv a_{ij}x_j = b_i \quad (\text{A.3})$$

*Regras da notação indicial:*

1. Se um índice ocorre precisamente somente uma vez em um termo de uma expressão ou equação, ele é chamado de índice livre.
2. Se um índice ocorre duas vezes em um termo de uma expressão ou equação, ele é chamado de índice de soma. O índice de soma pode ou não ocorrer duas vezes em outro termo da expressão.
3. Um índice não pode aparecer mais do que duas vezes em um termo de uma expressão ou equação.

### ***A.1 Notação Diferencial***

A notação diferencial é expressa a seguir:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} \quad (\text{A.1.1})$$

Onde:  $v_{i,i} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}$ .

Nesta notação, o primeiro índice refere-se a componente do vetor  $V$ , a vírgula indica derivada parcial e o segundo índice se refere ao eixo.

### ***A.2 O símbolo $\delta_{ij}$ (Kronecker Delta)***

É uma matriz especial, na qual os componentes  $\delta_{ij}$  são 1 se  $i = j$  e 0 se  $i \neq j$ . Logo tem-se a seguinte situação:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \quad \text{e} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

Com isso tem-se a matriz montada abaixo:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.1})$$

Seguem abaixo, alguns exemplos de aplicação do símbolo  $\delta_{ij}$ .

Exemplo 1:  $\delta_{ij}v_j = \delta_{i1}v_1 + \delta_{i2}v_2 + \delta_{i3}v_3 = v_i$ . Neste caso,  $\delta_{ij}$  foi utilizado apenas para substituir o operador  $i$  por  $j$ , funcionando como um “operador de substituição”.

Exemplo 2:  $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ . Neste caso,  $\delta_{ij}\delta_{ji}$  representa uma soma escalar. Tem-se também que:  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ .

### **A.3 O símbolo $\varepsilon_{ijk}$ ( Alternating Tensor)**

O símbolo  $\varepsilon_{ijk}$  é um tensor. Um vetor  $v_i$  pode ser considerado um tensor de três elementos. Genericamente um tensor  $b_{ij...n}$  tem  $3^p$  componentes, sendo  $p$  o número de índices.

O símbolo  $\varepsilon_{ijk}$  possui  $3^3$  ou 27 componentes, os quais são definidos para serem iguais a +1, -1 ou 0, dependendo dos índices. A definição é baseada no número de permutações para deixar os índices na ordem natural 1, 2, 3. Se houver um número par de permutações, o valor é +1. Se houver um número ímpar de permutações, o valor é -1. Se houver índices repetidos o valor é zero.

O tensor  $\varepsilon_{ijk}$  traz outras abreviações. O produto vetorial  $U \times V$ , por exemplo, pode ser escrito como  $\varepsilon_{ijk}u_jv_k e_i$ .

Demonstrando:  $\varepsilon_{ijk} u_j v_k = \varepsilon_{i1k} u_1 v_k + \varepsilon_{i2k} u_2 v_k + \varepsilon_{i3k} u_3 v_k$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} u_j v_k &= \varepsilon_{i11} u_1 v_1 + \varepsilon_{i12} u_1 v_2 + \varepsilon_{i13} u_1 v_3 + \\ &+ \varepsilon_{i21} u_2 v_1 + \varepsilon_{i22} u_2 v_2 + \varepsilon_{i23} u_2 v_3 \\ &+ \varepsilon_{i31} u_3 v_1 + \varepsilon_{i32} u_3 v_2 + \varepsilon_{i33} u_3 v_3\end{aligned}\quad (\text{A.3.1})$$

Assim tem-se:

$$\varepsilon_{1jk} u_j v_k = \varepsilon_{123} u_2 v_3 + \varepsilon_{132} u_3 v_2 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \quad (\text{A.3.2})$$

$$\varepsilon_{2jk} u_j v_k = \varepsilon_{213} u_1 v_3 + \varepsilon_{231} u_3 v_1 = -u_1 v_3 + u_3 v_1 \quad (\text{A.3.3})$$

$$\varepsilon_{3jk} u_j v_k = \varepsilon_{312} u_1 v_2 + \varepsilon_{321} u_2 v_1 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad (\text{A.3.4})$$

Finalmente, considerando as equações (A.3.2), (A.3.3) e (A.3.4):

$$\varepsilon_{ijk} u_j v_k e_i = (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3 \quad (\text{A.3.5})$$

A Equação 1.3.5 é igual a:

$$U \times V = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

Genericamente:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (\text{A.3.7})$$

Tem-se ainda que:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks} \quad (\text{A.3.8})$$

#### **A.4 Transformação de Coordenadas**

Considerando o vetor  $V$  com suas componentes  $v_1, v_2$  e  $v_3$  ou simplesmente  $v_i$  com  $i=1,2,3$ . Tem-se para esse vetor um sistema cartesiano associado, no caso  $x_i$ .

Frequentemente é necessário reorientar os eixos de referência e avaliar os novos valores das componentes do vetor  $V$  em um novo sistema de coordenadas.

Considerando que os sistemas cartesianos  $x_i$  e  $x'_i$  possuam a mesma origem, o vetor  $V$  possui componentes  $v_i$  para o sistema  $x_i$  e  $v'_i$  para o sistema  $x'_i$ . Desde que o vetor seja o mesmo, as componentes devem ser relacionadas através dos cossenos dos ângulos entre os eixos  $x'_i$  e  $x_i$ .

Representa-se os cossenos dos ângulos entre os eixos  $x'_i$  e  $x_i$  por  $l_{ij}$ , ou seja,  $\cos(x'_i, x_i)$ . Com isso, pode-se afirmar que a mudança de coordenadas do vetor  $V$  de  $x_i$  para  $x'_i$  pode ser representada por:

$$v'_i = l_{ij} \cdot v_j \quad (\text{A.4.1})$$

Considera-se  $l_{ij}$  como uma matriz não simétrica, ou seja,  $l_{ij} \neq l_{ji}$ , pode-se assim representá-la como na Tabela A1:

TABELA A1 – Cossenos Diretores.

	<b>Cossenos Diretores</b>		
	<b>Eixos</b>		
<b>Eixos</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x'_1$	$l_{11}$	$l_{12}$	$l_{13}$
$x'_2$	$l_{21}$	$l_{22}$	$l_{23}$
$x'_3$	$l_{31}$	$l_{32}$	$l_{33}$

Também tem-se que  $e_i$  e  $e'_i$  são os vetores unitários dos eixos  $x_i$  e  $x'_i$  respectivamente. Com isso, o vetor pode ser escrito na forma  $v_i e_i$  ou  $v'_i e'_i$ . Segue abaixo:

$$v'_i = V e'_i = v_j e_j e'_i = v_j e_j l_{ik} e_k = l_{ik} v_j \delta_{jk} = l_{ij} v_j$$

ou simplesmente tem-se a Equação A.4.1:  $v'_i = l_{ij} v_j$ .

Inversamente tem-se:

$$v_i = l_{ji} v'_j \quad (\text{A.4.2})$$

De maneira similar pode-se relacionar os sistemas de coordenadas:

$$x'_i = l_{ij} x_j \quad (\text{A.4.3})$$

ou :

$$x_i = l_{ji} x'_j \quad (\text{A.4.4})$$

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho é utilizada a notação indicial na demonstração das teorias para obtenção dos critérios de resistência, principalmente na teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos. Também, o princípio da transformação de coordenadas é utilizado para demonstrar a aplicação da teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos em ensaios em direções inclinadas (*off-axis tests*).

## ANEXO B - Estudo de Classificação de Cônicas Aplicadas ao Critério de Resistência para Materiais Anisotrópicos

Nesse estudo leva-se em consideração os subconjuntos  $R^2$  e  $R^3$  que são respectivamente:

$$S = \{(x, y) \in R^2 : F_1(x, y) = 0, \dots, F_k(x, y) = 0\} \text{ e } S = \{(x, y, z) \in R^3 : F_1(x, y, z) = 0, \dots, F_k(x, y, z) = 0\}$$

As equações do tipo  $F_k(x, y) = 0$  e  $F_k(x, y, z) = 0$  são chamadas de equações cartesianas da figura que o conjunto determina. Essas equações podem ser de 1º grau (retas ou planos) e de 2º grau (cônicas ou quádricas).

As equações de 1º grau na forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\text{B.1})$$

representam um plano no espaço ou uma reta quando  $z=0$ . Os coeficientes  $A, B, C$ , e  $D$  são aqueles que caracterizam o plano ou reta seja qual for o caso.

As equações de 2º grau na forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{B.2})$$

são chamadas de cônicas. Esse tipo de equação apresenta a mesma forma da equação do critério de resistência da madeira dado por TSAI e WU (1971). Observe que esta equação envolve uma forma quadrática:

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad (\text{B.3})$$

Uma forma linear:

$$L(x, y) = Dx + Ey \quad (\text{B.4})$$

e um termo constante  $F$ .

Com isso, pode-se escrever a equação que define a cônica como:



$$Q(x, y) + L(x, y) + F = 0 \quad (\text{B.5})$$

A seguir têm-se exemplos de cônicas dados pela Equação (B.5):

➤ *Circunferência:*

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{B.6})$$

No qual  $A = C = 1$ ,  $B = D = E = 0$  e  $F = -r^2$ .

➤ *Elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.7})$$

No qual  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $C = \frac{1}{b^2}$ ,  $B = D = E = 0$  e  $F = -1$  com  $a > 0$  e  $b > 0$ .

➤ *Hipérbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.8})$$

No qual  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $C = -\frac{1}{b^2}$ ,  $B = D = E = 0$  e  $F = -1$  com  $a > 0$  e  $b > 0$ .

➤ *Parábola:*

$$y^2 - Dx = 0 \quad (\text{B.9})$$

e  $D \neq 0$ .

➤ *Casos degenerados:*

- Par de retas concorrentes (hipérbole degenerada):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ .
- Par de retas paralelas (parábola degenerada):  $ax^2 - b = 0$ .
- Uma reta (parábola degenerada):  $x^2 = 0$ .
- Um ponto (elipse degenerada):  $ax^2 + by^2 = 0$
- Vazio (elipse ou parábola degenerada):  $ax^2 + by^2 + r^2 = 0$

As equações das cônicas apresentadas acima estão na chamada *forma reduzida*, isto é,  $B = 0$ ; se  $A \neq 0$ ,  $D = 0$  e se  $C \neq 0$ ,  $E = 0$ .

De acordo com BOLDRINI (1980), as cônicas podem ser classificadas com o seguinte procedimento geral:

Dada à equação (B.2), com  $A$  ou  $B$  ou  $C \neq 0$ , pode-se encontrar a região (figura) que esta equação representa no plano de acordo com os seguintes passos:

1º) Escrever a equação (B.8) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0 \quad (\text{B.10})$$

2º) Eliminação dos termos mistos através da diagonalização. Para isto precisa-se encontrar os autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2)$  e os autovetores  $(v_1, v_2)$  da matriz:

$$\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

3º) Obtenção das novas coordenadas através da equação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

No qual:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  é o novo sistema de coordenadas.

4º) Montar a nova equação:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0,$$

ou seja,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0 \quad (\text{B.13})$$

5º) Eliminação dos termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Tem-se então três casos:

a)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 \neq 0$

Manipulando-se a Equação (B.13):

$$\lambda_1 \left( x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left( y_1 + \frac{b}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0, \quad \text{fazendo} \quad x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \quad \text{e} \\ y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2} \quad \text{tem-se então:}$$

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\text{No qual: } f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}.$$

b)  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$

A Equação (B.13) fica:  $\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$ , manipulando-a tem-se:

$$\lambda_1 \left( x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by_1 + F = 0, \quad \text{fazendo} \quad x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1} \quad \text{e} \quad y_2 = y_1 \quad \text{teremos então:}$$

$$\lambda_1 x_2^2 + by_2 + f = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\text{Na qual: } f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}.$$

c)  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  (idem ao item b)

Pode-se classificar a cônica de acordo com o seguinte teorema:

“Dada uma cônica definida pela Equação (B.2) e sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores associados à sua forma quádrlica então:

I- Se  $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ , esta equação representa uma elipse ou suas degenerações (um ponto ou vazio, como vimos anteriormente)

II- Se  $\lambda_1.\lambda_2 < 0$ , esta equação representa uma hipérbole ou suas degenerações (par de retas concorrentes)

III- Se  $\lambda_1.\lambda_2 = 0$ , esta equação representa uma parábola ou as suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).

Pode-se, também, afirmar que o determinante associado à forma quadrática da matriz (B.11) é igual ao produto de seus autovalores ( $\lambda_1 e \lambda_2$ ). Assim o sinal do produto entre eles ( $\lambda_1.\lambda_2$ ) é o mesmo de  $-\left(\frac{B^2}{4} - AC\right)$ , que por sua vez tem o mesmo sinal de  $-(B^2 - 4AC)$ . Feitas as considerações, pode-se reescrever o teorema anterior em função de  $B^2 - 4AC$ . Logo conhecida a Equação (B.2), esta representará, no plano, as seguintes figuras:

- Uma elipse ou suas degenerações se:  $B^2 - 4AC < 0$ .
- Uma parábola ou suas degenerações se:  $B^2 - 4AC = 0$ .
- Uma hipérbole ou suas degenerações se:  $B^2 - 4AC > 0$ .

O critério de resistência para materiais anisotrópicos de TSAI e WU (1971) possui semelhança com equações cônicas. Da teoria tem-se:

$$R_{ij}\sigma_{ij} + R_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1 \quad (B.16)$$

Considerando as condições de simetria dos coeficientes  $R_{ij}$  e  $R_{ijkl}$  por causa da condição  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , tem-se a seguinte configuração para a equação (B.16):

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (\text{B.17})$$

com  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ e } 6$ .

Desenvolvendo a Equação (B.17) tem-se:

$$\begin{aligned} & F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_3 \cdot \sigma_3 + F_4 \cdot \sigma_4 + F_5 \cdot \sigma_5 + F_6 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + 2F_{13} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 + 2F_{14} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4 + 2F_{15} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_5 + 2F_{16} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 + 2F_{24} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_4 + 2F_{25} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_5 + 2F_{26} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{33} \cdot \sigma_3^2 + 2F_{34} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 + 2F_{35} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_5 + 2F_{36} \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{44} \cdot \sigma_4^2 + 2F_{45} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 + 2F_{46} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{55} \cdot \sigma_5^2 + 2F_{56} \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6 + \\ & + F_{66} \cdot \sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Considerando o caso bidimensional (1-2) tem-se:  $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$  e pela simetria  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  fica-se com  $\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 \\ \sigma_4 & \sigma_2 \end{bmatrix}$ . Através dessa consideração pode-se reescrever a Equação (B.18) como:

$$\begin{aligned} & F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_4 \cdot \sigma_4 + F_{11} \cdot \sigma_1^2 + 2F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + 2F_{14} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_4 + \\ & + F_{22} \cdot \sigma_2^2 + 2F_{24} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_4 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Observa-se que a Equação (B.19) do critério de resistência para materiais anisotrópicos de Tsai-Wu apresenta semelhança com a Equação (B.2) de uma cônica, dessa forma, assumindo-se  $\sigma_1 = x$  e  $\sigma_2 = y$  a Equação (B.19) fica:

$$F_1 \cdot x + F_2 \cdot y + F_4 \cdot \sigma_4 + F_{11} \cdot x^2 + 2F_{12} \cdot x \cdot y + 2F_{14} \cdot \sigma_4 \cdot x + F_{22} \cdot y^2 + 2F_{24} \cdot \sigma_4 \cdot y + F_{44} \cdot \sigma_4^2 - 1 = 0 \quad (\text{B.20})$$

Como foi considerado, no estudo, o material ortotrópico, então os coeficientes  $F_4 = 0$ ,  $F_{14} = 0$  e  $F_{24} = 0$ . Assim a Equação (B.20) fica:

$$F_1 \cdot x + F_2 \cdot y + F_{11} \cdot x^2 + 2F_{12} \cdot x \cdot y + F_{22} \cdot y^2 + F_{44} \cdot \sigma_4^2 - 1 = 0 \quad (\text{B.21})$$

Reorganizando a Equação (B.21) tem-se:

$$F_{11} \cdot x^2 + 2F_{12} \cdot x \cdot y + F_{22} \cdot y^2 + F_1 \cdot x + F_2 \cdot y + F_{44} \cdot \sigma_4^2 - 1 = 0 \quad (\text{B.22})$$

Comparando a Equação (B.22) com a Equação (B.2) da cônica tem-se que:

$$F_{11} = A, \quad 2F_{12} = B, \quad F_{22} = C, \quad F_1 = D, \quad F_2 = E \quad \text{e} \quad F_{44} \cdot \sigma_4^2 - 1 = F$$

$$\text{No qual : } F_1 = \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}}, \quad F_2 = \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}}, \quad F_{11} = \frac{1}{f_{t1} \cdot f_{c1}}, \quad F_{22} = \frac{1}{f_{t2} \cdot f_{c2}}, \quad F_{44} = \frac{1}{f_{v4}^2} \quad \text{e}$$

$\sigma_4 = \sigma_{12} = \sigma_{21} =$  *tensão de cisalhamento no momento da ruptura no ensaio de cisalhamento.*

Após a comparação da Equação (B.22) com a Equação (B.2), verifica-se a presença da forma de cônica no critério de resistência para materiais anisotrópicos. Sendo assim, para classificar que tipo de cônica a Equação (B.22) define, considera-se o teorema que envolve apenas a obtenção do determinante da matriz (B.11).

Substituindo  $A = F_{11}$ ,  $B = 2F_{12}$  e  $C = F_{22}$  na matriz (B.11) tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & \frac{2F_{12}}{2} \\ \frac{2F_{12}}{2} & F_{22} \end{bmatrix}$$

simplificando:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

obtendo-se o determinante da matriz (B.23):

$$\det = -F_{12}^2 + F_{11}F_{22} = F_{12}^2 - F_{11}F_{22}$$

Essa igualdade é válida, pois o produto dos autovalores ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ) tem o mesmo sinal do determinante da matriz (B.23).

Pelo teorema do determinante tem-se que:

- Se  $F_{12}^2 - F_{11}F_{22} < 0$  tem-se uma elipse ou suas degenerações, ou

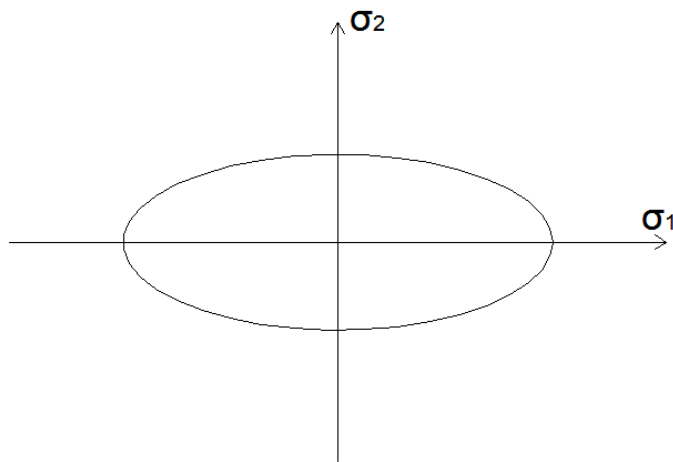


FIGURA B1 – Elipse.

- Se  $F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0$  tem-se uma parábola ou suas degenerações, ou

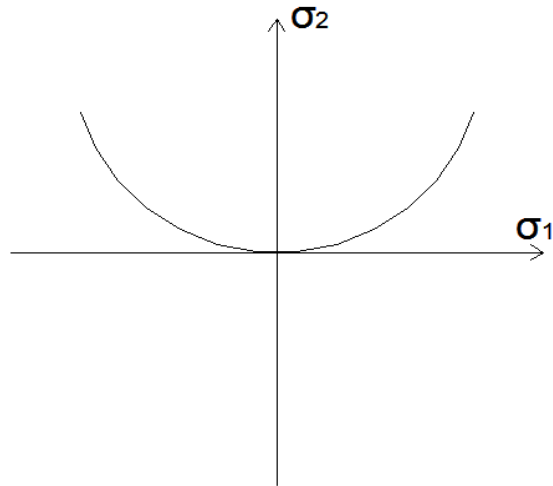


FIGURA B2 – Parábola.

- Se  $F_{12}^2 - F_{11}F_{22} > 0$  tem-se uma hipérbole ou suas degenerações.

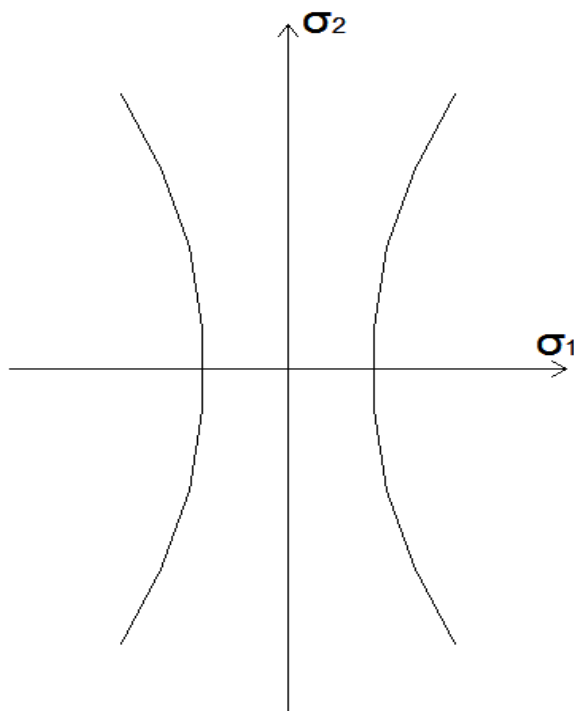


FIGURA B3 – Hipérbole.



Observa-se que as figuras acima mostram regiões no plano 1-2. Ao analisar os gráficos, verifica-se que as funções, definidas pela Equação (B.22), das Figuras B2 e B3, crescem para o infinito e na Figura B1 a superfície apresenta-se fechada, ou seja, tem-se uma região limitada. Segundo FUSCO (1995), a região de ruptura definida pela Equação (B.22) deve ser fechada, pois assim não se permite resistência infinita em estados planos de tensão.

Na Equação (B.22) tem-se o coeficiente  $F_{12}$  que corresponde à atuação das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  simultaneamente e não se pode determiná-lo diretamente pelos ensaios uniaxiais, apenas através dos ensaios biaxiais. Mas através dos ensaios uniaxiais, considerando as direções das fibras da madeira e a equação do critério para materiais anisotrópicos, tem-se o coeficiente expresso, como demonstrado na teoria geral para materiais anisotrópicos, por:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^2 \cdot \left[ \frac{\cos^4 \theta}{f_{t1} \cdot f_{c1}} + \frac{\sin^4 \theta}{f_{t2} \cdot f_{c2}} + \left( 2 \cdot F_{12} + \frac{1}{f_v^2} \right) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \right] + \\ + \sigma_{\theta} \cdot \left[ \left( \frac{1}{f_{t1}} - \frac{1}{f_{c1}} \right) \cdot \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{f_{t2}} - \frac{1}{f_{c2}} \right) \cdot \sin^2 \theta \right] = 1 \end{aligned} \quad (B.23)$$

No qual:  $F_1, F_2, F_{22}, F_{44}$  são os parâmetros apresentados anteriormente;  $\theta$  e  $\sigma_{\theta}$  são, respectivamente, o ângulo de inclinação das fibras da madeira e a tensão de ruptura ensaiada no corpo-de-prova.

Após considerações feitas anteriormente sobre superfícies de ruptura, analisa-se a inequação:

$$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} < 0 \quad (B.24)$$

Que dará os limites do valor  $F_{12}$ , limites estes que assegurarão que a superfície de ruptura seja fechada, apresentando uma elipse.

Trabalhando com a inequação (B.23) tem-se:

$$F_{12}^2 < F_{11}F_{22}$$

segue-se que:

$$F_{12} < \pm\sqrt{F_{11}F_{22}}$$

finalmente:

$$-\sqrt{F_{11}F_{22}} < F_{12} < +\sqrt{F_{11}F_{22}} \quad (\text{B.24})$$

Assim, após o cálculo dos valores de  $F_{12}$ , para as diferentes inclinações das fibras da madeira, verifica-se se estes valores de  $F_{12}$  obedecem à condição (1.24) que assegura uma superfície fechada, juntamente com a segurança do material.