

C2

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,
ARQUITETURA E URBANISMO

ANÁLISE DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE:
PARÂMETROS DE PROJETO

DEBORA PIERINI GAGLIARDO

CAMPINAS - SP

2008

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

DEBORA PIERINI GAGLIARDO

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE: PARÂMETROS DE
PROJETO**

Dissertação apresentada à Comissão de pós-graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, na área de concentração de Estruturas.

ORIENTADOR: DR. NILSON TADEU MASCIA

**CAMPINAS - SP
2008**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G456a Gagliardo, Debora Pierini
 Análise de estruturas sanduíche: parâmetros de
 projeto / Debora Pierini Gagliardo. --Campinas, SP:
 [s.n.], 2008.

 Orientador: Nilson Tadeu Mascia.
 Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura.

 1. Vigas. 2. Placas (Engenharia). 3. Construção
 mista. I. Mascia, Nilson Tadeu. II. Universidade
 Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil e
 Arquitetura. III. Título.

Titulo em Inglês: Sandwich structures analysis: design parameters

Palavras-chave em Inglês: Sandwich structures, Ortotropy, Failure criterion, Beams,
plates

Área de concentração: Estruturas

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora: Nilson Tadeu Mascia, Leandro Vanalli, Derval dos Santos
Rosa

Data da defesa: 21/08/2008

Programa de Pós Graduação: Engenharia Civil

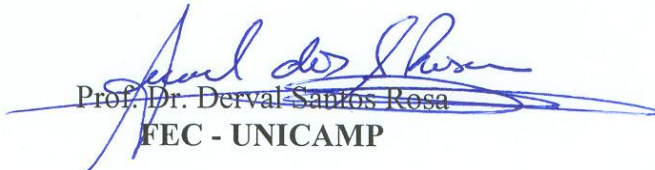
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**


**ANÁLISE DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE:
PARÂMETROS DE PROJETO**

Debora Pierini Gagliardo

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:


Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia
Presidente e Orientador / FEC - UNICAMP


Prof. Dr. Derval Santos Rosa
FEC - UNICAMP


Prof. Dr. Leandro Vanalli
UEM

Campinas, 21 de agosto de 2008

DEDICATÓRIA

*D*edico este trabalho aos meus pais Orlando
(in memorian) e Rosa pelo exemplo de vida e
caráter; e ao meu marido pelo amor, carinho
e paciência no decorrer da jornada.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo paternal e sublime cuidado, por serem sem limites Suas providências, enfim por tudo.

Ao meu marido, Jean Gagliardo, pelo seu amor, seu constante apoio e sua dedicação que tornaram esta conquista muito especial. Obrigada, também, por toda ajuda e colaboração nos momentos de dúvidas e incertezas e por colaborar na programação da planilha de cálculo desta pesquisa.

Aos meus pais, Orlando (*in memorian*) e Rosa, por me amarem, apoiarem e acreditarem que eu seria capaz.

Às minhas irmãs Simone e Raquel, pelo apoio, incentivo e carinho em todos os momentos.

Ao professor e mestre Dr. Nilson Tadeu Mascia, por estar sempre disposto a auxiliar, transmitindo os conhecimentos necessários, experiência profissional e acadêmica; pelo incentivo, orientação e apoio no desenvolvimento deste trabalho, por fim pela dedicação com que me orientou ao longo desta jornada.

A todos os professores e amigos da UNICAMP, que muito auxiliaram com suas experiências e ensinamentos, por terem dado o seu melhor contribuindo para que minha formação acadêmica na área de estruturas fosse sólida.

Ao UNASP – Centro Universitário Adventista de São Paulo, pelo auxílio ao longo deste percurso, possibilitando meu aprimoramento acadêmico e também por me dar toda a base necessária para tornar possível esse momento.

Enfim, àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho, fica registrado o meu MUITO OBRIGADA!!!

*T*odo saber e desenvolvimento têm sua real fonte no conhecimento de Deus. Qualquer que seja o ramo de investigação a que procedamos com o sincero propósito de chegar à verdade, somos postos em contato com a inteligência invisível e poderosa que opera em tudo e através de tudo. A mente humana é colocada em comunhão com a mente divina, o finito com o infinito. O efeito de tal comunhão sobre o corpo, o espírito e a alma, está além de toda estimativa. Quanto mais aplicadamente for cultivado o intelecto, tanto mais eficazmente poderá ele ser empregado. Talentos usados são talentos que se multiplicam.

Ellen G. White

RESUMO

GAGLIARDO, D. P. **Análise de estruturas sanduíche**: parâmetros de projeto. Campinas, 2008. 166p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, 2008.

As estruturas sanduíche têm despertado grande interesse e já estão bastante difundidas em diversos segmentos industriais, sendo suas principais utilizações nas indústrias aeroespacial, militar, naval e civil. Este fato se deve à sua propriedade de combinar alta rigidez à flexão e baixo peso, resultando em uma estrutura muito eficiente. Neste sentido, a análise e cálculo das estruturas sanduíche são de extrema importância no desenvolvimento de projetos de aplicação do mesmo. Neste trabalho, foram analisados os critérios de falha dos painéis, bem como os materiais e suas propriedades mecânicas, considerando as alterações e considerações que devem ser feitas nos projetos de acordo com as características do material. Na parte final dessa pesquisa, são apresentadas a teoria de cálculo e a rotina para elaboração de projetos relacionados com a construção civil utilizando as estruturas sanduíche, com ênfase em estruturas planas, tais como vigas e placas. Por fim emprega-se uma ferramenta, planilha eletrônica, para analisar e avaliar a aplicação de diversos materiais de construção em estruturas sanduíche.

Palavras Chave: estruturas sanduíche, ortotropia, critérios de falha, vigas, placas.

ABSTRACT

GAGLIARDO, D. P. Analysis of sandwich structures: the design parameters. Campinas, 2008. 166p. Dissertation (Master's Degree in Structures) – Faculty of Civil Engineering, Architecture and Urbanism, State University of Campinas.

The sandwich structures have aroused great interest and have already been very widespread in several branches in industries, such as in the aerospace, military, naval and civil construction industries. This is due to their property to combine both high bending rigidity and the low weight, resulting in a very efficient structure. Thus, the analysis and also the calculation of sandwich structures are very important in developing the application projects. In this work, it was reviewed the failure criteria of the panels, as well as the materials and their mechanical properties, considering the changes and considerations that have to be performed in the project in accordance with the characteristics of the material. At the final part of this research, the theory of calculation and also the routine for development projects related with the civil construction using the sandwich structures are presented, with emphasis on flat structures, such as beams and plates. Finally employs is a tool, spreadsheet, to analyse and evaluate the implementation of various building materials in sandwich structures.

Key words: sandwich structures, ortotropy, failure criterion , beams, plates

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Madeira compensada.....	22
Figura 2.1	- Painéis sanduíche.....	29
Figura 2.2	- Painei Wall Eternit.....	30
Figura 2.3	- Painei Wall Ti EPS	31
Figura 2.4	- Painéis sanduíche com recheio: (a) polimérico; (b) colméia; (c) corrugado	32
Figura 2.5	- Modelos de núcleos corrugados.....	35
Figura 3.1	- Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria clássica	42
Figura 3.2	- Forças resultantes no plano da lâmina	43
Figura 3.3	- Momentos resultantes no plano da lâmina.....	43
Figura 3.4	- Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria de primeira ordem.....	44
Figura 3.5	- Viga sanduíche sujeita a uma força de flexão em 3 pontos	49
Figura 4.1	- Tensões coplanares num ponto genérico de coordenadas P de uma lâmina.....	60
Figura 4.2	- Constantes transformadas para o compósito glass/epóxi.....	63

Figura 4.3 - Constantes transformadas para o compósito boron/epóxi	64
Figura 4.4 - Variação dos coeficientes de influência mútua e de Poisson	64
Figura 4.5 - Variação dos módulos de elasticidade longitudinal e de cisalhamento	65
Figura 5.1 - Estado triaxial de tensões.....	68
Figura 5.2 - Critério da máxima tensão normal.....	70
Figura 5.3 - Critério da máxima energia de distorção (von Mises).....	71
Figura 5.4 - Superfície do critério de Tsai-Wu.....	75
Figura 5.5 - Falha por escoamento ou por ruptura das faces.....	78
Figura 5.6 - Falha por cisalhamento no núcleo	78
Figura 5.7 - Falha por flambagem global do painel	79
Figura 5.8 - Falha por deslocamento excessivo.....	79
Figura 5.9 - Falha por <i>wrinkling</i> das faces	80
Figura 5.10 - Falha por flambagem intracelular da face (<i>dimpling</i>).....	81
Figura 5.11 - Falha por esmagamento no núcleo	81
Figura 6.1 - Viga biapoiada sob carga distribuída uniforme p	85
Figura 6.2 - Viga de Timoshenko.....	86
Figura 6.3 - Dimensões da viga sanduíche: (a) seção longitudinal; (b) seção transversal A-A ...	92
Figura 6.4 - Seção transversal de uma viga sanduíche.....	96
Figura 6.5 - Distribuição de tensões cisalhantes numa viga sanduíche: (a) distribuição quadrática; (b) efeito de núcleo com baixo E_n e da eliminação da rigidez flexural das faces.....	97
Figura 6.6 - Deslocamentos em viga sanduíche: (b) deslocamento devido a parcela de flexão pura; (c) deslocamento devido ao esforço cortante	99
Figura 6.7 - Deformação de cisalhamento de uma viga sanduíche	101

Figura 6.8 - Comparação quantitativa entre os deslocamentos obtidos em placas sanduíche usando teorias de placa fina e semi-espessa	105
Figura 6.9 - Propriedades geométricas de uma placa sanduíche	106
Figura 6.10 - Nomenclatura usada na solução do painel sanduíche retangular.....	112
Figura 7.1 - Gráfico comparativo: face em alumínio 5052	129
Figura 7.2 - Gráfico comparativo: núcleo em poliestireno.....	132
Figura 7.3 - Gráfico comparativo: face em placa cimentícia	135

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Carga máxima distribuída por painel (daN/cm ²)	30
Tabela 2.2 - Adesivos poliésteres silil-terminados	33
Tabela 2.3 - Tipos e combinações de adesivos	34
Tabela 2.4 - Propriedades termomecânicas típicas de espumas e plásticos expandidos e madeira tipo balsa	36
Tabela 2.5 - Normas de ensaio aplicáveis a sanduíches	37
Tabela 2.6 - Propriedades típicas de faces de sanduíche	39
Tabela 6.1 - Valores para o coeficiente de cisalhamento k^2	88
Tabela 6.2 - Fator K_1 para o deslocamento máximo num painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.	114
Tabela 6.3 - Fator K_2 para a tensão normal máxima na face de um painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.	115
Tabela 6.4 - Fator K_3 para a tensão cisalhante no núcleo de um painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.	115

Tabela 6.5 - Fator K_4 para a tensão cisalhante no núcleo de um painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.....	116
--	-----

LISTA DE SÍMBOLOS

$\varepsilon_i \rightarrow$	deformações normais
$\gamma_{ij} \rightarrow$	deformações tangenciais ou de cisalhamento
$\sigma_i \rightarrow$	tensão normal
$\tau_{ij} \rightarrow$	tensão tangencial ou de cisalhamento
$E \rightarrow$	módulo de Young ou de elasticidade longitudinal
$G \rightarrow$	módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento
$\nu \rightarrow$	coeficiente de Poisson
$\mathbf{E}_{ij} \rightarrow$	matriz de coeficientes de elasticidade do material
$\mathbf{D}_{-} \rightarrow$	matriz de coeficientes de elasticidade reduzida
$\mathbf{S}_{-} \rightarrow$	matriz de compliância do material
$\mathbf{T}_{-} \rightarrow$	matriz de transformação
$f_{x_c} \rightarrow$	limite de resistência à compressão para cargas paralelas as fibras
$f_{x_t} \rightarrow$	limite de resistência à tração para cargas paralelas as fibras
$f_{y_c} \rightarrow$	limite de resistência à compressão para cargas perpendiculares as fibras

$f_{y_t} \rightarrow$	limite de resistência à tração para cargas perpendiculares as fibras
$f_\tau \rightarrow$	limite de resistência ao cisalhamento no plano 1-2
$C \rightarrow$	coeficiente de segurança
$F \rightarrow$	carga concentrada transversal ou compressiva em viga
$M \rightarrow$	momento fletor
$V \rightarrow$	força cortante
$w \rightarrow$	função deslocamento em um ponto de coordenadas (x, y, z)
$I \rightarrow$	momento de inércia
$d/dx \rightarrow$	derivada
$\psi \rightarrow$	rotação da seção transversal
$k \rightarrow$	constante (coeficiente de cisalhamento)
$A \rightarrow$	área da seção
$\int_a^b \dots dA \rightarrow$	integral definida
$D \rightarrow$	rigidez à flexão
$\omega \rightarrow$	raio de curvatura
$h \rightarrow$	espessura total da viga ou painel sanduíche
$t \rightarrow$	espessura da face de um sanduíche
$c \rightarrow$	espessura do núcleo de um sanduíche
$L \rightarrow$	comprimento total de uma peça sanduíche
$E_f, E_n \rightarrow$	módulo de elasticidade das faces e do núcleo
$S \rightarrow$	momento estático
$\sum \rightarrow$	somatória
$\rho \rightarrow$	densidade do material
$\lambda \rightarrow$	constante de proporcionalidade
$daN \rightarrow$	deca Newton
$N \rightarrow$	Newton

G_{LT} e $G_{WT} \rightarrow$ módulos de elasticidade cisalhantes transversais do núcleo colméia.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
1.1 Objetivos	23
1.2 Relevância do estudo	24
1.3 Organização do trabalho	24
2 ESTRUTURAS SANDUÍCHE	27
2.1 Aplicações de estruturas sanduíche	27
2.2 Materiais e propriedades	32
2.2.1 Adesivos	33
2.2.2 Núcleos	35
2.2.2.1 Ensaios em núcleos e sanduíches	37
2.2.3 Faces	38
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	41
3.1 Teoria de placas laminadas	41
3.1.1 Teoria clássica de laminação de placas	41
3.1.2 Teoria de primeira ordem de laminação de placas	44
3.1.3 Teoria de elasticidade de Pagano	45
3.1.4 Método dos elementos finitos	45
3.1.5 Teorias de terceira ordem	46
3.2 Análises de estruturas sanduíche	49
4 COMPORTAMENTO ELÁSTICO DE UMA LÂMINA	55

4.1 Relação tensão-deformação	55
4.2 Material ortotrópico sob estado plano de tensão	58
4.3 Transformação de coordenadas	59
5 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA E MODOS DE FALHA PARA ESTRUTURAS SANDUÍCHE	67
5.1 Critérios de falha para uma lâmina ortotrópica	68
5.1.1 Critério da máxima tensão normal (critério de Rankine).....	69
5.1.2 Critério da máxima energia de distorção (critério de von Mises)	70
5.1.3 Critério de Tsai-Hill	72
5.1.4 Critério de Tsai-Wu.....	73
5.1.5 Critério de Hoffman	76
5.2 Modos de falha.....	77
5.2.1 Escoamento ou ruptura das faces	77
5.2.2 Cisalhamento no núcleo	78
5.2.3 Flambagem global do painel	79
5.2.4 Deslocamento excessivo	79
5.2.5 Empenamento das faces (<i>wrinkling</i>).....	80
5.2.6 Flambagem intracelular (<i>dimpling</i>).....	80
5.2.7 Esmagamento do núcleo	81
6 PROJETO DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE	83
6.1 Teoria de Euler-Bernoulli para vigas	83
6.2 A viga de Timoshenko	85
6.3 Comparação entre a viga de Timoshenko e a viga de Euler-Bernoulli	91
6.4 Aplicação da teoria de flexão às vigas sanduíche.....	91
6.4.1 Rigidez à flexão da viga sanduíche.....	93
6.4.2 Tensão normal.....	95
6.4.3 Tensões cisalhantes	95
6.4.4 Deslocamentos em vigas sanduíche	99
6.5 Teoria de placas	103
6.5.1 Teoria de primeira ordem para placas sanduíche.....	105
6.6 Aplicação da teoria de flexão às placas sanduíche	111
6.6.1 Flexão e deslocamento de placa sanduíche	111
6.6.2 Minimização de peso com momento fletor dado	116
7 ROTINA DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS SANDUÍCHES	119
7.1 Aplicação da rotina de cálculo empregando uma planilha eletrônica	124
7.2 Avaliação da rotina de cálculo com diferentes materiais	126
Caso 1	126

Caso 2.....	129
Caso 3.....	133
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	137
9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	139
ANEXOS.....	147
ANEXO A – Dimensionamento de placa (face alumínio 5052 e núcleo em poliestireno expandido).....	149
ANEXO B – Dimensionamento de placa (face alumínio 5052 e núcleo em poliuretano) ...	151
ANEXO C – Dimensionamento de placa (face alumínio 5052 e núcleo em PVC).....	153
ANEXO D – Dimensionamento de placa (face alumínio 5052 e núcleo em balsa)	155
ANEXO E – Dimensionamento de placa (face alumínio 5052 e núcleo fenólico)	157
ANEXO F – Dimensionamento de placa (face alumínio 5052 e núcleo em poliestireno expandido).....	159
ANEXO G – Dimensionamento de placa (face aço carbono e núcleo em poliestireno expandido).....	161
ANEXO H – Dimensionamento de placa (face woven glass/epóxi 1581 – F155 e núcleo em poliestireno expandido)	163
ANEXO I – Dimensionamento de placa (face compensado/pinho e núcleo em poliestireno expandido).....	165
ANEXO J – Dimensionamento de placa (face inox 304 e núcleo em poliestireno expandido).....	167
ANEXO K – Dimensionamento de placa (face placa cimentícia e núcleo em poliestireno expandido).....	169
ANEXO L – Dimensionamento de placa (face placa cimentícia e núcleo em balsa)	171
ANEXO M – Dimensionamento de placa (face placa cimentícia e núcleo em poliuretano)	173

1. INTRODUÇÃO

De acordo com Callister (2002) um compósito estrutural é composto tanto por materiais homogêneos como por materiais heterogêneos ou compósitos, cujas propriedades dependem não somente das propriedades dos materiais constituintes, mas também do projeto geométrico dos elementos estruturais. Dentre estes compósitos destacam-se os laminares e os sanduíche.

Projetos de estruturas sanduíche têm sido concebidos e adotados como um meio de gerar estruturas resistentes, duráveis e de baixo peso. Essas estruturas são, especialmente, eficientes na transferência de cargas de flexão e compressão. O uso das estruturas sanduíche vem se expandindo devido a sua capacidade de combinar alta rigidez à flexão e baixo peso.

A importância da diminuição do peso de estruturas foi primeiramente reconhecida pelas indústrias aeroespaciais, pois nelas o projeto estrutural do avião é controlado mais pelo peso que pelo custo. Em contrapartida nas indústrias civil, mecânica e automotiva, os custos são as considerações iniciais, apesar de que o peso do sistema, afeta os custos e o desempenho. Outro fator importante nestas considerações é que a crescente falta de matéria-prima e o rápido esgotamento das fontes de energia convencional aumenta a necessidade de estruturas leves, eficientes e de baixo custo.

De maneira geral, a aplicação de elementos tipo sanduíche tem-se restringido a edificações, sendo eles utilizados como painéis de fechamento (portantes ou não), forros e lajes. Esse método construtivo proporciona boas características de resistência e de isolamento termo-acústico, podendo ser uma alternativa vantajosa em relação a outros tipos tradicionais de construção, como os que utilizam paredes de alvenaria ou sistemas pré-fabricados de concreto, por exemplo.

Uma estrutura sanduíche consiste basicamente de duas placas (faces finas) de um material resistente, intercaladas por uma camada de outro material, em geral de baixa densidade e resistência inferior a das placas. A resistência desse conjunto à flexão, em certas condições, pode ser muito maior que a de uma placa maciça, constituída do mesmo material e de mesma densidade que as duas faces do sanduíche.

A principal função das faces na estrutura sanduíche é fornecer a rigidez à flexão e a rigidez ao cisalhamento, requeridas e suportar assim as cargas de flexão bem como as cargas de cisalhamento no plano. Dentre os materiais típicos que são utilizados para as faces, estão incluídos as ligas de alumínio, os plásticos reforçados com fibras, o titânio, o aço e a madeira compensada (Figura 1.1).

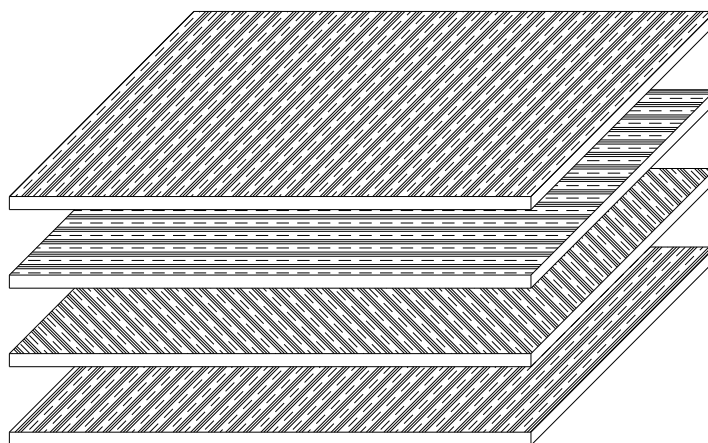


Figura 1.1 – Madeira compensada.

A camada central ou núcleo têm várias funções importantes, dentre elas:

- deve ser suficientemente rígido na direção perpendicular às faces para garantir que estas permaneçam à distância correta uma da outra;
- deve ser suficientemente rígido ao cisalhamento para assegurar que quando a estrutura for fletida as faces não deslizem uma sobre a outra e também deve ser suficientemente rígido para manter as faces aproximadamente planas.

Vários materiais e estruturas são utilizados como núcleo ou recheio, incluindo polímeros em espuma, borrachas sintéticas, cimentos inorgânicos e madeira de baixa densidade, como por exemplo, a madeira de balsa.

1.1. OBJETIVOS

Objetivo Geral:

Os objetivos principais deste trabalho são estudar e analisar as estruturas sanduíche, já aplicadas no Brasil e em outros países, considerando seu comportamento mecânico e possíveis aplicações na construção civil. Propõe-se aplicar uma rotina de cálculo com o auxílio de ferramentas computacionais.

Objetivos específicos:

Como objetivos específicos que nortearam a pesquisa têm-se:

- apresentar as aplicações das estruturas sanduíche em diversas áreas da engenharia, principalmente, na construção civil;
- analisar os principais critérios de falha para compósitos estruturais, considerando a natureza dos materiais empregados;

- analisar as teorias de flexão referentes às estruturas sanduíche, vigas e placas, no que concerne ao tratamento das propriedades mecânicas;
- aplicar uma rotina de cálculo para estruturas sanduíche.

1.2. RELEVÂNCIA DO ESTUDO

Segundo Bertini (2002) a idéia da “Construção Sanduíche” pode proporcionar uma economia no consumo de materiais de melhor desempenho através da combinação com materiais menos nobres, podendo-se ainda conseguir elementos mais leves e de adequada resistência. Talvez esses fatores tenham sido a causa do grande impulso de sua utilização nas mais diversas aplicações.

Este trabalho apresenta como principais contribuições a sistematização do cálculo de estruturas sanduíche e a organização de dados. Com a sistematização do cálculo, torna-se factível a criação de rotinas que facilitem a comparação de diversas combinações face/núcleo, chegando assim a uma solução ótima de forma concisa e segura.

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste capítulo, nos itens anteriores, foram apresentados a relevância do assunto e os objetivos do trabalho.

No capítulo 2 consideram-se as aplicações das estruturas sanduíche nas diversas áreas atendo-se à indústria da construção civil no Brasil. Além disso, apresentam-se os materiais constituintes na fabricação dessas estruturas, juntamente com suas propriedades.

No capítulo 3 faz-se uma revisão bibliográfica sobre as teorias de placas, base para as estruturas tipo sanduíche. em seguida apresenta-se os resultados da revisão bibliográfica realizada para a pesquisa.

No capítulo 4 considera-se o comportamento elástico da lâmina de materiais compósitos; apresenta uma revisão das equações constitutivas (relações tensão-deformação).

No capítulo 5 são discutidos os critérios de resistência utilizados para estruturas tipo sanduíche, além da apresentação dos modos de falha característicos.

No capítulo 6 são feitas algumas considerações sobre o projeto de estruturas sanduíche levando-se em consideração o comportamento estrutural dos elementos, vigas e/ou placas, sendo estes fatores fundamentais na determinação de tensões máximas, deslocamentos máximos, entre outros critérios aplicáveis a cada projeto especificamente.

No capítulo 7 apresenta-se uma rotina de cálculo para as estruturas sanduíche: vigas e placas. Também são apresentados exemplos de cálculo organizados e calculados com o auxílio de planilhas eletrônicas, formuladas a partir da rotina de cálculo apresentada.

No capítulo 8 apresentam-se as conclusões obtidas através da análise realizada sobre: o comportamento estrutural desses elementos e os critérios que se julgam mais importantes e, principalmente, a análise da rotina de cálculo para estruturas sanduíche, desenvolvida e aplicada em alguns exemplos de cálculo.

Ao final, as referências bibliográficas e os anexos são apresentados.

2. ESTRUTURAS SANDUÍCHE

Conforme já descrito as estruturas sanduíche são formadas por duas camadas externas finas, faces, e uma camada interna espessa, núcleo. Estas estruturas constituem um tipo especial de laminado. As faces têm a função de suportar as tensões normais de tração, compressão ou cisalhamento, associadas à flexão. O núcleo, por sua vez, deve manter o afastamento das faces, ser rígido na direção perpendicular a elas a fim de evitar o esmagamento, e a sua rigidez ao cisalhamento transversal deve ser grande o suficiente de modo a garantir que o conjunto funcione.

2.1. APLICAÇÕES DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE

A partir da década de 1950 as estruturas sanduíche têm sido usadas com sucesso em algumas áreas da indústria:

a) Indústria Aeroespacial

Essa indústria têm se utilizado dessas estruturas na construção de aviões e equipamentos como:

- pás de rotor de helicóptero;
- bico da aeronave;
- painéis das asas dos aviões;
- dutos de ar;
- piso de compartimento de carga.

b) Indústria Militar

A indústria militar se utiliza das estruturas sanduíche na construção de mísseis e veículos espaciais, como ilustrações:

- aletas e superfícies de controle;
- antenas;
- tanques;
- contêineres de carga.

c) Construção Civil

Da mesma forma como ocorreu com os materiais compostos em geral, a aplicação dos sanduíches tem se expandido em direção à indústria da construção civil a partir da década de 1990. As principais aplicações destas estruturas se dão em:

- abrigos pré-fabricados para defesa civil;
- divisórias, paredes, pisos e forros;
- portas;
- fôrmas;
- coberturas – telhas;
- mezaninos e passarelas;
- lajes;
- vigas.

A área da construção civil é uma das áreas em que a utilização de sanduíches ainda é recente, no entanto já existem materiais no mercado com características importantes, bem desenvolvidas, os sanduíches industrializados utilizados para divisórias, paredes, pisos, forros, mezaninos, passarelas e lajes, entre outras aplicações, possuem resistência a elevadas cargas distribuídas, conseguem vencer grandes vãos, resistência à umidade e intempéries, excelente isolamento térmico e acústico, alta resistência a impactos, resistência ao fogo e respeito ao meio ambiente.

Na Figura 2.1, tem-se exemplos de dois painéis sanduíche. Nos dois painéis sanduíche as faces são confeccionadas em placas cimentícias e seus núcleos são de poliestireno expandido (isopor) e madeira (*Pinus*).



***Figura 2.1 – Painéis sanduíche.
Fonte: amostras Decorlit (Foto autora)***

Atualmente, algumas empresas estão atuando no mercado brasileiro. Entre elas temos:

- **Brasilit:** (www.brasilit.com.br) produz o painel Masterboard, onde as faces são compostas por placas cimentícias reforçadas com fibras e o núcleo é em OSB Home da Masisa. Estes painéis são empregados em divisórias, mezaninos, paredes, lajes, etc. A Tabela 2.1 apresenta a carga máxima que pode ser aplicada sobre o painel.

Tabela 2.1 – Carga máxima distribuída por painel (daN/cm²).

Distância entre apoios (mm)	Espessura dos painéis (mm)		
	14	23	40
400	0,14	0,42	1,4
600	0,04	0,12	0,40
800	-	0,05	0,17
1000	-	0,025	0,085
1200	-	-	0,05

Fonte: Manual Masterboard, site: www.brasilit.com.br

A linha de painéis Masterboard possui diferentes espessuras, oferecendo assim opções para cada situação de uso.

- **Eternit:** (www.eternit.com.br) painéis Wall, são constituídos por placas cimentícias reforçadas com fibras e núcleos de madeira de reflorestamento. Estes painéis são autoportantes até 4 pavimentos sem a necessidade do emprego de nenhum reforço estrutural. A Figura 2.2 apresenta a seção de um destes painéis.

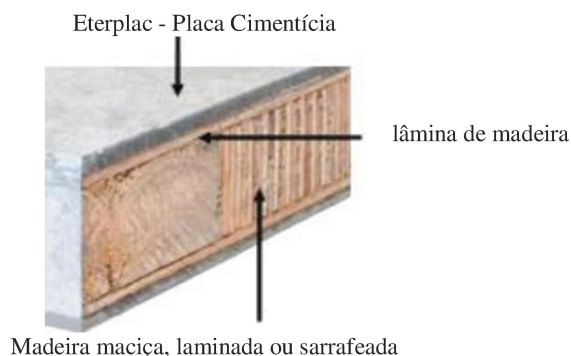


Figura 2.2 – Painel Wall Eternit.

Fonte: www.eternit.com.br

- **Decorlit:** (www.decorlit.com.br) painéis Wall, estes painéis são confeccionados com placas cimentícias reforçadas com fibras e compostas por núcleos em poliestireno expandido – EPS, conhecido como isopor (Figura 2.3) ou madeira sarrafeada. São ideais para serem aplicados como divisórias, paredes, mezaninos, etc.;



*Figura 2.3 – Painel Wall Ti EPS.
Fonte: www.decorlit.com.br*

- **Isoeste:** (www.isoeste.com.br) painéis Isojoint Wa Pur, são constituídos de núcleo de poliuretano de alta densidade e revestidos com chapa de aço pré pintado. Suas aplicações principais são coberturas, divisórias, fachadas, etc.

d) Outros

Nesta modalidade encontram-se outras aplicações das estruturas sanduíche:

- móveis domésticos e de escritório;
- cascos de barcos;
- piso de *trailers* e *motor-homes*;
- containeres e carrocerias.

2.2. MATERIAIS E PROPRIEDADES

A Figura 2.4 apresenta algumas possibilidades de recheios para um painel sanduíche.

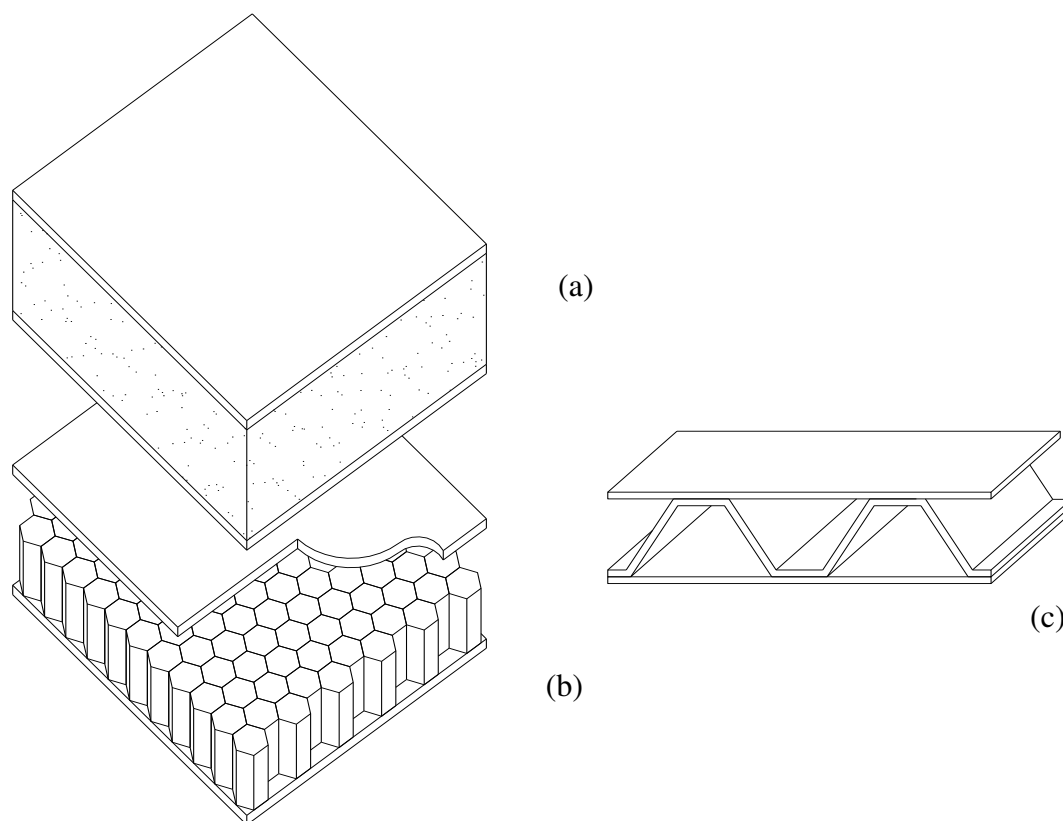


Figura 2.4 – Painéis sanduíche com recheio: (a) polimérico, (b) colméia, (c) corrugado.
Fonte: Allen (1969)

Analisando-se a figura, torna-se clara a possibilidade de utilização de vários materiais (faces, núcleos, adesivos) em sua fabricação, sendo que para cada finalidade existem opções de materiais com propriedades mecânicas distintas.

2.2.1. ADESIVOS

Os adesivos são disponibilizados em diversas formas, como líquidos, pastas, pós e filmes. Sua aplicação pode ser feita por spray, rolo ou espátula, ou outras formas manuais. Os principais adesivos utilizados na fabricação de estruturas sanduíche são à base de epóxi.

A característica mais conhecida das resinas epóxi é a sua excepcional adesão às mais variadas superfícies. A maior parte dos adesivos à base de resinas epóxi é bicomponente, porém, agentes de cura latente podem ser empregados para produzir adesivos monocomponentes. A boa capacidade das resinas epóxi de molhar superfícies diversas, contribui para sua excelente adesão com contração desprezível durante o processo de cura. Pela modificação das resinas epóxi com flexibilizantes, plastificantes, cargas inertes e outros aditivos, propriedades adesivas específicas podem ser intensificadas a fim de simplificar, reforçar ou melhorar o seu desempenho.

Além dos adesivos a base de epóxi atualmente existe no mercado os poliésteres silil-terminados. A Tabela 2.2 apresenta as informações técnicas para este adesivo.

Tabela 2.2 Adesivos poliésteres silil-terminados.

Tipo de adesivo	Temp. trab. T	Resistência mecânica	Fabricantes	Designação comercial	Partes aderentes
Poliésteres silil-terminados	-40°C a + 120°C	torção flexão impactos	Adespec	Pesilox	metais, vidro, cerâmica, madeira e derivados, polímeros, concreto, rochas.

A Tabela 2.3 apresenta alguns adesivos estruturais comerciais, bem como as combinações recomendadas de adesivo e aderente.

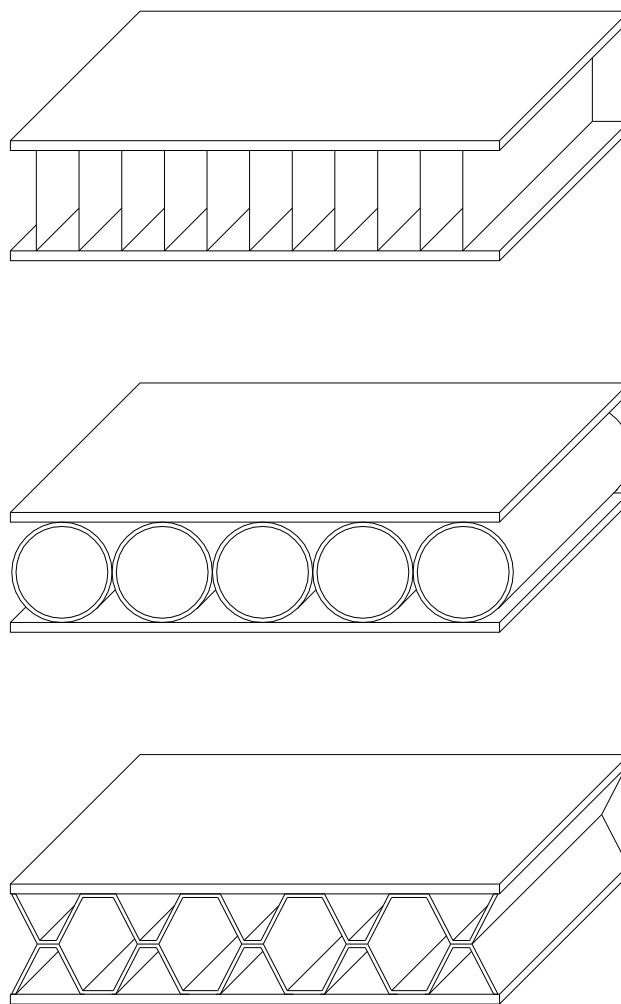
Tabela 2.3 Tipos e combinações de adesivos.

Tipo de Adesivo			Filmes nitrilofenólicos	Epóxi não-modificado	Filme epóxi modificado para cura a 120°C	Filme epóxi modificado para cura a 175°C	Epóxi poliamida	Epóxi poliamida
Temp. trab. T (°C)			-	-55 - 150	-120 - 80	-55 - 120	-185 - 120	até 310
Resist. à temp. T (MPa)			-	9-21 5,5-21	10-17 7-13	21-23 10-17	28-34 19-23	23
Resist. à temp. amb. (MPa)			-	21	31	23	38	23
Fabricantes e designações comerciais.			3M C. – AF30, AF31, AF32, AF6, AF10 Narmco – Meltbond 402 BF Goodrich – Plastilock 601, 603, 637	Narmco 3M Co.	3M Co. – AF126, AF126-2, AF127 Narmco – Meltbond 117, M1113, M1133 BF Foodrich – Plastilock 706, 707, 717 Ciba-Geigy – R393, R7114 Hexol Corp. – HP348, F185	3M Co. – AF130-2, AF131-A, AF193-2 Narmco – Meltbond 328, 329, 392-1, 1515 BF Goodrich – Plastilock 729-3, 731, 737 Hexcel – Structufilm R398	Hysol – EA951 3M Co. – AF42 American Cyanamid – FM1000	Hexel Corp. – HP955, HP956 American Cyanamid – FM34B-18
Partes Aderentes	Chapas	Alumínio	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	
		Aço	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	
		Titânio	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível
		Magnésio	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível
	Colméia	Alumínio	Parcialmente compatível	Compatível	Compatível	Parcialmente compatível	Compatível	
		Aço Inox	Parcialmente compatível	Compatível	Compatível	Parcialmente compatível	Compatível	Compatível
		Papel Impregn.	Parcialmente compatível	Compatível		Parcialmente compatível		
		Fibra de Vidro	Parcialmente compatível	Compatível	Compatível	Parcialmente compatível	Parcialmente compatível	
	Espumas	Poliuretano	Parcialmente Compatível	Compatível		Parcialmente Compatível		
		Poliestireno	Parcialmente Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	
	Laminado vidro/epóxi		Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível	Compatível
	Madeira Compensada		Parcialmente Compatível	Compatível		Parcialmente Compatível		

Fonte: Mendonça (2005)

2.2.2. NÚCLEOS

Os núcleos podem ser confeccionados com diversos materiais e podem ser em colméia, corrugados (Figura 2.5) ou poliméricos. Os núcleos colméias e corrugados são fabricados pelo corte de chapas em diversos materiais como alumínio, aço inox, papel, fibras de vidro.



***Figura 2.5 – Modelos de núcleos corrugados.
Fonte: Allen (1969)***

Os núcleos de espuma, segundo Allen (1969) e Mendonça (2005) são compostos por espuma formada por plásticos expandidos e solidificados. Existem vários tipos de espumas disponíveis, como a de PVC, a de poliuretano ou de silicone. As propriedades mecânicas destes materiais encontram-se na Tabela 2.4. As propriedades termomecânicas das espumas variam principalmente com a densidade imposta no processo de solidificação.

Tabela 2.4 – Propriedades termomecânicas típicas de espumas e plásticos expandidos e madeira tipo balsa.

Propriedades	PVC	Fenólicos	Poliuretano	Poliestireno (isopor)	Balsa
Densidade ρ , Kg/m ³	65	55	70	40	92
Módulo de elasticidade E_T	55	7	19	11	2450
Tensão limite a compressão σ_{esm}	1	0,17	0,5	0,27	6,3
Módulo de cisalhamento G_{LT}	9	3,5	5,0	4,5	105
Tensão limite cisalhante $f_{\tau LT}$	1,15	0,14	0,6	0,3	
Coeficiente dilatação térmica α , $10^{-6}^{\circ}\text{C}^{-1}$			108		
Coef. de absorção de água β , % em volume			1,3		
Condutividade térmica a 37,5°C, W/m°C			0,0354		
Temperatura máxima de serviço contínuo, °C			120		

Tensões e Módulos em Mpa. Os valores de G_{WT} e $f_{\tau WT}$ são idênticos a G_{LT} e $f_{\tau LT}$, respectivamente. onde: E_T - módulo de elasticidade na direção T; G_{LT} - módulo de cisalhamento no plano LT; G_{WT} - módulo de cisalhamento no plano WT do painel sanduíche.

Fonte: Allen (1969)

Como é possível observar algumas propriedades são muito características das espumas plásticas. Essas espumas têm baixa condutividade térmica, em geral têm alta resistência à água, altas taxas resistência/peso, baixa permeabilidade à umidade e elevada resistência à corrosão.

As espumas plásticas podem ser adquiridas em forma líquida, para ser combinada com os reagentes no local, ou podem ser adquiridas em forma de pranchas.

Além dos núcleos de espuma e balsa, encontramos outros núcleos de madeira, principalmente, *Pinus* e OSB (Oriented Strand Board). Os núcleos de madeira apresentam alta resistência mecânica e rigidez.

2.2.2.1. ENSAIOS EM NÚCLEOS E SANDUÍCHES

Na Tabela 2.5 apresentam-se algumas normas americanas da ASTM (American Society for Testing and Materials) referentes aos ensaios em núcleos e sanduÍCHES.

Tabela 2.5 – Normas de ensaio aplicáveis a sanduÍCHES.

	Norma	Assunto
1	ASTM D1781-98(2004)	Deslocamento de adesivos (determinação da resistência ao deslocamento normal de adesivos entre a face e o núcleo)
2	ASTM C364/C364M-07	Ensaio de compressão coplanar de sanduíche
3	ASTM C393-00	Ensaio de flexão em três e quatro pontos para sanduíche
4	ASTM D3499-94(2005)	Tenacidade de compensados
5	ASTM D3500-90(2004)	Tração em painéis compensados estruturais
6	ASTM D 3501-05a	Compressão em painéis compensados estruturais
7	ASTM D 3502-76	Absorção de umidade em produtos de madeira
8	ASTM D 3503-76	Efeito de dilatação higroscópica em produtos de madeira

Fonte: Mendonça (2005)

Allen (1969) faz uma análise do ensaio de flexão ASTM C 393-62 em conjunto com resultados de uma análise mecânica e o considera bastante versátil, podendo fornecer tanto informações sobre as propriedades globais do comportamento do sanduíche quanto sobre um de seus componentes. Através desse ensaio podem ser obtidas:

- resistências à tração e à compressão das faces;
- rigidez do conjunto;
- módulo de elasticidade do núcleo; e
- resistência cisalhante do núcleo.

2.2.3. FACES

Comercialmente existem alguns materiais utilizados como faces de sanduíches. A Tabela 2.6 apresenta estes materiais, assim como os valores de algumas de suas propriedades típicas. Posteriormente estes dados característicos poderão ser utilizados nos cálculos e verificações para o dimensionamento de estruturas utilizando painéis sanduíche.

Além dos materiais especificados na Tabela 2.6 outros materiais podem ser empregados na fabricação de faces para os sanduíches. Um dos exemplos mais atuais são as placas cimentícias reforçadas com fibras, sem amianto, utilizadas por diversas empresas nacionais e internacionais, dentre elas: Brasilit, Eternit e Decorlit.

De acordo com dados fornecidos pela Brasilit (www.brasilit.com.br) as placas sanduíche (painéis Wall) produzidas por eles são compostas por: cimento, celulose e reforçadas com fios sintéticos. A densidade dessas placas é de, aproximadamente, 1700 kg/m^3 e seu custo é relativamente baixo.

Tabela 2.6 – Propriedades típicas de faces de sanduíche.

Material	$E^{(I)}$ GPa	$\sigma_E^{(II)}$ MPa	$\nu^{(III)}$	$\rho^{(IV)}$ kg/m ³	Aspectos Gerais
Alumínio ^(V)					
1100-H14	70	90c ^(VI)	0,33	2.710	custo médio, resistência química
5052-H34	70	165c	0,33	2.710	custo médio, resistência a intempéries
6061-T6	70	240c,t	0,33	2.710	soldável, trabalhável alta resistência,
2024-T3	72	300t	0,33	2.710	resistência à corrosão, temperável
Aço carbono	200	350	0,3	7.680	baixo custo, pesado
Inox 304	190	250	0,24	7.680	alto custo, resistência à corrosão
Woven grafite/epóxi 282-F155	55	60	0,1	1.540	
Fita grafite/epóxi TXX145-F155	120	1.300	0,1	1.690	alto custo, leve
Woven kevlar/epóxi K49-285-F155	28	200c	≈0	1.400	leve, baixa resistência à compressão
Fita kevlar/epóxi	65	1.100t 250c	≈0	1.400	custo médio
Vidro/poliéster	6,5	100	0,14	1.400	custo bastante baixo
Vidro woven roving/poliéster	12	250	0,14	1.400	custo bastante baixo
Woven glass/epóxi 1581-F155	25	450	0,14	1.900	baixo custo, resistente
Fita vidro/epóxi T25- 285-F155	50	850	0,14		custo médio, resistente
Compensado/pinho	12	20	0,1	600	baixo custo
Madeira endurecida e temperada para 1000kg/m ³	4,5	25	0,1	1.000	baixo custo

^(I) Módulo de elasticidade; ^(II) Tensão de escoamento ou limite de ruptura; ^(III) Coeficiente de Poisson; ^(IV) Densidade;
^(V) As espessuras de chapas de alumínio são normalizadas pela norma alemã DIN 1783 nos valores 0,4 / 0,5 / 0,6 / 0,8 / 1,0 / 1,2 / 1,5 / 1,8 / 2,0 / 2,5 / 3,0 / 3,5 / 4,0 / 5,0 / 6,0 / 8,0 / 10,0 / 12,0 / 15,0 mm; ^(VI) c e t indicam valores à compressão e tração, respectivamente.

Fonte: Mendonça (2005)

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1. TEORIAS DE PLACAS LAMINADAS

O comportamento cinemático das estruturas sanduíche foi descrito por vários autores, baseando-se em formulações das teorias de placas laminadas. A seguir um breve resumo a respeito destas teorias será apresentado.

As teorias de placas partem de um campo de deslocamentos assumido, dando origem às equações de equilíbrio de Euler-Lagrange. O campo de deslocamentos usa as coordenadas generalizadas do problema. Pretende-se apresentar uma lista não exaustiva de alguns campos de deslocamentos. Uma análise mais detalhada sobre diversas teorias de deformação pode ser encontrado nos artigos de Rohwer *et al.* (2005), Carrera (2003) e Altenbach (1998).

3.1.1. TEORIA CLÁSSICA DE LAMINAÇÃO DE PLACAS

A teoria clássica de laminação de placas considera apenas 3 graus de liberdade, u_0, v_0 e w_0 , o que computacionalmente é uma vantagem. Trata-se de uma teoria que se adequa às

estruturas pouco espessas (Rohwer *et al.*, 2005). De acordo com Almeida (2001), Mendonça (2005) e Tita (2007) na teoria clássica de laminação de placas leva-se em consideração as hipóteses de Kirchhoff, assumindo-se que as seções planas permanecem planas e normais à linha neutra após a deformação e que as tensões transversais são consideradas nulas (Figura 3.1).

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial w_0}{\partial y} \\ 0 \end{Bmatrix} z \quad (3.1.1)$$

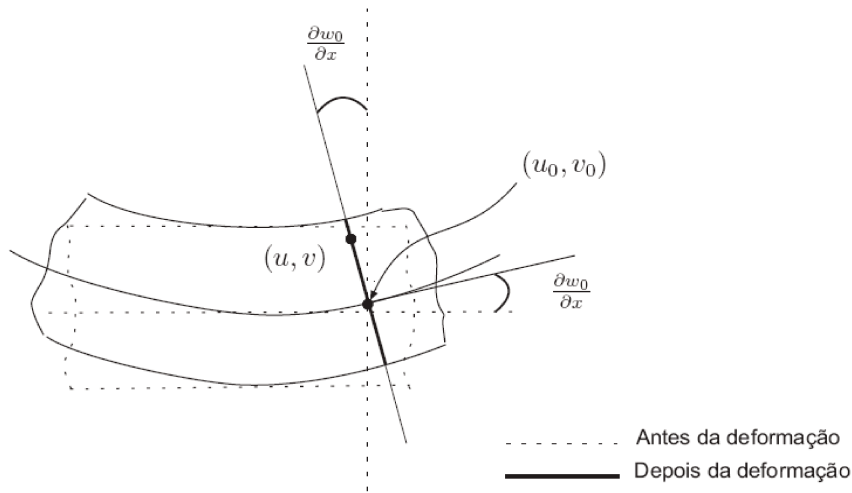


Figura 3.1 – Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria clássica.

Fonte: Roque (2007)

Observa-se que este fato não é verdadeiro, pois essas tensões transversais assumem valores importantes nas interfaces das lâminas nos compósitos e são responsáveis pelo modo de falha conhecido como delaminação ou deformação. Uma das causas dessas tensões consiste na diferença abrupta de propriedades elásticas e diferentes orientações entre lâminas adjacentes. Devido ao fato de nos compósitos o módulo de elasticidade das resinas poliméricas terem um valor muito inferior aos da fibra e do laminado como um todo, e como consequência os módulos de cisalhamento transversais são bem inferiores aos módulos de elasticidade do laminado. O

efeito do cisalhamento no laminado é o efeito somado das contribuições de cada região interlaminar ao longo da espessura.

As Figuras 3.2 e 3.3 mostram, respectivamente, as forças e momentos resultantes em uma placa laminada, nos sentidos considerados positivos.

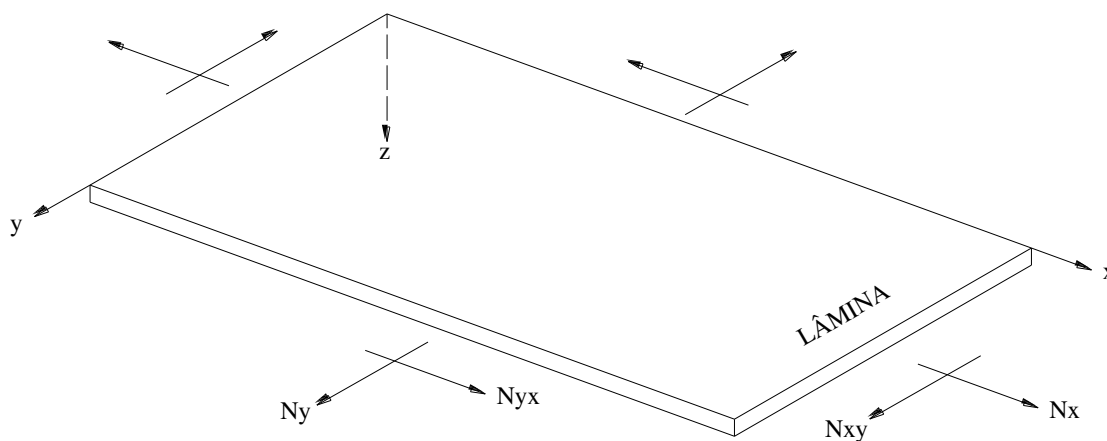


Figura 3.2 – Forças resultantes no plano da lâmina.

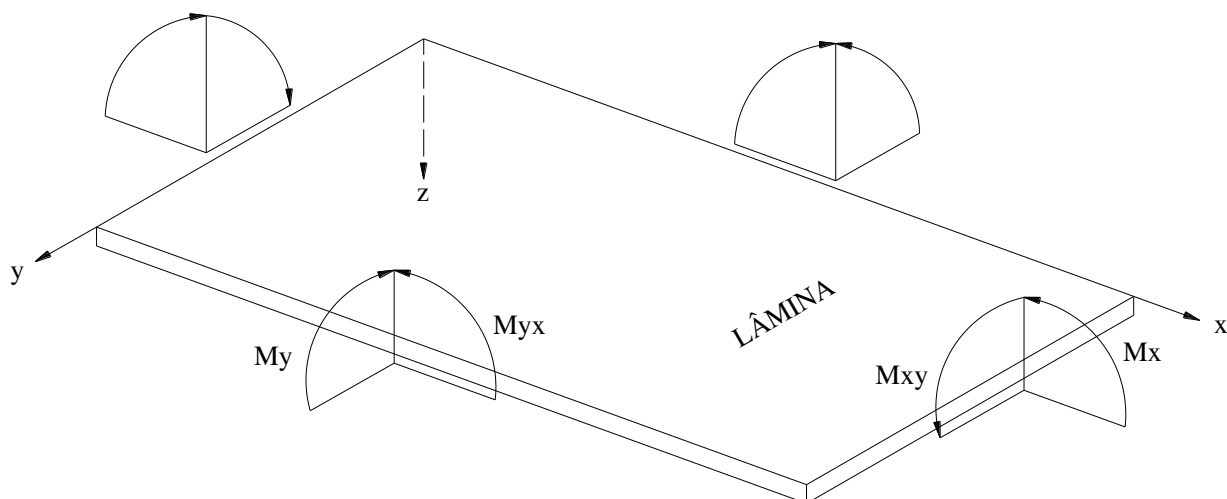


Figura 3.3 – Momentos resultantes no plano da lâmina.

3.1.2. TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DE LAMINAÇÃO DE PLACAS

Segundo Rohwer *et al.* (2005) a teoria de primeira ordem considera cinco graus de liberdade, u_0, v_0, w_0, u_1 e v_1 prevendo melhor o comportamento de estruturas mais espessas do que a teoria clássica. Esta teoria necessita de um fator de correção ao cisalhamento, que depende de relações geométricas, propriedades dos materiais e esquema de empilhamento do laminado. A teoria de primeira ordem foi aplicada a estruturas compósitas por Yang *et al.* (1966) e Whitney e Pagano (1970).

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z \quad (3.1.2)$$

A teoria de primeira ordem de laminação de placas leva em conta as hipóteses de Reissner-Mindlin e assume que após a deformação qualquer segmento inicialmente reto e normal à superfície de referência permanece reto e inextensível, porém não, necessariamente, normal à superfície deformada (Figura 3.4). Segundo Mendonça (2005) essa não perpendicularidade permite obter cisalhamento transversal não nulo.

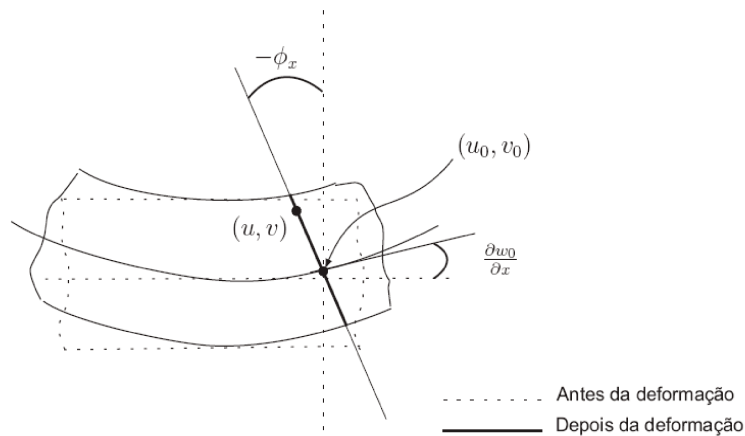


Figura 3.4 – Placa antes e depois da deformação, segundo a teoria de primeira ordem.

Fonte: Roque (2007)

Esta teoria permite computar as tensões interlaminares por meio das equações constitutivas. A diferença mais significativa entre a teoria clássica e esta, é o efeito de incluir as deformações de cisalhamento transversal nos cálculos dos deslocamentos, frequências e cargas de flambagem.

3.1.3. TEORIA DE ELASTICIDADE DE PAGANO

Na tentativa de obter uma teoria de placas laminadas que produzisse uma variação exata da solução dos deslocamentos e tensões ao longo da espessura Pagano (1969) desenvolveu uma teoria de elasticidade tridimensional. Esta teoria mostrou que para laminados delgados, a variação de deslocamentos coplanares ao longo da espessura pode ser bem aproximada por uma reta. Para laminados mais espessos, a distribuição dos deslocamentos assume um comportamento cada vez mais não linear.

Segundo Mendonça (2005) as teorias de Kirchhoff e Mindlin, prevêm apenas variação linear e por isso são capazes de prover apenas resultados aproximados, com erros às vezes acentuados nas tensões.

3.1.4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com Mendonça (2005) este é um método numérico poderoso na solução de equações diferenciais e integrais. Até a década de 60 eram utilizados métodos de soluções semi-analíticas como o de Ritz, de Galerkin, de Navier e outros para a resolução de problemas envolvendo placas laminadas. Em geral esses métodos permitem o tratamento de problemas relativamente simples e simétricos em termos de geometria, carregamento e condições de contorno.

O método dos elementos finitos foi desenvolvido para auxiliar no tratamento de problemas de complexidade mais próxima das situações reais. A idéia básica deste método é discretizar um determinado domínio como uma região de formas geométricas simples, chamadas de elementos finitos, para as quais é possível, sistematicamente, gerar as funções aproximadas necessárias para a solução das equações diferenciais dos métodos variacionais e de resíduos ponderados.

Este método é bem utilizado para a análise de dados. Park *et al.* (2001) usaram o método dos elementos finitos considerando a deformação de cisalhamento para analisar laminados simétricos sujeitos a vários carregamentos e condições de contorno. Walker e Smith (2003) usaram este mesmo método associado a técnicas de otimização para minimizar o peso e o deslocamento de estruturas de materiais compósitos reforçados com fibras.

Winikes (2006) procurou ajustar os parâmetros físicos (módulo de elasticidade e fator de perda) dos materiais que constituem uma viga sanduíche utilizando duas técnicas de ajuste de parâmetros baseadas no método dos elementos finitos.

3.1.5. TEORIAS DE TERCEIRA ORDEM

As teorias, clássica e de primeira ordem, em geral, descrevem adequadamente o comportamento cinemático da maioria dos laminados; porém as teorias de ordem superior podem representar melhor o comportamento cinemático, não necessitando de fatores de correção de cisalhamento e podem apresentar distribuições de tensões interlaminares mais precisas. Entretanto, para Mendonça (2005), estas teorias envolvem um esforço computacional consideravelmente maior e só devem ser utilizadas quando necessárias.

A teoria de terceira ordem de laminação é baseada nas mesmas suposições das teorias clássica e de primeira ordem, exceto por não considerar que o segmento inicialmente plano e normal à superfície indeformada permaneça plano e normal à superfície deformada, expandindo os deslocamentos numa função cúbica da coordenada da espessura.

Geralmente as teorias de ordem superior têm campos de deslocamentos da forma:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} z^i \quad (3.1.3)$$

O parâmetro n é habitualmente inferior a 3, de forma a não aumentar muito o esforço computacional. As teorias de ordem superior são caracterizadas por não necessitarem do uso de fatores de correção de cisalhamento.

Outros autores desenvolveram teorias de ordem superior tais como: a teoria de terceira ordem de Reddy (1984), a teoria de terceira ordem mista proposta por Levinson (1980), entre outras.

Murthy (1981) e Reddy (1984) apresentaram teorias de terceira ordem, com apenas cinco graus de liberdade, e com precisão idêntica. Diferentes considerações na formulação das teorias originam os campos de deslocamentos abaixo indicados:

- Murthy (1981)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5\beta_x + \partial w_0 / \partial x \\ 5\beta_y + \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ \frac{z}{4} - \begin{Bmatrix} \beta_x + \partial w_0 / \partial x \\ \beta_y + \partial w_0 / \partial y \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{5z^3}{3h^2} \right. \quad (3.1.4)$$

- Reddy (1984)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z - \begin{Bmatrix} u_1 + \partial w_0 / \partial x \\ v_1 + \partial w_0 / \partial y \\ w_0 \end{Bmatrix} \frac{4z^3}{3h^2} \quad (3.1.5)$$

Reissner (1975) propôs a combinação de uma expansão em z^2 do deslocamento transversal, juntamente com uma expansão cúbica dos termos em u e v . Esta teoria produz resultados muito precisos, a custa de 8 graus de liberdade. Foi aplicada a placas laminadas por Lo *et al.* (1977b,a), e desenvolvida por Pandya e Kant (1988).

- Reissner (1975)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_2 \end{Bmatrix} z^2 + \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \end{Bmatrix} z^3 \quad (3.1.6)$$

- Pandya e Kant (1988)

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \end{Bmatrix} z + \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \end{Bmatrix} z^2 + \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \end{Bmatrix} z^3 \quad (3.1.7)$$

Todas essas teorias foram propostas para se obter uma aproximação melhor da resposta ao longo da espessura.

Apesar das estruturas sanduíche serem reconhecidas por sua resistência, durabilidade e baixa densidade, e serem particularmente eficientes para transferência de cargas de flexão e de compressão, algumas questões importantes do comportamento destas estruturas não foram consideradas pelos autores das teorias clássicas de estruturas sanduíche, que consideram o núcleo como antiplano, ou seja, é um núcleo idealizado no qual o módulo de elasticidade em planos paralelos às faces é zero, mas o módulo de cisalhamento em planos perpendiculares é finito. Um núcleo do tipo colméia é uma aproximação de um núcleo antiplano. Considerando esta definição $E_n = 0$ e o núcleo antiplano não contribui para a rigidez a flexão da viga sanduíche. Baseando-se no fato de $E_n = 0$ o estado de tensões resultante é o chamado estado de tensões antiplanas, definido por $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

3.2. ANÁLISES DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE

Estruturas sanduíche são constituídas por duas ou mais camadas de materiais diferentes, as quais são admitidas perfeitamente aderidas, e a combinação delas faz com que o elemento, como um todo, ganhe em termos estruturais. A principal característica é a obtenção de elementos com maior rigidez, conseguida com o afastamento das faces resistentes. Pode-se conseguir, ainda, estruturas mais leves, dependendo do material a ser utilizado.

As teorias, aplicações e métodos construtivos, correspondentes às estruturas sanduíche vêm sendo estudados com maior afinco nas últimas décadas. Pesquisadores dedicam-se aos estudos teóricos, realizando ensaios e comparando os resultados com as teorias de laminação das placas, anteriormente descritas.

Shenhar, Frostig e Althus (1996) empregaram em sua pesquisa uma teoria bastante rigorosa que inclui os efeitos de laminados não simétricos e de rigidez do núcleo no comportamento da viga sanduíche como um todo. Os resultados numéricos das tensões principais nas proximidades da carga mostram sensibilidade à rigidez do núcleo e ao comprimento da viga. Os resultados analíticos foram utilizados para definir os valores, localização e direção dos possíveis padrões de falha, já a análise, baseada em vários resultados experimentais, foi realizada para uma viga sanduíche sujeita a 3 pontos de carga (Figura 3.5).

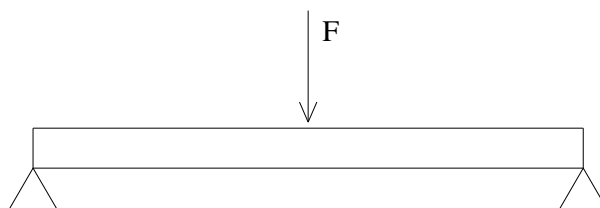


Figura 3.5 – Viga sanduíche sujeita a 3 pontos de carga

A análise das tensões com base na teoria de terceira ordem, em conjunto com os critérios de falha, foi utilizada para definir e demonstrar os mapas de falha das cargas e padrões de falha. Os mapas de falhas indicam que os níveis das cargas de falha dependem da densidade do núcleo, mesmo se a falha tiver se iniciado na face. Os mapas de falhas ajudam o projetista a selecionar a densidade apropriada do núcleo.

Shenhar, Frostig e Althus utilizaram em seu trabalho a teoria de terceira ordem para definir as distribuições de tensões e falhas nas faces e núcleo de uma viga sanduíche, demonstrando que ao contrário de outros trabalhos recentes o núcleo não é rígido.

Kim e Swanson (2001) analisaram o comportamento de estruturas sanduíche com núcleo de baixa rigidez, submetidas a uma força localizada, resultado de um impacto accidental. Foram realizados ensaios de flexão de 3 pontos em corpos de prova de vigas sanduíche, sendo estas vigas compostas de faces de carbono epóxi com suas fibras orientadas nas direções (0/90) e núcleo de espuma de poliuretano com três densidades e três espessuras diferentes. Foram colocados extensômetros nas faces superior e inferior.

Os resultados obtidos de tensões e de deformações foram comparados com vários métodos analíticos, que incluem a teoria clássica de laminação de placas, a teoria de primeira ordem, a teoria de elasticidade, a teoria de terceira ordem ou ordem superior e o método de elementos finitos.

As comparações dos resultados experimentais com os vários métodos analíticos mostraram que os resultados de elementos finitos e da teoria da elasticidade concordaram mutuamente com os resultados experimentais. Como já previsto, a teoria clássica apresenta resultados muito rígidos, enquanto os resultados da teoria de primeira ordem são aceitáveis, mas não tão precisos como os da teoria da elasticidade e do método dos elementos finitos. Os resultados da teoria clássica e de primeira ordem mostraram-se inadequados de representar adequadamente as tensões e deformações ao redor de cargas localizadas.

Kim e Swanson (2001) também compararam os modos de falha da estrutura experimental com os previstos pela teoria. Três modos de falha foram considerados neste estudo: falha das faces por ruptura das fibras, falha do núcleo ou delaminação da interface núcleo/face por cisalhamento e falha do núcleo em compressão.

As falhas das faces não são bem caracterizadas, sob este tipo de carregamento, portanto, o procedimento utilizado foi o de considerar a deformação no topo devido à compressão como sendo crítica e usar um valor de deformação crítica. A falha por cisalhamento do núcleo fundamentou-se na tensão de cisalhamento máxima fornecida pelo fabricante do núcleo. O outro modo de falha no núcleo refere-se a falha devido a compressão. Testes de compressão da espuma revelaram que a falha em compressão é dúctil para três densidades da espuma e podem geralmente ser tomadas como elasto-plástica. Baseando-se nas metodologias citadas, Kim e Swanson, realizaram testes de compressão para as três densidades do núcleo. As tensões e deformações foram calculadas através da teoria da elasticidade. Foram constatados nos corpos de prova com:

- Núcleos de menor densidade e menor espessura: o modo de falha foi por cisalhamento, conforme era previsto;
- Núcleos de densidade mais alta: falha na face, de acordo com as hipóteses consideradas previamente. Também se mostrou que delaminação ocorre dentro da face carregada.

Nesta investigação o ponto mais significativo evidenciado foi que as tensões e as deformações, perto da área de carregamento são complexas e não podem ser consideradas pelas teorias que não incluem esta complexidade. Os resultados obtidos são significativos, pois indicam que as falhas podem ser previstas para estruturas sanduíche sob carregamento concentrado, porém é requerida uma análise detalhada das tensões como a que foi realizada por Kim e Swanson em seu estudo.

As estruturas sanduíche são extensivamente utilizadas na engenharia devido a sua alta rigidez específica e resistência. Entretanto, a modelagem dessas estruturas têm sido muito

estudadas, mas pouca atenção têm sido dada para identificação das propriedades do material (Shi *et al*, 2006). Desta forma, métodos utilizando dados vibratórios para realimentação de parâmetros físicos do modelo matemático têm sido utilizados. É comum a utilização de métodos de busca ou aproximação por séries.

Observa-se ainda que muitos modelos matemáticos foram desenvolvidos para caracterização de materiais viscoelásticos, laminados ou estruturas sanduíche e podem ser encontrados em: Kim e Krider (in press), Pintelon *et al* (2004), Singh *et al* (2003), Deng *et al* (2003), Al-Khoury *et al* (2002), Mossberg *et al* (2001), Ohkami e Swoboda (1999), Yu e Haddad (1996), Park (2005), Yang (2005), Daya *et al* (2004).

Devido à necessidade de diminuição dos custos aliados a melhoria de algumas características da construção civil, Farshi e Herasati (2005) apresentam um método para otimização do peso de lâminas de materiais compósitos fibrosos sob ação de carregamentos laterais. O objetivo é o projeto de laminados de materiais compósitos de mínima espessura que possam suportar múltiplos carregamentos estáticos aplicados na direção normal à superfície sem que ocorra falhas em nenhuma das camadas, segundo o critério de Tsai-Hill. Nesta investigação, a orientação dos ângulos das fibras é tratada como variáveis discretas, as quais podem variar somente por um aumento pré-designado, enquanto as espessuras das camadas são tratadas como variáveis contínuas. O procedimento de otimização, utilizando o método dos elementos finitos, é baseado em uma estratégia de dois estágios: no primeiro somente a orientação dos ângulos das fibras das camadas é tratada como variáveis de projeto, e no segundo, somente a espessura das camadas.

De acordo com Paccola (2004) na construção de edificações, a busca por elementos de vedação que proporcionassem bom isolamento térmico e boa durabilidade conduziram à concepção de painéis tipo sanduíche. Mais tarde, esses painéis passaram a assumir, também, função estrutural.

Machado Jr. (1991) apresenta um sistema construtivo para habitação, empregando painéis sanduíche, com placas de face pré-moldadas em argamassa armada e núcleo de espuma

rígida de poliuretano, como elementos portantes de vedação. A ligação entre as placas resistentes é garantida apenas pela espuma. O resultado obtido com esta pesquisa é um sistema de construção simples e objetivo, que utiliza pouca mão-de-obra e quase nenhum equipamento, no canteiro de serviços.

Após as considerações iniciais sobre as teorias de laminados e uma breve revisão bibliográfica sobre pesquisas com estruturas sanduíche, passaremos a análise do comportamento da lâmina. Grande parte das estruturas sanduíches são compostas por lâminas e têm seu comportamento descrito e analisado considerando-se tais teorias.

4. COMPORTAMENTO ELÁSTICO DE UMA LÂMINA

O comportamento elástico de uma lâmina, de acordo com Mendonça (2005), é estimado sob um conjunto de carregamentos combinados e geralmente aplicados fora das direções principais de ortotropia do material.

4.1. RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Segundo Chen e Saleeb (1982) a relação tensão-deformação, relacionada pela lei de Hooke generalizada, de um material elástico-linear, indicialmente, é:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1.1)$$

ou, matricialmente,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & \text{sim.} & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.1.2)$$

onde, σ_i e τ_{ij} com $i, j = 1, 2, 3$ são, respectivamente, as tensões normais e tangenciais ou de cisalhamento; ε_i e γ_{ij} com $i, j = 1, 2, 3$ são as deformações normais e tangenciais ou de cisalhamento, respectivamente; e C_{ij} com $i, j = 1, \dots, 6$ são os elementos da matriz de coeficientes de elasticidade do material.

Quando o material é simétrico, elasticamente, em relação a dois planos ortogonais do sistema de referência, necessariamente existirá simetria em relação ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois. Neste caso a relação tensão-deformação simplifica-se para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & \text{sim.} & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.1.3)$$

Este material apresenta características de tríplice simetria elástica e é denominado ortotrópico. A matriz \mathbf{C}^- , neste caso, é reduzida para apenas 9 constantes elásticas independentes e sendo não singular, pode ser invertida, resultando na relação deformação-tensão:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.1.4)$$

ou, pode ser representada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.1.5)$$

onde \mathbf{S} é a matriz de compliância do material.

As equações constitutivas são melhor visualizadas em termos das constantes de engenharia, que representam as propriedades elásticas do material. Essas constantes de engenharia são os módulos de Young generalizados, E_1 , E_2 e E_3 , os coeficientes de Poisson ν_{12} , ν_{21} ... e os módulos de elasticidade de cisalhamento G_{12} , G_{23} e G_{31} . A relação deformação-tensão (4.1.4) agora escrita em termos das constantes de engenharia é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.1.6)$$

4.2. MATERIAL ORTOTRÓPICO SOB ESTADO PLANO DE TENSÃO

Na grande maioria das aplicações estruturais os materiais compósitos são usados na forma de lâminas finas carregadas no plano do laminado, ou seja, a lâmina está sob um estado plano de tensão (EPT). Diz-se que um corpo está sob um estado plano de tensão se cada ponto desse corpo está sujeito a tensões num único plano, no caso todas as tensões fora do plano são zero, isto é, apenas σ_1 , σ_2 e τ_{12} não são nulas e $\sigma_3 = 0$, $\tau_{23} = 0$ $\tau_{31} = 0$

Usando estas considerações, as relações deformação-tensão são reduzidas para:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.2.1)$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.2.2)$$

ou, pode ser representada pela equação (4.1.5) onde $\bar{\mathbf{S}}$ é, agora, a matriz de compliância reduzida da lâmina ortotrópica. Invertendo-se esta relação, obtemos a relação tensão-deformação reduzida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.2.3)$$

que pode ser representada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{p}} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.2.4)$$

onde $\bar{\mathbf{p}}$ é a matriz de coeficientes de elasticidade reduzida. Em termos de constantes de engenharia seus termos são obtidos invertendo-se a matriz de (4.2.2). Assim pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad \frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

4.3. TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Considerando Tita (2007) e Mendonça (2005) uma placa laminada é formada pela sobreposição de várias lâminas. Cada lâmina é disposta com as fibras orientadas em direção arbitrária, para tanto se utiliza dois sistemas: xyz e 123 , conforme Figura 4.1.

O sistema de coordenadas local de cada lâmina 123 deve ser convertido para o sistema de coordenadas do laminado xyz utilizando-se a matriz de transformação $\bar{\mathbf{T}}$. Esta matriz é definida como a matriz que exprime a rotação do sistema xyz global do laminado para o sistema de coordenadas 123 locais da lâmina, através do ângulo θ , que é o ângulo formado pelos eixos $1,2$ e xy . Considera-se sempre o eixo z normal à placa, portanto a transformação de coordenadas é calculada para uma rotação θ em torno do eixo z .

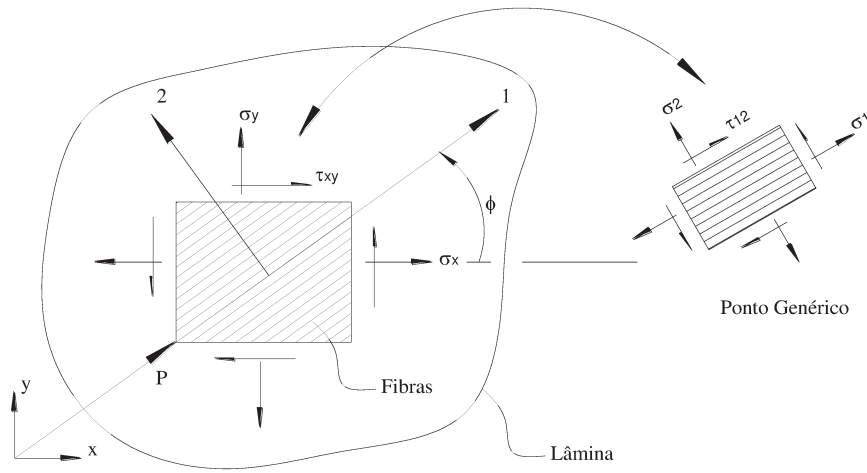


Figura 4.1 – Tensões coplanares num ponto genérico de coordenadas P de uma lâmina

De acordo com Jones (1975) as componentes de tensão e deformação referentes aos eixos principais do material (1,2) podem ser expressas em termos dos eixos xy pelas relações de transformação a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.3.1)$$

ou,

$$\underline{\sigma}_{12} = T \underline{\sigma}_{xy} \quad (4.3.2)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.3.3)$$

ou,

$$\{\varepsilon\}_{1,2} = [T]^{-1} \{\varepsilon\}_{x,y} \quad (4.3.4)$$

Observa-se na equação (4.3.3) que γ_{12} ou γ_{xy} são divididos por 2 para se manter o caráter tensorial da transformação.

As relações tensão-deformação expressas nas equações (4.2.2) e (4.2.4) mostram que, quando a lâmina está sob um estado de tração ou compressão pura ao longo dos eixos principais do material, não existem deformações de cisalhamento. Similarmente, quando a lâmina está sob cisalhamento puro, τ_{12} , ao longo dos eixos principais (1,2) tem-se somente γ_{12} ao longo desses eixos. Portanto, não existe acoplamento entre tensões normais e deformação de cisalhamento e entre tensões de cisalhamento e deformações normais. Não é o que ocorre quando a lâmina está sob carregamento ao longo de eixos arbitrários x e y . Neste caso, as relações tensão-deformação são escritas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (4.3.5)$$

A equação (4.3.5) pode ser escrita na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 2Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 2Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & 2Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_s}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.3.6)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} &= \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \\
 &= \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_6}{2} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_s}{2} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Nas equações (4.3.5), (4.3.6) e (4.3.7) o subscrito s corresponde às componentes de tensão e/ou deformação de cisalhamento, referentes ao sistema de eixos xy , isto é, $\tau_s = \tau_{xy}$. O subscrito 6 é uma contração de 12 . Realizando uma comparação entre as equações (4.3.6) e (4.3.7), tem-se que:

$$\mathbf{\bar{Q}} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & 2Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & 2Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & 2Q_{ss} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T} \tag{4.3.8}$$

Desta última relação, obtêm-se de forma explícita os elementos da matriz de rigidez transformada $\mathbf{\bar{Q}}$, efetuando as operações indicadas:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2Q_{12} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4Q_{66} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
 Q_{yy} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2Q_{12} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 4Q_{66} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
 Q_{xy} &= Q_{11} - Q_{22} - 4Q_{66} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 Q_{xs} &= Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66} \cos^3 \theta \sin \theta + Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66} \cos \theta \sin^3 \theta \\
 Q_{ys} &= Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66} \cos \theta \sin^3 \theta + Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66} \cos^3 \theta \sin \theta \\
 Q_{ss} &= Q_{11} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22} \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2Q_{12} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 &\quad + Q_{66} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)
 \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

$\bar{\mathbf{p}}_-$ é uma matriz completa como se fosse de um material anisotrópico, no entanto, diferentemente de um material realmente anisotrópico, existem apenas quatro constantes independentes de θ , como pode-se observar na equação (4.3.9), já que as operações dependem de apenas das quatro componentes de $\bar{\mathbf{p}}_-$, que por sua vez dependem apenas das quatro constantes de engenharia E_1 , E_2 , ν_{12} e G_{12} . Jones (1975), admitindo solicitação de tração variando nas direções de θ , traçou diagramas das constantes transformadas para dois materiais compósitos distintos, o glass/epoxy (Figura 4.2) e o boron/epoxy (Figura 4.3).

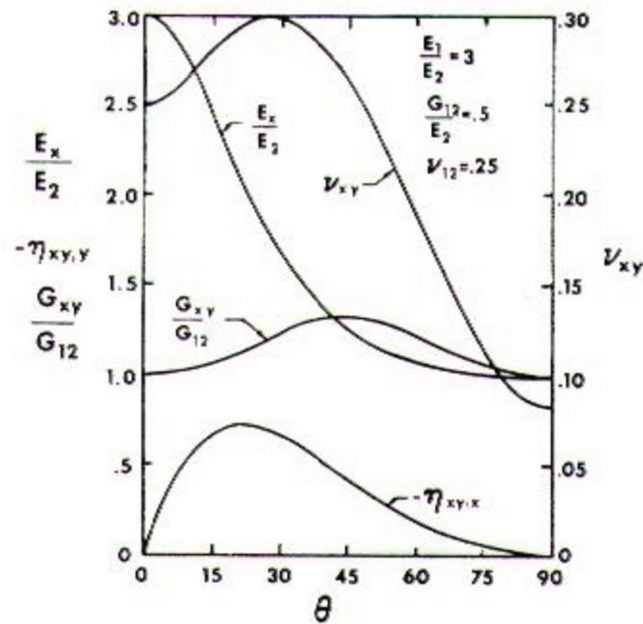


Figura 4.2 – Constantes transformadas para o compósito glass/epoxy

Fonte: Jones (1975).

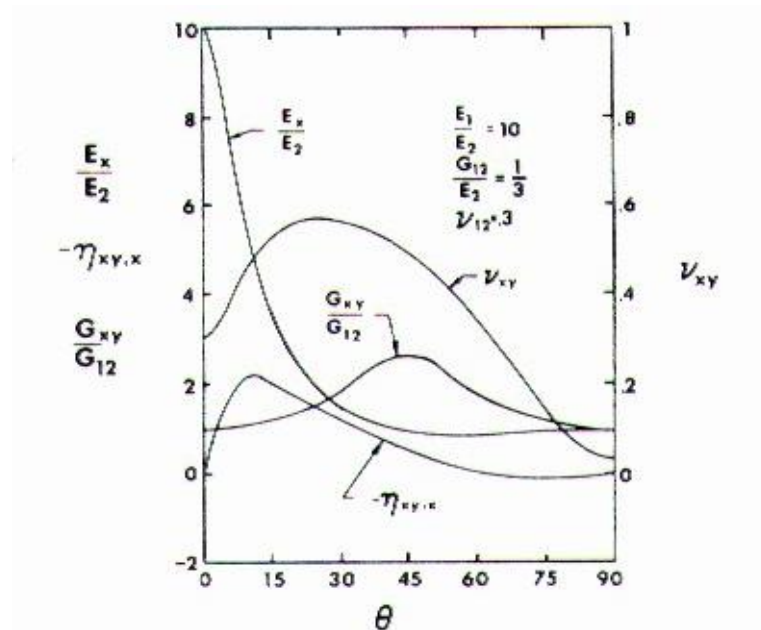


Figura 4.3 – Constantes transformadas para o compósito boron/epoxy
Fonte: Jones (1975).

Mascia, Vanalli e Paccola (2003) apresentaram em seu estudo sobre uma viga laminada reforçada com fibras de carbono, dois gráficos ilustrando a variação das constantes de elasticidade em relação a variação do ângulo de reforço das fibras. (Figuras 4.4 e 4.5).

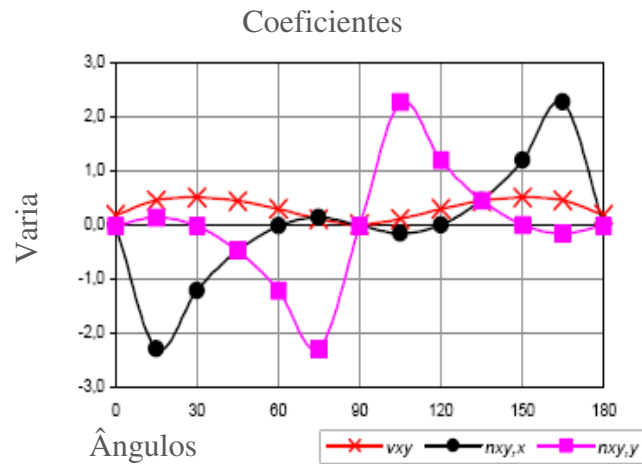


Figura 4.4 – Variação dos coeficientes de influência mútua e de Poisson
Fonte: Mascia, Vanalli e Paccola (2003).

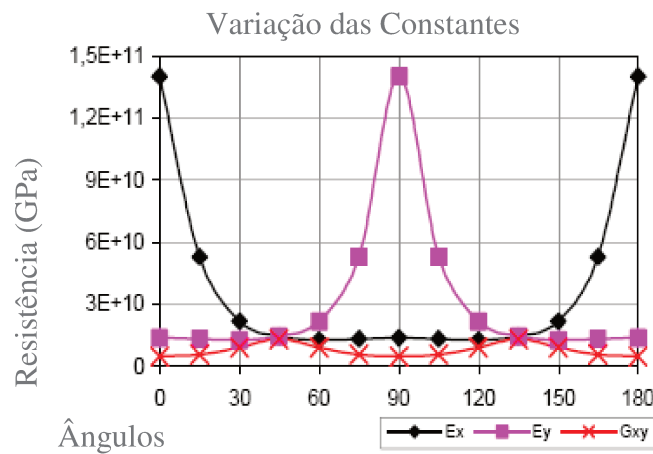


Figura 4.5 – Variação dos módulos de elasticidade longitudinal e de cisalhamento
Fonte: Mascia, Vanalli e Paccola (2003).

Invertendo-se a matriz de coeficientes de elasticidade transformada, obtém a matriz de compliância reduzida transformada \bar{S} , as componentes da matriz podem ser obtidas a partir das constantes de engenharia, procedendo de forma análoga ao utilizado para a obtenção da expressão para a matriz de coeficientes de elasticidade transformada.

Com esta análise torna-se evidente a interdependência entre as tensões e deformações. Com posse de qualquer um desses dados os outros podem ser obtidos usando relações constitutivas ou de transformação de coordenadas. Agora, torna-se necessária a verificação da resistência da lâmina, utilizando-se para isto um dos critérios de resistência.

5. CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA E MODOS DE FALHA PARA ESTRUTURAS SANDUÍCHE

Segundo Mendonça (2005) o problema, para a análise da resistência de uma lâmina, consiste em se calcular aproximadamente a tensão de falha de uma lâmina ortotrópica submetida a um estado plano de tensões representado por $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, partindo de resistências obtidas de ensaios simples realizados em algumas poucas direções. Alguns aspectos que tornam essa questão problemática são:

- É impossível realizar ensaios para caracterizar mecanicamente uma lâmina em todas as direções, realizando-se apenas testes nas direções principais do material;
- Nos materiais isotrópicos, os critérios de falha se baseiam em tomar as componentes de tensão aplicadas segundo um sistema qualquer xyz , determinar as tensões máximas no sentido do Círculo de Mohr, e compará-las a um único valor de resistência obtido em ensaios simples. Entretanto, nos materiais anisotrópicos, esse processo não funciona.

As lâminas compostas possuem resistência à tração e à compressão diferentes, no entanto, apresentam valores idênticos de resistência ao cisalhamento, positivos ou negativos.

5.1. CRITÉRIOS DE FALHA PARA UMA LÂMINA ORTOTRÓPICA

Um critério de resistência tem como finalidade estabelecer leis, pelas quais pode-se, pelo comportamento do material nos ensaios de tração e de compressão simples, prever a condição de ruptura sob qualquer tipo de combinação de tensões, ou seja, um critério de resistência pretende interpretar os casos de solicitações combinadas, partindo apenas de um pequeno número de parâmetros do material, de acordo com Nicolas (2006).

Segundo Schiel (1984) o intuito conceitual de um critério de resistência é a interpretação de solicitações combinadas (estado duplo ou triplo de tensão) quanto à eventual ruptura. A variedade de materiais usados na engenharia não permite adotar um único critério.

Para a definição de um modelo matemático, de um critério de falha, é necessária a identificação dos estímulos mecânicos que induzem a falha e a identificação da resposta do material a estes estímulos.

A princípio, pode-se considerar que os materiais estruturais podem ser submetidos a um estado triaxial de tensões, graficamente representado pelas tensões principais na Figura 5.1.

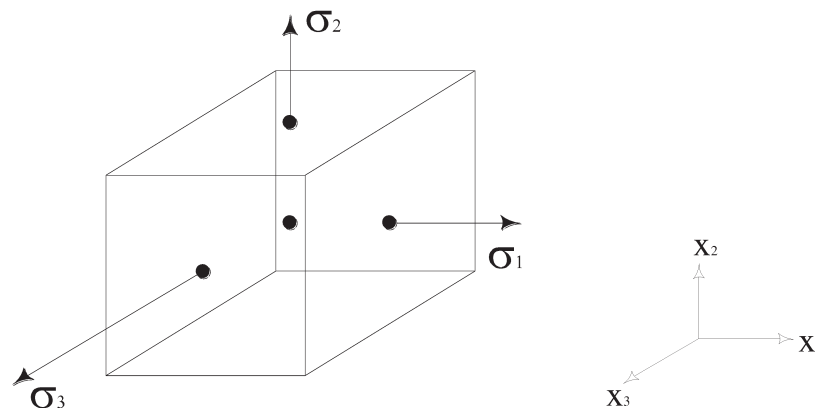


Figura 5.1 – Estado triaxial de tensões

Os critérios se referem sempre a tensões principais. Portanto, se uma direção genérica for adotada, esta deverá ser transformada em direções principais. Além disso, a aplicação de qualquer critério de falha para material composto necessita da transformação das tensões calculadas para as direções principais do material.

A seguir apresentam-se alguns dos critérios de resistência ou de falha existentes para a análise de falhas em materiais compósitos.

5.1.1. CRITÉRIO DA MÁXIMA TENSÃO NORMAL (CRITÉRIO DE RANKINE)

Esse critério estabelece que a falha ou fratura de um material ocorre quando a máxima tensão normal em um ponto atinge um valor crítico independente das outras tensões, de acordo com Popov (1978). O valor crítico da tensão é usualmente determinado em um ensaio de tração, onde a falha de um corpo-de-prova é definida pela fratura, ou pelo alongamento excessivo.

Os dados experimentais indicam que esse critério se aplica bem aos materiais frágeis em todas as faixas de tensão, contanto que exista uma tensão principal de tração, no entanto, difere da ruptura dúctil, que é acompanhada por grandes deformações.

Esse critério estabelece que as tensões aplicadas nas direções principais do material devem ser menores que as resistências nas respectivas direções de carga. O critério da máxima tensão normal pode ser interpretado, em gráficos, através de uma envoltória de resistência, como indica a Figura 5.2, σ_1 , σ_2 e σ_3 representam, respectivamente, as tensões normais nas direções 1, 2 e 3.

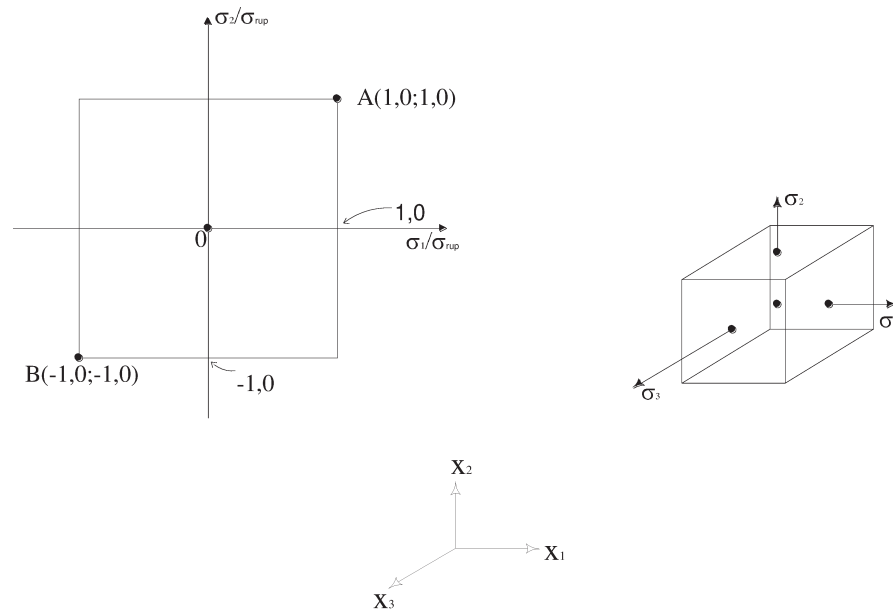


Figura 5.2 – Critério da máxima tensão normal

5.1.2. CRITÉRIO DA MÁXIMA ENERGIA DE DISTORÇÃO (CRITÉRIO DE VON MISES)

Segundo Popov (1978) este critério de escoamento é baseado em conceitos de energia de deformação e possui grande aceitação para materiais dúcteis e isotrópicos. Nesse critério a energia elástica total é dividida em duas partes: uma referente às variações volumétricas do material e a outra associada as distorções de cisalhamento.

Igualando a energia de distorção de cisalhamento no ponto de escoamento à tração simples, com aquela sob tensão combinada, é estabelecido o critério de escoamento para tensão combinada (Nicolas, 2006).

A lei básica para um material plástico ideal é dada por:

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3^2 = 2\sigma_{esc}^2 \quad (5.1.1)$$

Para o estado plano de tensões a equação (5.1.1) se reduz a:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right)^2 = 1 \quad (5.1.2)$$

Segundo Beer (1989), um componente estrutural estará em condições de segurança enquanto o maior valor de energia de distorção permanecer abaixo da energia de distorção por unidade de volume necessária para provocar o escoamento no corpo-de-prova de um material submetido ao ensaio de tração.

O critério de von Mises, para estado plano de tensões, pode ser expresso graficamente como pode-se observar na Figura 5.3.

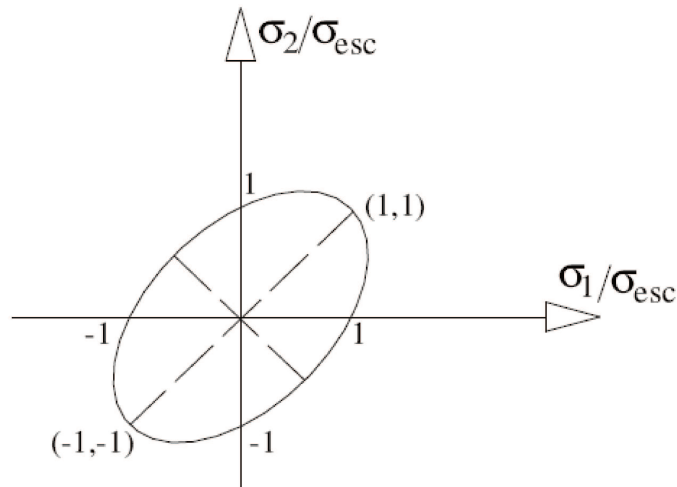


Figura 5.3 – Critério da máxima energia de distorção (von Mises)
Fonte: Nicolas (2006)

5.1.3. CRITÉRIO DE TSAI-HILL

Em 1968 Tsai, baseando no critério de Hill, desenvolveu este critério (Tsai-Hill) para materiais ortotrópicos com simetria de resistência. As teorias de falhas para materiais anisotrópicos foram inicialmente extensões de análises isotrópicas. Entre as teorias de falha, para materiais anisotrópicos, esta é uma abordagem bastante conhecida. Esta teoria é utilizada para materiais compósitos reforçados por fibras.

No estado plano de tensões a falha do material ocorre quando:

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{f_x^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{f_{xy}}\right)^2 = 1 \quad (5.1.3)$$

onde:

f_x - resistência na direção 1

f_y - resistência na direção 2

f_{xy} - resistência ao cisalhamento no plano 1-2

O critério de Tsai-Hill é uma extensão do critério de Von Mises levando em conta não somente a distorção do corpo, mas também a sua dilatação (Jones, 1975).

Segundo Mendonça (2005) o critério de Tsai-Hill é o de maior aceitação, seguido do critério da tensão máxima, por alguns motivos, tais como:

- para vidro/epóxi, ele prevê a falha com mais precisão que qualquer outro critério; para boro/epóxi os resultados também mostram-se ótimos, com erros de 3 a 65 na faixa de $\theta = 15^\circ$ a 40° para tensões de tração;

- para compostos com resistências idênticas à tração e à compressão é apresentado um único critério, isto é, a falha é definida por uma única desigualdade, diferentemente de outros critérios;
- existe interação entre os efeitos de σ_1, σ_2 e τ_{12} , enquanto nos outros critérios supõe-se que as componentes de tensão ajam independentemente;
- uma vez que esse critério é baseado no de von Mises, ele se reduz ao mesmo resultado quando aplicado sobre um material isotrópico. Nesse caso, a resistência à tração se relaciona à resistência ao cisalhamento da seguinte forma:

$$f_x = f_y = f_{xy} \sqrt{3} \quad (5.1.4)$$

5.1.4. CRITÉRIO DE TSAI-WU

Em 1971 Tsai e Wu propuseram um procedimento, o qual aumenta o número de termos na equação do critério de falha de Hill buscando uma melhor aproximação dos dados experimentais obtidos para os vários materiais.

De acordo com Nicolas (2006, p. 43) a falha de um determinado material é interpretada com a ocorrência de qualquer descontinuidade na resposta do material aos estímulos mecânicos. Algumas das descontinuidades de interesse são: o início da não linearidade na relação tensão x deformação, a ocorrência de deformações irreversíveis e a ruptura do material. As condições para a ocorrência desses fenômenos são referidas como critério de falha ou de ruptura. A condição de ruptura frágil deve ser considerada como um caso especial onde o critério de falha por escoamento coincide com o critério de falha por ruptura.

Considerando-se materiais totalmente anisotrópicos, deve-se admitir que os modos de falha sejam condicionados tanto pelas tensões normais quanto pelas tangenciais, uma vez que as fraturas podem ocorrer em virtude de diferentes conjuntos de tensões que agem sobre o elemento.

A expressão (5.1.5), elaborada por Tsai e Wu (1971), representa a teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos.

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (5.1.5)$$

$(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

A equação acima representa a teoria geral de resistência para materiais anisotrópicos. Na forma expandida a equação (5.1.5) torna-se:

$$\begin{aligned} & F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 + \\ & + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + \\ & + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 + \\ & + F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 + \\ & + F_{44} \sigma_4^2 + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 + \\ & + F_{55} \sigma_5^2 + 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 + \\ & + F_{66} \sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

A equação (5.1.5) é também conhecida como critério de resistência ou como tensor polinomial de resistência para materiais anisotrópicos.

Considerando o estado plano de tensões, aplicado a materiais ortotrópicos, e desenvolvendo a equação (5.1.5) tem-se:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{44} \sigma_4^2 - 1 = 0 \quad (5.1.7)$$

A representação gráfica da superfície do critério de Tsai-Wu segundo as direções de tensões principais é apresentada na Figura 5.4.

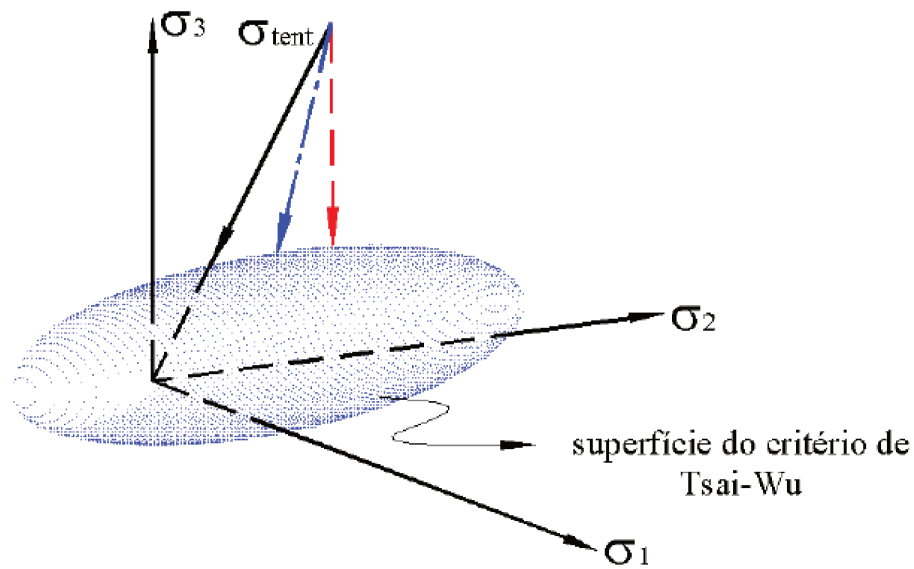


Figura 5.4 – Superfície do critério de Tsai-Wu.
Fonte: Paccola (2004)

As várias características do critério de resistência proposto por Tsai e Wu (1971) são:

- é uma equação escalar e conseqüentemente invariante. As interações entre todos os componentes de tensões são independentes das propriedades do material;
- os componentes de resistência são expressos em um tensor, suas relações de transformação e os invariantes associados são bem estabelecidos;
- as propriedades de simetria do tensor de resistência e o número de componentes nulos e independentes podem ser rigorosamente determinados, da mesma forma que outras propriedades dos materiais anisotrópicos, tal como a matriz de elasticidade;
- sendo invariante, o critério de resistência é válido para todos os sistemas de coordenadas.

Embora muitas superfícies possam ser representadas por um polinômio na forma da equação (5.1.8), nem todas as superfícies são superfícies de ruptura admissíveis.

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (5.1.8)$$

A superfície de ruptura não pode ser imaginária nem ser uma superfície aberta. Para satisfazer essas condições algumas restrições para os coeficientes F_i e F_{ij} são necessárias.

No caso de $f_{x_t} = f_{x_c}$ e $f_{y_t} = f_{y_c}$, o critério reduz-se a:

$$\frac{\sigma_1^2}{f_x^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{f_x f_y} + \frac{\sigma_2^2}{f_y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{f_{xy}^2} = \frac{1}{C^2} \quad (5.1.9)$$

onde:

C - coeficiente de segurança¹

Das várias características apresentadas neste item, pode-se constatar que a teoria geral de resistência de Tsai-Wu possui ampla utilização na estimativa de resistência para os mais diversos materiais, sejam eles isotrópicos, ortotrópicos ou anisotrópicos, com ou sem simetria de resistência. Como se trata de uma formulação tensorial, a relação de transformação dos elementos do tensor é facilmente determinada.

Este critério, em sua forma tridimensional, leva em conta o efeito da componente hidrostática das tensões diferentemente dos critérios anteriormente descritos. Ainda pode-se observar que a teoria de resistência de Tsai-Wu possui ampla utilização na estimativa de resistência para os mais diversos materiais.

5.1.5. CRITÉRIO DE HOFFMAN

Hoffman (1967) acrescentou termos lineares a teoria de Hill não apresentando uma formulação tensorial. Segundo Mendonça (2005) este critério pode ser visto como uma extensão do critério de Hill ou uma simplificação do critério de Tsai-Wu. Assim, o critério de Hoffman

¹ O coeficiente de segurança maior que 1, também pode ser considerado um fator de carga, isto é, aquele número que pode ser multiplicado pelas componentes de tensão no ponto para levá-lo ao limiar de falha.

tem sido bastante utilizado tanto em problemas de plasticidade de metais quanto em falha frágil de laminados fibrosos. Sob um estado plano de tensões, para o caso de uma lâmina transversalmente isotrópica, a equação do critério toma a seguinte forma:

$$\frac{\sigma_1^2}{f_{x_t} f_{x_c}} + \frac{\sigma_2^2}{f_{y_t} f_{y_c}} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{f_{x_t} f_{x_c}} + \frac{\tau_{12}^2}{f_{xy}^2} + \frac{X_c - X_t}{f_{x_t} f_{x_c}} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{f_{y_t} f_{y_c}} \sigma_2 = 1 \quad (5.1.10)$$

Fica evidente que essa expressão reduz-se ao critério de Tsai-Hill, equação (5.1.3), quando $f_{x_t} = f_{x_c} = f_x$ e $f_{y_t} = f_{y_c} = f_y$.

5.2. MODOS DE FALHA

Existem diversos modos de falha em estruturas sanduíche, de acordo com Jones (1975), Mendonça (2005) e Tita (2007) os mais característicos são os apresentados a seguir, destacando-se alguns aspectos destes modos de falha.

5.2.1. ESCOAMENTO OU RUPTURA DAS FACES

O esforço de flexão é equilibrado pelas tensões de tração e compressão, nas faces da estrutura. Carregamentos coplanares também podem induzir tensões normais e cisalhantes nas faces, sendo que estas devem suportá-las em segurança, conforme representado na Figura 5.5.

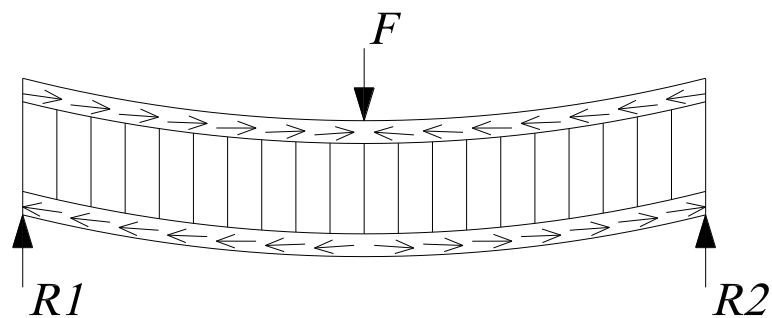


Figura 5.5 – Falha por escoamento ou por ruptura das faces.

5.2.2. CISALHAMENTO NO NÚCLEO

O modo de falha ilustrado na Figura 5.6a se desenvolve devido a uma junção de alto esforço cortante devido à grandes cargas próximas aos apoios, com resistência ao cisalhamento do núcleo insuficiente e espessura da peça muito pequena. Os esforços cortantes induzidos na estrutura se distribuem principalmente pelo núcleo, assim como o adesivo utilizado e estes devem serem capazes de suportar estes esforços (Figura 5.6b).

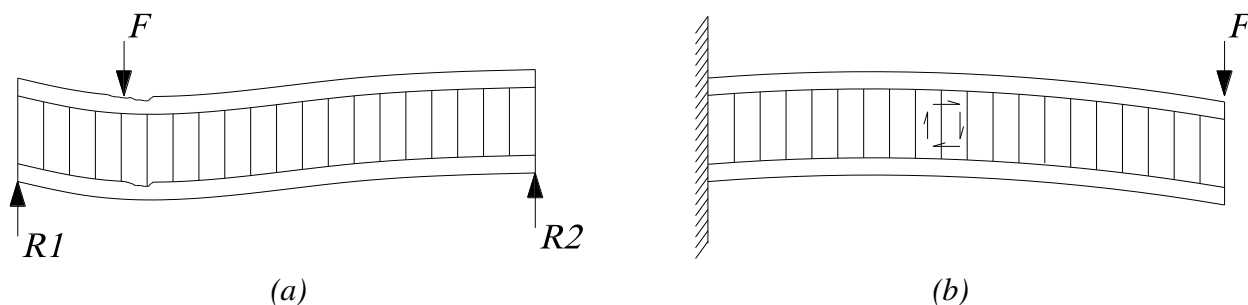


Figura 5.6 – Falha por cisalhamento no núcleo.

5.2.3. FLAMBAGEM GLOBAL DO PAINEL

O núcleo da estrutura deve ser espesso e ter módulo de elasticidade transversal elevado o suficiente para prevenir este tipo de falha, como mostra a Figura 5.7a. O modo de falha ilustrado na Figura 5.7b, apresenta uma instabilidade global, no entanto mais localizada.

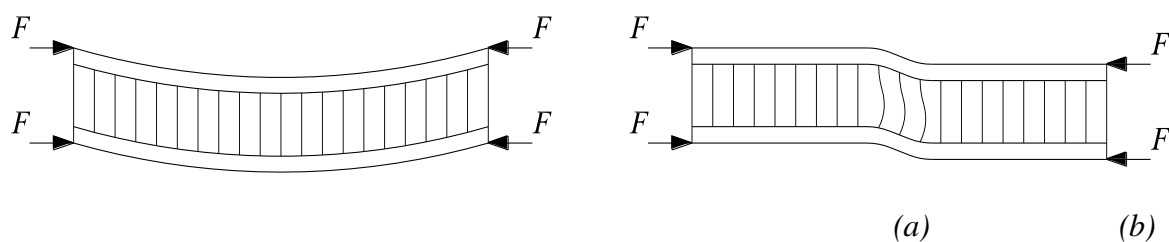


Figura 5.7 – Falha por flambagem global do painel.

5.2.4. DESLOCAMENTO EXCESSIVO

A estrutura deve apresentar rigidez flexural para evitar este tipo de falha sob cargas de projeto (Figura 5.8).

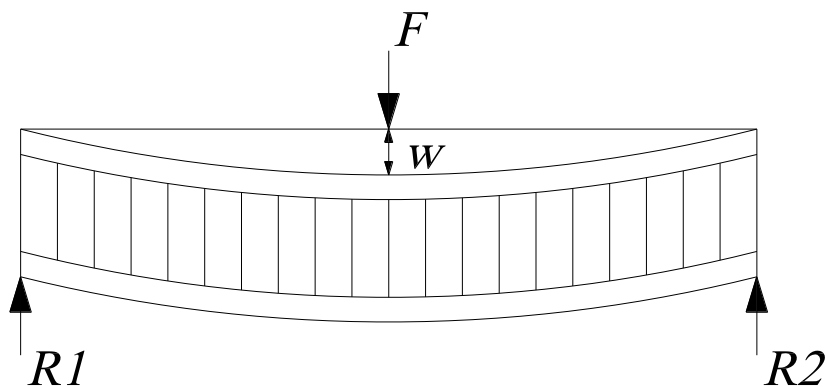


Figura 5.8 – Falha por deslocamento excessivo.

5.2.5. EMPENAMENTO DAS FACES (*WRINKLING*)

Trata-se de uma flambagem local das faces, que ao ocorrer, pode se deslocar a face para dentro ou para fora. A Figura 5.9 apresenta esquemas desse modo de falha, sendo que, como consequência, pode causar falha no adesivo ou compressão no núcleo.

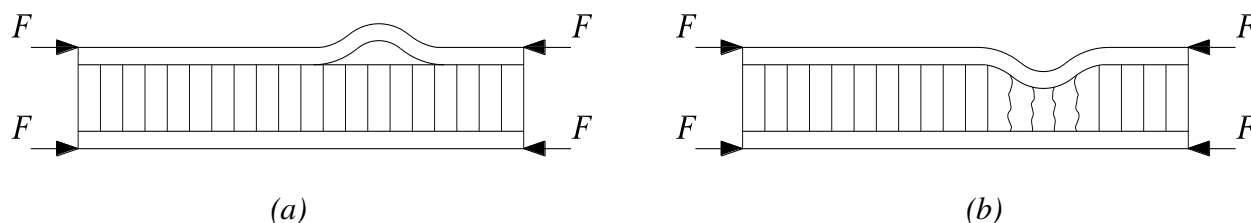


Figura 5.9 – Falha por Wrinkling das faces (causando falha no adesivo ou no núcleo).

5.2.6. FLAMBAGEM INTRACELULAR (*DIMPLING*)

Apesar de se tratar de uma falha local, como apresentado na Figura 5.10, ela representa uma redução global na rigidez. Este modo de falha pode se propagar e causar uma reação em cadeia que acarretará um estado limite último. Pode ocorrer sob carga estática ou dinâmica e pode desenvolver um processo gradual de fadiga.

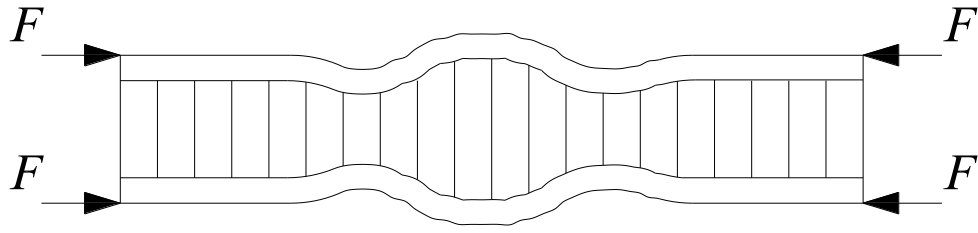
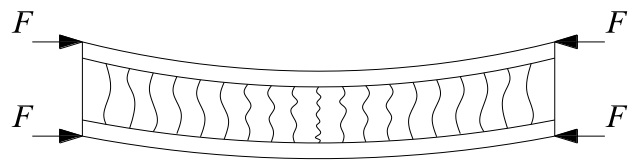
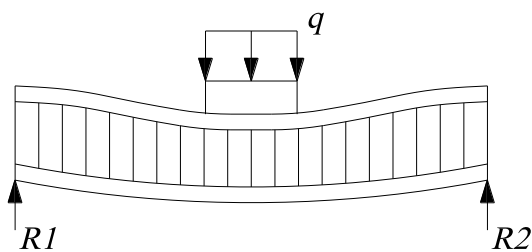


Figura 5.10 – Falha por flambagem intracelular da face (dimpling).

5.2.7. ESMAGAMENTO DO NÚCLEO

As cargas estão sempre distribuídas sobre uma área e essa área deve ser grande o suficiente para evitar o modo de falha esquematizado na Figura 5.11a. Outra forma de carregamento do núcleo é apresentada na figura 5.11b, onde o esmagamento é provocado por resistência normal do núcleo muito baixa, diâmetro da célula muito grande, espessura da parede muito pequena, ou deslocamento excessivo do painel.



(a)

(b)

Figura 5.11 – Falha por esmagamento do núcleo.

6. PROJETO DE ESTRUTURAS SANDUÍCHE

No projeto de uma estrutura sanduíche existem vários parâmetros a serem especificados pelo projetista. De modo simplificado, o projeto tem as seguintes etapas:

- primeira etapa: as propriedades das faces e do núcleo são arbitradas;
- segunda etapa: as espessuras de cada face e do núcleo são obtidas.

Para o emprego das teorias de vigas aplicadas às estruturas sanduíche necessita-se, inicialmente da análise das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

6.1. TEORIA DE EULER-BERNOULLI PARA VIGAS

De acordo com Mendonça (2005) na teoria de Euler-Bernoulli são assumidas as seguintes hipóteses cinemáticas:

- a seção transversal plana permanece plana após a deformação da viga, além de perpendicular à direção local do eixo deformado, conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
 M &= -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \\
 V &= -\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.1.1}$$

onde:

M - momento fletor

V - cortante

w - função deslocamento em um ponto de coordenadas (x,y,z)

Com a substituição de V obtemos a equação diferencial do deslocamento em função da carga aplicada:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = p
 \tag{6.1.2}$$

onde:

p - carga distribuída na viga.

A única solução de $\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = p$ pode ser obtida se nós especificarmos tanto w quanto V e tanto dw/dx quanto M no final da viga. Figura 6.1.

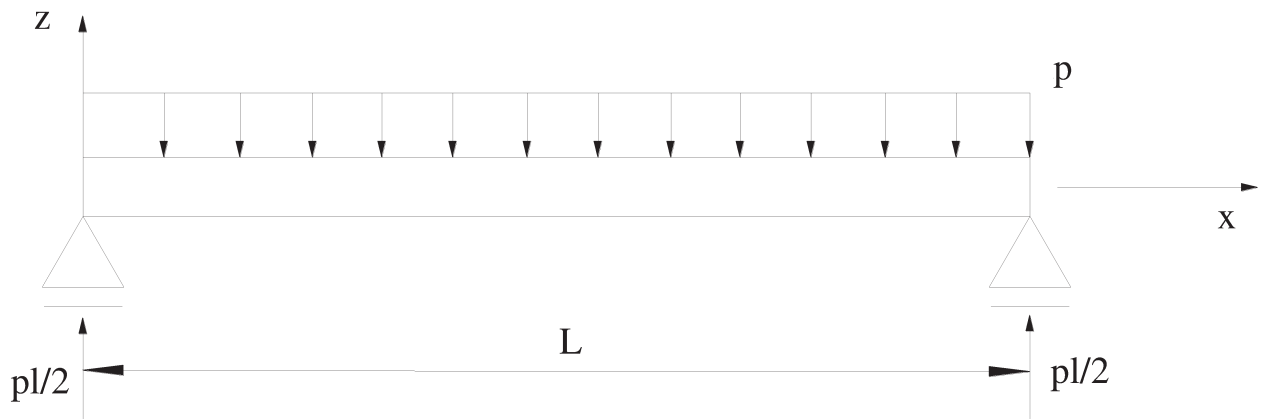


Figura 6.1 – Viga biapoiada sob carga distribuída uniforme p .

- não se considera variação na altura da seção transversal durante o processo de deformação da viga;
- o eixo horizontal do sistema de referência da viga intercepta os centróides das seções transversais;
- o plano do sistema de referência XY intercepta as seções transversais ao longo da viga em eixos principais de inércia.

6.2. A VIGA DE TIMOSHENKO

Segundo Reismann (1980) a viga é definida como sendo um elemento estrutural, estreito, carregado transversalmente, com grande comprimento, quando comparado com sua seção transversal. Por simplicidade, assume-se que a seção transversal possui uma área A , que é simétrica em relação ao eixo z (axial) da viga, que por sua vez é o eixo do centro de gravidade da área A .

Além disso, as forças de massa do corpo são desprezadas. Os esforços atuantes são definidos da seguinte maneira (ver Figura 6.2):

$$\begin{aligned}
 M &= \int_A z \sigma_{xx} dA \\
 V &= \int_A \tau_{xz} dA
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

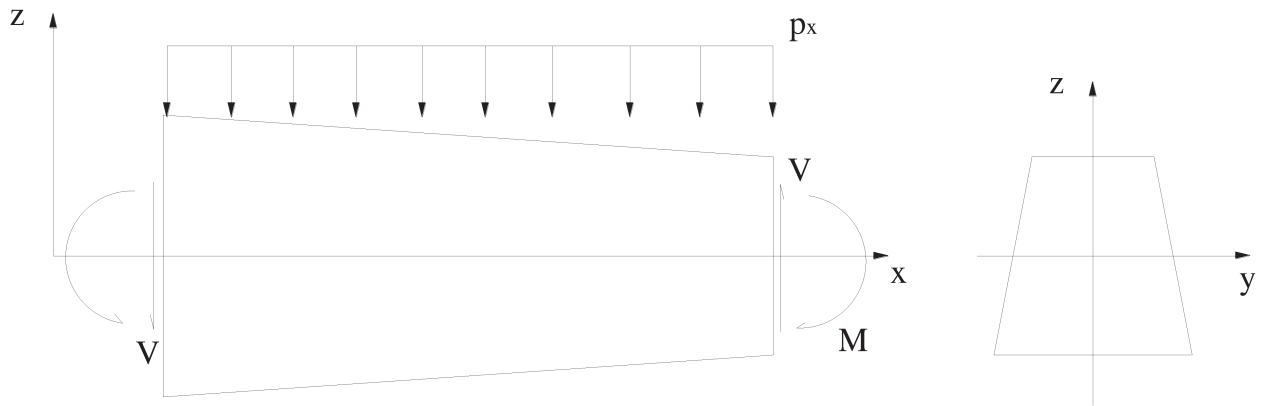


Figura 6.2 – Viga de Timoshenko.

Para derivar as relações tensão-deformação pertinentes, assume-se os seguintes componentes de deslocamento:

$$\begin{aligned}
 u_x &= z \psi_{(x)} \\
 u_z &= w_{(x)}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.2}$$

onde:

w - deslocamento em um ponto

ψ - rotação da seção transversal

As equações acima implicam em duas condições:

1. os planos que são normais ao eixo da viga não se deformam, ou seja, permanecem planos, e
2. o deslocamento vertical em todos os pontos de um plano normal a seção transversal é o mesmo.

Usando as equações acima e a Lei de Hooke, obtêm-se facilmente

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E_z \frac{d\psi}{dx} + \nu \left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right) \\ \tau_{xy} &= 2G\varepsilon_{xz} = G \left(\psi + \frac{dw}{dx} \right)\end{aligned}\tag{6.2.3}$$

onde:

ν - coeficiente de Poisson

ψ - rotação da seção transversal

Alterando agora estes resultados em dois aspectos:

1. abandonar o termo $\nu \left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right)$ na equação, e
2. mudar G por k^2G , onde k é uma constante (coeficiente de cisalhamento) que é usada para ajustar a presente teoria com a teoria tridimensional.

A constante k^2 pode ser determinada através de considerações estáticas, e por este método é mostrado ser a relação da média da tensão de cisalhamento na seção transversal da viga, pela tensão de cisalhamento no centróide. Existem muitos métodos para determinação de k^2 , um resumo útil, bem como um método adicional para esta avaliação pode ser encontrado no artigo de Cowper (1996), onde é apresentada uma série de fórmulas para k^2 além de apresentar tabelas com estes coeficientes já calculados. A Tabela 6.1 apresenta alguns valores para este coeficiente.

Tabela 6.1 – Valores para o coeficiente de cisalhamento k^2

Coeficiente de Poisson ν	Seção retangular	Seção circular
0,0	0,833	0,857
0,3	0,850	0,886
0,5	0,870	0,900

Fonte: Reismann (1980, p. 219).

As relações tensão-deformação são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E_z \frac{d\psi}{dx} \\ \tau_{xy} &= k^2 G \left(\psi + \frac{dw}{dx} \right)\end{aligned}\tag{6.2.4}$$

Substituindo-se as equações acima nas equações dos esforços M e V, tem-se:

$$\begin{aligned}M &= EI \frac{d\psi}{dx} \\ V &= k^2 GA \left(\psi + \frac{dw}{dx} \right)\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

onde $I = \int_A z^2 dA$, é o momento de inércia da área da seção transversal A, com o respectivo eixo

y. Considerando-se as equações anteriores, temos as relações:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{M}{I} z \\ \tau_{xy} &= \frac{V}{A}\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Derivando-se as equações de equilíbrio da viga $\sigma_{ji,j} = 0$ com $i, j = x, y, z$ multiplica-se cada termo das equações por z e aplicando-se a operação $\int_A \dots dA$, obtém-se:

$$\int_A z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA + \int_A z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dA = 0 \quad (6.2.7)$$

A primeira integral da equação acima pode ser reduzida com o auxílio de $M = \int_A z \sigma_{xx} dA$, resultando-se na equação (6.2.8)

$$\int_A z \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dA = \frac{dM}{dx} \quad (6.2.8)$$

A segunda integral pode ser reduzida ao Teorema de Green no plano y-z. Assim tem-se:

$$\int_A z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dA = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} n_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz} n_z) - \tau_{xz} \right] dA = \oint_C z (\tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) ds - \int_A \tau_{xz} dA \quad (6.2.9)$$

Considerando-se na viga os vetores tensão são $T_i = \sigma_{ji} n_j$, sendo σ_{ji} o tensor de tensões, n_j o vetor unitário normal e no contorno C $T_x = \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0$, pode-se escrever:

$$\int_A z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dA = -V \quad (6.2.10)$$

Utilizando-se as duas equações anteriores, a equação (6.2.7) assume a seguinte forma:

$$\frac{dM}{dx} - V = 0 \quad (6.2.11)$$

Após aplicar a operação $\int_A \dots dA$ na equação de equilíbrio, o resultado é:

$$\int_A \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dA + \int_A \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = 0 \quad (6.2.12)$$

Com o auxílio da equação $V = \int_A \tau_{xz} dA$, a primeira integral da equação anterior reduz-se

a:

$$\int_A \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dA = \frac{dV}{dx} \quad (6.2.13)$$

A segunda integral pode ser reduzida a aplicação do Teorema de Green.

$$\int_A \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dA = \oint_C (\tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z) ds = \oint_C T_z ds = p(x) \quad (6.2.14)$$

Devido a superfície lateral da viga $T_z = \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z$, tanto exato, como aproximadamente, a função $p(x)$ pode ser interpretada como a intensidade de uma força distribuída atuando na viga (ver Figura 6.1).

Com o auxílio das equações (6.2.13) e (6.2.14), pode-se escrever a equação (6.2.12) da seguinte forma:

$$\frac{dV}{dx} + p(x) = 0 \quad (6.2.15)$$

As equações (6.2.11) e (6.2.15) são as relações diferenciais entre cargas e esforços. Substituindo-se (6.2.5) nessas equações, obtemos as equações diferenciais em termos de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[k^2 GA \left(\frac{dw}{dx} + \psi \right) \right] + p &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\psi}{dx} \right) - k^2 AG \left(\frac{dw}{dx} + \psi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

As equações acima são freqüentemente chamadas de equações da viga de Timoshenko (Reismann, 1980), e elas respondem a problemas de deformações de flexão, bem como as de cisalhamento.

6.3. COMPARAÇÃO ENTRE A VIGA DE TIMOSHENKO E A VIGA DE EULER-BERNOULLI

A diferença básica entre estes modelos está relacionada ao fato que a formulação de Euler-Bernoulli não considera a deformação de cisalhamento presente nas seções transversais, enquanto Timoshenko a considera.

Para o estudo e dimensionamento de vigas curtas é importante a análise dos efeitos causados pelo cisalhamento, bem como para vigas com seções compostas (seção I e T).

6.4. APLICAÇÃO DA TEORIA DE FLEXÃO ÀS VIGAS SANDUÍCHE

A Figura 6.3 apresenta uma viga sanduíche, que consiste de duas faces finas de espessura t , separadas por um núcleo de material de baixa densidade e espessura c . A altura ou espessura total da viga é h e a largura b . As faces, desta viga, são feitas de um material mais resistente que o do núcleo e considera-se que ambos sejam isotrópicos.

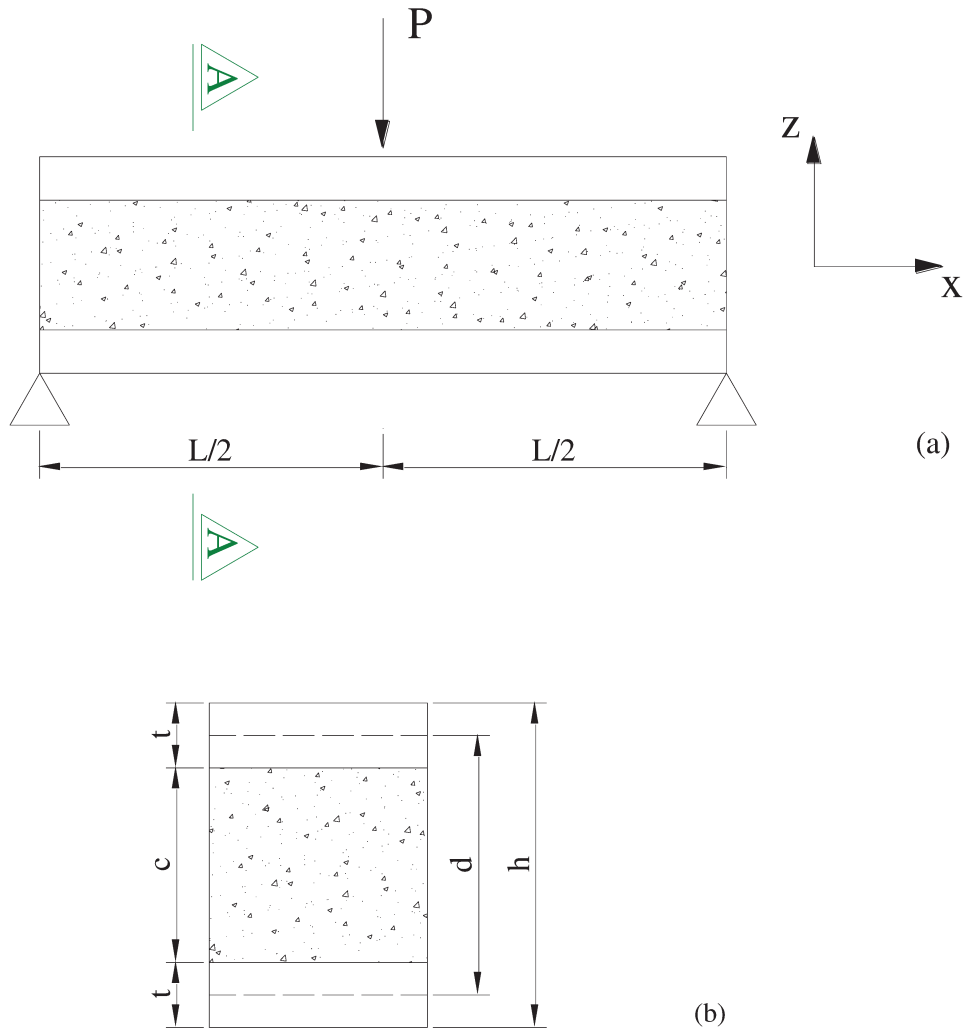


Figura 6.3 – Dimensões da viga sanduíche. (a) Seção longitudinal. (b) Seção transversal A-A.

A teoria clássica da flexão considera que a seção transversal que é plana e perpendicular ao eixo longitudinal quando a viga está descarregada, permanecerá, assim, após a flexão. Esta consideração leva a conhecida expressão que relaciona momento fletor (M) e curvatura $\frac{1}{\omega}$.

$$\frac{M}{EI} = -\frac{1}{\omega} \quad (6.4.1)$$

onde:

EI - rigidez à flexão (D)

ω - raio de curvatura.

O comportamento de uma viga sanduíche pode ser analisado, inicialmente, utilizando as teorias clássicas de vigas, desde que alguns cuidados sejam tomados. Considerando Allen (1969) existem dois cuidados:

- considerar as diferentes propriedades dos materiais, de forma clara;
- considerar o efeito do cisalhamento transversal nos deslocamentos. Portanto deve-se usar a teoria de Timoshenko ou de uma ordem superior no trato do cisalhamento transversal.

6.4.1. RIGIDEZ À FLEXÃO DA VIGA SANDUÍCHE

A rigidez à flexão da viga sanduíche é composta pelo somatório da rigidez à flexão das faces e da rigidez à flexão do núcleo, medidas a partir do eixo baricêntrico da seção transversal, portanto:

$$D = D_{\text{faces}} + D_{\text{núcleo}}$$
$$D = E_f \frac{bt^3}{6} + E_f \frac{btd^2}{2} + E_n \frac{bc^3}{12} \quad (6.4.2)$$

onde:

D - rigidez à flexão

E_f - módulo de elasticidade das faces

E_n - módulo de elasticidade do núcleo

d - distância entre as superfícies médias das faces

$$d = \frac{h+c}{2} \quad (6.4.3)$$

Considera-se que a viga tenha uma pequena largura e que as tensões na direção y sejam nulas.

Na equação (6.4.2), os dois primeiros termos $E_f \frac{bt^3}{6} + E_f \frac{btd^2}{2}$ representam a rigidez das faces associadas à flexão em relação ao eixo baricêntrico de toda a viga sanduíche; sendo que $E_f \frac{bt^3}{6}$ representa a rigidez local das faces, associada à flexão em relação aos seus próprios centróides. O terceiro termo $E_n \frac{bc^3}{12}$ representa a rigidez à flexão do núcleo.

Considerando-se as vigas sanduíche, na prática, verifica-se que o segundo termo da equação (6.4.2) é o dominante, sendo que o primeiro termo representa menos do que 1%, quando:

$$3\left(\frac{d}{t}\right)^2 > 100 \quad (6.4.4)$$

Ao se dispensar o primeiro termos o erro cometido é insignificante, uma vez que $\frac{d}{t} > 5,77$. O terceiro termo representa menos de 1% do segundo, e pode ser dispensado quando:

$$6\frac{E_f}{E_n} \frac{t}{c} \left(\frac{d}{c}\right)^2 > 100 \quad (6.4.5)$$

Geralmente a relação d/c é praticamente 1 e t/c situa-se na faixa de 0,02 a 0,1. Substituindo-se estes valores na equação (6.4.5), encontramos que E_f/E_n encontra-se entre 833 e 167.

6.4.2. TENSÃO NORMAL

As tensões nas faces e no núcleo podem ser determinadas utilizando-se a teoria clássica de flexão adaptada à natureza composta da seção transversal.

Tensão normal nas faces:

$$\sigma_f = \frac{Mz}{D} E_f \quad \frac{c}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{c}{2}; \quad (6.4.6)$$

Tensão normal no núcleo:

$$\sigma_n = \frac{Mz}{D} E_n \quad -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2} \quad (6.4.7)$$

6.4.3. TENSÕES CISALHANTES

De acordo com a teoria clássica da flexão, para a tensão de cisalhamento, τ , numa viga homogênea (Figura 6.4) chegamos a seguinte expressão:

$$\tau = \frac{VS}{Ib} \quad (6.4.8)$$

onde:

b - largura;

S - momento estático;

I - momento de inércia;

V - cortante.

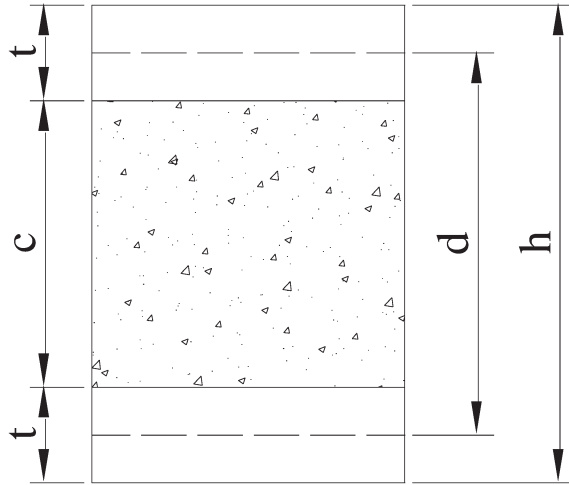


Figura 6.4 – Seção transversal de uma viga sanduíche.

No caso de vigas sanduíche a equação (6.4.8) será alterada para levar em consideração os módulos de elasticidade dos diferentes elementos da seção transversal:

$$\tau = \frac{VS}{Elb} E \Rightarrow \tau = \frac{V}{Db} \sum ES \quad (6.4.9).$$

Para uma cota z intermediária ao núcleo da viga sanduíche, a equação pode ser alterada para:

$$\sum (ES) = E_f \frac{btd}{2} + E_n \frac{b}{2} \left(\frac{c}{2} - z \right) \left(\frac{c}{2} + z \right) \quad (6.4.10).$$

Assim, a tensão de cisalhamento num ponto qualquer do núcleo será:

$$\tau = \frac{V}{D} \left[E_f \frac{td}{2} + \frac{E_n}{2} \left(\frac{c^2}{4} - z^2 \right) \right] \quad (6.4.11).$$

Para as tensões numa face, também quadrática, pode ser obtida uma expressão equivalente. Na Figura 6.5, pode ser vista a distribuição ao longo da altura da seção.

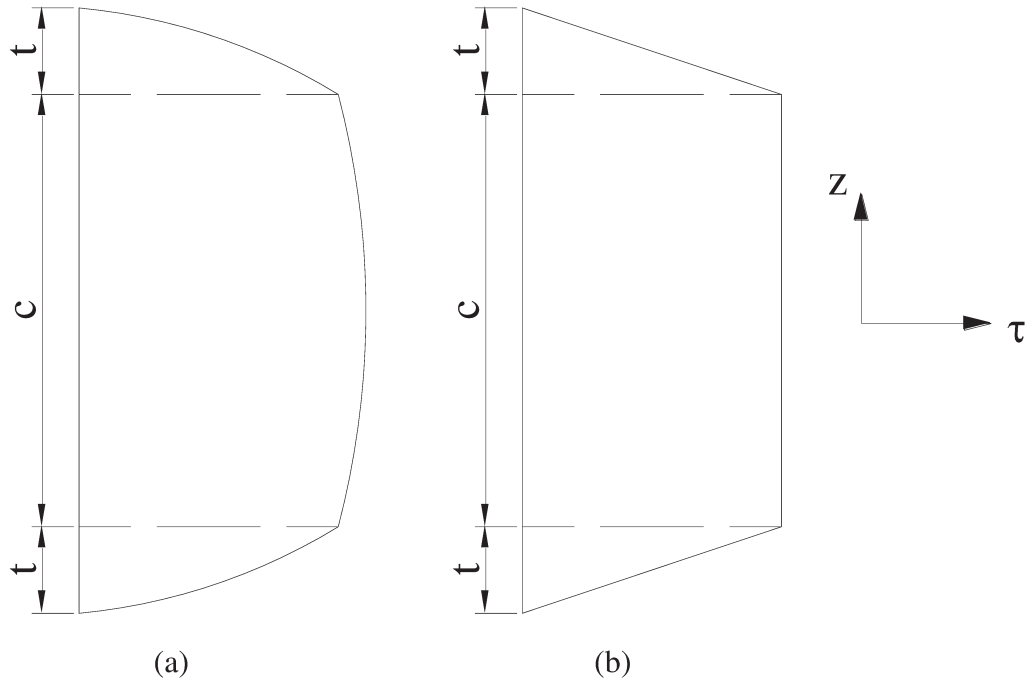


Figura 6.5 – Distribuição de tensões cisalhantes numa viga sanduíche. (a) distribuição quadrática; (b) efeito de núcleo com baixo E_n e da eliminação da rigidez flexural das faces.

As tensões cisalhantes máximas no núcleo e nas faces são as seguintes:

$$\tau_{n_{\max}} = \frac{V}{2D} \left[E_f t d + E_n \frac{c^2}{2} \right] \quad (6.4.12)$$

$$\tau_{f_{\max}} = \frac{V t d}{2D} E_f \quad (6.4.13)$$

Analisando-se as equações (6.4.12) e (6.4.13), pode-se dizer que a tensão máxima no núcleo é pouco maior que a tensão máxima na face. Fazendo-se a razão entre as condições

(6.4.12) e (6.4.13), para que a tensão cisalhante no núcleo seja no máximo 1% maior que a tensão cisalhante na face, tem-se:

$$4 \frac{E_f}{E_n} \frac{t}{c} \frac{d}{c} \geq 100 \quad (6.4.14)$$

Se a condição (6.4.14) for satisfeita, pode-se assumir que a tensão de cisalhamento será constante ao longo da espessura do núcleo. Conclui-se, portanto que quando o núcleo for de baixa densidade e sua contribuição à rigidez à flexão for insignificante, pode-se considerar uma distribuição uniforme das tensões cisalhantes ao longo de sua espessura, como a ilustrada na Figura 6.5b.

Caso, o núcleo tenha baixa densidade, pode-se considerar $E_n = 0$ nas equações (6.4.2) e (6.4.11), o que resultará na tensão de cisalhamento no núcleo

$$\tau = \frac{V}{D} E_f \frac{td}{2} \quad (6.4.15)$$

Se, além disto a rigidez à flexão das faces em relação ao seu próprio eixo neutro for pequena, então o primeiro e o terceiro termo da equação (6.4.2) podem ser desprezados, resultando em

$$D = E_f \frac{btd^2}{2} \quad (6.4.16)$$

sendo assim, a equação (6.4.15) se reduz à

$$\tau = \frac{V}{bd} \quad (6.4.17)$$

Pode-se notar que esta tensão é média e que a distribuição de tensões cisalhantes é aquela ilustrada na Figura 6.5b. Além disso, a condição $E_n = 0$ resulta também numa distribuição linear de tensões nas faces.

Quando é observado este estado de tensões, devido ao fato de $E_n = 0$, como já comentado, o núcleo pode ser dito como sendo do tipo antiplano, que é definido como aquele em que $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Neste caso, não há contribuição do núcleo na rigidez à flexão (D) do sanduíche.

6.4.4. DESLOCAMENTOS EM VIGAS SANDUÍCHE

Os deslocamentos transversais em vigas sanduíche podem ser calculados utilizando-se a teoria clássica de flexão de vigas, ver Figura 6.6.

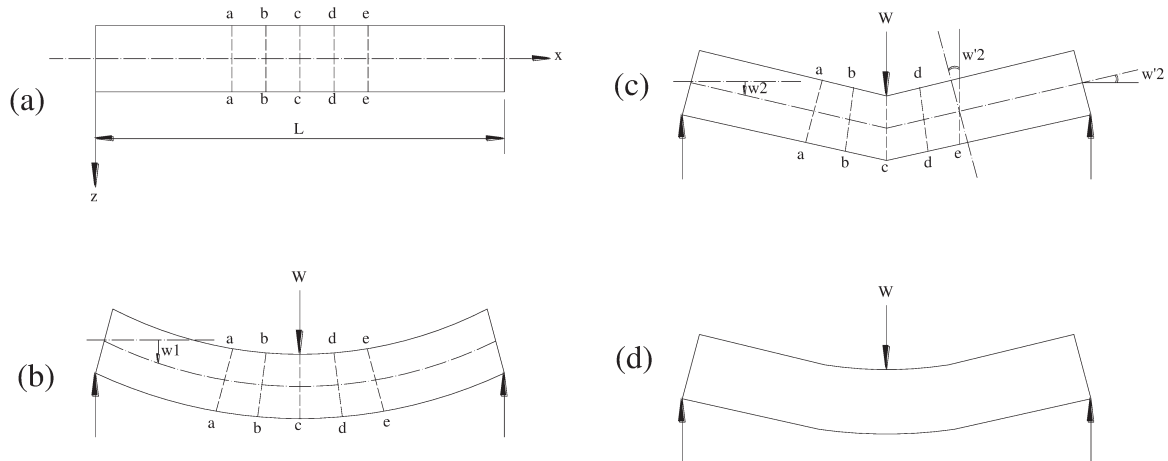


Figura 6.6 – Deslocamentos em viga sanduíche. (b) deslocamento devido a parcela de flexão pura; (c) deslocamento devido ao esforço cortante.

A Figura 6.6b mostra a deformação devido à flexão, de uma viga simplesmente apoiada com uma carga W aplicada no centro da mesma. Os pontos a, b, c, d, e encontram-se na linha central das faces e as seções transversais aa, bb, cc, dd, ee, sofrem rotação mas permanecem perpendiculares ao eixo longitudinal da viga deformada. A face superior sofre compressão e a inferior tração.

O deslocamento w_1 devido ao momento fletor pode ser calculado pelo procedimento a seguir.

Devido a simetria, as reações de apoio são $W/2$. O momento fletor para x compreendido entre 0 e $L/2$ é:

$$-M = \frac{W}{2}x \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (6.4.18)$$

O valor máximo do deslocamento ocorre no centro da viga, para $x = L/2$, portanto:

$$\begin{aligned} Dw_1 &= \frac{WL^3}{48} \\ w_1 &= \frac{WL^3}{48D} \\ w_f &= \frac{WL^3}{48D} \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

A tensão de cisalhamento no núcleo em qualquer seção é $\tau = \frac{V}{bd}$, que é associada à deformação de cisalhamento $\gamma = \frac{V}{Gbd}$, que como τ é constante ao longo da espessura do núcleo. Este tipo de deformação de cisalhamento está ilustrado na Figura 6.6c.

Os pontos a, b, c, d, ... que estão na linha central das faces não se movem horizontalmente, mas são dispostos verticalmente pelo deslocamento w_2 . As faces e o eixo

longitudinal da viga se inclinam e a relação entre a inclinação da viga, dw_2/dx e a deformação de cisalhamento γ pode ser obtida pela Figura 6.7.

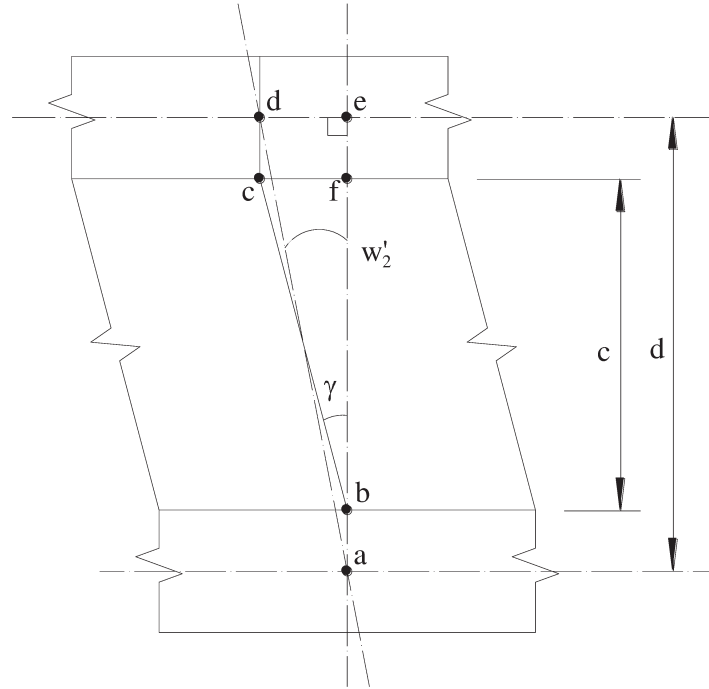


Figura 6.7 – Deformação de cisalhamento de uma viga sanduíche.

Da Figura 6.7 tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{de} &= \frac{dw_2}{dx} d \\ \overline{de} &= \overline{cf} \\ \overline{cf} &= \gamma c \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

portanto:

$$\frac{dw_2}{dx} = \gamma \frac{c}{d} \tag{6.4.21}$$

como $\gamma = \frac{V}{Gbd}$, então:

$$\frac{dw_2}{dx} = \frac{V}{Gbd} \frac{c}{d} \quad (6.4.22)$$

$$\text{Fazendo-se } A = \frac{bd^2}{c} = \frac{b \left(\frac{h}{2} + \frac{c}{2} \right)^2}{c} = \frac{b \left(\frac{h}{2} + c \right)^2}{4c} \text{ onde,}$$

b - largura da viga sanduíche

d - distância entre as superfícies médias

h - espessura total da viga sanduíche

c - espessura do núcleo da viga sanduíche

tem-se,

$$\frac{dw_2}{dx} = \frac{V}{AG} \quad (6.4.23)$$

O produto AG é comumente designado como a rigidez da viga sanduíche ao cisalhamento. O deslocamento w_2 , associado à deformação de cisalhamento do núcleo pode ser obtido integrando-se a equação (6.4.21). Sabendo-se que, a força cortante V na metade esquerda da viga é $P/2$, obtém-se:

$$w_2 = \frac{W}{2AG} x + c_1 \quad (6.4.24)$$

Aplicando-se as condições de contorno $w_2 = 0$ para $x = 0$, tem-se que $c_1 = 0$. O valor máximo de w_2 ocorre para $x = L/2$ e é igual à:

$$w_c = \frac{WL}{4AG} \quad (6.4.25)$$

O deslocamento total w é a soma do deslocamento devido à flexão e o deslocamento devido ao cisalhamento:

$$w = w_f + w_c = \frac{WL^3}{48D} + \frac{WL}{4AG} \quad (6.4.26)$$

6.5. TEORIA DE PLACAS

Usualmente a placa é definida como um corpo limitado por duas superfícies geralmente planas. A superfície neutra é equidistante às duas superfícies limites, cuja distância entre estas superfícies, chamada espessura (que pode ser variável), é pequena se comparada com as outras duas dimensões, isto é, $t/a \ll 1$.

De acordo com o material do qual é constituída a placa, ela pode ser classificada como:

- a) **Anisotrópica** - cujas propriedades mecânicas são diferentes em qualquer direção;
- b) **Ortotrópica** - cujas propriedades mecânicas são diferentes em duas direções ortogonais;
- c) **Isotrópica** - cujas propriedades mecânicas são as mesmas em qualquer direção.

Dependendo da relação (t/a) entre a espessura (t) e a menor dimensão (a) medida no plano médio, a placa pode ser classificada como:

a) Muito delgada:

$$\frac{t}{a} < \frac{1}{80} \quad (6.5.1)$$

b) Delgada

$$\frac{1}{80} \leq \frac{t}{a} \leq \frac{1}{5} \quad (6.5.2)$$

c) Espessa

$$\frac{t}{a} > \frac{1}{5} \quad (6.5.3)$$

Segundo Mendonça (2005) uma característica importante sobre o comportamento mecânico das placas sanduíche é que elas não podem, em geral, ser consideradas placas finas, ao contrário, elas são classificadas como placas semi-espessas ou espessas dependendo da relação l/H , onde l é o comprimento característico medido sobre a superfície, e H , sua espessura. Da mesma forma que em vigas sanduíche, os efeitos devidos ao cisalhamento não podem ser desconsiderados. Um dos efeitos do cisalhamento transversal pode ser visto quando se considera qualitativamente o deslocamento transversal de uma placa-sanduíche, como visto na Figura 6.8.

Além da importância de se incluir o cisalhamento no cálculo de placas-sanduíche existe outro fator a ser considerado: os materiais usados como núcleo são selecionados para ser os mais leves possíveis e, conseqüentemente, têm resistências ao cisalhamento muito menores que os materiais usados nas faces, tornando importante a correta determinação das tensões cisalhantes transversais. A análise do laminado deve então garantir a integridade do núcleo quanto ao cisalhamento.

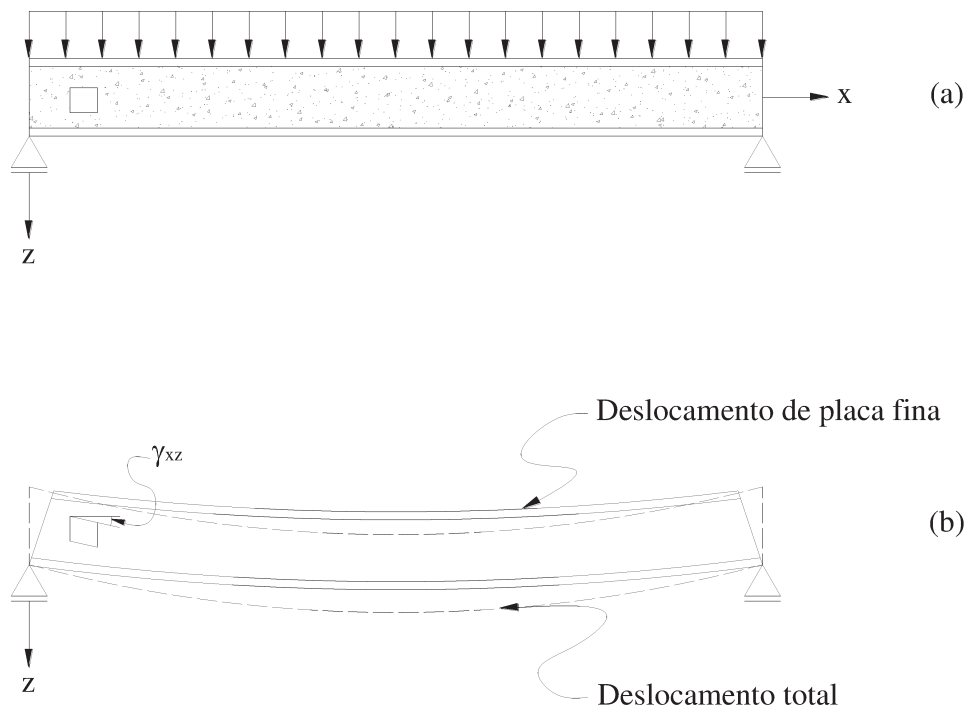


Figura 6.8 – Comparação quantitativa entre os deslocamentos obtidos em placas-sanduiche usando teorias de placa fina e semi-espessa.

6.5.1. TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM PARA PLACAS SANDUÍCHE

Considera-se uma placa sanduíche com as propriedades geométricas mostradas na Figura 6.9.

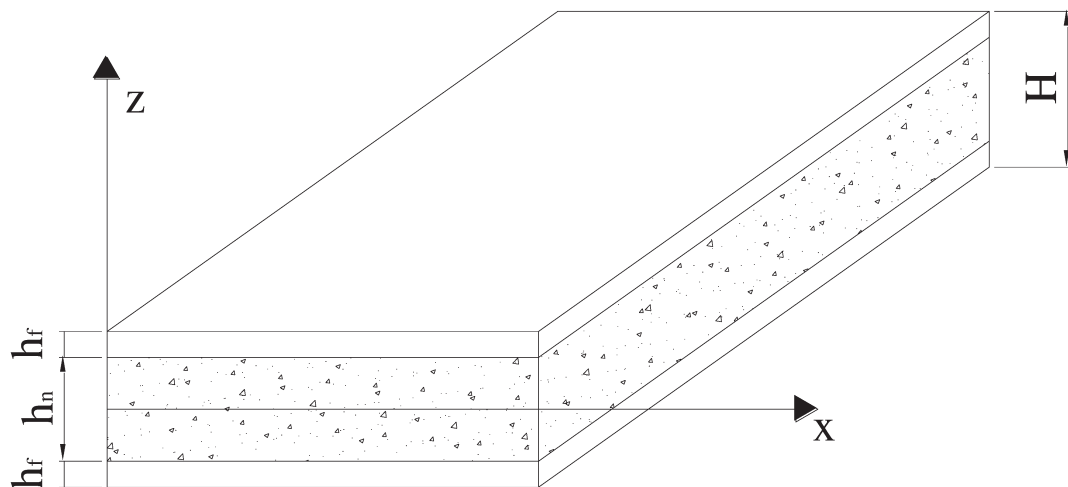


Figura 6.9 – Propriedades geométricas de uma placa sanduíche.

Whitney (1987) lista uma série de hipóteses feitas na análise aproximada de placas sanduíche, adaptadas por Mendonça (2005), como segue:

1. As faces podem ser homogêneo-isotrópicas ou compostas por lâminas ortotrópicas angulares de espessuras constantes h_f ;
2. O núcleo é ortotrópico, com as direções principais alinhadas aos eixos $x - y$. A espessura da placa é constante e muito maior que a espessura das faces;
3. As tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} no núcleo são consideradas desprezíveis por causa do baixo módulo de elasticidade dos materiais usuais em núcleos;
4. O deslocamento transversal w é considerado independente de z , isto é, ε_z é desprezado;
5. As tensões cisalhantes transversais τ_{xz} e τ_{yz} nas faces são supostas desprezíveis, mas não no núcleo;

6. Hipóteses de teoria linear:

- os deslocamentos transversais são pequenos se forem comparados a espessura da placa;
- as deformações coplanares são pequenas comparadas à unidade, usualmente $\varepsilon \leq 2\%$;
- o núcleo e as faces obedecem à Lei de Hooke.

7. Hipóteses cinemáticas:

- os deslocamentos coplanares no núcleo u_n e v_n supostamente variam de forma linear com z , porém as seções normais à superfície de referência no núcleo não são restringidas a permanecerem normais a esta, caracterizando uma teoria de primeira ordem;
- os deslocamentos coplanares nas faces, u_1, v_1, u_2 e v_2 , são considerados uniformes ao longo da espessura de cada face. Isso está baseado na hipótese 2.

O comportamento da placa sanduíche foi modelado por cinco funções de deslocamento: deslocamentos de membrana da superfície média, o deslocamento transversal e as rotações da normal em relação aos eixos y e x .

As deformações nas placas são:

- **cisalhamento transversal no núcleo**

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^n &= \psi_x + w_{,x} \\ \gamma_{yz}^n &= \psi_y + w_{,y}\end{aligned}\tag{6.5.4}$$

onde:

$w_{,x}$ - derivada parcial do deslocamento transversal; ψ - rotação da normal em relação aos eixos y e x .

- **extensão na face inferior**

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{f_1} &= \varepsilon_x^0 - \frac{1}{2} (H - h_f) \bar{k}_x \\
 \varepsilon_y^{f_1} &= \varepsilon_y^0 - \frac{1}{2} (H - h_f) \bar{k}_y \\
 \gamma_{xy}^{f_1} &= \gamma_{xy}^0 - \frac{1}{2} (H - h_f) \bar{k}_{xy}
 \end{aligned} \tag{6.5.5}$$

- **extensão na face superior**

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{f_2} &= \varepsilon_x^0 - \frac{1}{2} (H - h_f) \bar{k}_x \\
 \varepsilon_y^{f_2} &= \varepsilon_y^0 - \frac{1}{2} (H - h_f) \bar{k}_y \\
 \gamma_{xy}^{f_2} &= \gamma_{xy}^0 - \frac{1}{2} (H - h_f) \bar{k}_{xy}
 \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

onde:

f_1, f_2, n - índices que se referem a face inferior, superior e ao núcleo, respectivamente.

$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ - deformações de membranas.

k_x, k_y, k_{xy} - curvaturas.

Das relações cinemáticas têm-se as deformações coplanares, os índices acima são definidos por estas relações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y, z, t) \\ \varepsilon_y(x, y, z, t) \\ \gamma_{xy}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0(x, y, t) \\ \varepsilon_y^0(x, y, t) \\ \gamma_{xy}^0(x, y, t) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x(x, y, t) \\ k_y(x, y, t) \\ k_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} \tag{6.5.7}$$

com:

$$\mathcal{E}_I^0 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (6.5.8)$$

$$\mathcal{K}_I = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (6.5.9)$$

Graças a hipótese 3, em que as componentes coplanares são consideradas nulas no núcleo, os esforços de normal e de momento na placa são:

$$\mathcal{N}_x; N_y; N_{xy} = \int_{H/2}^{H/2+h_f} \mathbf{e}_x; \sigma_y; \tau_{xy} dz + \int_{H/2-h_f}^{H/2} \mathbf{e}_x; \sigma_y; \tau_{xy} dz \quad (6.5.10)$$

$$\mathcal{M}_x; M_y; M_{xy} = \int_{H/2}^{H/2+h_f} \mathbf{e}_x; \sigma_y; \tau_{xy} dz + \int_{H/2-h_f}^{H/2} \mathbf{e}_x; \sigma_y; \tau_{xy} dz \quad (6.5.11)$$

De acordo com a hipótese 5 apenas o núcleo possui uma distribuição de tensões cisalhantes, já as faces possuem cisalhamento nulo. Assim, os esforços cortantes por unidade de comprimento são obtidos por:

$$\mathcal{V}_x; V_y = \int_{h_n/2}^{h_n/2} \mathbf{e}_{xz}; \tau_{yz} dz \quad (6.5.12)$$

Fazendo algumas integrações obtém-se uma relação constitutiva que é similar à de placas finas:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ F & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (6.5.13)$$

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = h_n \begin{bmatrix} k_2 G_{23} & 0 \\ 0 & k_1 G_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y + w_{,y} \\ \psi_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \quad (6.5.14)$$

onde:

$\mathbf{A}_-, \mathbf{B}_-, \mathbf{D}_-$ e \mathbf{F}_- - submatrizes de rigidez do sanduíche.

Considerando-se a hipótese 7, sua segunda indicação, a matriz de rigidez em (6.5.13) não é simétrica, exceto em alguns casos. No caso de cada face ser composta por apenas uma lâmina tem-se $\mathbf{B}_- = \mathbf{F}_-$, assim as matrizes se resumem a

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= h_{f_1} \mathbf{F}^{f_1}_- + h_{f_2} \mathbf{F}^{f_2}_- \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_{f_1} - H \mathbf{h}_{f_1} \mathbf{F}^{f_1}_- + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{f_2} - h_{f_2} \mathbf{h}_{f_2} \mathbf{F}^{f_2}_- \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{4} \mathbf{C}_{f_1} - H \mathbf{h}_{f_1} \mathbf{F}^{f_1}_- + \frac{1}{4} \mathbf{C}_{f_2} - h_{f_2} \mathbf{h}_{f_2} \mathbf{F}^{f_2}_- \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

Se as faces forem idênticas, com uma lâmina cada,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 2h \mathbf{F}_- \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} = 0, \\ \mathbf{D} &= \frac{h}{2} \mathbf{C} - h^2 \mathbf{F}_- \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

onde:

h - espessura;

\mathbf{F}_- - rigidez de uma das faces.

De acordo com Mendonça (2005) uma vez que a maioria dos materiais usados no núcleo terá módulos de elasticidade da ordem de 1/10 a 1/1000 do módulo das faces, as tensões desenvolvidas serão também da mesma ordem. Isto significa que a inclusão ou não do núcleo como uma lâmina extra no processo de integração das tensões em (6.5.10) e (6.5.11), para obter a rigidez, não deve representar alterações perceptíveis nos valores obtidos.

6.6. APLICAÇÃO DA TEORIA DE FLEXÃO ÀS PLACAS SANDUÍCHE

6.6.1. FLEXÃO E DESLOCAMENTO DE PLACA SANDUÍCHE RETANGULAR

Em etapa de pré-cálculo, em vez de usarmos os valores dados pela matriz de rigidez flexural, segundo Allen (1969) pode-se usar uma aproximação obtida pela teoria da resistência dos materiais.

Para faces isotrópicas de mesmo material e espessuras distintas, tem-se:

$$D_x = \frac{E_f t_1 t_2 d^2}{t_1 + t_2}, \quad (6.6.1)$$

$$\lambda = 1 - \frac{t_1^3}{d^3}$$

Para faces isotrópicas de material e espessuras idênticas,

$$D_x = \frac{E_f t d^2}{2\lambda} \quad (6.6.2)$$

onde:

D_x - rigidez flexural;

E_f - módulo de elasticidade da face.

Em geral os problemas que envolvem placas são possíveis de serem resolvidos apenas com o uso de computador, seja em série de funções ou de forma numérica, como pelo Método dos Elementos Finitos.

Segundo Allen (1969) numa etapa de pré-dimensionamento, porém, é necessário dispor da solução em forma analítica permitindo um cálculo manual. O problema da placa retangular pode primeiramente ter uma solução obtida em forma de série infinita. Esta solução pode ser programada em computador e o programa rodado para uma série de combinações de dimensões e propriedades elásticas dentro de uma faixa de valores usuais. Então são obtidas tabelas de soluções para os diversos pontos do espaço de dados. Essas soluções podem ser representadas em forma de gráficos, ou ainda podem ser usadas para obter funções algébricas aproximadas que passem próximo destes pontos usando técnicas de ajuste de curvas. Este último procedimento será o adotado neste trabalho.

Na Figura 6.10, está apresentada uma placa retangular com dimensões e eixos definidos, onde pode-se observar que L e W são as direções principais do núcleo e que $f_r = G_{LT} / G_{WT}$.

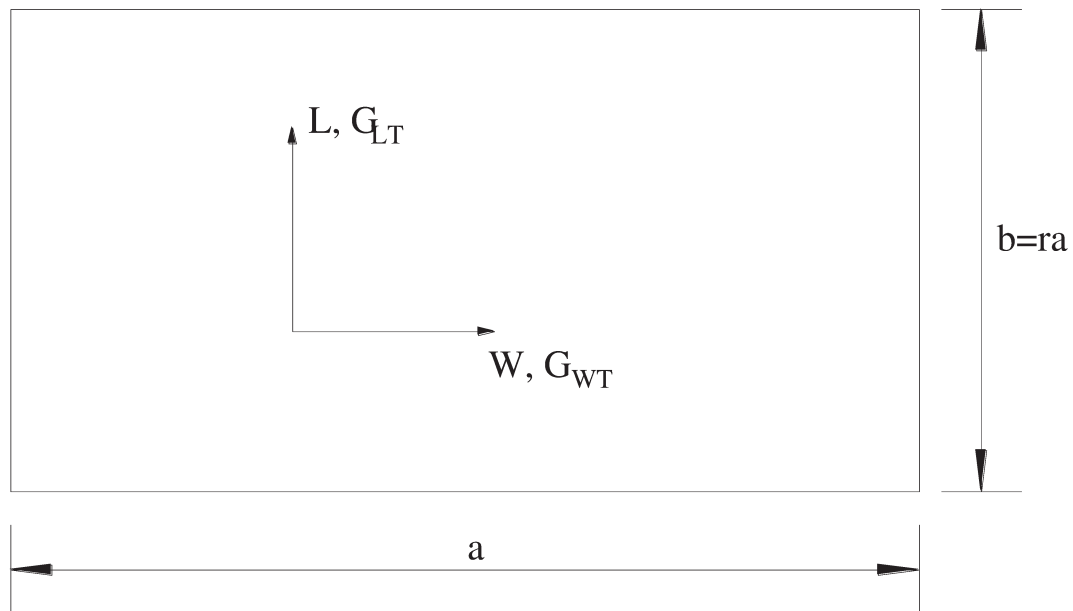


Figura 6.10 – Nomenclatura usada na solução do painel sanduíche retangular.

De acordo com Mendonça (2005) as funções abaixo permitem o cálculo de deslocamentos e tensões em alguns pontos da placa:

Deslocamento máximo:

$$w_{máx} = K_1 \frac{2q_0 b^4 \lambda}{E^f t d^2} \quad (6.6.3)$$

Tensão normal máxima na face:

$$\sigma_{máx} = K_2 \frac{q_0 b^2}{t d} \quad (6.6.4)$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b = K_3 \frac{q_0 b}{d} \quad (6.6.5)$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a = K_4 \frac{q_0 b}{d} \quad (6.6.6)$$

Estes valores dependem das constantes K_1 , K_2 , K_3 e K_4 , constantes adimensionais, que por sua vez dependem dos seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{b}{a} \\
 f_{\tau} &= \frac{G_{LT}}{G_{WT}} \\
 V &= \frac{\pi^2 D}{b^2 d G_{WT}}
 \end{aligned}
 \tag{6.6.7}$$

onde:

L e W - são as notações usadas em núcleos de colméia;

D - a rigidez flexural do painel;

G_{LT} e G_{WT} - são os módulos de elasticidade cisalhantes transversais do núcleo.

Com os parâmetros (6.6.7) dados, as constantes K_1 , K_2 , K_3 e K_4 , podem ser calculadas pelas fórmulas das Tabelas 6.2 a 6.5.

Tabela 6.2 – Fator K_1 para o deslocamento máximo num painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.

$f_{\tau} = \frac{G_{LT}}{G_{WT}}$	$r = \frac{b}{a}$	K_1
0,4	$0,0 \leq r \leq 0,2$	$1,3 + 3,02V - 0,125V^2 + 0,208V^3$
0,4	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$1,0 + 2,587r - 7,0r^2 + 3,78r^3 + 3,08V + 2,18rV - 7,5r^2V$ $+ 4,07r^3V - 1,87rV^2 + 1,208V^3$
1,0	$0,0 \leq r \leq 0,2$	$1,296 + 1,271V$
1,0	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$1,1485 + 1,70r - 5,37r^2 + 2,92r^3 + 1,193V + 0,771rV$ $- 2,082r^2V + 0,878r^3V$
2,5	$0,0 \leq r \leq 0,2$	$1,3 + 0,51V$
2,5	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$1,193 + 1,385r - 4,78r^2 + 2,6,07r^3 + 0,50V - 0,13771rV$ $+ 0,849r^2V - 0,754r^3V$

As equações são obtidas por ajuste de curvas. Os valores de K_1 estão multiplicados por 100.

Fonte: Mendonça (2005).

Tabela 6.3 – Fator K_2 para a tensão normal máxima na face de um painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.

$f_\tau = \frac{G_{LT}}{G_{WT}}$	$r = \frac{b}{a}$	K_2
0,4	$0,0 \leq r \leq 0,2$	12,5
0,4	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$11,6 + 11,5r - 38,4r^2 + 19,9r^3 + 1,21V - 6,36rV + 1,13r^2V + 2,38r^3V$
1,0	$0,0 \leq r \leq 0,2$	12,5
1,0	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$11,5 + 12,1r - 39,5r^2 + 20,6r^3$
2,5	$0,0 \leq r \leq 0,2$	12,5
2,5	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$11,5 + 12,2r - 40,0r^2 + 21,1r^3 + 0,162V - 1,75rV + 8,79r^2V - 5,48r^3V - 0,562rV^2$

As equações são obtidas por ajuste de curvas. Os valores de K_2 estão multiplicados por 100.

Fonte: Mendonça (2005).

Tabela 6.4 – Fator K_3 para a tensão cisalhante no núcleo de um painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.

$f_\tau = \frac{G_{LT}}{G_{WT}}$	$r = \frac{b}{a}$	K_3
0,4	$0,0 \leq r \leq 0,5$	$37,0 + 10,0V - 3,07V^2$
0,4	$0,5 \leq r \leq 1,0$	$35,9 + 9,32r - 10,4r^2 + 12,0V - 1,93rV - 1,428r^2V - 3,71V^2$
1,0	$0,0 \leq r \leq 0,5$	37,0
1,0	$0,5 \leq r \leq 1,0$	$35,4 + 8,0r - 9,60r^2$
2,5	$0,0 \leq r \leq 0,5$	$37,0 - 5,12V + 0,32V^2$
2,5	$0,5 \leq r \leq 1,0$	$36,4 + 4,88r - 7,4r^2 - 7,25V + 5,93rV - 2,0r^2V + 0,25V^2$

As equações são obtidas por ajuste de curvas. Os valores de K_3 estão multiplicados por 100.

Fonte: Mendonça (2005).

Tabela 6.5 – Fator K_4 para a tensão cisalhante no núcleo de um painel sanduíche retangular simplesmente apoiado sob carga distribuída uniforme.

$f_r = \frac{G_{LT}}{G_{WT}}$	$r = \frac{b}{a}$	K_4
0,4	$0,0 \leq r \leq 0,2$	50,5
0,4	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$50,7 + 1,19r - 18,6r^2 - 2,09V - 8,68rV + 2,02r^2V + 1,37V^2$
1,0	$0,0 \leq r \leq 0,2$	50,5
1,0	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$50,6 + 0,70r - 17,67r^2$
2,5	$0,0 \leq r \leq 0,2$	50,5
2,5	$0,2 \leq r \leq 1,0$	$50,6 + 0,76r - 17,6r^2 - 0,476V + 0,345rV - 0,51r^2V$

As equações são obtidas por ajuste de curvas. Os valores de K_4 estão multiplicados por 100.

Fonte: Mendonça (2005).

6.6.2. MINIMIZAÇÃO DE PESO COM MOMENTO FLETOR DADO

Neste momento procura-se minimizar a massa total da placa através das dimensões da placa. Considerando que as faces sejam idênticas e que a placa deve suportar um momento fletor dado, tal que

$$M_x = \sigma_f dt \quad (6.6.8)$$

onde:

σ_f - tensão numa face

t - é a espessura de cada face

d - distância entre os centros das faces.

De acordo com Allen (1969) a equação (6.6.8) é a restrição do problema de minimização e a função objetivo é a massa da placa dada por:

$$m_c = 2\rho_f t + \rho_n d \quad (6.6.9)$$

Neste momento pode-se resolver o problema por substituição, eliminando-se a espessura da face de (6.6.8) em (6.6.9) e obtendo-se:

$$m_c = \frac{2\rho_f M_x}{\sigma_f d} + \rho_n d \quad (6.6.10)$$

Diferenciando-se m_c em relação a d obtém-se:

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{2\rho_f M_x}{\sigma_f \rho_n} \right)^{1/2} \\ t &= \left(\frac{\rho_n M_x}{2\rho_f \sigma_f} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.6.11)$$

De (6.6.9):

$$\frac{t}{d} = \frac{\rho_n}{2\rho_f} \quad (6.6.12)$$

e conseqüentemente:

$$\frac{M_n}{M} = \frac{1}{2} \quad (6.6.13)$$

Desse modo o valor da tensão na face pode ser igual a um valor limite de tensão.

7. ROTINA DE CÁLCULO PARA ESTRUTURAS SANDUÍCHES

Para facilitar a elaboração de projetos em estruturas sanduíche, Mendonça (2005) apresenta um roteiro das principais etapas no processo de projeto de vigas e placas-sanduíche retangulares:

1ª Etapa – Definição do tipo estrutural:

No caso da estrutura ser apoiada apenas por duas faces opostas, deve-se decidir se esta será analisada como viga ou placa. Para tanto se utiliza as seguintes relações de placas isotrópicas:

$$\frac{b}{a} \leq \approx 0,3 \rightarrow \text{comportamento de viga}$$

$$\frac{b}{a} \geq \approx 0,8 \rightarrow \text{placa infinita sob flexão cilíndrica}$$

sendo:

a – comprimento do painel;

b – altura do painel.

Caso os componentes sejam apoiados por mais de duas bordas devem ser analisados , sempre, como placas.

2ª Etapa – Identificação dos carregamentos

Devem-se identificar os carregamentos que estão sendo aplicados à estrutura. Procurar uma adaptação dos carregamentos aos tipos disponíveis nas ferramentas simplificadas de cálculo. Carregamentos mais complexos, próximos da situação real, ficam para as próximas etapas de análise, com o uso do método de elementos finitos. Os carregamentos para os quais são apresentadas soluções de forma simplificada são:

- q_0 – carga distribuída uniforme por unidade de área sobre placa simplesmente apoiada;
- p_0 – carga distribuída uniforme por unidade de comprimento de viga;
- F – carga concentrada transversal ou compressiva em viga.

3ª Etapa – Definição dos materiais das faces e do núcleo

Neste momento torna-se necessário responder a algumas questões:

- Faces iguais ou diferentes?
- Isotrópicas ou homogêneas? Laminadas?
- Núcleo isotrópico de espuma, laminado, de colméia ou corrugado?

4ª Etapa – Identificação das propriedades elásticas e de resistência

Os seguintes procedimentos devem ser realizados:

- identificar as propriedades elásticas nas faces (por exemplo: E_x módulo de elasticidade na direção x e ν_{xy} coeficiente de Poisson no plano xy), em alguns casos deve-se partir de um valor estimado para o início dos cálculos. Os valores da Tabela 2.6 podem ser usados como estimativa no caso de se utilizar laminados pré-fabricados nas faces. Se houverem ferramentas computacionais de cálculo para sanduíches com faces ortotrópicas, também será necessário definir o E_y , módulo de elasticidade na direção y , e o G_{xy} , módulo de elasticidade da face no plano xy ;
- identificar $E_x, E_y, \nu_{xy}, G_{xz}$ e G_{yz} do núcleo. Caso se trate de núcleos colméia pode-se utilizar os dados de fabricante. Núcleo corrugado, usar dados do fabricante ou estimar as propriedades utilizando formulações próprias. Caso o núcleo seja de espuma, usar dados do fabricante ou estimar as propriedades da Tabela 2.4;
- identificar as resistências à tração e compressão na direção x e na direção y , para as faces. Podem ser usados, por exemplo, os dados da Tabela 2.6. Já para o núcleo deve-se identificar as tensões resistentes de cisalhamento transversal, usando por exemplo os dados da Tabela 2.4;
- identificar o deslocamento máximo admissível, w_z , para o painel sanduíche.

5ª Etapa – Definição das espessuras

Procedimento:

- definir as espessuras das faces e do núcleo. Essas espessuras podem ser simplesmente arbitradas ou serem baseadas nos resultados de processos de otimização de sanduíche.

Caso o núcleo escolhido seja o colméia é necessário identificar a largura da célula e a espessura da chapa de colméia (utilizar dados do fabricante).

6ª Etapa – Verificação das dimensões das faces

Após a definição de espessuras e propriedades, pode-se verificar a possibilidade de usar as hipóteses de sanduíche de faces delgadas com núcleo antiplano, para isso, basta verificarmos as desigualdades:

$$\frac{d}{t} > 5,77 \quad (7.1)$$

$$0,02 \leq \frac{t}{c} \leq 0,2 \quad (7.2)$$

Os erros associados ao fato de se desprezar a rigidez flexural das faces e a rigidez extensional do núcleo ficam abaixo de 1%.

7ª Etapa – Verificação da tensão normal de flexão nas faces

No caso de vigas, a tensão normal nas faces vem de (6.4.6):

$$-\sigma_c \leq \sigma_f = \frac{ME_f z}{D} \leq \sigma_t \quad (7.3)$$

com D dado por (6.4.16) em caso de faces idênticas.

Para o caso de uma placa sanduíche simplesmente apoiada sob carga distribuída uniforme, com faces isotrópicas e núcleo ortotrópico antiplano, a tensão normal máxima nas faces vem de (6.6.4):

$$-f_{y_c} \leq \sigma_{m\acute{a}x} = K_2 \frac{q_0 b^2}{td} \leq f_{y_t} \quad (7.4)$$

onde K_2 pode ser obtida pelas equações da Tabela 6.3.

8ª Etapa – Verificação da tensão cisalhante no núcleo

Nas vigas após a obtenção do esforço cortante na seção a tensão vem de (6.4.17):

$$\tau = \frac{V}{bd} \leq f_{\tau_{wt}} \quad (7.5)$$

então compara-se com a tensão admissível $f_{\tau_{wt}}$ do núcleo.

Nas placas retangulares sob carga uniforme a tensão no meio de cada borda do núcleo vem das equações (6.6.5) e (6.6.6), com as constantes obtidas das Tabelas 6.4 e 6.5.

$$\tau_b = K_3 \frac{q_0 b}{d} \leq f_{\tau_{WT}} \quad \text{no meio da face de comprimento } b \quad (7.6)$$

$$\tau_a = K_4 \frac{q_0 b}{d} \leq f_{\tau_{LT}} \quad \text{no meio da face de comprimento } a \quad (7.7)$$

9ª Etapa – Verificação dos deslocamentos

Para se obter diagramas de esforços e deslocamentos máximos de vigas-sanduíche podem ser usadas as fórmulas de vigas resolvidas pela teoria de Euler-Bernoulli, bastando substituir as propriedades EI e GA e, então, compara-se com o deslocamento admissível:

$$w_{\max} \leq w_z \quad (7.8)$$

Freqüentemente utiliza-se como deslocamento máximo o valor $w_z = l/300$. Dependendo da norma, em alguns casos, o limite é ainda mais rigoroso e passa a ser $w_z = l/600$. l é um comprimento característico, geralmente a distância entre apoios.

Para as placas sanduíche retangular de faces isotrópicas idênticas sob carga uniforme o deslocamento máximo vem da equação (6.6.3):

$$w_{m\acute{a}x} = K_1 \frac{2q_0 b^4 \lambda}{E^f t d^2} \leq w_z \quad (7.9)$$

A constante K_1 é obtida pelas equações da Tabela 6.2.

10ª Etapa – Verificação do enrugamento das faces (wrinkling)

A resolução deste problema requer teorias, cálculos e equações específicas para cada tipo de núcleo que pode vir a ser utilizado nos painéis sanduíche.

11ª Etapa – Verificação do dimpling nas faces de colméia

A tensão crítica de flambagem da face na região de uma célula de colméia pode ser estimada como:

$$\sigma_{cr} = \frac{2E_f}{1 - \nu_f^2} \left[\frac{h}{R} \right]^2 \geq \sigma_{max} \quad (7.10)$$

deve ser comparada à tensão normal aplicada à face σ_{max} obtida na 7ª etapa. R é o raio do maior círculo que pode ser inscrito na célula. Pode-se aproximá-lo com a largura da célula fornecida pelo fabricante.

7.1. APLICAÇÃO DA ROTINA DE CÁLCULO EMPREGANDO UMA PLANILHA ELETRÔNICA

Com base na pesquisa desenvolvida e após uma análise crítica das teorias envolvendo as estruturas sanduíche, conseqüentemente, gerou-se a rotina de cálculo descrita anteriormente, gerando-se uma ferramenta computacional para auxiliar os projetistas no processo de cálculo

envolvendo estruturas sanduíche, já que são necessárias algumas repetições para obter-se a seção ótima dessa estrutura.

Para a correta utilização da planilha de cálculo, deve-se seguir o seguinte roteiro:

- Definir os materiais a serem empregados nas faces e no núcleo da estrutura sanduíche;
- Em seguida entrar com as características do material (ver Tabela 2.6) a ser empregado nas faces no local destinado aos dados das mesmas;
- Na seqüência, lançar os dados referentes ao núcleo da peça, todos esses dados podem ser obtidos na Tabela 2.4;
- Após o lançamento desses dados, entra-se com as características geométricas da placa sanduíche (comprimento e altura) e em seguida com os carregamentos atuantes na estrutura. Esses dados devem ser colocados na seção de dados gerais da planilha de cálculo;
- Com todos os dados necessários já lançados a planilha realiza os cálculos necessários, resultando desse processamento inicial as espessuras das faces e do núcleo;
- Os resultados gerados devem ser analisados e em seguida o calculista define quais serão as espessuras adotadas, para as faces e o núcleo, na confecção da placa sanduíche;
- Entrando com os valores das espessuras adotadas a planilha de cálculo efetuará as verificações de segurança referentes às teorias das estruturas sanduíche;
- Se as verificações resultarem em situações de segurança ótima o cálculo termina e a placa está projetada, caso contrário, basta redefinir as espessuras adotadas e o processo de cálculo da planilha será repetido.
- Esse último passo pode ser feito quantas vezes forem necessárias até obter-se uma seção ótima para a estrutura sanduíche.

Nesse trabalho todos os cálculos e avaliações realizadas com os diferentes materiais empregados na construção civil, foram conseguidos utilizando-se essa ferramenta computacional.

7.2. AVALIAÇÃO DA ROTINA DE CÁLCULO COM DIFERENTES MATERIAIS

A seguir apresentam-se alguns casos calculados e comparados utilizando-se a planilha eletrônica desenvolvida nessa pesquisa. Nesse momento serão apresentados apenas os resultados obtidos, as planilha completas dos cálculos e verificações poderão ser observadas nos anexos dessa pesquisa.

Caso 1

Tem-se um vão $a \times b = 3,0 \times 1,0m$ que espera-se vencer com uma placa sanduíche simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente $q_0 = 0,001 N/mm^2$. O material para a confecção da face será Alumínio 5052, para efeito comparativo serão modificados os materiais do núcleo.

- a) núcleo em poliestireno expandido;
- b) núcleo em poliuretano;
- c) núcleo em PVC;
- d) núcleo em balsa;
- e) núcleo em fenólicos

Solução:

As propriedades das faces e dos núcleos são obtidas através das Tabelas 2.4 e 2.6.

1.^a etapa - comportamento

$$r = \frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 0,33$$

com este resultado pode-se considerar o comportamento de uma “viga” biapoiada, neste caso o momento fletor máximo da viga é:

$$M_x = \frac{q_0 b^2}{8} = \frac{0,001 \cdot 10^6}{8} = 125 \text{ Nmm}$$

a) Núcleo em poliestireno expandido

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{\text{(adotado)}}:$	14,00	mm
$t_{\text{(adotado)}}:$	1,00	mm

Com esta configuração a placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 9,68 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo A.

b) Núcleo em poliuretano

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{\text{(adotado)}}:$	13,50	mm
$t_{\text{(adotado)}}:$	1,00	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 5,74 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo B.

c) Núcleo em PVC

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{\text{(adotado)}}:$	11,00	mm
$t_{\text{(adotado)}}:$	1,00	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 7,58 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo C.

d) Núcleo em Balsa

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(adotado)}:$	9,00 mm
$t_{(adotado)}:$	1,00 mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 6,55 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo D.

e) Núcleo em Fenólicos

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(adotado)}:$	15,50 mm
$t_{(adotado)}:$	1,00 mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 6,36 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo E.

Para melhor visualização dos resultados obtidos neste exemplo comparativo, elaborou-se o gráfico apresentado na Figura 7.1.

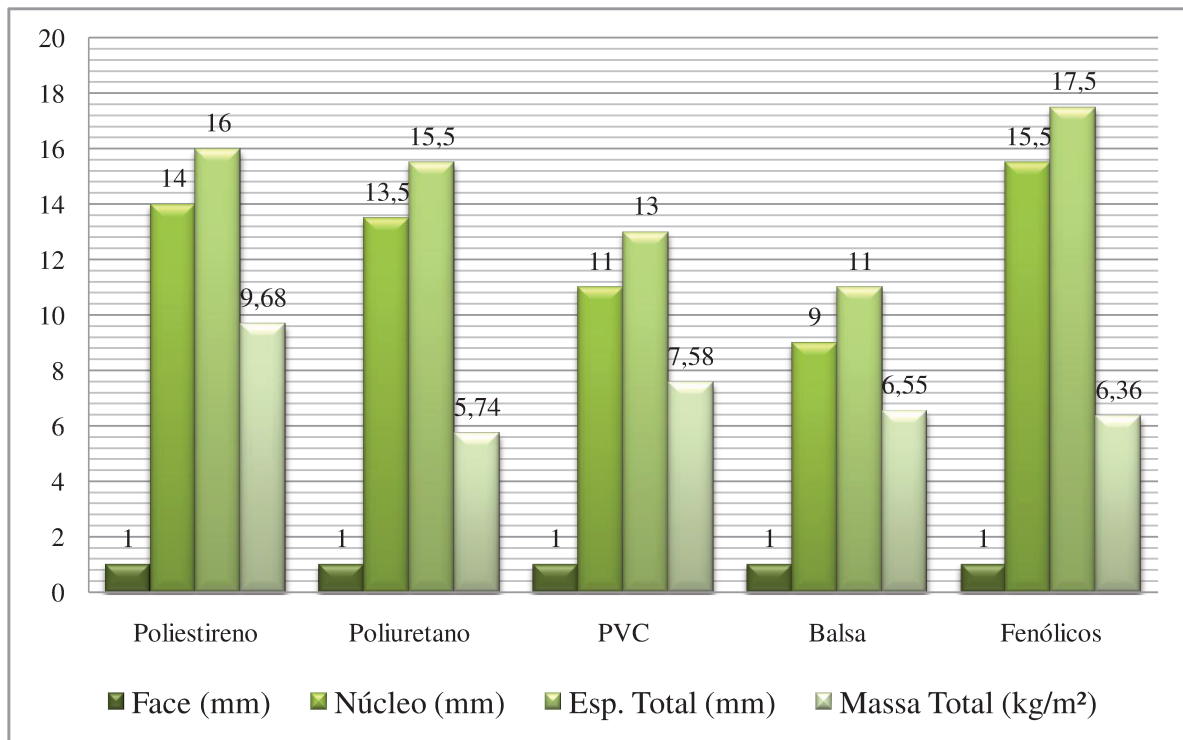


Figura 7.1 – Gráfico comparativo: face em alumínio 5052.

Para essa placa sanduíche pode-se observar que apesar das mudanças do material do núcleo e suas espessuras, as espessuras das faces não sofreram nenhuma alteração. Também é possível verificar através do gráfico apresentado na Figura 7.1, que a massa total da placa possui uma certa variação e que esta não está relacionada com a espessura total da estrutura.

Neste caso a placa com menor densidade foi a com núcleo de poliuretano e a com maior densidade a com núcleo de poliestireno expandido, para resistirem a mesma carga distribuída.

Caso 2

Tem-se um vão de $a \times b = 3,0 \times 1,0m$ que espera-se vencer com uma placa sanduíche simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída $q_0 = 0,001 N/mm^2$. O

material para a confecção do núcleo será Poliestireno expandido, para efeito comparativo serão modificados os materiais das faces.

- a) face em alumínio 5052;
- b) face em aço carbono;
- c) face em woven glass/epoxy 1581 – F155;
- d) face em compensado / pinho;
- e) face em inox 304.

Solução:

As propriedades das faces e dos núcleos são obtidas através das Tabelas 2.4 e 2.6.

1.^a etapa - comportamento

$$r = \frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 0,33$$

com este resultado pode-se considerar o comportamento de uma “viga” biapoiada, neste caso o momento fletor máximo da viga é:

$$M_x = \frac{q_0 b^2}{8} = \frac{0,001 \cdot 10^6}{8} = 125 \text{ Nmm}$$

a) Face em alumínio 5052

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(\text{adotado})}$:	14,00 mm
$t_{(\text{adotado})}$:	1,00 mm

Com esta configuração a placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 9,68 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo F.

b) Face em aço carbono

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(adotado)}:$	13,00	mm
$t_{(adotado)}:$	0,50	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 8,20 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo G.

c) Face em woven glass/epóxi 1581 – F155

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(adotado)}:$	21,00	mm
$t_{(adotado)}:$	1,00	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 4,64 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo H.

d) Face em compensado / pinho

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(adotado)}:$	21,00	mm
$t_{(adotado)}:$	2,00	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 3,24 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo I.

e) Face em inox 304

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{\text{(adotado):}}$	13,50 mm
$t_{\text{(adotado):}}$	0,50 mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 8,22 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo J.

Para melhor visualização dos resultados obtidos neste exemplo comparativo, elaborou-se o gráfico apresentado na Figura 7.2.

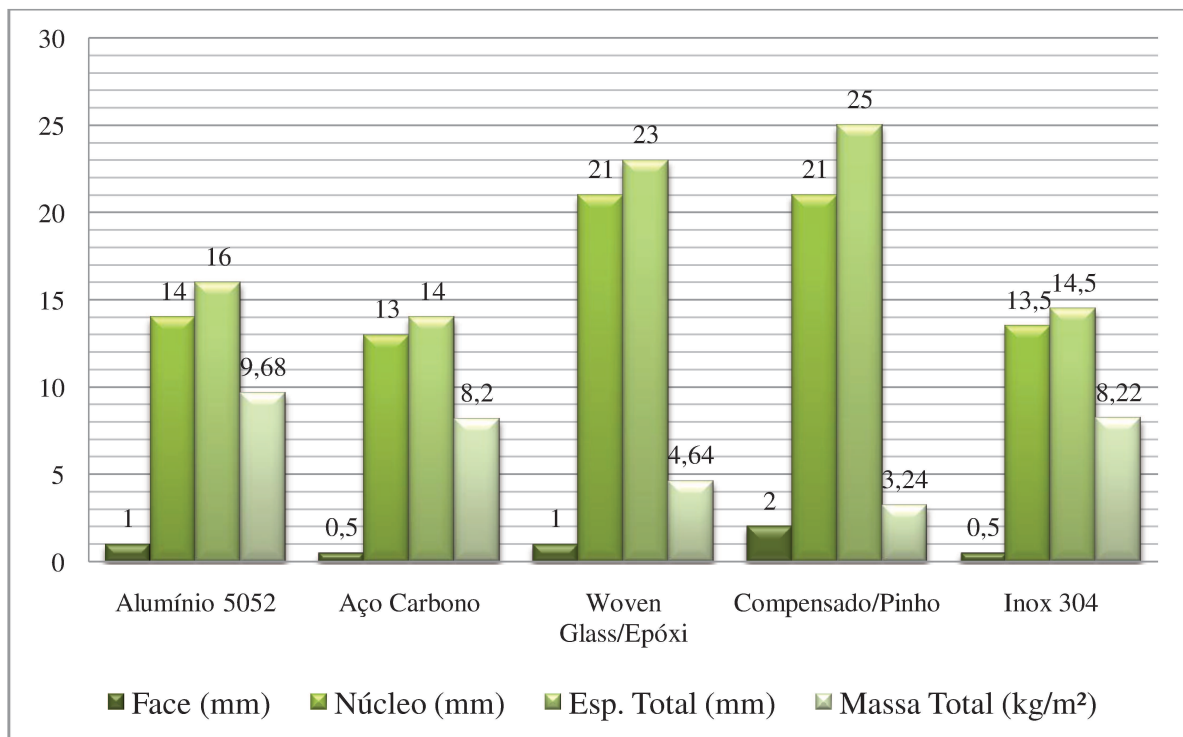


Figura 7.2 – Gráfico comparativo: núcleo em poliestireno expandido.

Para essa placa sanduíche fixou-se o material do núcleo, esse fato gerou uma grande variação nas espessuras totais das peças (gráfico da Figura 7.2), pois tanto as faces quanto o núcleo sofreram alterações de espessura para vencerem o vão determinado com o carregamento empregado a estrutura. Ainda observando o gráfico acima pode-se verificar a variação das massas totais, sendo que o peça com menor massa é a que apresenta a maior espessura total.

Se o critério do projeto for a diminuição da densidade, neste caso deve-se utilizar a placa com faces em Compensado/pinho e núcleo em poliestireno, com espessura total de 25mm e massa de 3,24 kg/m².

Caso 3

Tem-se um vão de $a \times b = 3,0 \times 1,0m$ que espera-se vencer com uma placa sanduíche simplesmente apoiada, submetida a uma carga uniformemente distribuída $q_0 = 0,001 N/mm^2$. Os núcleos serão modificados para efeito comparativo e as faces serão confeccionadas em placas cimentícias com as seguintes características:

- densidade – $\rho = 1700 kg/m^3$
- módulo de elasticidade – $E = 6 GPa$
- coeficiente de Poisson - $\nu = 0,15$
- tensão limite de escoamento - $\sigma_E = 16 MPa$

As faces terão a espessura de 6mm, por ser o material encontrado no mercado. Os núcleos serão:

- a) núcleo em poliestireno expandido;
- b) núcleo em balsa;
- c) núcleo em poliuretano.

Solução:

As propriedades dos núcleos são obtidas através da Tabela 2.4.

1.^a etapa - comportamento

$$r = \frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 0,33$$

com este resultado pode-se considerar o comportamento de uma “viga” biapoiada, neste caso o momento fletor máximo da viga é:

$$M_x = \frac{q_0 b^2}{8} = \frac{0,001 \cdot 10^6}{8} = 125 \text{ Nmm}$$

a) Núcleo em poliestireno expandido

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(\text{adotado})}$:	19,00	mm
$t_{(\text{adotado})}$:	6,00	mm

Com esta configuração a placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 21,16 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo K.

b) Núcleo em balsa

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{(\text{adotado})}$:	10,50	mm
$t_{(\text{adotado})}$:	6,00	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 21,37 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo L.

c) Núcleo em poliuretano

A espessura do núcleo e das faces adotadas para esta configuração foram:

$c_{\text{(adotado):}}$	13,00	mm
$t_{\text{(adotado):}}$	6,00	mm

A placa passa por todas as verificações de segurança, apresentando uma massa de 21,31 kg/m². Todas as verificações de resistência e deslocamento podem ser vistas no Anexo M.

Para melhor visualização dos resultados obtidos neste exemplo comparativo, elaborou-se o gráfico apresentado na Figura 7.3.

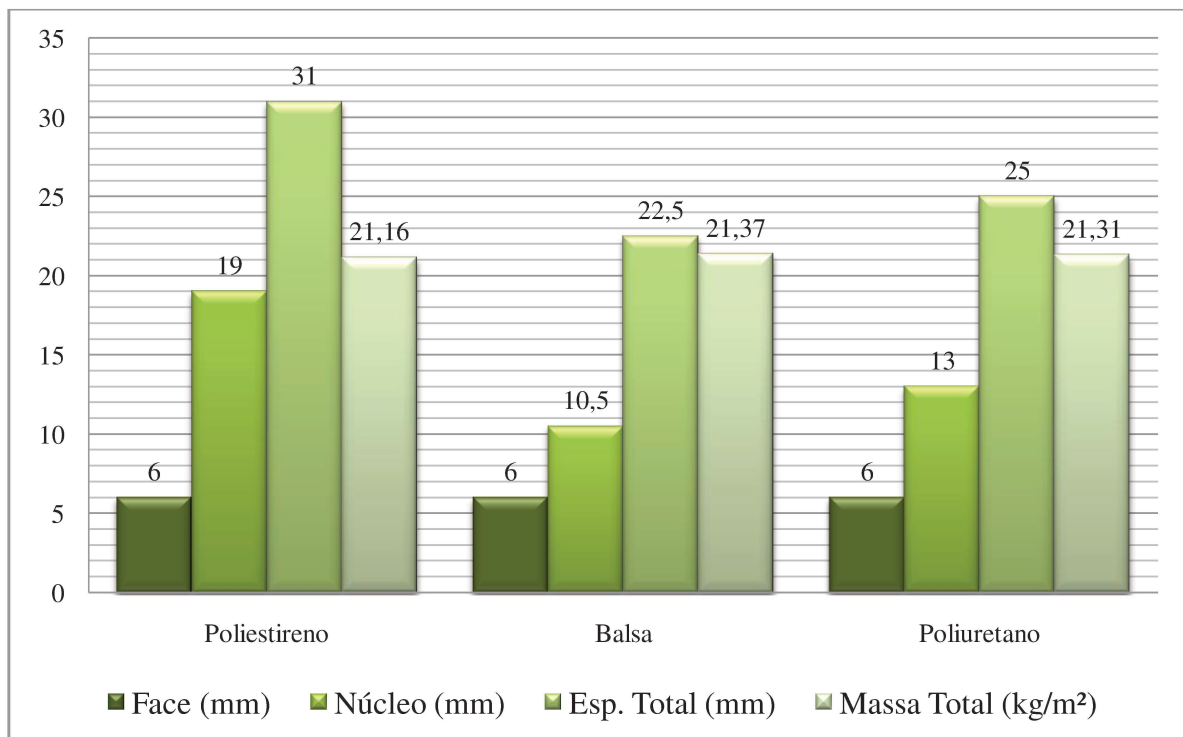


Figura 7.3 – Gráfico comparativo: face em placa cimentícia.

Nesse caso fixou-se o material da face, assim como a sua espessura, já que as placas cimentícias são produzidas apenas em determinadas espessuras, sendo 6mm a espessura mínima.

Observando-se o gráfico apresentado na Figura 7.3, nota-se que as espessuras dos núcleos foram diferentes para cada um dos materiais empregados, mas apesar desse fato as massas totais foram praticamente iguais. Nesse caso o fator determinante na escolha no painel a ser empregado é o fator econômico e de disponibilidade de matéria-prima.

Se o critério do projeto for a diminuição da densidade, neste caso deve-se utilizar a placa com faces em Compensado/pinho e núcleo em poliestireno, com espessura total de 25mm e massa de 3,24 kg/m².

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme colocado inicialmente os objetivos principais deste trabalho foram estudar e analisar estruturas sanduíche, utilizadas no Brasil e em outros países, considerando seu comportamento mecânico e possíveis aplicações na construção civil e propondo uma aplicação de rotina de cálculo com o auxílio de ferramentas computacionais.

Na revisão bibliográfica realizada foi verificado que vários pesquisadores têm se dedicado ao estudo das estruturas sanduíches devido a sua importância na construção civil atual. Inicialmente apreciaram-se os principais critérios de falha e o modo como elas ocorrem nas estruturas. Como apresentado, existem muitos fatores a serem considerados e analisados no cálculo e especificação dos sanduíches.

Ao se analisar as teorias envolvendo estas estruturas, verificaram-se a necessidade de uma revisão considerando o estudo da lâmina e posteriormente, o estudo das vigas e placas. Após esta análise introdutória sobre o comportamento da estrutura passa-se a verificar o comportamento mecânico do sanduíche. As faces do sanduíche suportam as tensões normais de tração, compressão ou cisalhamento, associados a flexão, enquanto o núcleo, por sua vez, mantém o afastamento das faces, é rígido na direção perpendicular às faces a fim de evitar o esmagamento, e a sua rigidez ao cisalhamento transversal deve ser grande o suficiente de modo a garantir que o conjunto funcione.

Através desta análise mecânica, estrutural, formulou-se uma rotina de cálculo, sistematizando os dados e equações referentes às estruturas, para facilitar a execução dos projetos, pois ao se projetar utilizando as estruturas sanduíches deve-se ter em mente que se está associando propriedades de dois materiais distintos para se melhorar as características mecânicas desta estrutura. Neste momento, o projetista deve definir se o cálculo será feito considerando a teoria de vigas ou de placas, também é neste momento que são definidos os materiais a serem empregados na confecção do sanduíche. A montagem de uma planilha eletrônica para auxiliar nos cálculos contribuiu de forma positiva, pois as verificações se tornaram mais ágeis e fáceis de serem feitas. A planilha possibilitou a realização de diversas verificações com os dados fornecidos para as propriedades dos materiais, bastando ao projetista especificar as espessuras das faces e núcleo. A realização de comparativos possibilitou a verificação das melhores opções para a confecção dos painéis sanduíches.

Também foi a intenção desta pesquisa contribuir com uma organização de dados referentes às estruturas sanduíche, vigas e placas. Através desta organização procurou-se abrir um caminho mais profícuo para futuros pesquisadores darem continuidade aos estudos sobre uma nova tecnologia que veio para obter destaque na moderna indústria da construção civil.

Neste trabalho a pesquisa deteve-se na análise de dados teóricos existentes, entende-se, entretanto, que para trabalhos futuros há a necessidade da análise experimental e um aprofundamento do assunto para o emprego desta nova tecnologia na construção civil ou na melhoria das propriedades hoje encontradas nos materiais empregados na estrutura sanduíche.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AL-KHOURY, R.; SCARPAS, A.; KASBERGEN, C.; BLAAUWENDRAAD, J. Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part III: viscoelastic aspects. **International Journal of Solids and Structures**, v. 39, 2002. p. 2189–2201.

ALLEN, H. G. **Analysis and design of structural sandwich panels**. 1. ed. Hungary: Pergamon Press, 1969.

ALMEIDA, S. F. M. **Curso de mecânica e danos dos materiais compostos (Apostila)**. São José dos Campos: ITA, 2001.

ALTENBACH, H. Theories for laminated and sandwich plates. **Mechanics of Composite Materials**, A review, V 34, n. 3, p. 243–252, 1998.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard C364/C364M-07: Standard test method for edgewise compressive strength of sandwich constructions**. EUA: ASTM, 2007.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard C393-00: Standard test method for flexural properties of sandwich constructions**. EUA: ASTM, 2000.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D695-02a: Standard test method for compressive properties of rigid plastics.** EUA: ASTM, 2002.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D1781-98(2004): Standard test method for climbing drum peel for adhesives.** EUA: ASTM, 2004.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D3499-94(2005): Standard test method for toughness of wood based structural panels.** EUA: ASTM, 2005.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D3500-90(2003): Standard test methods for structural panels in tension.** EUA: ASTM, 2003.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D3501-05a: Standard test methods for wood based structural panels in compression.** EUA: ASTM, 2005.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D3502-76: Moisture absorption of compressed wood products.** EUA: ASTM, 1976.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM Standard D3503-76. Swelling and recovery of compressed wood products due to moisture absorption.** EUA: ASTM, 1976.

BEER, F. P., JOHNSTON Jr, R. **Resistência dos materiais.** São Paulo: McGraw-Hill, 1989.

BERTINI, A. A. **Estruturas tipo sanduíche com placas de argamassa projetada.** São Carlos, 2002. 221 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BODIG, J. **Mechanics of wood and wood composites.** Malabar: Krieger Publishing Company, 1993. 712p.

BRASILIT. **Masterboard.** São Paulo, 2008. Catálogo - Manual.

CALLISTER JR. W. D. **Ciência e engenharia de materiais: uma introdução**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

CARRERA, E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. **Applied Mechanics Reviews**, V. 56(3), p. 287–308, 2003.

CHEN, W. F.; SALEEB, A. **Constitutive equations for engineering materials**. New York: John Wiley and sons, 1982. Volume 1: Elasticity and Modeling.

COWPER, G. R. O coeficiente de cisalhamento na teoria da viga de Timoshenko. **Journal of applied Mechanics**, Junho 1996, pp.335-340.

DANIEL, I. M. Failure of composite materials. **Journal Complation: Strain** 43, 4-12. 2007.

DAYA, E.M.; AZRAR, L.; POTIER-FERRY, M. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped *sandwich* beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, 2004. p. 789–813.

DENG, R.; DAVIES, P.; BAJAJ, A. K. Flexible polyurethane foam modeling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications. **Journal of Sound and Vibration**, v. 262, 2003. p. 391–417.

FARSHI, B.; HERASATI, S. Optimum weight design of fiber composite plates in flexure based on a two level strategy. **Composites Science and Technology**, v. 58, 2005. p. 571-589.

HA, K. H. Stiffness matrix for exact solution of sandwich beam and frame systems. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 119, n° 4, April, 1993. p. 1150-1167.

HAFTKA, R. T., GURDAL, Z. **Elements of structural optimization**. Third edition. Dordrech, Kluwer, 1991.

HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. London: Oxford University Press, 1950.

KIM, S.; KREIDER, K. L. Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates. **Applied Numerical Mathematics**. (in press)

KIM, J.; SWANSON, S. R. Design of sandwich structures for concentrated loading. **Composite Structures**, v. 52, 2001, p. 365-373.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1975.

LEKHNITSKII, S. G. **Anisotropic plates**. 1. ed. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais: ciência e tecnologia**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

LO, K. H.; CHRISTENSEN, R. M.; WU, E. M. High-order theory of plate deformation - 1. homogeneous plates. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme**, V. 44, p. 663–668, 1977a.

LO, K. H.; CHRISTENSEN, R. M.; WU, E. M. High-order theory of plate deformation - 2. laminated plates. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme**, V. 44, p. 669–676, 1977b.

MACHADO JR., E. F. (1991). **Casas populares pré-moldadas em argamassa armada: procura de uma solução econômica e confortável**. São Carlos, 1991. 241 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MASCIA, N. T. **Resumo de resistência dos materiais II**. 2006. Notas de aula.

MASCIA, N. T.; VANALLI, Leandro; PACCOLA, R. R.. Influence of the anisotropy on the mechanical behavior of laminated beams. In: **COBEM 2003- 17 th International Congress of Mechanical Engineering**, 2003, São Paulo. Proceedings of the 17 th Cobem. São Paulo: ABCM, 2003. v. 1. p. 1-10.

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compostos & Estruturas-sanduíche: projeto e análise**. Barueri-SP: Manole, 2005

MOSSBERG, M.; HILLSTRÖM, L.; SÖDERSTRÖM, T. Non-parametric identification of viscoelastic materials from wavepropagation experiments. **Automatica**, v. 37, 2001. p. 511-521.

NICOLAS, E. A. **Estudo de critérios de resistência de materiais anisotrópicos aplicados à madeira**. Campinas, 2006. 257f. Tese (Doutorado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas.

OHKAMI, T.; SWOBOBA, G. Parameter identification of viscoelastic materials. **Computers and Geotechnics**, v.24, 1999. p. 279-295.

PACCOLA, R. R. **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. São Carlos, 2004. 190 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PAGANO, N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. **Journal of Composite Materials**, v. 3, 1969. p.398-411.

PANDYA, B. N.; KANT, T. Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model. **Composites Science and Technology**, V. 32(2), p. 137–155, 1988.

PARK, J. Transfer function methods to measure dynamic mechanical properties of complex structures. **Journal of Sound and Vibration** , v. 288, 2005. p. 57–79.

PARK, J. H.; HWANG, J. H.; LEE, C. S. e HWANG, W. Stacking sequence design of composite laminates for maximum strength using genetic algorithms. **Composite Structures**, v. 52, 2001. p. 217-231.

PINHEIRO, M. A. S.; BECKHAUSER, G. N.; MENEZES, M. R. **Aplicativo voltado para a macromecânica básica das estruturas laminadas de material compósito**. Boletim da Sociedade brasileira de matemática aplicada e computacional, Belo Horizonte: Vol. VI, 10f, 2002. Disponível em: <www.sbmec.org.br/bol/boletim_2002/pinheiro-beckhauser-menezes-4emc.pdf>. Acesso em 15 jul. 2008.

PINTELON, R.; GUILLAUME, P.; VANLANDUIT, S.; DE BELDER, K.; ROLAIN, Y. Identification of Young's modulus from broadband modal analysis experiments. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.18, 2004. p. 699–726.

PLANTEMA, F. J. **Sandwich construction**. New York: John Wiley and Sons, 1966.

POPOV, E. P. **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 51, 1984. P. 745-752.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates theory and analysis**. CRC Press, 1997.

REISMANN, H. **Elasticity: Theory and applications**. John Wiley & Sons, 1980.

ROHWER, K.; FRIEDRICHS, S.; WEHMEYER, C. Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite material- an assessment. *Technische Mechanik*, V. 25, p. 59–79, 2005.

ROQUE, C. M. C. **Método sem malha para a análise de placas e cascas compósitas**. Portugal, 2007. 401 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade do Porto.

SCHIEL, F. **Introdução à resistência dos materiais**. São Paulo: Editora Harper & Row, 1984.

SHENHAR, Y.; FROSTIG, Y.; ALTHUS, E. Stresses and failure patterns in the bending of sandwich beams with transversely flexible cores and laminated composite skins. *Composite Structures*, v. 35, 1996. p. 143-152.

SHI, Y.; SOL, H.; HUA, H. 2006. Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290, 2006. p. 1234–1255.

SINGH, R.; DAVIES, P.; BAJAJ, A. K. Estimation of the dynamical properties of polyurethane foam through use of Prony series. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, 2003. p. 1005–1043.

THOMSEN, O. T.; FROSTIG, Y. Localized bending effects in sandwich panels: photoelastic investigation versus high-order sandwich theory results. *Composite Structures*, v. 37, 1997, p. 97-108.

TIMOSHENKO, S. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: LTC, 1985.

TITA, V. **Projeto e fabricação de estruturas em material compósito polimérico**. 2007. Notas de aula.

TSAI, S. W., WU, E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. **Journal of Composite Materials**, n. 1, v.5, p.58-80. Jan. 1971.

VANALLI, L. **Análise das distribuições de tensões e de deformações em vigas anisotrópicas**. Campinas, 2001. 211p. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas.

WALKER, M.; SMITH, R. E. A technique for the multiobjective optimisation of laminated composite structures using genetic algorithms and finite element analysis. **Composite Structures**, v. 62, 2003. p. 123-128.

WHITNEY, J.; PAGANO, N. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. **Journal of Applied Mechanics**, n. 37, p. 1031–1036, 1970.

WHITNEY, J. **Structural analysis of laminated anisotropic plates**. Technomic Publishing, 1987.

WINIKES, L. C. **Uma contribuição para ajuste de parâmetros de uma viga “sandwich”**. Curitiba, 2006. 124p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

WU, E. M. Phenomenological anisotropic failure criterion. **Mechanics of Composite Materials**, v.2, p.353-431. 1974.

YANG, P. C.; NORRIS, C. H.; STAVSKY, Y. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. **International Journal of Solids and Structures**, V. 2, n. 4, p. 665–684, 1966.

YANG, W. P.; CHEN, L. W.; WANG, C. C. Vibration and dynamic stability of a traveling sandwich beam. **Journal of Sound and Vibration**, V. 285, p. 597–614, 2005.

YU, P.; HADDAD, Y. M. On the dynamic system identification of the response behaviour of linear viscoelastic materials. **Int. J. Pres. Ves. & Piping**, v.61, 1996. p. 45-54.

ZENKERT, D. **An introduction to sandwich construction. Produced for Engineering Materials Advisory Services Ltd, London, Chameleon Press, London, 1995.**

ANEXOS

ANEXO A – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE ALUMÍNIO 5052 E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	2710 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	70 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,33 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	165 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f\tau_{WT}=f\tau_{LT}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	10,13 mm
$t_{(calculado)}$:	0,07 mm

Verificações:

espessura média (d):	15 mm
espessura total (h):	16 mm
rigidez flexural (D_X):	8,84E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	14,00 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0284
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,22 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 106,17 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 165,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO B – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE ALUMÍNIO 5052 E NÚCLEO EM POLIURETANO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	2710 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	70 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,33 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	165 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	70 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,5 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	0,6 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	19 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	7,66 mm
$t_{(calculado)}$:	0,10 mm

Verificações:

espessura média (d):	14,5 mm
espessura total (h):	15,5 mm
rigidez flexural (D_X):	8,26E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	13,50 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0263
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento

Máximo:

$$w_{\text{máx}}: \quad 3,19 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: \quad 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na

Face:

$$\sigma_{\text{máx}}: \quad 83,02 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: \quad 165,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: \quad 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: \quad 0,60 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: \quad 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: \quad 0,60 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO C – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE ALUMÍNIO 5052 E NÚCLEO EM PVC)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	2710 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	70 GPa
Coefficiente de Poisson:	ν^f	0,33 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	165 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	65 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	1 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	1,15 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	55 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	9 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	7,95 mm
$t_{(calculado)}$:	0,10 mm

Verificações:

espessura média (d):	12 mm
espessura total (h):	13 mm
rigidez flexural (D_x):	8,84E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	11,00 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0187
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,31 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 104,10 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 165,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 1,15 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,04 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 1,15 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO D – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE ALUMÍNIO 5052 E NÚCLEO EM Balsa)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	2710 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	70 GPa
Coefficiente de Poisson:	ν^f	0,33 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	165 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	92 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	6,3 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	13,4 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	2450 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	105 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	6,68 mm
$t_{(calculado)}$:	0,11 mm

Verificações:

espessura média (d):	10 mm
espessura total (h):	11 mm
rigidez flexural (D_x):	3,93E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	9,00 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0127
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,24 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 105,00 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 165,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,04 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 13,4 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 13,4 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO E – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE ALUMÍNIO 5052 E NÚCLEO EM Balsa)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	2710 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	70 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,33 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	165 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	55 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,17 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	0,14 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	7 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	3,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	8,64 mm
$t_{(calculado)}$:	0,09 mm

Verificações:

espessura média (d):	16,5 mm
espessura total (h):	17,5 mm
rigidez flexural (D_x):	1,07E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	15,50 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0351
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,29 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 83,21 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 165,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,14 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,14 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO F – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE ALUMÍNIO 5052 E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	2710 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	70 GPa
Coefficiente de Poisson:	ν^f	0,33 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	165 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f\tau_{WT}=f\tau_{LT}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	10,13 mm
$t_{(calculado)}$:	0,07 mm

Verificações:

espessura média (d):	15 mm
espessura total (h):	16 mm
rigidez flexural (D_X):	8,84E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	14,00 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0284
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,22 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 106,17 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 165,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b \leq f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a \leq f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO G – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE AÇO CARBONO E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	7680 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	200 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,3 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	350 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	11,71 mm
$t_{(calculado)}$:	0,03 mm

Verificações:

espessura média (d):	13,5 mm
espessura total (h):	14 mm
rigidez flexural (D_x):	1,00E+07 Nmm

$c_{(adotado)}$:	13,00 mm
$t_{(adotado)}$:	0,50 mm

K_1 :	0,0326
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,26 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 289,22 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 350,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,04 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO H – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE WOVEN GLASS / EPÓXI 1581 – F155 E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	1900 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	25 GPa
Coefficiente de Poisson:	ν^f	0,14 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	450 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f\tau_{WT}=f\tau_{LT}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	5,14 mm
$t_{(calculado)}$:	0,05 mm

Verificações:

espessura média (d):	22 mm
espessura total (h):	23 mm
rigidez flexural (D_X):	6,17E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	21,00 mm
$t_{(adotado)}$:	1,00 mm

K_1 :	0,0200
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,24 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 100,09 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 450,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO I – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE COMPENSADO / PINHO E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	600 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	12 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,1 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	20 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	13,69 mm
$t_{(calculado)}$:	0,46 mm

Verificações:

espessura média (d):	23 mm
espessura total (h):	25 mm
rigidez flexural (D_x):	8,84E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	21,00 mm
$t_{(adotado)}$:	2,00 mm

K_1 :	0,0199
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,11 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 11,34 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 20,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO J – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE INOX 304 E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	7680 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	190 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,24 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	250 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f\tau_{WT}=f\tau_{LT}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	13,86 mm
$t_{(calculado)}$:	0,04 mm

Verificações:

espessura média (d):	14 mm
espessura total (h):	14,5 mm
rigidez flexural (D_x):	9,884E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	13,50 mm
$t_{(adotado)}$:	0,50 mm

K_1 :	0,0316
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,20 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \text{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 235,71 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 250,00 \text{ MPa} \quad \text{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \text{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \text{OK!}$$

ANEXO K – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE PLACA CIMENTÍCIA E NÚCLEO EM POLIESTIRENO EXPANDIDO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	1700 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	6 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,15 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	16 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	40 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{csm}	0,27 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	0,3 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	11 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	4,5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	25,77 mm
$t_{(calculado)}$:	0,30 mm

Verificações:

espessura média (d):	25 mm
espessura total (h):	31 mm
rigidez flexural (D_X):	1,15E+07 Nmm

$c_{(adotado)}$:	19,00 mm
$t_{(adotado)}$:	6,00 mm

K_1 :	0,0249
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 2,16 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 15,71 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 16,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,01 \text{ MPa} \quad \tau_b < f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_a < f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,30 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO L – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE PLACA CIMENTÍCIA E NÚCLEO EM Balsa)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	1700 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	6 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,15 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	16 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	92 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	6,3 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	13,4 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	2450 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	105 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	16,99 mm
$t_{(calculado)}$:	0,46 mm

Verificações:

espessura média (d):	16,5 mm
espessura total (h):	22,5 mm
rigidez flexural (D_x):	5,01E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	10,5 mm
$t_{(adotado)}$:	6,00 mm

K_1 :	0,0126
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 2,52 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 15,70 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 16,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b \leq f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 13,40 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a \leq f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 13,40 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

ANEXO M – DIMENSIONAMENTO DE PLACA (FACE PLACA CIMENTÍCIA E NÚCLEO EM POLIURETANO)

Dados das Faces:

Densidade:	ρ_f	1700 kg/m ³
Módulo de Elasticidade:	E^f	6 GPa
Coeficiente de Poisson:	ν^f	0,15 adimensional
Tensão Limite de Escoamento:	σ_E	16 MPa

Dados do Núcleo:

Densidade:	ρ_n	70 kg/m ³
Resistência Compressiva:	f_{esm}	0,5 MPa
Resistência Cisalhante:	$f_{\tau_{WT}}=f_{\tau_{LT}}$	0,6 MPa
Módulo de Elasticidade:	E_T	19 MPa
Módulo Cisalhante:	$G_{WT}=G_{LT}$	5 MPa

Dados Gerais:

b:	1000 mm
a:	3000 mm
qo:	0,001 N/mm ²

Resultados:

r:	0,33 adimensional
M_x :	125 Nmm
$c_{(calculado)}$:	19,48 mm
$t_{(calculado)}$:	0,40 mm

Verificações:

espessura média (d):	19 mm
espessura total (h):	25 mm
rigidez flexural (D_x):	6,65E+06 Nmm

$c_{(adotado)}$:	13,00 mm
$t_{(adotado)}$:	6,00 mm

K_1 :	0,0209
K_2 :	0,1191
K_3 :	0,3700
K_4 :	0,4887

Deslocamento**Máximo:**

$$w_{\text{máx}}: 3,15 \text{ mm} \quad w_{\text{máx}} < b/300$$

$$b/300: 3,33 \text{ mm} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão Normal Máxima na**Face:**

$$\sigma_{\text{máx}}: 15,63 \text{ MPa} \quad \sigma_{\text{máx}} < \sigma_E$$

$$\sigma_E: 16,00 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento b:

$$\tau_b: 0,02 \text{ MPa} \quad \tau_b \leq f\tau_{WT}$$

$$f\tau_{WT}: 0,60 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$

Tensão cisalhante no núcleo no meio da borda de comprimento a:

$$\tau_a: 0,03 \text{ MPa} \quad \tau_a \leq f\tau_{LT}$$

$$f\tau_{LT}: 0,60 \text{ MPa} \quad \textbf{OK!}$$