



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA

ENRICO DI RAIMO

**ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE COLMOS DE CANA-DE-
AÇÚCAR ATRAVÉS DE ENSAIOS MECÂNICOS E
TÉCNICAS DE MOIRÉ**

CAMPINAS

2020

ENRICO DI RAIMO

**ANÁLISE VISCOELÁSTICA DE COLMOS DE CANA-DE-
AÇÚCAR ATRAVÉS DE ENSAIOS MECÂNICOS E
TÉCNICAS DE MOIRÉ**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Agrícola, na Área de Máquinas Agrícolas.

Orientador: Prof. Dr. Inácio Maria Dal Fabbro

Coorientador: Prof. Dr. Jonathan Gazzola

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO ENRICO DI RAIMO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. INÁCIO MARIA DAL FABBRO.

CAMPINAS

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

D627a Di Raimo, Enrico, 1968-
Análise viscoelástica de colmos de cana-de-açúcar através de ensaios mecânicos e técnicas de moiré. / Enrico Di Raimo. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Inácio Maria Dal Fabbro.
Coorientador: Jonathan Gazzola.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola.

1. Viscoelasticidade. 2. Cana-de-açúcar. 3. Método de Moiré. 4. Deformações e tensões. 5. Cana-de-açúcar - propriedades mecânicas. I. Dal Fabbro, Inácio Maria, 1944-. II. Gazzola, Jonathan, 1981-. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Agrícola. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Viscoelastic analysis of sugarcane stems through mechanical tests and *moiré* techniques

Palavras-chave em inglês:

Viscoelasticity

Sugarcane

Moire method

Strain and stress

Sugarcane - Mechanical properties

Área de concentração: Máquinas Agrícolas

Titulação: Doutor em Engenharia Agrícola

Banca examinadora:

Inácio Maria Dal Fabbro [Orientador]

Daniel Albiero

Cinthy Bertoldo Pedroso

Giovani Francisco Rabelo

Edson Dozza D'Ávila

Data de defesa: 17-07-2020

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Agrícola

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0001-9293-115X>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4483442550022960>

Este exemplar corresponde à redação final da **Tese de Doutorado** defendida por **Enrico Di Raimo**, aprovada pela Comissão Julgadora em 17 de julho de 2020, na Faculdade de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual de Campinas.

Prof. Dr. Inácio Maria Dal Fabbro – FEAGRI/UNICAMP - Presidente e Orientador

Prof. Dr. Daniel Albiero – FEAGRI/UNICAMP - Membro Titular

Profa. Dra. Cinthya Bertoldo Pedroso – FEAGRI/UNICAMP - Membro Titular

Prof. Dr. Giovanni Francisco Rabelo – UFLA/Lavras - Membro Titular

Prof. Dr. Edson Dozza d'Avila – IFSP/ São Paulo - Membro Titular

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do discente.

DEDICATÓRIA

Ao meu pai Francesco (*in memoriam*) por ter sido um exemplo de trabalho, empreendedorismo e criatividade.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela força e luz ao longo do percurso deste trabalho.

Ao professor Dr. Inácio M. Dal Fabbro, pela amizade, orientação, paciência, apoio, por ser um exemplo de cientista e professor humano e pacifista.

Ao professor Dr. Jonathan Gazzola, pelo apoio na co-orientação.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo auxílio financeiro concedido.

Ao coordenador professor Dr. Ariovaldo José da Silva do Programa de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual Campinas e a secretária Valéria Altmann Ferreira pelo empenho e presteza nas solicitações e nos encaminhamentos burocráticos.

Aos professores membros da banca de defesa: Dr. Daniel Albiero, Dra. Cinthya Bertoldo Pedroso, Dr. Giovanni Francisco Rabelo e Dr. Edson Dozza d'Ávila pelas contribuições.

Aos colegas do Programa de Pós-graduação em Engenharia Agrícola da Universidade: Celina Almeida, Adilson Enes, Jonathan Gazzola e demais pessoas das quais porventura tenha me esquecido.

Aos técnicos da Feagri/Unicamp: Leandro (Laboratório de Materiais Biológicos/Ótica), Zé Maria e Luís (Laboratório de Protótipos), Paulo Nunes (Laboratório de Estruturas) entre outros pela disponibilidade no atendimento.

Aos meus pais Francesco Di Raimo (*in memoriam*) e Maria Di Dea Di Raimo por serem exemplos de honestidade, trabalho e superação.

À minha esposa Luciana pelo apoio, compreensão e trabalho de revisão linguística do texto da tese e à minha filha Clara pelas alegrias e momentos de descontração.

Ao sobrinho Eng. Claudio R. Di Raimo pelo auxílio na utilização de ferramentas de otimização de dados.

À Usina Nova América S/A Agroenergia pelo fornecimento de colmos de cana-de-açúcar.

EPIGRAFE

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original". Albert Einstein

RESUMO

No campo da Engenharia Agrícola, um dos problemas comuns e desafiadores com o qual o pesquisador depara-se diz respeito ao comportamento mecânico de materiais biológicos. A caracterização do comportamento mecânico da cana-de-açúcar, justifica-se pela necessidade de informações para o desenvolvimento de projetos e otimizações de processos relativos a interação máquina-planta (plantio, colheita, transporte, processamento industrial e rendimento energético). A determinação das propriedades mecânicas de materiais biológicos, em especial os espécimes vegetais, é complexa em função de sua anisotropia, presença de umidade, composição celular interna não homogênea, não linearidade geométrica, entre outras características que não atendem aos pressupostos básicos da Mecânica dos Meios Contínuos. Espécimes de cana-de-açúcar em virtude do alto teor de fibras e líquidos em seu tecido vegetal são modelados, no que concerne ao comportamento mecânico pela Teoria da Viscoelasticidade. Por meio da realização de ensaios mecânicos de compressão uniaxial e restritos, amostras cilíndricas, da porção internodal do parênquima de cana-de-açúcar foram submetidas a carregamentos em prensa universal a diferentes taxas de deformação (frequência) e os resultados tensão-deformação contribuem para a obtenção das funções viscoelásticas dependentes do tempo, notadamente, $E(t)$, $\nu(t)$, $\phi(t)$ e $\psi(t)$, que posteriormente foram agrupadas nas Funções *Creep* e *Relaxation*. A ocorrência de tensões e deformações de contato em corpos de prova cilíndricos foi estudada através dos ensaios de Lobo Carneiro. As técnicas ópticas de *moiré* foram empregadas para gerar imagens da distribuição de tensões e deformações em carregamentos de compressão axial e diametral do internódio da cana-de-açúcar, corpos de prova de madeira, bem como cilindros de borracha a título de ilustração e comparações. A análise dos deslocamentos das curvas de isodeformação evidenciou diferenças no comportamento material, com a borracha apresentando distribuição mais uniforme de tensões, a madeira com um grau menor de isotropia e por último a cana-de-açúcar com comportamento totalmente anisotrópico.

Palavras-chave: viscoelasticidade linear; fluência; relaxation; ensaio Lobo-Carneiro ; cana-de-açúcar; *moiré*;

ABSTRACT

In the field of Agricultural Engineering, one of the common and challenging problems that the researcher faces is related to the mechanical behavior of biological materials. The characterization of the mechanical behavior of sugarcane is justified by the need for information for the development of projects and process optimizations related to machine-plant interaction (planting, harvesting, transportation, industrial processing and energy yield). The determination of the mechanical properties, as well as of the mechanical behavior of biological materials, particularly of vegetative materials is quite complex due its composition which includes fibers and other solids as well as liquid and gas phases. That composition generates material nonlinearities which associated with geometrical nonlinearities do not meet the basic requirements of the Mechanics of Continuum Media. Specimens of sugarcane, due its high fiber, liquid and gases content are better modeled, concerning mechanical behavior, by the Theory of Linear Viscoelasticity. In this research work the uniaxial stress and strain as well as constrained tests carried on the sugarcane internode parenchyma allowed the generation of the viscoelastic functions named $E(t)$, $\nu(t)$, $\phi(t)$ e $\psi(t)$. These were later on expressed as Creep and Relaxation Functions. Contact stress and strain occurrence on cylindrical specimens were studied through the Lobo Carneiro (Brazilian Test) tests. *Moiré* optical techniques were employed to generate stress and strain distribution images in the axial and diametrical compressions on sugar cane internode, wood specimens as well as on rubber cylinders as a matter of illustration and comparisons. The analysis of the displacement of the isodeformation curves evidenced differences in material behavior, with rubber showing a more uniform distribution of stresses, the wood with a lower degree of isotropy and, lastly, sugarcane with totally anisotropic behavior.

Keywords: linear viscoelasticity; creep; relaxation; Brazilian test; sugar cane; *moiré*

Lista de Ilustrações

Figura 01. Colmo da cana-de-açúcar.....	25
Figura 02. Tipos de internódios.....	26
Figura 03. Corte transversal do colmo de cana-de-açúcar.	27
Figura 04. Representação tridimensional dos tensores tensão e deformação específica.....	34
Figura 05. Definição completa do estado de tensões em um ponto.	41
Figura 06. Estado plano de tensões: a) Placa fina b) Configuração geral de tensões.....	43
Figura 07. Cilindro longo sujeito a um carregamento uniforme ao longo do comprimento.	44
Figura 08. Caracterização de contatos: (a) Incompleto e não conforme; (b) Completo; (c) Incompleto com singularidade; (d) Incompleto e conforme.	47
Figura 09. Distribuição de pressão e zonas de contato de Hertz esférico, cilíndrico e geral.	49
Figura 10. Geometria do contato entre paraboloides com os eixos principais do corpo 1 (x_1, y_1, z) e os eixos principais do corpo 2 (x_2, y_2, z).....	51
Figura 11. Geometria de corpos deformados.	53
Figura 12. Geometria do contato esfera-esfera no plano.....	54
Figura 13. Área da superfície de contato oriunda do contato de uma esfera com plano.....	55
Figura 14. Distribuição de pressões q ao longo da largura da superfície de contato, semi-elíptica.....	58
Figura 15. Distribuição de Tensão entre duas Esferas em Contato.....	61
Figura 16. Representação do contato entre dois cilindros, carregados por uma força F uniformemente distribuída ao longo de todo o seu comprimento L	62
Figura 17. Cálculo dos Raios Principais de Curvatura de um Elipsóide, exemplificado por uma Laranja.....	64
Figura 18. Cálculo do Raio de uma Esfera.....	64
Figura 19. Ensaio de Lobo-Carneiro (“ <i>Brazilian Test</i> ”)	67
Figura 20. Esquema de Dois Cilindros em Contato.	68
Figura 21. Distribuição de Tensão, em uma Superfície de Contato entre um Cilindro e uma Superfície Plana.(Sherif, 1976)	69
Figura 22. Resposta de um material viscoelástico em ensaio de tração.....	71
Figura 23. Variação do módulo elástico em função do teor de umidade em grãos de milho.....	72
Figura 24. O modelo Maxwell	72
Figura 25. Modelos de Três Elementos.....	74
Figura 26. Modelos viscoelásticos generalizados.	76
Figura 27. O modelo Wiechert.....	77
Figura 28. Deformação específica como uma função do tempo a diferentes cargas.....	79
Figura 29. Medida da resposta de <i>relaxation</i>	80
Figura 30. Taxas de tensão e de deformação específica para carregamento uniaxial.	81
Figura 31. Formação da integral hereditária.	82
Figura 32. Vetores girantes de tensão e deformação específica.....	86
Figura 33. Tensão e deformação específica oscilatórios.....	87
Figura 34. Geração de franjas de moiré geométricas.	90
Figura 35. Características das grades de linhas.....	91
Figura 35. Amostras de cana-de-açúcar de talhões de campo.....	95
Figura 36. Máquina Universal de Ensaio OTAWA.....	96
Figura 38. Arranjo “ <i>rigid die</i> ” para carregamento constrito de espécimes cilíndricos.	97
Figura 39. Arranjo experimental para geração dos padrões de moiré em compressão diametral de cilindro entre placas planas e paralelas.	100

Figura 40. Conjunto de 3 imagens de fotografias dos padrões de <i>moiré</i> tomadas do modelo cilíndrico em carregamento diametral, grade 0,1 mm.	101
Figura 41. Resultados dos tratamentos de seleção, conversão de formato, contraste e filtragem em imagens de <i>moiré</i>	101
Figura 42. Processo de subtração aplicado ao estado 1 e ao estado 2 de carregamentos.	102
Figura 43. Resultados de deslocamentos de franjas	102
Figura 44. Uso do Solver para otimização de dados	104
Figura 45. Respostas tensão-deformação específica e tensão-tempo na compressão uniaxial do parênquima do colmo	106
Figura 46. Respostas tensão-deformação específica e tensão-tempo na compressão restrita.	107
Figura 47. Curvas tensão-deformação específica e influência da taxa de deformação para o ensaio uniaxial em colmos integrais.	108
Figura 48. Respostas temporais das funções viscoelásticas $E(t)$ para cada caso de taxa de deformação.	110
Figura 49. Resposta temporal da tensão em função da taxa de deformação	112
Figura 50. Variação de $S(t)$	115
Figura 51. Variação da função de Poisson no tempo	115
Figura 52. Variação de $f(v)$	116
Figura 53. Variação de Poisson e $S(t)$ no intervalo [7.5s , 20.2 s].	116
Figura 54. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B1F).	123
Figura 55. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B1L).	124
Figura 56. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B2F).	125
Figura 57. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B2L).	126
Figura 58. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B3F).	127
Figura 59. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B3L).	128
Figura 60. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF1).	129
Figura 61. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML1).	130
Figura 62. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF2).	131
Figura 63. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML2).	132
Figura 64. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF3).	133
Figura 65. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML3).	134
Figura 66. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF4).	135
Figura 67. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML4).	136

Figura 68. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CID1).	137
Figura 69. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CIL1).	138
Figura 70. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CID2).	139
Figura 71. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CIL2).	140
Figura 72. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CID3).	141
Figura 73. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CIL3).	142
Figura 74. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (ID41).	143
Figura 75. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (ID42).	144
Figura 76. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (ID43).	145
Figura 77. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCID6).	146
Figura 78. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCIL7).	147
Figura 79. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPD1).	148
Figura 80. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPL2).	149
Figura 81. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPD3).	150
Figura 82. Vista lateral de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPL4).	151
Figura 83. Vista frontal de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPD5).	152
Figura 84. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em colmo de cana-de-açúcar integral [CID1].	154
Figura 85. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em colmo de cana-de-açúcar integral [CID2].	155
Figura 86. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em colmo de cana-de-açúcar integral [CID3].	156
Figura 87. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral na porção parenquimatosa de colmos de cana-de-açúcar [MCPD1].	157
Figura 88. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral na porção parenquimatosa de colmos de cana-de-açúcar [MCPD3].	158
Figura 89. Deformação total e meia-largura em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em madeira [MF1].	159
Figura 90. Deformação total e meia-largura em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em madeira [MF2].	160

Figura 91. Deformação total e meia-largura em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em madeira [MF3].....	161
Figura 92. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em borracha [B1F].....	162
Figura 93. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em borracha [B2F].....	163
Figura 94. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em borracha [B3F].....	164
Figura 95. Configuração de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (CIA1).....	165
Figura 96. Configuração de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (CIA2).....	166
Figura 97. Configuração de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (CIA3).....	167
Figura 98. Configuração de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (MAP1).....	168
Figura 99. Configuração de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (MAP2).....	169
Figura 100. Configuração de franjas de <i>moiré</i> , grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (MAP3).....	170

Lista de Tabelas

Tabela 01. Classificação taxonômica antiga e atual da cana-de-açúcar.....	23
Tabela 02. Valores de m e n para diversos valores de θ	56
Tabela 03. Dimensões de espécimes cilíndricos do parênquima de cana-de-açúcar e valores	96
Tabela 04. Dimensões de espécimes cilíndricos integrais de cana-de-açúcar e valores	97
Tabela 05. Dados de corpos de prova de borracha em ensaio de compressão diametral associada a <i>moire</i>	98
Tabela 06. Dados de corpos de prova de madeira (<i>Eucalyptus citriodora</i>) em ensaio de compressão diametral associada a <i>moire</i>	99
Tabela 07. Dados de corpos de prova de cana-de-açúcar (<i>Sacharum spp</i>) em ensaio de compressão diametral associada a <i>moire</i>	99
Tabela 08. Dados de corpos de prova de cana-de-açúcar (<i>Sacharum spp</i>) em ensaio de compressão uniaxial associada a <i>moire</i>	103
Tabela 09. Parâmetros da compressão diametral de cilindro entre placas planas	104
Tabela 10. Coeficiente de correlação R^2 em função da taxa de deformação para ensaios uniaxiais integrais.	120

SÍMBOLOS

ε_{ij}	Tensor de deformação específica (<i>strain</i>) [adim]
σ_{ij}	Tensor de tensão (<i>stress</i>) [KPa]
σ_{nx}	Tensão normal cartesiana em x [KPa]
C_{ijkl}	Tensor das constantes elásticas
τ	Tensão de cisalhamento
F	Carregamento, Força [N]
A	Área de seção transversal [mm ²]
E	Módulo de elasticidade do corpo [KPa]
E(t)	Função viscoelástica do módulo de elasticidade
ν	Coefficiente de Poisson [adim]
$\nu(t)$	Função viscoelástica de Poisson
G	Módulo de cisalhamento
K	Módulo volumétrico (<i>bulk modulus</i>)
$\psi(t)$	Função <i>creep</i>
$\phi(t)$	Função <i>relaxation</i>
a, b	Dimensões da área de contato
α	Deformação total de corpos em contato
q	Pressão na área de contato

Sumário

Lista de Ilustrações	9
Lista de Tabelas	13
Símbolos	16
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 JUSTIFICATIVA	18
1.2 OBJETIVOS	20
1.2.1 Objetivo geral	20
2 REVISÃO DE LITERATURA	21
2.1 Introdução	21
2.2 Características Botânicas e Tecnológicas da Cana-de-açúcar	22
2.3 Bases da Teoria da Elasticidade	30
2.3.1 Hipóteses da mecânica dos meios contínuos	30
2.3.2 A tensão	31
2.3.3 A deformação	33
2.3.4 Teoria da elasticidade linear ou lei de Hooke generalizada	35
2.3.5 Estados de tensões e deformações	41
2.3.6 Tensões de contato	46
2.3.6.1 Descrição geral do problema de contato	46
2.3.6.2 Caso genérico para pressão entre dois corpos em contato	56
2.3.6.3 Pressão entre dois corpos esféricos em contato	58
2.3.6.4 Contato entre cilindros	61
2.3.6.5 Pressão de contato entre um elipsoide e	
uma superfície plana	63
2.3.6.6 Contato de cilindro com superfície plana	66
2.3.6.6.1 Ensaio de Lobo-Carneiro ou <i>Brazilian Test</i>	66
2.4 Viscoelasticidade	69
2.4.1 Introdução	69
2.4.2 Modelos viscoelásticos analógicos	72
2.4.3 Modelagem analítica por integrais hereditárias	77
2.4.4 Tensão oscilatória, cargas dinâmicas e vibrações	84
2.4.5 Modelagem por módulos e <i>compliances</i> complexos	86
2.5 Técnicas de <i>Moire</i>	89

3	MATERIAIS E MÉTODOS	95
3.1	Ensaio Uniaxiais e Constritos de Compressão	95
3.2	Ensaio de Compressão Diametral Associados à <i>Moiré</i>	98
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	105
4.1	Ensaio de Compressão Uniaxial e Restrita em Cana-de-açúcar.....	105
4.1.1	Ensaio 1: compressão uniaxial simples do parênquima.....	105
4.1.2	Ensaio 2: compressão restrita do parênquima.....	107
4.1.3	Ensaio 3: compressão uniaxial simples de colmos integrais.....	108
4.1.4	Análise do ponto de vista da viscoelasticidade.....	109
4.2	Ensaio de Compressão Diametral Associados à Técnica de <i>Moire</i>	122
4.2.1	Resultados e análise de moiré em espécimes de borracha.....	123
4.2.2	Resultados e análise de <i>moire</i> em espécimes de madeira.....	129
4.2.3	Resultados e análise de <i>moire</i> em espécimes de cana-de-açúcar...	137
4.2.3.1	Corpos de prova integrais.....	137
4.2.3.2	Corpos de prova do parênquima.....	148
4.2.4	Análise de <i>moire</i> comparativa entre materiais.....	153
4.2.5	Resultados de tensões de contato na compressão diametral.....	153
4.2.5.1	Ensaio em colmos de cana-de-açúcar.....	153
4.2.5.2	Ensaio em corpos de prova de madeira.....	159
4.2.5.3	Ensaio em corpos de prova de borracha.....	162
4.3	Ensaio de compressão axial em cana-de-açúcar associados à técnica de <i>Moiré</i>	165
4.3.1	Resultados e análise de <i>moiré</i> na porção integral.....	165
4.3.2	Resultados e análise de <i>moiré</i> na porção do parênquima.....	168
5	CONCLUSÕES	172
	REFERÊNCIAS.....	172

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

No Campo da Engenharia Agrícola, um dos problemas comuns e desafiadores com o qual o pesquisador depara-se diz respeito ao comportamento mecânico de materiais biológicos, questão-problema que pode demandar estudos em perfis topográficos de superfícies irregulares como órgãos vegetais, superfície do solo, elementos de máquinas etc.

Com efeito, a problemática concernente à caracterização de materiais biológicos, entre eles os vegetais, vem sendo objeto de estudo de pesquisadores que se debruçam sobre o tema e buscam compreender tanto o comportamento de materiais viscoelásticos no que tange a relações de tensão e deformação dependentes do tempo quanto alterações que podem ocorrer em um material.

Em virtude de sua natureza anisotrópica e por sua alta heterogeneidade constitutiva, tendo-se em vista a presença de elementos não sólidos, água e gases, mas, que, no entanto, geram unidades estruturais que podem ser modeladas por equações constitutivas de materiais de engenharia, a cana-de-açúcar traz como desafio a necessidade de investigação sobre suas propriedades mecânicas visando ao entendimento do comportamento máquina-planta.

O comportamento mecânico para a maioria dos materiais de engenharia pode ser determinado consistentemente por meio de ensaios padronizados por normas, tendo em vista as considerações ideais de isotropia, homogeneidade, linearidade de resposta. As propriedades mecânicas dos materiais fornecidas pelas normas servem de apoio ao projetista na análise de um sistema mecânico ou mesmo na otimização de equipamentos e máquinas.

A cana-de-açúcar (*Saccharum spp*), planta da família das poáceas, destaca-se entre as culturas mais importantes do agronegócio brasileiro. O Brasil é o maior produtor mundial de açúcar e de álcool de cana-de-açúcar e também o maior exportador, sendo o Estado de São Paulo, o maior produtor nacional. Além disso, a cana-de-açúcar tem apresentado crescente importância mundial desde que questões energéticas e ambientais emergiram como pautas relevantes na contemporaneidade. No Brasil, a cultura é utilizada como matéria-prima para produção de açúcar, álcool, plásticos e geração de energia através de sua biomassa.

No caso da presente investigação, o estudo das propriedades mecânicas do caule de cana-de-açúcar justifica-se pela pertinência de se caracterizar o comportamento mecânico da cana-de-açúcar nas interações máquina-planta, seja em plantio e colheita mecanizados, transporte e manipulação, seja na seleção de varietal para melhoramento genético ou, ainda,

no rendimento do processamento industrial de colmos de cana. Desse modo, acredita-se que a investigação do comportamento mecânico contribui para o desenvolvimento de formulações teóricas analíticas no campo da Teoria da Viscoelasticidade e aprimoramento da aplicação de técnicas experimentais na análise de tensões e deformações, notadamente, os métodos ópticos como é o caso de *Moiré*.

Desse modo, tendo em vista a finalidade de caracterizar as propriedades viscoelásticas da cana-de-açúcar, foram realizados ensaios de compressão uniaxial e diametral, utilizando-se da máquina universal de ensaios. Nesse caso, amostras cilíndricas da porção internodal do parênquima de cana-de-açúcar foram submetidas a carregamentos em diferentes taxas de deformação (frequência) de modo que os resultados ligados à tensão-deformação contribuíssem para a obtenção das funções viscoelásticas dependentes do tempo, notadamente, $E(t)$, $v(t)$, $G(t)$, e $K(t)$.

No primeiro tipo de ensaio de compressão, por esse envolver um estado de tensão simples, recorre-se a soluções analíticas para caracterização do comportamento mecânico em função das teorias da elasticidade e viscoelasticidade linear. Já, no segundo tipo, por envolver um estado de tensão complexo, o ensaio é assistido pela técnica de *moiré*, com o objetivo de avaliar qualitativamente a distribuição de tensões e deformações, características de isotropia e não linearidades do material.

Com efeito, diante de uma gama de possibilidades de métodos de análise de tensões e deformações desde os clássicos passando pelos computacionais/numéricos até os métodos experimentais (extensometria, fotoelasticidade e método de *moiré*), entende-se que as técnicas ópticas podem ser mais adaptadas a um mapeamento das características de um material entre seu estado não deformado e seu estado deformado.

É necessário afirmar que *moiré*, tomada aqui como técnica de análise experimental para determinação de deslocamentos ou deformações no comportamento de um material vegetal, neste trabalho, aliada aos ensaios mecânicos, permitirá uma abordagem em meio à aplicação das teorias da viscoelasticidade linear, e, estará atrelada a uma análise de natureza qualitativa com a finalidade de mapear a distribuição de tensões e deformações nos corpos de prova em termos de análise do comportamento mecânico de colmos de cana-de-açúcar.

Sendo assim, a utilização de uma técnica de medição sem contato, como a de *Moiré*, visando interferir o mínimo possível no que se deseja medir, rápida e com níveis de erro baixos o suficiente para a aplicação específica desejada, se torna necessária. Medições por técnicas óticas são cada vez mais empregadas na Engenharia e na indústria.

Nesse caso, julga-se pertinente a articulação dos ensaios mecânicos a técnica de *moiré* no sentido de refinar o tratamento dos dados, bem como apresentar uma reflexão mais apurada do comportamento viscoelástico do material da cana-de-açúcar.

Nos ensaios e análises empreendidos nesta tese, a cana-de-açúcar foi modelada considerando-a como um material estrutural compósito de características gerais anisotrópicas, especificamente ortotrópicas.

Na caracterização viscoelástica de um material, destacam-se as propriedades reológicas, dependentes inerentemente do tempo, obtidas de curvas tensão-deformação, as funções viscoelásticas, $E(t)$, $v(t)$ ou agrupando-as em funções compactas de *creep* e *relaxation*, respectivamente $\psi(t)$ e $\phi(t)$.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Vale destacar que a tese teve como objetivo geral:

- Caracterizar o comportamento mecânico da cana-de-açúcar à luz da teoria da viscoelasticidade linear e da utilização da técnica experimental de *Moiré*, determinando as funções viscoelásticas analíticas e o mapa de distribuição de tensões e deformações em elemento cilíndrico em estado plano de tensão.

Tal objetivo geral desdobra-se nos seguintes objetivos específicos:

- (i) analisar as propriedades viscoelásticas da cana-de-açúcar, por meio de ensaios uniaxiais de compressão em corpos-de-prova de colmo de cana-de-açúcar;
- (ii) verificar, quantitativamente, o comportamento mecânico da cana-de-açúcar submetida a tensões de contato em compressão diametral;
- (iii) comparar, qualitativamente, a distribuição de tensões, o grau de isotropia da cana-de-açúcar com outros materiais (madeira e borracha), por meio da técnica de *Moiré* de sombra em ensaios de compressão diametral;

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Introdução

Nesta seção, são apresentados os referenciais teóricos que fundamentaram as análises realizadas no que concerne ao comportamento mecânico de colmo de cana-de-açúcar. Desta forma, discorre-se, inicialmente, sobre as propriedades mecânicas de materiais biológicos (notadamente os espécimes vegetais) com foco na teoria da mecânica dos meios contínuos e suas condições ideais de isotropia, homogeneidade e linearidade geométrica/material. Ao considerar a complexidade estrutural e de constituição de um material vegetal, a revisão teórica busca fundamentos da viscoelasticidade linear. Ainda, dentro do campo da mecânica dos materiais, referenciam-se os modelos teóricos de tensões de contato, pioneiramente desenvolvidos por Hertz. Para a análise de tensões e deformações no campo experimental, uma revisão das técnicas de *moiré* é apresentada.

2.2 Características botânicas e tecnológicas da cana-de-açúcar

Nesta seção, será apresentada uma breve contextualização histórica da cana-de-açúcar para que, em seguida, sejam trazidos os aspectos concernentes às características botânicas e tecnológicas de tal planta.

Em se tratando da origem e dispersão da cana-de-açúcar, ARTSCHWAGER & BRANDES (1958) reporta, amparado nos registros de antropologia, paleontologia e genética, sua origem ao sudoeste da Ásia, mais precisamente na Nova Guiné, onde as formas complexas selvagens, *spontaneum* e *robustum*, de *Saccharum* coexistiam. A partir da espécie selvagem *S. robustum* deu-se origem à ocorrência de poliploidia e seleção a um grupo de canas cultivadas tropicais, a *S. officinarum*. Esta origem e derivação durou entre 8000 a 1500 A.C.. Muito mais tarde houve três grandes rotas de migração e dispersão de *S. officinarum*, a primeira migração começando a cerca de 8000 A.C., envolvendo Nova Guiné e Ilhas orientais, a segunda migração começando cerca de 6000 A.C., envolvendo a parte ocidental de Nova Guiné (Indonésia, Sumatra, Ilhas Borneu, Filipinas, região da Indochina, China e Índia), a terceira migração, a cerca de 500 a 1100 D.C., para a Polinésia e as ilhas do Pacífico isoladas (Samoa, Ilhas Fiji e Havai), todas na faixa entre os Trópicos de Câncer e Capricórnio. Assim, as formas migratórias de *S. officinarum* no Sudeste da Ásia hibridizaram com formas de *S. spontaneum* e deram origem a vários grupos de canas cultivadas subtropicais, *S. sinense* (China) e *S. barberi* (Índia).

Desconhecida no Ocidente, a cana-de-açúcar foi observada por alguns generais de Alexandre, o Grande, em 327 a.C e mais tarde, no século XI, durante as Cruzadas. Os árabes introduziram seu cultivo no Egito no século X e pelo Mar Mediterrâneo, em Chipre, na Sicília e na Espanha. Credita-se aos egípcios o desenvolvimento do processo de clarificação do caldo da cana e um açúcar de alta qualidade para a época.

Historicamente, a introdução da cana-de-açúcar nas Américas aconteceu com a segunda viagem de Cristóvão Colombo ao continente americano que levou colmos de cana da Ilha da Madeira para uma região onde é hoje o país da República Dominicana. Em 1509, foram novamente introduzidas canas em São Domingos e, em 1520, o movimento colonizador a disseminou por toda a América. Já, no Brasil, o início do cultivo se deu em 1502, contudo o cultivo manteve-se estagnado por conta de os arrendatários estarem mais preocupados com o extrativismo da madeira e com a descoberta de minas de ouro e prata. Com a retomada da colonização real por Portugal, com base na adoção do modelo de Capitanias Hereditárias, oficialmente, foi Martim Affonso de Souza que em 1532 trouxe a primeira muda de cana ao

Brasil e iniciou seu cultivo na Capitania de São Vicente. Houve avanços de modo que a indústria açucareira teve algum êxito nos primeiros anos de exploração. Na região Nordeste, vale frisar o desempenho das capitanias de Pernambuco e da Bahia na multiplicação dos engenhos. Assim, em 1580, o Brasil já havia alcançado o monopólio mundial de produção de açúcar.

A cana-de-açúcar (*Saccharum* sp.) é uma gramínea que abrange várias espécies, no entanto, as canas atualmente cultivadas, na sua maioria, foram substituídas por espécies híbridas. Este é o caso, por exemplo, da adaptação das formas tropicais de *S. officinarum* para híbridos subtropicais voltados para o cultivo no sul dos EUA, conforme relata Hebert (1964).

Própria de climas tropicais e subtropicais, a cana é uma planta perene e passou por diversos cruzamentos, à guisa de exemplo, entre espécies pertencentes ao gênero *Saccharum* e *S. officinarum*, com o propósito, nesse caso, de aliar a rusticidade e resistência das plantas a doenças a um bom grau de riqueza em açúcar de variedades nobres, nesse caso, alto índice de sacarose no colmo.

Abordando as características ligadas à anatomia e botânicas da cana-de-açúcar, em termos de classificação, a planta era conhecida até recentemente como um membro da família das gramíneas. Em termos de estado da arte, podem-se citar autores que se debruçaram sobre o tema. Aspectos ligados à anatomia e botânica da planta de cana-de-açúcar foram descritos em trabalho clássico de VAN DILLEWIJN (1952). Além disso, outro trabalho relevante diz respeito à classificação taxonômica antiga (cf. ENGLER, 1887) em que a planta da cana-de-açúcar pertencia à família *Gramineae*. Já os estudos taxonômicos de CRONQUIST (1981) determinam que modernamente a cana é uma planta representante da família *Poaceae*, mantendo-se todas as demais denominações abaixo da chave taxonômica (tribo, subtribo, gênero e espécie). A classificação botânica pode ser vista na Tabela 1.

Tabela 01. Classificação taxonômica antiga e atual da cana-de-açúcar.

[Fonte: DINARDO-MIRANDA et al, 2008]

Especificação	ENGLER (1887)	CRONQUIST (1981)
Divisão	Angiospermae	Magnoliophyta
Classe	Monocotyledoneae	Liliopsida
Ordem	Glumiflorae	Cyperales
Família	Gramineae	Poaceae
Tribo	Andropogoneae	Andropogoneae
Subtribo	Saccharinae	Saccharinae
Gênero	<i>Saccharum</i>	<i>Saccharum</i>
Espécies	<i>Saccharum officinarum</i> <i>Saccharum barberi</i> <i>Saccharum robustum</i> <i>Saccharum spontaneum</i> <i>Saccharum sinensis</i> <i>Saccharum edule</i>	<i>Saccharum officinarum</i> <i>Saccharum barberi</i> <i>Saccharum robustum</i> <i>Saccharum spontaneum</i> <i>Saccharum sinensis</i> <i>Saccharum edule</i>

Quando se discutem os aspectos botânicos de cada órgão da cana-de-açúcar, é interessante dizer que essa planta perfilha de maneira abundante, na fase inicial do desenvolvimento, o que influencia em todo o manejo da cultura. Quando se estabelece como cultura, o autosombreamento induz a inibição do perfilhamento e a aceleração do colmo principal.

As características varietais definem o número de colmos por planta, a altura e o diâmetro do colmo, o comprimento e a largura das folhas e a arquitetura da parte aérea, sendo a expressão destes caracteres muito influenciados pelo clima, pelo manejo e pelas práticas culturais utilizadas.

Há várias espécies pertencentes ao gênero *Saccharum*: *S. officinarum* L., *S. spontaneum* L., *S. robustum* J., *S. sinensis* R., *S. barbieri* J. e *S. edule*. Os cruzamentos por meio das hibridações buscam aliar os altos níveis de sacarose por um lado, obtidos em colmos de *S. officinarum*, por exemplo, com outras características tais como rusticidade (exemplificada na *S. robustum*), vigor, perfilhamento, resistência a doenças, teor de fibra entre outras. Portanto, a terminologia taxonômica atual dos cultivares de cana é *Saccharum spp.*, já que não se cultiva comercialmente canas que não sejam fruto de melhoramento

No presente trabalho, voltado para as propriedades mecânicas de colmos, destacamos os aspectos botânicos do colmo de cana-de-açúcar, embora outros órgãos da planta, tais como folhas, inflorescência e sistema radicular guardam relativa importância nos estudos agrônômicos e biológicos. Ao discutir os aspectos botânicos de cada órgão da planta, é necessário enfatizar que a cana-de-açúcar é uma planta que perfilha de modo que esse perfilhamento afeta as práticas de plantio, que é feito assexuadamente pelo uso de toletes (colmos), definindo o número de gemas por metro. O perfilhamento define, ainda, a

capacidade que cada variedade tem de rebrota, através de gemas não brotadas dos colmos cortados [SALLES SCARPARI & BEAUCLAIR in DINARDO-MIRANDA et al, 2008].

Em termos estruturais, os colmos apresentam formato cilíndrico sendo compostos por nós e entrenós ou internódios e podem ser definidos como a porção acima do solo, que sustenta as folhas e a inflorescência.

A região de crescimento do colmo se afina e os entrenós são mais curtos. Os entrenós mais novos têm poucos milímetros de tamanho e nesta região a divisão celular é intensa e rápida. Um colmo de cana (figura 01) é formado pelo nó, região onde se insere a bainha da folha; a zona radicular, que inclui uma gema e vários primórdios radiculares; o anel de crescimento, região com células que permitem o alongamento do entrenó; a zona cerosa e finalmente o entrenó [MARTIN, 1961 citado por SALLES SCARPARI & BEAUCLAIR in DINARDO-MIRANDA et al, 2008].

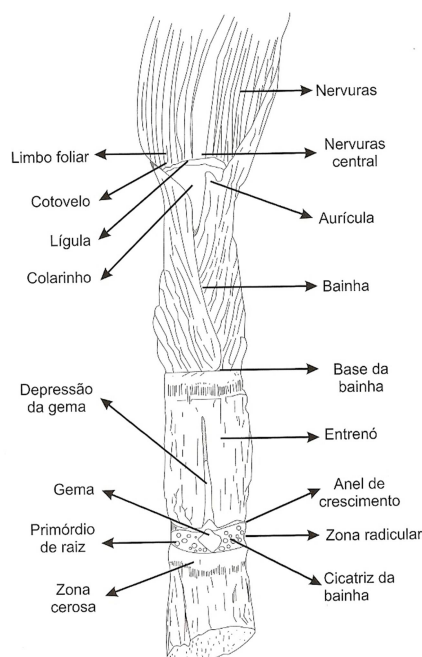


Figura 01. Colmo da cana-de-açúcar.

Fonte: BACCHI, 1983 citado por SALLES SCARPARI & BEAUCLAIR in DINARDO-MIRANDA et al, 2008

À medida que a cana-de-açúcar se desenvolve, as folhas mais velhas se tornam menos ativas e morrem com o tempo, desprendendo-se do colmo e deixando uma cicatriz no colmo denominada de cicatriz da bainha.

Cada nó tem uma gema, disposta alternadamente, protegida pela bainha da folha que é presa firmemente ao internódio. Quando as folhas mais velhas caem (de algumas variedades), deixam uma cicatriz, chamada de cicatriz foliar. Acima da cicatriz foliar, na região da

inserção da gema, encontra-se a zona radicular, que contém os primórdios radiculares, extremamente importantes para a formação do sistema radicular no plantio através de mudas. Abaixo da cicatriz foliar encontra-se a zona cerosa, que tem aumentado o potencial de exploração econômica para fins industriais.

Os colmos apresentam muitas formas, cores e aparências, típicas de cada variedade, muito úteis nas descrições e identificações de cada uma. Os entrenós de um colmo, em sua seção transversal, são alinhados ou em forma de zigue-zague, redondos ou ovais. As formas mais comuns são a cilíndrica, bobinada, tumescente, conoidal, obconoidal e côncava-convexa, conforme observa-se na figura 02. Geralmente, existe uma protuberância ou “ombro” diretamente acima do anel de crescimento no lado oposto do broto, e frequentemente uma constrição afiada na região da zona cerosa.

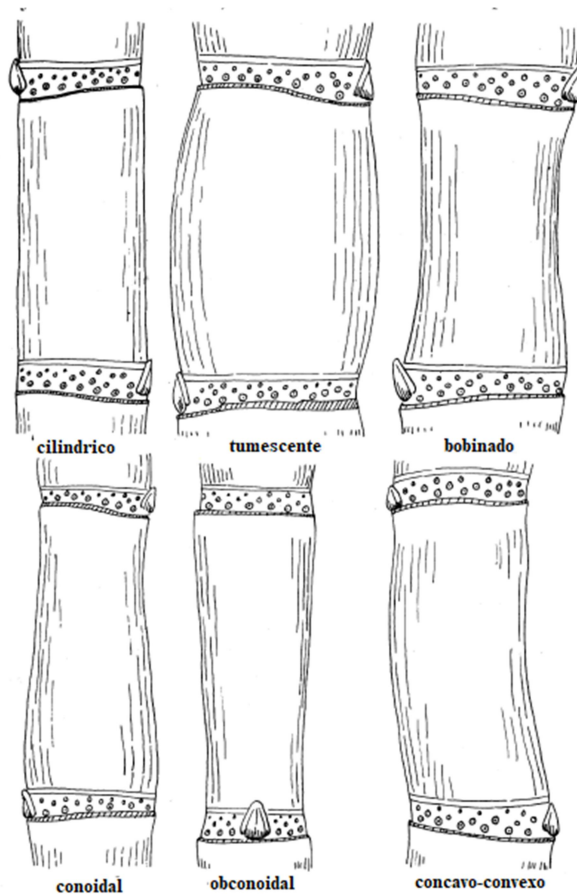


Figura 02. Tipos de internódios.

Fonte: Adaptado de ARTSCHWAGER e BRANDES, 1958

Um corte transversal no colmo vai revelar ao microscópio que a casca é formada por camadas de células lignificadas para proteger os tecidos internos (figura 03).

Na figura 03 podem ser vistos ainda os feixes vasculares, também chamados de “fibras” nas análises tecnológicas, que são praticamente paralelos ao longo dos internódios, mas que se “embaralham” nos nós, de forma a permitir suas diversas ramificações necessárias para dirigirem-se às bainhas e folhas da planta. São os canais de transporte de água e nutrientes entre o sistema radicular e todas as demais partes da planta, afinal, os vasos xilema e floema estão inseridos dentro dos feixes vasculares. O tecido mais macio, envolvendo os feixes, é formado pelas células que armazenam o caldo contendo açúcar. Economicamente, isto torna o colmo a parte mais importante da planta, pois é aqui que se obtém o produto a ser extraído na indústria. O teor de fibra dos colmos varia durante a safra de 9% a 20%, entre as variedades mais macias e utilizadas na alimentação animal e aquelas mais duras e finas, geralmente mais rústicas e resistentes a determinadas condições de cultivo.

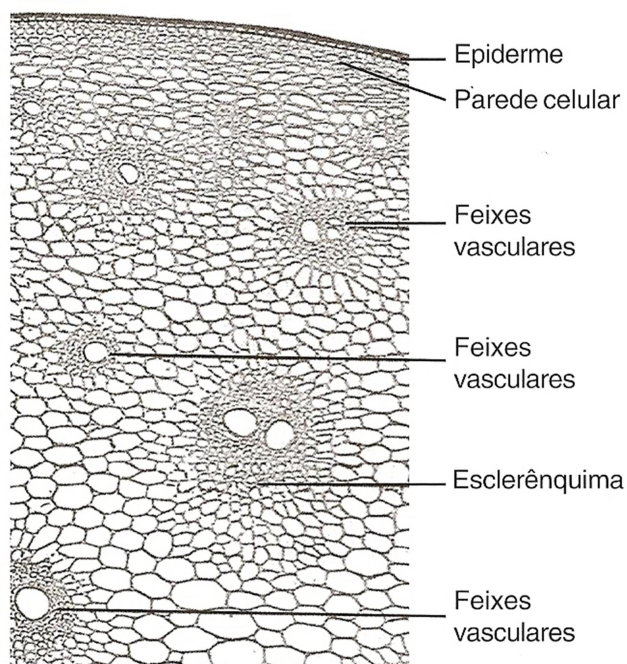


Figura 03. Corte transversal do colmo de cana-de-açúcar.

Fonte: VAN DILLEWJN, 1952

A qualidade da cana-de-açúcar como matéria-prima industrial pode ser definida por uma série de características da própria planta, alteradas pelos manejos agrícolas e industriais, que definem seu potencial para produção de açúcar e álcool.

De maneira geral, a cana é composta, em termos percentuais, de açúcares, fibras e água. Ao aumentar percentualmente um desses componentes, automaticamente diminui-se um ou os outros dois componentes. Sob os aspectos tecnológicos, os colmos são constituídos de

caldo e fibra e na extração do caldo de cana-de-açúcar se obtêm quatro frações: material fibroso (45%), água (49% a 51%), sólidos não solúveis (2 a 3%), sólidos solúveis e extrativos (2 a 3%) (TRIANA et al., 1990 apud AMARAL & TAVARES, 2013).

Segundo VIAN (2019), as características tecnológicas da cana são verificadas na agroindústria pelos seguintes parâmetros de qualidade: POL%, BRIX%, AR%, PZA%, PCC%, FIBRA% e ATR Kg t⁻¹. Estes parâmetros envolvem análises de porcentagem aparente de sacarose (POL%), determinado por polarímetro, aparelho óptico que mede o desvio do feixe de luz polarizada é o principal fator considerado na avaliação da cana-de-açúcar para pagamento, assim como a pureza. Porcentagem de sólidos solúveis (BRIX%), porcentagem aparente de sólidos solúveis contidos em uma solução pura de sacarose, sendo que em cana madura há estreita relação entre seu valor e o conteúdo de sacarose na solução. Porcentagem de açúcares redutores (AR%), utilizado para designar os açúcares glicose e frutose que são produtos precursores de cor no processo industrial de açúcar, isto é, intensificam a cor do açúcar, depreciando sua qualidade. Pureza do caldo (PZA%), essa variável expressa a relação percentual entre POL% e BRIX%, sendo um indicativo da maturação da cana. Porcentagem de açúcar aparente (PCC%), e açúcares totais recuperáveis da cana até o xarope (ATR Kg t⁻¹) conforme metodologia descrita em CONSECANA (2006).

Em se tratando das características tecnológicas concernentes à cana-de-açúcar, um ponto a ser destacado diz respeito ao componente da fibra que juntamente com o conteúdo em água influi diretamente nas propriedades mecânicas do colmo, objeto de estudo deste trabalho. Segundo Cavichioli et al (apud AMARAL & TAVARES, 2013), do ponto de vista tecnológico, a fibra constitui-se no material componente da cana que é insolúvel em água, sendo composto de celulose, hemicelulose, pentosanas, lignina, pectinas, proteínas, compostos fenólicos, dentre outros e cinzas.

O teor de fibra da cana depende da variedade explorada. De maneira geral, para Scarpari & Beauclair (2008), o teor de fibra dos colmos varia durante a safra de 9% a 20%, entre as variedades mais macias e utilizadas na alimentação animal e aquelas mais duras e finas, geralmente mais rústicas e resistentes a determinadas condições de cultivo. Segundo Marques (2001), as canas cultivadas no Brasil possuem em média o teor de 12,5% de fibra, com concentrações variando de 9,0 a 15,0%, ou seja, com elevado grau de dispersão. Outros autores como Ripoli (2004), apresentam valores de 11,0 a 13,0%, similares portanto aos do primeiro autor, mas com menor dispersão. Já Amaral & Tavares (2013) relatam a produção de clones de cana-de-açúcar com teor de fibra superior a 20%, notadamente voltados para o

maior aproveitamento energético, seja na queima direta seja para a obtenção do etanol de segunda geração (celulósico).

Assim, todo o cenário de melhoramento genético foi direcionado, por um lado, para criar variedades ricas em sacarose e que mantivessem a fibra em um nível mínimo necessário no processo de sustentação da planta. Desta forma utilizam-se variedades mais eficientes já em seu melhoramento genético para a alta produção de caldo/ATR - Açúcar Total Recuperável, reduzindo consequentemente o teor final de fibras. Na nova perspectiva da chamada “cana-fibra” (cana com alto teor de fibra), a composição seria justamente o inverso, ou seja, a prioridade seria o máximo de fibra (Maccheroni apud AMARAL & TAVARES, 2013). Sob o ponto de vista industrial o teor de fibra é importante para o balanço energético da indústria, já que as fibras são utilizadas para a queima nas caldeiras gerando o vapor que será transformado em energia elétrica para abastecer a própria usina, bem como para a venda do excedente (LAVANHOLI, 2008). Já para a produção de etanol e açúcar o aumento da fibra é indesejável, pois diminui sua produção.

2.3 Bases da Teoria da Elasticidade

2.3.1 Hipóteses da Mecânica dos Meios Contínuos

Investigações realizadas para se caracterizar um material atípico como é o caso do material biológico- em que entra a cana-de-açúcar-encontram no campo da Mecânica dos Meios contínuos um caminho promissor justamente em virtude de o tecido vegetal, tomado como uma entidade mecânica dentro de um contexto biológico, exibir um comportamento específico.

Com efeito, os ensaios mecânicos empreendidos para se determinar o comportamento do tecido vegetal se enquadram como ensaios de impacto, compressão ou tração e são realizados em espécimes cilíndricos com cargas uniaxiais, triaxiais e diametrais, ou ainda, em ensaios em espécimes cúbicos envolvendo cargas biaxiais e triaxiais, e, espécimes esféricos com cargas diametrais, conforme se desenham as condições experimentais.

Nesse contexto em que é preciso ensaiar corpos de prova, faz-se também necessário ter em vista o limite elástico, ou também o limite viscoelástico de um corpo de prova determinado pelo seu estado de tensão e por suas propriedades materiais constitutivas. Além desse limite, o material pode sofrer deformações permanentes ou mesmo se romper por fratura. Nesse caso, é de comum acordo que os materiais vegetativos têm o ponto de ruptura próximo ao limite elástico, sem experimentar qualquer deformação plástica (Mohsenin, 1970).

No caso deste trabalho, faz-se necessário apresentar os conceitos clássicos de Mecânica dos Meios contínuos de modo que esta revisão da literatura esteja atrelada a um exame dos aspectos não somente ligados à elasticidade, mas também à viscoelasticidade.

Um material é dito contínuo quando se assume que a distribuição da matéria constituinte desse material se dá de forma contínua em todo seu volume, ocupando todos os espaços vazios, conceito esse preconizado pela mecânica dos meios contínuos como um postulado básico, o qual, porém na realidade não ocorre. Já um material dito homogêneo possui propriedades idênticas em todos os “pontos”, e, denominados isotrópicos, quando suas propriedades se mantêm em todas as direções, e, anisotrópicos quando suas propriedades variam com a direção, segundo MASE (1970).

O conceito de elasticidade:

A elasticidade, tomada como propriedade de um material, pode ser explicada pela capacidade de um corpo que submetido a uma dada força externa retornar à sua forma inicial completamente após a remoção das forças. Compreendendo a elasticidade como teoria, é importante frisar que esse campo estuda as tensões, deformações e deslocamentos de um corpo, considerado elástico, causadas pela ação de forças externas (Timoshenko & Goodier, 1970).

Retomando o que foi dito, vale frisar que um material é dito *contínuo* quando possui uma constituição homogênea (ou contínua) de matéria em todo seu volume. Dependendo da direção, algumas propriedades podem manter-se as mesmas em todos os pontos. Nesse caso, o material é denominado isotrópico. Por outro lado, quando suas propriedades variam com a direção, o material é denominado anisotrópico, conforme MASE (1970). Já se ocorrer tensão num ponto qualquer de um meio assim idealizado, isso gera uma deformação específica, ou vice-versa.

Alguns princípios fundamentais podem ser sintetizados conforme o esquema abaixo:

- (i) A matéria de um corpo elástico é distribuída continuamente ao longo de seu volume, assim como as tensões, deformações e deslocamentos também são contínuos;
- (ii) a matéria é homogênea, de modo que o menor elemento extraído do corpo possui as mesmas propriedades físicas que o todo;
- (iii) as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções, isto é, o corpo é isotrópico;

2.3.2 A Tensão:

Tomando-se por base a atuação de forças sobre um dado corpo, inicialmente, é preciso considerar suas pequenas partículas ou moléculas constituintes, em meio às quais, estão atuando forças. Estas forças moleculares opõem-se à atuação de forças externas. Porém, com a atuação dessas forças externas, suas partículas deslocam-se e os deslocamentos mútuos continuam até que o equilíbrio entre as forças exteriores e interiores seja estabelecido (Laurenti, 1997).

De acordo com Collins, 2006 p.142), “tensão é o termo utilizado para definir a intensidade, direção e sentido de forças internas que agem em qualquer plano de corte que

atravessa o corpo sólido de interesse”. Se o propósito é o de definir um estado de tensões num determinado ponto de um corpo sólido, mostra-se necessário descrever a intensidade, direção e sentido de vetores de tensão em todos os planos possíveis que possam passar pelo ponto. Ainda, segundo Collins, uma maneira de definir o estado de tensões em um ponto é determinar todas as componentes de tensão que podem ocorrer sobre as faces de um cubo infinitesimal de material posicionado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas.

De acordo com Durelli (1967), na *análise experimental de tensões*, a tensão e a deformação específica, por representarem conceitos matemáticos não podem ser medidas fisicamente, sendo então determinados, por meio de equações constitutivas do material, a partir do deslocamento que pode ser medido diretamente. Sendo assim, a tensão resultado de um processo limite, referindo-se a um ponto matemático cuja componente cartesiana na direção \mathbf{x} , da tensão resultante atuando sobre um plano normal \mathbf{n} , é definida:

$$\sigma_{nx} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad (2.3.1)$$

onde ΔF_x é a componente na direção \mathbf{x} da força atuando sobre um elemento de superfície ΔA .

Uma vez que o corpo deformável carregado é assumido como contínuo, as forças internas que surgem como efeito de forças externas são distribuídas de forma contínua dentro do volume do corpo e o corpo sofre, por consequência, uma deformação contínua.

Além disso, as tensões sobre um volume infinitesimal de um corpo podem ser organizadas em uma matriz simétrica, visto que há equilíbrio de momentos. Utilizando-se notação indicial, pode-se escrever cada tensão como σ_{ij} , onde i representa a coordenada normal ao plano em que a tensão se encontra e j é a direção do componente do vetor tensão. Essa matriz é denominada de tensor de tensões de Cauchy e é representada pelo símbolo $\boldsymbol{\sigma}$.

O tensor *stress* (tensão), denotado por $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ é equacionado como $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}/\mathbf{A}$, onde \mathbf{F} é força e \mathbf{A} é a área na qual essa força atua, é definido em três dimensões como:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

Cada componente de tensão pode ser classificado como: (i) tensão normal, (σ) - definida como a intensidade da força que atua no sentido perpendicular a ΔA por unidade de

área; (ii) tensão de cisalhamento, (τ), que, por sua vez, é designada como a intensidade da força, ou força por unidade de área, que atua tangente a ΔA .

Desse modo, pode-se dizer que esforços normais (axiais) em barras estão associados ao desenvolvimento de tensões normais. O termo normal refere-se tanto ao esforço axial quanta à tensão a ele associada que são perpendiculares (normais) à seção transversal da barra. A força axial pura F é aplicada a um membro de modo que a tensão é distribuída uniformemente sobre a área. Assim, tem-se que a tensão normal associada é obtida pela divisão $\sigma = N / A$, sendo N o esforço normal na barra e A a área da seção transversal.

2.3.3 A deformação:

Entende-se por deformação de um corpo elástico como a mudança da configuração espacial (comprimento e forma) ao longo da variação do tempo de um corpo em relação a um referencial, mediante esforços e tensões externos aplicados a este objeto.

Supondo-se haver continuidade antes e depois da deformação, pode-se afirmar que existem duas funções contínuas $u(x, y)$ e $v(x, y)$ que descrevem os movimentos dos pontos da estrutura no caso plano e, para um caso tridimensional, o vetor de deslocamento de cada partícula do corpo deformado apresenta as três componentes definidas como u, v, w paralelos aos eixos de coordenadas x, y, z , respectivamente. O alongamento ou encurtamento de um corpo por unidade de comprimento é chamado de deformação linear (ϵ) ou alongamento unitário (Popov, 1978).

O tensor *strain* (deformação específica), denotado por ϵ_{ij} e equacionado como $\epsilon = (l_0 - l)/l_0$. Nesse caso, todos os componentes de deformação podem ser escritos na forma de uma matriz denominada tensor de deformações- representado por ϵ_{ij} - envolvendo todos os componentes normais e de cisalhamento do tensor de deformação cuja representação segue abaixo:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

Considerando a deformação de um corpo elástico, esse processo pode ser definido como a variação de comprimento e forma em certa direção. Se considerar u como a variação de comprimento e dividir pelo comprimento inicial, obtém-se a deformação linear média. Em

um elemento infinitesimal, a deformação é definida como a variação de comprimento u por unidade de comprimento.

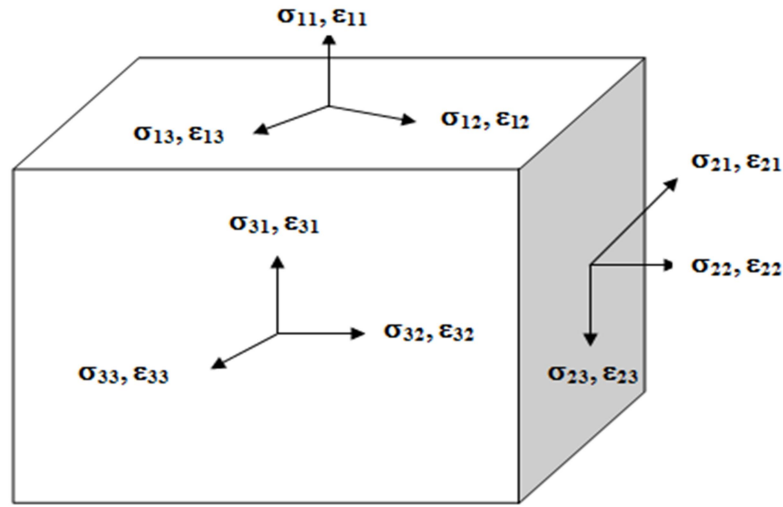


Figura 04. Representação tridimensional dos tensores tensão e deformação específica.

Fonte: Dal Fabbro

Quando $i = j$, isso quer dizer que a deformação específica e a tensão são normais, ou seja, representa um vetor perpendicular à superfície onde está aplicado o tensor. Se $i \neq j$, isso quer dizer que a tensão e deformação específica se apresentam como cisalhamento. Deve ser enfatizado ainda que σ_{ij} e ϵ_{ij} são tensores totais os quais podem ser subdivididos entre seus componentes *hidrostáticos* ou *esféricos* (σ_h e ϵ_h), associados às variações volumétricas, ao passo que os componentes *deviatórios* (σ_d e ϵ_d) estão associados as variações de forma geométrica, e também são responsáveis pela ruptura do material (Prager, 1959). Então, tem-se que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_h + \sigma_d \quad \text{e} \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_h + \epsilon_d \quad (2.3.4)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3} + S_{ij} \quad (2.3.5)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\delta_{ij}\epsilon_{kk}}{3} + e_{ij} \quad (2.3.6)$$

Onde o tensor δ_{ij} é denominado delta de Kronecker o qual assume, por convenção, os seguintes valores:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j \text{ e } \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

Note-se também que

$$\sigma_h = \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3} \quad , \quad \sigma_d = S_{ij} \quad , \quad \varepsilon_h = \frac{\delta_{ij}\varepsilon_{kk}}{3} \quad , \quad \varepsilon_d = e_{ij}$$

2.3.4 Teoria da Elasticidade Linear ou Lei de Hooke Generalizada

Uma característica importante na elasticidade é a capacidade que um material tem de armazenar energia mecânica ao ser deformado por um carregamento e liberar essa energia logo após o carregamento ser removido. Dito de outro modo, quando um corpo de prova de um material durante um ensaio é descarregado, a deformação sofrida durante o carregamento pode desaparecer parcial ou totalmente. A propriedade do material, em meio à qual ele tende a retornar à forma original, é denominada elasticidade. Quando um material, por exemplo, volta totalmente à forma original, esse é perfeitamente elástico, mas se não retornar ela é parcialmente elástico e a deformação que fica é a deformação permanente.

Tal relação linear da função tensão-deformação foi apresentada por Robert Hooke em 1678 e é conhecida por Lei de Hooke.

De acordo com MASE (1970) e CHRISTENSEN (1982), os materiais viscoelásticos incluem o parâmetro tempo na relação tensão-deformação, dependendo da taxa de aplicação da carga e/ou da taxa de deformação. Assim sendo, prever as respostas mecânicas do tecido vegetativo face uma carga ou deformação imposta requer que busquemos compreender as leis que regem o comportamento mecânico do tecido vegetal.

O comportamento não linear da estrutura de um material, sob uma ação, pode ser classificado de acordo com seus efeitos. Nesse caso, destacam-se:

- (i) Não-linearidade Física: Decorrente do fato de o material não apresentar uma relação tensão-deformação linear (não segue a lei de Hooke), isto é, o comportamento do material não é elástico linear. Os efeitos não lineares são descritos por formas mais complexas de equações constitutivas (matrizes constitutivas não-lineares e/ou equações constitutivas em termos de “taxas” ou “incrementos”). Pode-se ter também não linearidade física nas relações momento-rotação de conexões semirígidas ou flexíveis, ou de rótulas inelásticas oriundas de mecanismos de colapso localizados (flambagem, plastificação ou fissuração localizadas em componentes estruturais).

- (ii) Não-Linearidade Geométrica: Decorrente do fato de uma estrutura apresentar um comportamento não-linear, ainda que constituída de um material que obedeça à lei de Hooke. A esse tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Neste caso os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento. Nesse segundo tipo, a não linearidade ocorre devido à geometria do material de modo que a compressão diametral de uma esfera é interpretada pela Equação de Hertz, de um lado e, de outro, a compressão diametral de um espécime cilíndrico é equacionada por Lobo-Carneiro (Sherif, 1976) também conhecido como ***Brazilian Test***, bastante popular em engenharia civil. Na viscoelasticidade, a linearidade e a não linearidade também podem existir, porém os tensores tensão e deformação específica se relacionam com o tempo, o que não ocorria na elasticidade.

Levando em consideração que, em materiais com comportamento elástico linear, a deformação do corpo se relaciona diretamente com as tensões atuantes no corpo (Hibbeler, 2004), é pertinente comentar sobre a lei de Hooke que relaciona o tensor de tensões de Cauchy e o tensor de deformações.

Pode-se dizer que, nesse caso, tendo em vista um material homogêneo e isotrópico, a lei de Hooke pode ser escrita de forma generalizada, estabelecendo, para tanto, uma relação linear elástica entre os estados de tensão e deformação.

Desse modo, a noção de elasticidade linear preconiza que os deslocamentos e gradientes de deslocamento são suficientemente pequenos, não havendo distinção entre a descrição de Lagrange e de Euler. Sendo assim, para o vetor deslocamento U_i , tem-se que:

$$l_{ij} = \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right] = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \quad (2.3.7)$$

Onde l_{ij} e ϵ_{ij} são, respectivamente tensores *strain* de Euler e de Lagrange.:

A equação constitutiva para um sólido elástico linear, designada como a Lei de Hooke Generalizada, associa os tensores *stress* e *strain* com as constantes elásticas pode ser descrita como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.3.8)$$

Desse modo, a Lei de Hooke estabelece um relacionamento linear entre os tensores tensão (*stress*) e deformação específica (*strain*), envolvendo as 81 componentes do tensor C_{ijkl} de constantes elásticas. Entretanto, por considerações de simetria de ambos os tensores tensão e deformação específica, existem no máximo 36 constantes elásticas distintas, que num sistema indexado simples são representadas pelos coeficientes de C_{KM} . Assim, a Lei de Hooke assume a forma:

$$\sigma_K = C_{KM} \varepsilon_M \quad (K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (2.3.9)$$

Levando-se em conta que num sólido Hookeano as propriedades elásticas são expressas através dos coeficientes de C_{KM} , onde se desprezam os efeitos térmicos, um corpo anisotrópico geral terá uma matriz de constantes elásticas expressa por:

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

Consequentemente por implicações de simetria, $C_{KM} = C_{MK}$, o número de constantes elásticas independentes atinge no máximo 21 se existir uma função de energia de deformação específica para o corpo.

Considerando existência de plano de simetria elástico, a matriz elástica para um material tendo x_1x_2 como um plano de simetria é:

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Quando uma função de energia de deformação existe, as 20 constantes em (2.3.11) reduzem-se a um número de 13.

Para um material *ortotrópico*, isto é, que possui três planos mutuamente perpendiculares de simetria elástica, sua matriz elástica é escrita na forma (2.3.12). Este material possui 12 constantes independentes, ou 9 se $C_{KM} = C_{MK}$.

$$[C_{KM}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

Para corpos isotrópicos, isto é, nos quais são elasticamente equivalentes em todas as direções possuindo simetria completa, as constantes elásticas independentes reduzem-se ao número de 2, as chamadas constantes de Lamé, λ e μ . Segundo MASE (1970), tomando-se estas constantes tem-se que para um corpo isotrópico contínuo e homogêneo a expressão tensorial da Lei de Hooke Generalizada assume a da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3.13)$$

Para expressar **deformação específica** em termos de **tensão**, inverte-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.3.14)$$

Considerando um estado de tensão uniaxial simples numa direção específica x_1 , por exemplo, as relações elásticas, $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ e $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$ são válidas. Aqui, as constantes de engenharia E e ν , substituem as constantes de Lamé e denotam respectivamente módulo de elasticidade ou módulo de Young e módulo de Poisson. Para corpos isotrópicos, a Lei de Hooke em termos de E e ν é escrita:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (2.3.15)$$

para o cálculo das tensões (*stress*), e

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.3.16)$$

para o cálculo das deformações relativas (*strain*). Além disso, deve-se lembrar de que σ_{ij} assume os valores designados pelos índices **i** e **j** ($i,j = 1,2,3$), os quais prescrevem a dimensão do tensor, neste caso, um tensor cartesiano.

Utilizando a notação vetorial num sistema de coordenadas cartesianas x-y-z podemos elencar essas relações tensão-deformação elásticas da Lei de Hooke como seguem:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2.3.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (2.3.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.3.19)$$

e

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.3.20)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.3.21)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.3.22)$$

Com a inversão destas relações da Lei de Hooke , obtém-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu-2\nu^2)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \quad (2.3.23)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu-2\nu^2)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)] \quad (2.3.24)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1-\nu-2\nu^2)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \quad (2.3.25)$$

Outras duas constantes, **K**, o módulo volumétrico (*bulk modulus*) e **G** o módulo de cisalhamento ou elasticidade transversal, são descritas em função de **E** e **ν**, considerando

respectivamente os estados de tensão de pressão hidrostática constante e de cisalhamento puro. Assim, os módulos **K** e **G** são expressos, respectivamente por:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.3.26)$$

e

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3.27)$$

A determinação das quatro constantes elásticas **E**, **ν**, **G**, **K**, leva à caracterização de material cujo comportamento é considerado contínuo, homogêneo, isotrópico e elástico. Consequentemente, a Lei de Hooke pode ser resumida numa função generalizante envolvendo estas constantes:

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij}, E, \nu, G, K) \quad (2.3.28)$$

Com efeito, a determinação dessas constantes elásticas é um esforço freqüente devido à necessidade de informações básicas sobre as propriedades do material. Exemplos de ensaios mecânicos para se determinar essas constantes em tecidos vegetais seriam, à guisa de exemplo, ensaios de impacto, de compressão ou de tração. Nessas condições, a constante de Poisson também pode ser determinada, comparando-se a carga e as deformações axiais em espécimes vegetais cilíndricos e restringidos. Poisson demonstrou isso, expressando o coeficiente **ν** definido como a razão entre a deformação transversal e a deformação axial (SHIGLEY,1972). Dentro de certos limites de deformação, o coeficiente de Poisson possui valor constante. A maioria dos materiais possui **ν** entre 0,25 e 0,35. Teoricamente, $0 \leq \nu \leq 0,5$.

O coeficiente de Poisson, **ν**, pode, por sua vez, ser determinado experimentalmente impondo-se as condições $\sigma_{11} \neq 0$, $\epsilon_{11} \neq 0$, $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} \neq 0$ à Lei de Hooke Generalizada, o que resulta em:

$$\sigma_{11} = M\epsilon_{11} \quad (2.3.29)$$

Ademais, é possível relacionar tensão, deformação específica e essas constantes a partir da Lei de Hertz, Lei de Boussinesq, Equações de Lobo Carneiro ou *Brazilian Test* ou, ainda, por meio de outros relacionamentos elásticos lineares e não lineares.

2.3.5 Estados de Tensões e Deformações

De acordo com Collins (2006), em termos de dimensionamento, tensão, deformação e energia de deformação por unidade de volume são os parâmetros de severidade de carregamento mais úteis utilizados na avaliação do comportamento do material quanto à falha. A tensão é escolhida geralmente para os cálculos, haja vista que deformação e energia de deformação podem ser relacionados à primeira por equações do comportamento mecânico do material, entre estas destacamentos as da elasticidade linear.

Para definir completamente o *estado de tensões* em qualquer ponto selecionado do corpo sólido, é necessário descrever intensidade, direção e sentido de vetores de tensão em todos os planos possíveis que possam passar pelo ponto. Podemos definir o estado de tensões em um ponto determinando todas as componentes de tensão que possam ocorrer sobre as faces de um cubo infinitesimal de material posicionado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas de acordo com a regra da mão direita de orientação conhecida. Cada um destes componentes de tensão pode ser classificado tanto como uma *tensão normal*, σ , normal a uma face do cubo, quanto uma *tensão de cisalhamento*, τ , paralela à face do cubo. A figura 6 mostra todas as possíveis componentes de tensões que agem em um elemento cúbico de volume infinitesimal de dimensões dx - dy - dz , representativo de um ponto. O volume elementar mostrado na figura 05, com os componentes de tensão em todas as três direções coordenadas, define um *estado de tensões triaxial* geral no ponto.

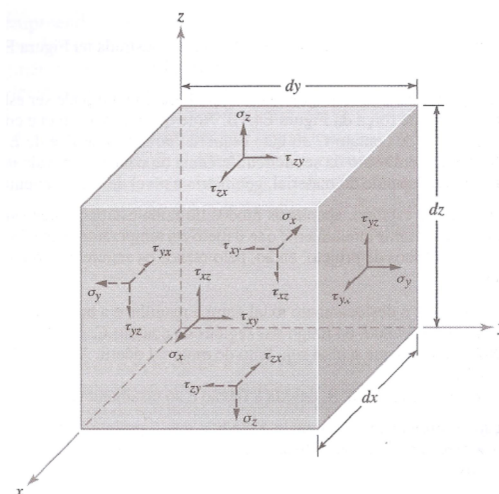


Figura 05. Definição completa do estado de tensões em um ponto.

Fonte: COLLINS (2006)

Para definir completamente um estado triaxial de tensões em um ponto são necessárias, aparentemente, um total de nove componentes: três tensões normais (σ_x , σ_y , σ_z) e seis tensões cisalhantes (τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz}). Entretanto, para materiais isotrópicos, baseando-se no equilíbrio de momentos implica em simetria de tensões cisalhantes, de tal modo que a definição completa do estado de tensões mais geral em um ponto necessita da especificação de apenas seis componentes de tensão, três tensões *normais*, σ_x , σ_y , σ_z e três tensões cisalhantes (τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx}).

Se as forças que atuam em um corpo resultam em um elemento de volume no ponto de investigação com componentes de tensões em apenas duas direções coordenadas, é referida como *estado de tensões biaxial* (tensão plana) no ponto. Se existem componentes de tensão em apenas uma direção coordenadas, isto é chamado de *estado uniaxial de tensões* no ponto.

O estado de tensões mais complexo que pode ser produzido em um pequeno volume elementar de material no ponto crítico é o estado de tensões triaxial. Com a utilização da *equação cúbica de tensão geral* em função das componentes de tensão σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx} , as tensões normais principais e as tensões de cisalhamento principais podem ser determinadas, conforme especificados nas equações (2.3.27 a 2.3.30). Se o caso é biaxial uma das tensões principais será nula e se ele é uniaxial, duas tensões principais serão nulas.

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (2.3.30)$$

$$|\tau_1| = \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right| \quad (2.3.31)$$

$$|\tau_2| = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| \quad (2.3.32)$$

$$|\tau_3| = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \quad (2.3.33)$$

Na maioria dos problemas práticos, as tensões se dão somente em um plano. É o caso de uma placa fina solicitada por um sistema de forças no próprio plano médio. Essa configuração de tensões ou estado de tensão e deformação na chapa pode ser considerado plano de tensão (*plane stress*), como mostrado na figura 06. Neste caso, somente as dimensões do plano da chapa são necessárias para as análises, isto é, a espessura do

componente é relativamente fina comparando com outras dimensões, e a força é uniformemente distribuída ao longo da espessura.

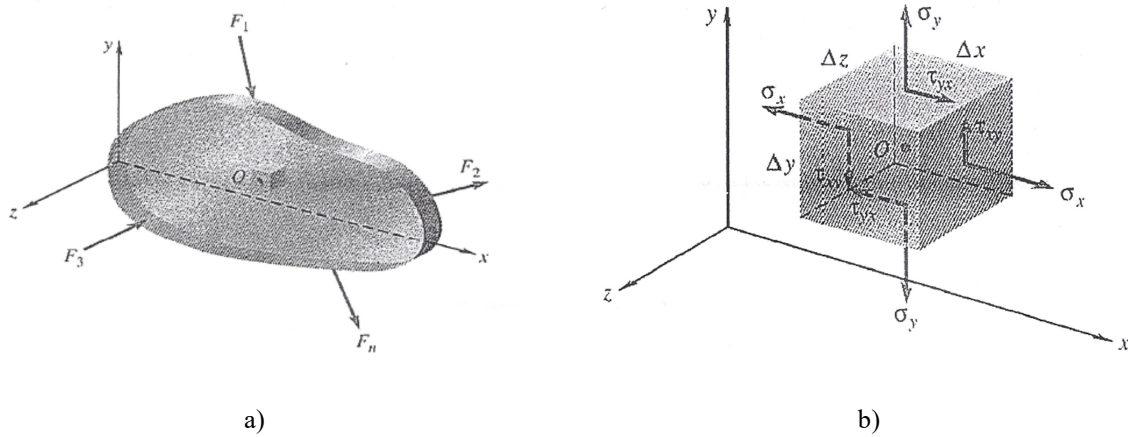


Figura 06. Estado plano de tensões: a) Placa fina b) Configuração geral de tensões

Se as componentes de tensão estão contidas somente no plano xy, isto é, para estados de tensões biaxiais, a equação cúbica da tensão (2.3.30) degenera para a forma:

$$\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \quad (2.3.34)$$

As soluções para tensões principais em (2.4.34) são:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.3.35)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.3.36)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.3.37)$$

De forma análoga ao estado de tensões, o estado de deformações em um ponto pode ser completamente definido por seis componentes de deformação relativa a qualquer sistema de coordenadas x-y-z selecionado: três componentes de deformação normal, ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , e três componentes de deformação de cisalhamento, γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} . Assim, como o estado de tensões pode ser completamente definido em termos das três tensões principais e suas direções, o estado de deformação pode ser completamente definido em termos de três

deformações principais e suas direções. A partir da equação (2.3.38), denominada equação cúbica da deformação geral, pode-se determinar as deformações principais, analogamente ao ocorrido com a equação cúbica da tensão geral (2.3.30).

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \varepsilon \left[\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2) \right] - \left[\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) \right] = 0 \quad (2.3.38)$$

As três soluções de (2.3.37) são as três deformações normais principais ε_1 , ε_2 e ε_3 .

Por outro lado, podem ocorrer deformações em um plano, não havendo deformações normais a este plano. Este problema é identificado como plano de deformações (*plane strain*). Os estados axissimétricos correspondem a situações que podem ser consideradas como bidimensionais, para efeitos de análise, pois as variáveis de interesse são funções apenas de duas coordenadas, radial e axial. Nesse caso, entende-se que o carregamento aplicado está distribuído de forma uniforme ao longo do eixo z do corpo e que a seção inteira tem a mesma condição. Portanto, nos casos como, por exemplo, de um cilindro longo (Figura 08), considera-se deformação ao longo do eixo z igual a zero. As deformações principais e as suas direções podem ser encontradas utilizando-se do extensômetro elétrico e outros processos da análise experimental de tensões para obter as soluções biaxiais da equação cúbica da deformação (2.3.38).

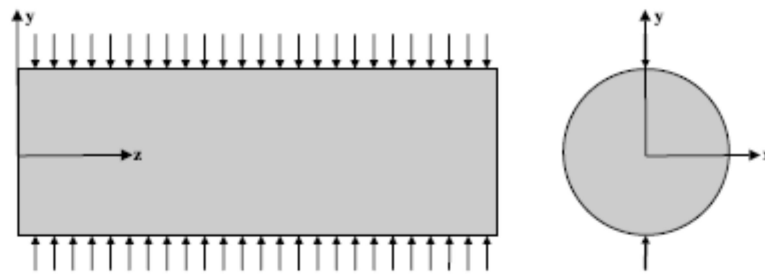


Figura 07. Cilindro longo sujeito a um carregamento uniforme ao longo do comprimento.

Assim, analisando uma fatia do corpo ao longo do eixo z, verificamos que os componentes u e v de deslocamento são funções de x e y, sendo independentes da coordenada z. Uma vez que o deslocamento w é zero, obtém-se:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{zz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Para um material elástico-linear, no estado plano de tensões, as relações constitutivas tensão-deformação tornam-se:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}] \quad (2.3.40)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} [\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}] \quad (2.3.41)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.3.42)$$

Invertendo as expressões (2.3.40) a (2.3.42) e escrevendo-as em notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3.43)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.3.44)$$

Notando que no estado plano de tensão não há tensões no plano z ($\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), mas há deformação no plano normal devido ao efeito Poisson ($\varepsilon_{zz} \neq 0$).

No estado plano de deformação, são as seguintes equações constitutivas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3.45)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (2.3.46)$$

Notando que no estado plano de deformação não há deformações no plano z ($\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), mas há tensão no plano normal ($\sigma_{zz} \neq 0$).

2.3.6 – Tensões de Contato

Nesta seção apresentam-se os desenvolvimentos relativos à formulação dos problemas de tensões de contato entre dois corpos. Num primeiro momento discorre-se sobre a teoria de Hertz e aplicação no caso genérico para pressão entre dois corpos em contato. A seguir, a conceituação de Hertz no regime elástico é estendida para casos específicos: esfera comprimida entre duas placas planas lisas e paralelas, cilindros de comprimento l em contato, esferas em contato, cilindro comprimido entre duas placas planas lisas e paralelas. Para avaliação de tensões de contato entre material vegetativo e máquinas e ou em armazenagem e transporte apresenta-se o conceito de “*Firmness*” e sua consequente normalização pela ASAE STANDARDS. Além das tensões de contato, deformações e geometria da região de contato, as formulações nesta área permitem a caracterização do comportamento material através dos módulos de elasticidade e dos coeficientes de Poisson. Assim, para avaliação do problema de contato em materiais vegetativos de geometria definida, aplicáveis na relação máquina-planta, na armazenagem e transporte, entre outros, destacamos os trabalhos de Sherif (1976) e a metodologia “*Firmness*” da ASAE STANDARDS (1989), descrita por Mohsenin e Morrow (1971). Por fim, apresentamos o ensaio de Lobo-Carneiro ou *Brazilian Test* utilizado para avaliar o problema de contato de um cilindro entre placas paralelas, de comportamento não linear geométrico, permitindo a obtenção do módulo de elasticidade do cilindro.

2.3.6.1 – Descrição geral do problema de contato.

O contato mecânico entre dois corpos, no que toca aos problemas de engenharia, além de ser tema de grande importância tecnológica, exige por parte do pesquisador o cálculo de tensões e deformações dos componentes de um corpo sólido que se tocam, sobretudo na presença de atrito. Representantes de estudos nessa área seriam Johnson (1987) e Popov (2010).

Tendo como propósito estudar a pressão e a adesão atuando nos corpos na direção perpendicular à superfície e as forças tangenciais de superfície gerada pelo atrito entre os componentes, um primeiro passo nesse campo refere-se a uma caracterização do tipo de contato e o conhecimento da categoria no qual se enquadra. Assim, para além da classificação usual de contato com a presença ou não do atrito, Shaterzadeh-Yazdi (2015) apresenta a classificação de contato com base em considerações geométricas, ilustrada na figura 08:

- (i) Contato incompleto e não conforme (Figura 08 (a)): é o contato de um cilindro levemente pressionado em um semi-plano elástico, onde a superfície de contato não é conhecida a priori e depende da força aplicada. No primeiro instante, os corpos se tocam ao longo de uma linha e conforme se aumenta a carga aplicada, a superfície de contato aumenta. A aproximação para o semi-espaço é válida para calcular tensões e deformações uma vez que a meia-largura do contato, conhecido como **b**, é muito menor que o raio, **R**, do cilindro ($b \ll R$);
- (ii) Contato completo (Figura 08 (b)): contato entre um bloco retangular com um semi-espaço elástico em que o tamanho da região de contato não depende da carga aplicada. No contato completo, as bordas do componente não são contínuas e por isso a pressão nas bordas é singular;
- (iii) Contato incompleto com singularidade (Figura 08 (c)): o componente tem uma borda abrupta e uma borda com curvatura suave. Nesse caso, a pressão é singular na borda abrupta e na outra borda tende para zero gradualmente. Além disso, o tamanho da região de contato depende da carga aplicada;
- (iv) Contato incompleto e conforme (Figura 08 (d)): um cilindro é pressionado contra um furo com diâmetro um pouco maior que diâmetro do cilindro. Como a largura do contato é uma fração considerável do raio do cilindro, o furo não pode ser mais aproximado por um semi-plano. Para resolver este tipo de problema, deve-se usar formulação apropriada para disco e um plano infinito contendo o furo que se torna um caso mais complexo.

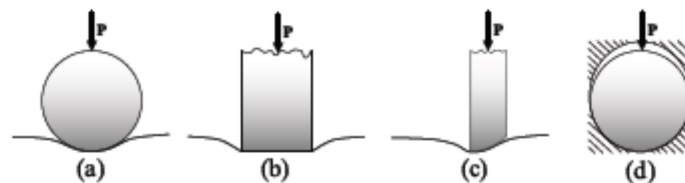


Figura 08. Caracterização de contatos: (a) Incompleto e não conforme; (b) Completo; (c) Incompleto com singularidade; (d) Incompleto e conforme.

(Fonte: SHATERZADEH-YAZDI, 2015)

Tendo em vista especificamente o comportamento de corpos elásticos, um primeiro modelo que merece destaque foi elaborado por Hertz, em 1882, para analisar o problema da distribuição de pressões entre dois corpos em contato (campo de estudo da axissimetria não-

torcional em tensões e deformações). Hertz empreendeu um estudo sobre as franjas de interferência óptica de Newton no espaço entre duas lentes de vidro e se inquietou com a influência da deformação elástica nas superfícies devido à pressão de contato entre elas (JOHNSON, 1985). Hertz considerou a hipótese de que a área de contato é, em geral, elíptica e que o contato fosse sem atrito. Quando não existe deslizamento relativo entre as superfícies por ocasião do contato, o problema se modifica, a menos que as duas esferas sejam exatamente similares. Uma solução quando não ocorre deslizamento, para esferas desiguais, foi apresentado por L. E. Goodman (1962).

Segundo NORDEN (1973), VELEZ PASOS (1987), SHATERZADEH-YAZDI (2015), Hertz, em 1881, faz algumas suposições para a aplicação de sua teoria no problema de contato tridimensional geral:

- ✓ As superfícies de contato dos corpos são perfeitamente lisas de tal maneira que seu formato real pode ser descrito por uma equação de segundo grau do tipo $z = Dx^2 + Ey^2 + F_{xy}$.
- ✓ Os limites elásticos dos materiais não são excedidos durante o contato. Se isto ocorrer, então o material apresenta deformação permanente. A lei de Hooke é então aplicável. Com níveis muito baixos de carga esta condição pode ser tomada como certa. A deformação é pequena (não é aplicável para materiais com módulo de elasticidade baixo);
- ✓ Os dois corpos em teste devem ser isotrópicos. O material dos corpos em contato é homogêneo, restrição difícil de ser mantida. Porém assumindo “*a random in-homogeneity*” para o corpo em teste, este é considerado com o comportamento mecânico de um corpo homogêneo.
- ✓ São consideradas apenas forças que atuam na direção normal as superfícies de contato. Isto significa que com superfícies polidas assume-se não haver forças de atrito ($q_x = q_y = 0$) dentro da área de contato, as forças tangenciais são eliminadas.
- ✓ As superfícies de contato são pequenas em comparação com as superfícies completas. Dito de outra forma, as superfícies são contínuas e não conformes ($b \ll R$), isto é, os raios de curvatura dos sólidos em contato são muito grandes se comparados com o raio da superfície de contato. Hertz considerou uma relação 1/10 suficientemente grande para a aplicação de sua equação.
- ✓ As cargas aplicadas são estáticas.

- ✓ As tensões de contato desaparecem na parte oposta ao contato. É possível cumprir esta condição quando são conhecidos alguns parâmetros.

Baseado nas hipóteses acima e pela aplicação da teoria potencial, Hertz mostrou que:

- 1) a área de contato é limitada por uma elipse cujos semi-eixos podem ser calculados dos parâmetros geométricos dos corpos em contato.
- 2) a distribuição de pressão normal (Figura 09) sobre esta área é:

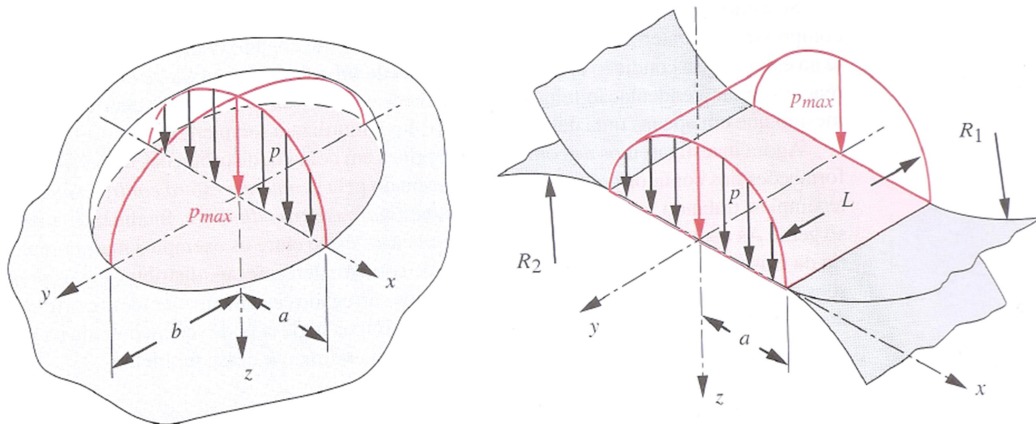
$$P_0[1 - (x/a)^2 - (y/b)^2]^{1/2}$$

onde:

P_0 = pressão máxima no centro;

a = eixo maior da elipse de contato;

b = eixo menor da elipse.



(a) Distribuição de pressão elipsoidal no contato geral – para contato esférico $a = b$

(b) Distribuição de pressão elipsoidal prismática no contato cilíndrico

Figura 09. Distribuição de pressão e zonas de contato de Hertz esférico, cilíndrico e geral.

(Fonte: NORTON, 2004)

Grosso modo, podemos sintetizar que no modelo de Hertz cada corpo pode ser considerado um semi – plano elástico ($b \ll R$), carregado sobre uma pequena região elíptica de sua superfície plana e continua ($b \ll R$), sem atrito entre as superfícies ($q_x = q_y = 0$), tendo em vista que a dimensão significativa da área de contato quando comparada à dimensão de cada corpo e ao raio de curvatura relativo das superfícies deve ser pequena (JOHNSON, 1985).

Dessa forma, sendo os corpos em contato elasticamente similares, os pontos relativos dos dois corpos sofrerão o mesmo deslocamento e não haverá tendência de escorregamento relativo.

Já se houver forças tangenciais suficientes para causar escorregamento, forças de superfícies limitadas ao coeficiente de atrito surgirão. A relação entre forças tangenciais e forças normais é apresentada na Equação:

$$|q(x, y)| = -\mu p(x, y) \quad (2.3.47)$$

onde q é tensão cisalhante, p é pressão normal ($p < 0$) e μ é a coeficiente de atrito. Uma vez que os corpos têm propriedades similares, os deslocamentos normais dos corpos são iguais e a distribuição de pressão não se altera. Vale ressaltar que as tensões cisalhantes dos corpos têm a mesma magnitude mas com direções opostas. Nos problemas de contato, a aplicação de carga deve ser recalculada, uma vez que tanto as zonas de adesão e escorregamento quanto a região efetiva de contato podem mudar de uma iteração para outra.

Tendo em vista o caso geral de compressão entre corpos elásticos em contato é válido frisar que o contato entre tais corpos desenvolve a pressão de contato em ambos os corpos, as superfícies são comprimidas e sofrem deslocamento paralelo à superfície livre. Desse modo, este caso mais geral da pressão entre dois corpos em contato pode ser tratado utilizando-se como base a metodologia desenvolvida por TIMOSHENKO & GOODIER (1970) para a situação de corpos esféricos.

Quando dois corpos elásticos homogêneos são pressionados juntos, uma certa quantidade de deformação ocorre em cada corpo, limitada por uma curva chamada curva de compressão. A Figura 10 mostra dois corpos gerais no estado não carregado e indeformado com um ponto de contato em O. As duas superfícies têm uma tangente comum no ponto O. Os raios principais de curvatura da superfície no ponto de o contato é R_1 para o corpo 1 e R_2 para o corpo 2. Os termos R'_1 e R'_2 representam os outros raios de curvatura de cada corpo. Os raios de curvatura são medidos em dois planos com ângulos retos entre si. Os raios principais de curvatura podem ser positivos se o centro de curvatura estiver dentro do corpo, e negativos se o centro de curvatura estiver fora do corpo. Ainda, os planos x_1z e x_2z devem ser escolhidos de tal forma que:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) > \left(\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2}\right) \quad (2.3.48)$$

O ângulo ψ é o ângulo entre os planos x_1z e x_2z , isto é, os raios de curvatura principais R_1 e R_2 .

Supondo que a superfície de cada corpo próximo ao ponto de contato possa ser aproximada por uma equação de segundo grau da forma:

$$Z = Dx^2 + Ey^2 + 2Fxy \quad (2.3.49)$$

onde D, E e F são constantes arbitrárias.

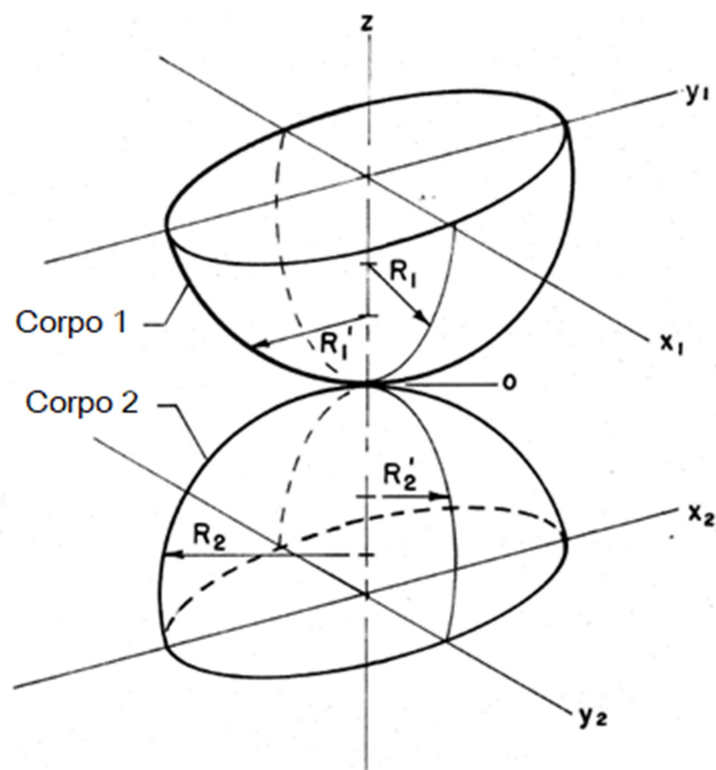


Figura 10. Geometria do contato entre paraboloides com os eixos principais do corpo 1 (x_1 , y_1 , z) e os eixos principais do corpo 2 (x_2 , y_2 , z).

(Fonte: NORDEN, 1973).

A equação para a superfície 1 pode ser escrita como:

$$z_1 = D_1x^2 + E_1y^2 + 2F_1xy \quad (2.3.50)$$

e para a superfície 2,

$$z_2 = D_2x^2 + E_2y^2 + 2F_2xy \quad (2.3.51)$$

Sabendo que a soma de z_1 e z_2 entra na equação quadrática temos:

$$(z_1 + z_2) = (D_1 + D_2)x^2 + (E_1 + E_2)y^2 + 2(F_1 + F_2)xy \quad (2.3.52)$$

Sendo as direções \mathbf{x} e \mathbf{y} aquelas que anulam o termo que contém o produto \mathbf{xy} , o eixo pode ser transformado tal que $F_1 = -F_2$. Para simplificar a equação (2.3.52), posteriormente substituímos as constantes $(D_1 + D_2)$ por A e $(E_1 + E_2)$ por B , resultando em:

$$(z_1 + z_2) = Ax^2 + By^2 \quad (2.3.53)$$

em que \mathbf{A} e \mathbf{B} são constantes cujos valores dependem das grandezas das curvaturas principais das superfícies em contato e do ângulo formado entre os planos de curvatura principal. Sendo R_1 e R'_1 os raios principais da curvatura no ponto de contato dos corpos, e R_2 e R'_2 os do outro, (a curvatura de um corpo é considerada positiva se o raio de curvatura, neste ponto, penetra no seu interior, para assento esférico possui curvatura negativa), e ψ o ângulo compreendido entre os planos normais que contêm as curvaturas $1/R_1$ e $1/R_2$, então as constantes \mathbf{A} e \mathbf{B} poderão ser determinadas assim:

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) \quad (2.3.54)$$

$$B - A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\psi \right]^{1/2} \quad (2.3.55)$$

\mathbf{A} e \mathbf{B} na equação (2.3.53) são positivos, já que $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ deve ser positivo. Portanto, concluímos que a distância $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ se encontra sobre uma elipse.

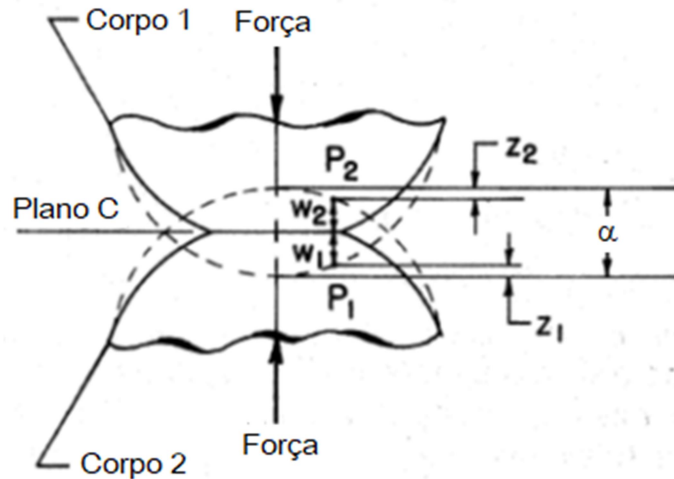


Figura 11. Geometria de corpos deformados.

Fonte: (NORDEN, 1973)

Quando os corpos são pressionados um contra o outro por forças normais então uma deformação ocorre próximo ao ponto de contato ao longo do eixo z (Figura 11). Os deslocamentos num ponto são w_1 e w_2 , onde w_1 é a deformação do ponto P_1 do corpo 1 e w_2 é a deformação do ponto P_2 para o corpo 2, o plano C é o plano original de tangência; z_1 é a distância de P_1 ao estado indeformado, e z_2 é a distância de P_2 ao estado indeformado. Visto de outra forma, por efeito da compressão local, mantendo-se o plano tangente em O imóvel, os pontos M e N seriam abrangidos pela superfície de contato (Figura 12). Para pontos dentro da área de contato, com a diminuição da distância MN , tem-se:

$$Ax^2 + By^2 + w_1 + w_2 = \alpha \quad (2.3.56)$$

em que α , a deformação total, representa a aproximação de dois pontos quaisquer dos sólidos sobre os eixos z_1 e z_2 , situados a grandes distâncias de O .

Substituindo (2.3.53) em (2.3.56) vem:

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \beta r^2 \quad (2.3.57)$$

ou

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta r^2 \quad (2.3.58)$$

em que β é uma constante que depende dos raios R_1 e R_2 .

Levando-se em conta que α é o valor de w_1 e w_2 na origem (Figura 11, $x = y = 0$) deve-se avaliar w_1 e w_2 .

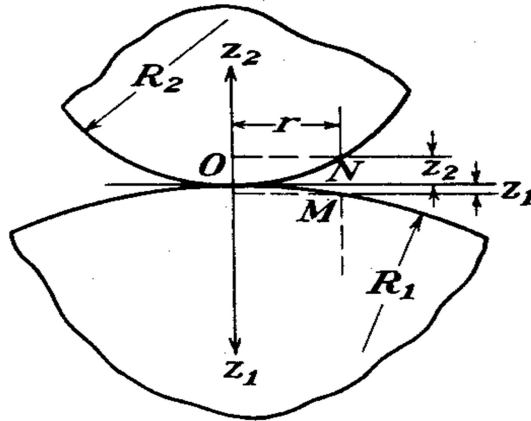


Figura 12. Geometria do contato esfera-esfera no plano.

Fonte: Timoshenko (1972)

A pressão P entre corpos é o resultado de uma pressão distribuída (P' por unidade de área), sobre a área comprimida. Norden (1972) cita, a partir de Prescott, que os valores das deformações w_1 e w_2 , sob a ação das forças normais, são:

$$w_1 = k_1 \Phi(x, y) \quad (2.3.59)$$

e,

$$w_2 = k_2 \Phi(x, y) \quad (2.3.60)$$

onde

$$k_i = \left(\frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \right)$$

ν_i = Coeficiente de Poisson para o i -ésimo corpo

E_i = Módulo de elasticidade para o i -ésimo corpo

e $\Phi(x, y) = \iint \frac{P'}{r} dx' dy'$ que representa o potencial num ponto da superfície. Aqui r é a distância de algum ponto (x, y) a outro ponto (x', y') e P' é a densidade superficial.

Para o contato esfera-esfera, Timoshenko (1970), com base na representação de que a superfície de contato é aproximadamente circular (figura 13), estabelece que os deslocamentos w_i , provenientes da deformação local nas direções z_1 e z_2 , podem ser representados individualmente por:

$$w_i = \frac{(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \iint q ds d\psi \quad (2.3.61)$$

em que w_1 representa o deslocamento de um ponto tal como M pertencente à superfície da esfera inferior e w_2 , mesmo deslocamento na direção z_2 , de um ponto tal como N da esfera superior, ν_1 e E_1 são as constantes de integração da esfera inferior, ν_2 e E_2 são as constantes equivalentes da esfera superior, q é a intensidade da pressão entre os corpos em contato, sendo a integração estendida a toda a área de contato a partir da área elementar $dsd\psi$.

Um fato importante que deveria ser observado das Equações 2.3.59 e 2.3.60 é que:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}\right)}{\left(\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}\right)} \quad (2.3.62)$$

o que significa que se os dois corpos são feitos do mesmo material, então $w_1 = w_2$.

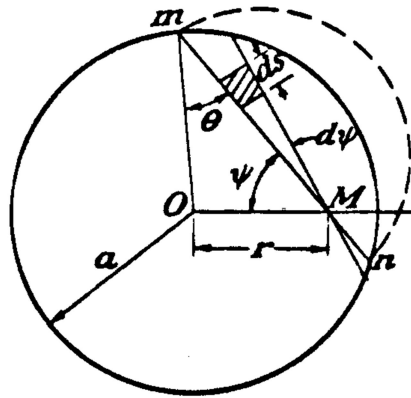


Figura 13. Área da superfície de contato oriunda do contato de uma esfera com plano.

Fonte: Timoshenko (1970)

Em termos de deformação local, admitindo que a superfície de contato é muito pequena, a soma dos deslocamentos w_1 e w_2 para os pontos da superfície de contato, com a aplicação do formato (2.3.61), será:

$$w_1 + w_2 = \left(\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}\right) \iint \frac{q dA}{r} \quad (2.3.63)$$

onde $q dA$ é a pressão sobre um elemento infinitesimal da superfície de contato e r é a distância entre eles e o ponto em consideração.

Por substituição das deformações w_1 e w_2 na Equação (2.3.55) nós obtemos:

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{q dA}{r} = \alpha - Ax^2 - By^2 \quad (2.3.64)$$

onde os subscritos 1 e 2 representam as constantes elásticas dos corpos 1 e 2.

A integral (2.3.64) permite-nos calcular a área de contato, distribuição de pressão e a deformação dos corpos.

2.3.6.2 – Caso genérico para pressão entre dois corpos em contato

Para se encontrar uma distribuição de pressões \mathbf{q} que satisfaça a equação (2.3.64), Hertz, ao verificar uma analogia deste problema com a teoria do potencial, admitiu a intensidade das pressões \mathbf{q} na superfície de contato como representada pelas ordenadas de um semi-elipsóide, construído sobre esta mesma superfície. A pressão máxima localizada no centro da superfície de contato (vide Figura 09 a). Designando-a por \mathbf{q}_0 e por \mathbf{a} e \mathbf{b} os semi eixos do contorno elíptico da superfície de contato,

$$P = \iint q dA = \frac{2}{3} \pi ab q_0 \quad (2.3.65)$$

da qual:

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad (2.3.66)$$

Vê-se que a pressão máxima é 1.5 vezes a pressão média na superfície de contato. Para-se calcular esta pressão deve-se conhecer o valor dos semi-eixos \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Devem-se definir as duas constantes geométricas, \mathbf{A} e \mathbf{B} , que dependem dos raios de curvaturas dos corpos, através do sistema de equações (2.3.54) e (2.3.55) e auxílio da tabela 2. O termo $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é determinado pela equação (2.3.4) e os coeficientes \mathbf{m} e \mathbf{n} dependem da relação $(\mathbf{B}-\mathbf{A})/(\mathbf{A}+\mathbf{B})$. Utilizando a notação:

$$\cos \theta = \frac{B-A}{A+B} \quad (2.3.67)$$

Tabela 02. Valores de m e n para diversos valores de θ .

$\theta =$	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
	2.731	2.397	2.136	1.926	1.754	1.611	1.486	1.378	1.284	1.202	1.128	1.061	1.000

m =													
n =	0.493	0.530	0.567	0.604	0.641	0.678	0.717	0.759	0.802	0.846	0.893	0.944	1.000

Conhecendo-se a distribuição de pressões podem-se calcular as tensões em qualquer ponto. Foi demonstrado desta maneira que o ponto de máxima tensão cisalhante se situa sobre o eixo **z**, a uma certa profundidade pequena z_1 , dependente do comprimento dos semi-eixos **a** e **b**. Considerando-se os pontos da superfície elíptica de contato e tomando os eixos **x** e **y** na direção dos semi-eixos **a** e **b**, respectivamente, as tensões principais no centro da superfície de contato são:

$$\sigma_x = -2\nu q_0 - (1 - 2\nu)q_0 \frac{b}{a+b} \quad (2.3.68)$$

$$\sigma_y = -2\nu q_0 - (1 - 2\nu)q_0 \frac{a}{a+b} \quad (2.3.69)$$

$$\sigma_z = -q_0 \quad (2.3.70)$$

Para as extremidades dos eixos da elipse temos $\sigma_x = -\sigma_y$ e $\sigma_{xy} = 0$. A tensão de tração na direção radial é igual à tensão compressiva na direção circunferencial. Nestes pontos, portanto existe um cisalhamento puro. A intensidade deste cisalhamento nas extremidades do eixo maior (**x** = $\pm a$, **y** = **0**) é:

$$\tau = (1 - 2\nu)q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{e} \operatorname{arc} \tanh e - 1 \right) \quad (2.3.71)$$

e para os extremos dos eixo menor (**x** = **0**, **y** = $\pm b$) :

$$\tau = (1 - 2\nu)q_0 \frac{\beta}{e^2} \left(1 - \frac{\beta}{e} \operatorname{arc} \tan \frac{e}{\beta} \right) \quad (2.3.72)$$

onde:

$$\beta = \frac{b}{a} \quad (2.3.73)$$

$$e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2.3.74)$$

Quando **b** se aproxima de **a** e o contorno da superfície de contato tende a uma forma circular, as tensões dadas por (2.3.66), (2.3.67), (2.3.68), (2.3.69) e (2.3.70) se aproximam do caso da compressão entre esferas.

Aumentando a relação **a/b**, são obtidas elipses de contato cada vez mais estreitas, e no limite **a/b=∞**, chega-se ao caso do contato de dois cilindros com eixos paralelos. A superfície agora é um retângulo estreito. A distribuição de pressões **q** ao longo da largura da superfície de contato (Figura 14) é representada por uma semi-elipse. Se o eixo **x** for perpendicular ao plano da figura, e **b** a metade da largura da superfície de contato, e **p'** a carga por unidade de comprimento:

$$P' = \frac{1}{2} \pi b q_0 \quad (2.3.75)$$

onde:

$$q_0 = \frac{2P'}{\pi b} \quad (2.3.76)$$

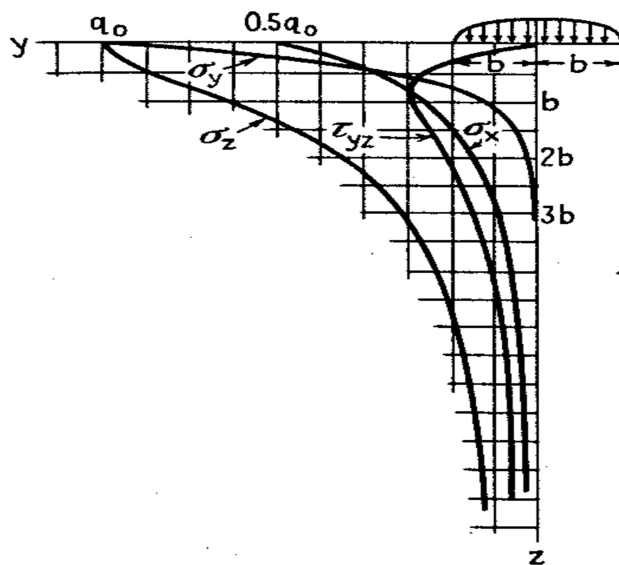


Figura 14. Distribuição de pressões **q** ao longo da largura da superfície de contato, semi-elíptica.

2.3.6.3 Pressão entre dois corpos esféricos em contato

Para a obtenção de tensões e deslocamentos em dois corpos esféricos em contato partimos de estudos anteriores de Timoshenko (1970) sobre cargas concentradas e distribuídas atuante numa parte do contorno de um sólido semi-infinito.

Segundo HERTZ (1881), citado por LAURENTI (1997), TIMOSHENKO e GOODIER (1970):

Para o caso de contato entre esferas, seguindo a metodologia desenvolvida para contato geral na seção anterior, consideramos a distribuição de pressões hemisférica (Figura 10). Na superfície de contato, ao efetuar-se a integração ao longo da corda mn, abscissa da variação da pressão q, obtém-se:

$$\int q ds = \frac{q_0}{a} A \quad (2.3.77)$$

onde $q_0 = ka$ é a pressão no centro O desta superfície, k é um fator constante que indica a escala representativa da distribuição de pressão, A é a área do semicírculo indicado pela linha pontilhada e igual a $1/2\pi(a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$.

Para satisfazer às exigências da distribuição de q na equação (2.3.64), esta recebe a substituição da equação (2.3.66) em conjunto com a fórmula da área A obtidos anteriormente. Assim, alcança-se:

$$\frac{\pi(k_1+k_2)q_0}{a} \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi = \alpha - \beta r^2 \quad (2.3.78)$$

ou

$$(k_1 + k_2) \frac{q_0 \pi^2}{4a} (2a^2 - r^2) = \alpha - \beta r^2 \quad (2.3.79)$$

Esta equação atende qualquer valor de r e, portanto, a distribuição de pressões admitida será a correta se existir as seguintes relações para o deslocamento α e o raio a da superfície de contato:

$$\alpha = (k_1 + k_2) q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \quad (2.3.80)$$

$$a = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\beta} \quad (2.3.81)$$

O valor da pressão máxima q_0 é obtido igualando-se a soma das pressões que atuam sobre a área de contato com a força P . Considerando uma distribuição hemisférica de pressões:

$$\frac{q_0}{a} \frac{2}{3} \pi a^3 = P \quad (2.3.82)$$

onde:

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (2.3.83)$$

A pressão máxima, é 1,5 vezes a pressão média sobre a superfície de contato a qual substituída nas equações (2.3.78) e (2.3.79) e tomando o valor de R_1 e R_2 , da equação (3):

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2} \quad (2.3.84)$$

encontra-se então para duas esferas em contato (Fig 3):

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4} \frac{P(k_1 + k_2)R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (2.3.85)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{P^2(k_1 + k_2)^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}} \quad (2.3.86)$$

Conhecidas a grandeza da superfície de contato e as pressões que nela atuam, podemos calcular as tensões utilizando um método equivalente demonstrado por Timoshenko (1970), para o caso de carga distribuída sobre uma parte do contorno de um sólido semi-infinito. Segundo este autor estes cálculos foram elaborados por Dinnik (1909), mas referências podem ser encontradas também nos trabalhos dos pesquisadores Huber (1904), Fuchs (1913), Huber e Fuchs (1914), Morton e Close (1922). Os resultados destes cálculos para pontos dos eixos Oz_1 e Oz_2 são mostrados na Fig. 15. A pressão máxima q_0 , no centro da superfície de contato, é tomada como unidade de tensão. Na medição das distâncias ao longo do eixo z , o raio a da superfície de contato é considerado como unitário. A máxima tensão é a compressão σ_z que atua no centro da superfície de contato, mas as outras duas tensões principais σ_r e σ_θ , neste mesmo ponto, são iguais a $\frac{1}{2}(1 + 2\nu)\sigma_z$.

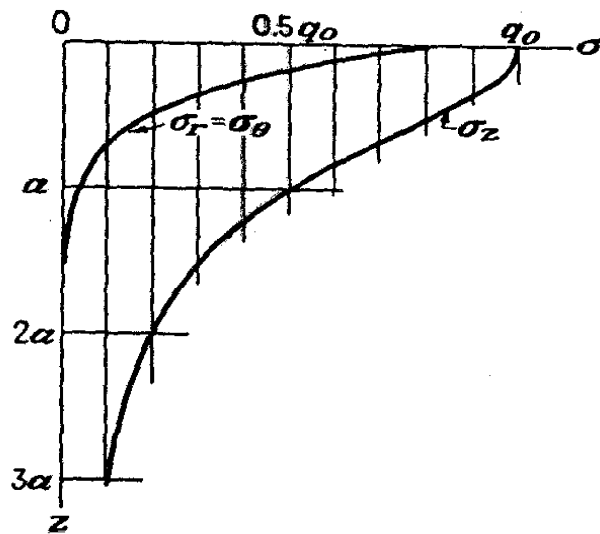


Figura 15. Distribuição de Tensão entre duas Esferas em Contato.

2.3.6.4 Contato entre cilindros

Considerando também a formação de uma região elíptica de contato, o equacionamento para o contato entre cilindros (Figura 16) pode ser aproximado pelas formulações e constantes do contato entre esferas.

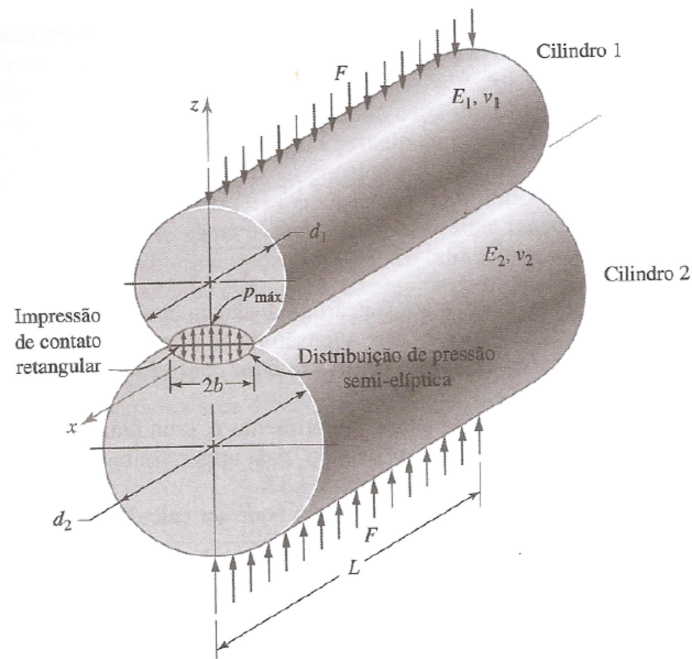


Figura 16. Representação do contato entre dois cilindros, carregados por uma força F uniformemente distribuída ao longo de todo o seu comprimento L .

(Fonte: COLLINS, 2006)

No estudo da deformação local, a quantidade b é fornecida pela expressão:

$$b = \sqrt{\frac{4P'(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}} \quad (2.3.87)$$

No caso de cilindros de mesmo material e $\nu = 0,3$, o valor de b assume:

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P'R_1R_2}{E(R_1 + R_2)}} \quad (2.3.88)$$

No caso de $R_1 = R_2 = R$, tem-se,

$$b = 1,08 \sqrt{\frac{P'R}{E}} \quad (2.3.89)$$

Para o caso de um cilindro em contato com uma superfície plana tem-se,

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{P'R}{E}} \quad (2.3.90)$$

Substituindo **b** da equação (47) em (46) tem-se,

$$q_0 = \sqrt{\frac{P'(R_1+R_2)}{\pi^2(k_1+k_2)R_1R_2}} \quad (2.4.91)$$

Para materiais iguais para ambos os cilindros e com $\nu = 0.3$ tem-se,

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P'E(R_1+R_2)}{R_1R_2}} \quad (2.4.92)$$

E para o caso de um cilindro comprimido contra uma superfície plana:

$$q_0 = 0,418 \sqrt{\frac{P'E}{R}} \quad (2.3.93)$$

2.3.6.5 Pressão de contato entre um elipsóide e uma superfície plana

Ainda segundo TIMOSHENKO & GOODIER (1970), o caso geral de um elipsóide pode ser estudado como no caso do contato entre esferas. Sendo a superfície adjacente ao ponto de contato arredondado e considerado uma superfície de segundo grau, caso o corpo seja comprimido por uma superfície plana em direção a normal ao plano que tange a superfície de contorno elíptico.

Agora para o caso de um elipsóide excêntrico, cuja excentricidade seja próximo à unidade, ou seja, possuindo seus raios principais de curvatura, R'_2 e R''_2 , aproximadamente iguais, comprimidos sobre uma superfície plana. Se **b** e **c** forem os semi-eixos de contorno elíptico da superfície de contato, sabendo que **b** e **c** são muito menores que R'_2 e R''_2 então pode-se considerar **b** igual a **c**, ou seja esta-se aproximando a superfície de contato a uma superfície circular.

$$a = \left[\frac{3}{2} F \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2} \left(\frac{R'_2 R''_2}{R'_2 + R''_2} \right) \right]^{1/3} \quad (2.3.94)$$

$$\frac{E_2}{(1-\nu_2^2)} = \frac{0.530F}{D^{3/2}} \left(\frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right)^{1/2} \quad (2.3.95)$$

Esta última equação foi proposta pela ASAE STANDARDS (1989)

Onde E_2 e ν_2 são constantes elásticas, D é o diâmetro da esfera, F é a força aplicada.

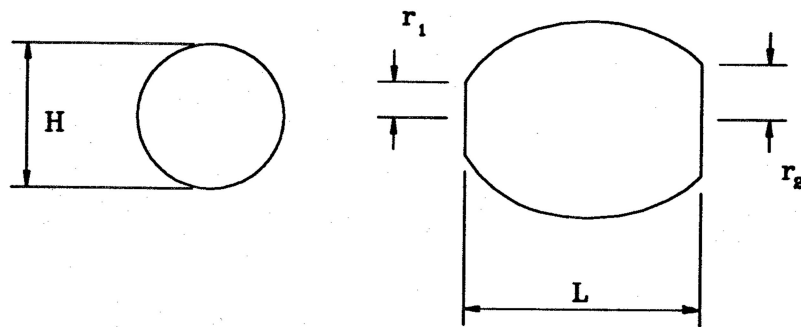


Figura 17. Cálculo dos Raios Principais de Curvatura de um Elipsóide, exemplificado por uma Laranja.

$$R_2' = \frac{H}{2} \quad (2.3.96)$$

$$R_2'' = \frac{L^2 + (H - r_1 - r_2)^2}{4(H - r_1 - r_2)} \quad (2.3.97)$$

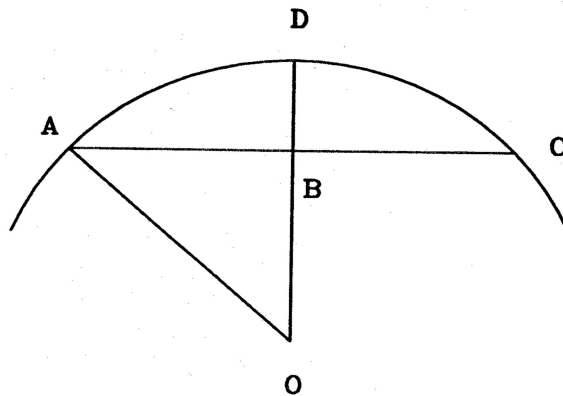


Figura 18. Cálculo do Raio de uma Esfera.

$$raio da esfera = \frac{(AC)^2}{8BD} + \frac{BD}{2}$$

De uma forma mais simples, para o cálculo de **E** entre esfera comprimida por placas planas, tem-se:

$$E = 0.75F(1 - v^2) \frac{1}{D^{3/2}} * \frac{1}{R^{1/2}} \quad (2.3.98)$$

Onde **D** e **a**, são obtidos assim:

$$D = 0.75F \frac{(1-v^2)}{E} \frac{1}{a} \quad (2.3.99)$$

$$a = 0.75 \frac{F}{D} \left(\frac{1-v^2}{E} \right) \quad (2.3.100)$$

2.3.6.6 Contato de cilindro com superfície plana

Partindo dos trabalhos iniciais de Hertz, na avaliação das tensões de contato geradas entre cilindro e superfície plana, destacamos as contribuições de Timoshenko (1970), Sherif (1976) entre outros.

Nordon (1973) pesquisando as faixas de carga mais utilizadas no campo metrológico chega à conclusão que a abordagem do retângulo finito comparativamente a abordagem elíptica e de formulações empíricas, oferece a melhor aproximação à compressão. Esta equação para a deformação total é dada por:

$$\alpha = \frac{P}{L} (k_1 + k_2) \left[1,00 + \ln \frac{L^3}{(k_1 + k_2)PR} \right] \quad (2.3.101)$$

2.3.6.6.1 - ENSAIO DE LOBO - CARNEIRO OU *BRAZILIAN TEST*.

O ensaio de Lobo – Carneiro foi desenvolvido para ensaiar espécimes de concreto na engenharia civil e surgiu de um fato curioso. Com o intuito de evitar a demolição da antiga construção de uma igreja (São Pedro dos Clérigos, 1732), localizada no centro do Rio de Janeiro, para a abertura da atual Avenida Presidente Vargas, a Franki — uma empresa de fundações e infra-estruturas - tinha tido sucesso na Europa no transporte de construções sobre rolos de aço foi contratada para fazer um estudo sobre como deslocar a igreja para o outro lado da avenida.

Para tanto, seriam utilizados rolos de concreto com 60 cm de diâmetro. No entanto, no Brasil surgiu a ideia de fazer rolos de concreto. Na Europa já havia sido realizado com sucesso o transporte de construções com rolos de aço. Com o aço em falta, decidiu-se pelo concreto.

Lobo-Carneiro foi designado pelo diretor da empresa para realizar os ensaios e cálculos. Diante da necessidade de verificar a capacidade de rolos de concreto para o deslocamento da igreja de São Pedro, o engenheiro empregou o teste de compressão diametral em rolos de concreto com 600 mm de diâmetro, tendo observado que a distribuição vertical de tensões no plano de aplicação da carga durante a ruptura das amostras seria uniforme e que a ruptura do material se dava por tração, com base no plano diametral em que atuavam as forças de compressão.

O estudo sobre o qual Lobo Carneiro se debruçou o conduziu à criação de um novo método para a determinação da resistência à tração dos concretos, por meio de ensaio de compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. O plano não foi posto em prática por conta de laudos que atestavam a possibilidade de o concreto fissurar. A igreja acabou sendo demolida.

Após essa breve narrativa, vale ressaltar que o episódio culminou no desenvolvimento do método empreendido por Lobo Carneiro chamado *Brazilian Test* (Método Brasileiro), que consiste basicamente na aplicação de um carregamento distribuído ao longo de duas linhas diretrizes alinhadas nos dois extremos opostos de um cilindro constituído do material a ser estudado até a ruptura do espécime ao longo de uma fissura que interliga as duas extremidades de carregamento. Na Figura 19 é ilustrado o procedimento do chamado ensaio brasileiro. Grosso modo, trata-se de um ensaio de compressão que se realiza num corpo-de-prova cilíndrico de 15cm por 30 cm colocado com o eixo horizontal entre os pratos da prensa-duas superfícies planas rígidas e paralelas, sendo aplicada uma força até a sua ruptura por tração indireta (ruptura por fendilhamento). Em outras palavras, o ensaio consiste na aplicação de uma carga na direção vertical sobre o corpo de prova entre duas placas com a finalidade de se obter a resistência à tração por meio de uma compressão no plano diametral, ou seja, o plano de ruptura vertical de simetria da peça cilíndrica.



Figura 19. Ensaio de Lobo-Carneiro (“*Brazilian Test*”)

Por meio deste ensaio pode-se determinar o módulo de elasticidade E do espécime sendo ensaiado. É um caso de comportamento não linear geométrico, pois a geometria da aplicação da carga gera a não linearidade, tal como os casos de esferas em contato com esferas, esferas em contato com superfícies planas e rígidas, bem como de esferas em contato com superfícies convexas ou outras, conforme visto nos itens anteriores.

O teste diametral foi padronizado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas através da NBR 7222, de 2011, para aplicação na determinação do limite de resistência à tração simples para o concreto, expresso por:

$$\sigma = \frac{2F}{\pi DL}$$

onde:

σ = limite de resistência à tração simples;

F = carga máxima no momento da ruptura;

D = diâmetro do corpo de prova;

L = comprimento do corpo de prova;

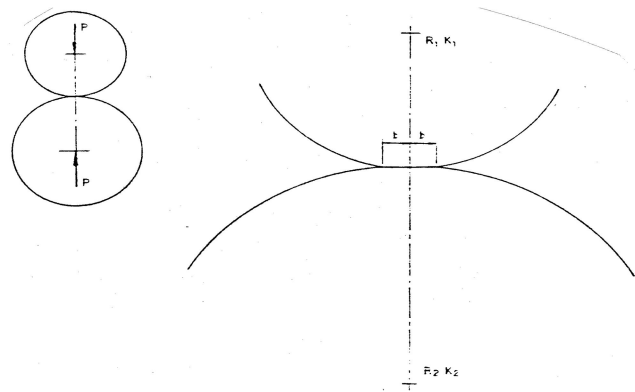


Figura 20. Esquema de Dois Cilindros em Contato.

onde:

$$K_1 = \frac{1-\nu_i^2}{\pi E_i} \quad (2.3.102)$$

$$q_0 = \frac{2P}{\pi b} \quad (2.3.103)$$

$$E = \frac{8(1-\nu^2)Z^2F}{\pi D} \quad (2.3.104)$$

onde E e ν são constantes elásticas, b é a metade da largura da área de contato, D é deformação, F é a força aplicada, R e d são respectivamente o raio e o diâmetro do cilindro, e Z é obtido iterativamente:

$$Z = \frac{R}{b} \quad (2.3.105)$$

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{2Z^2} \left[\ln(2Z) + \frac{1}{2} \right] \quad (2.3.106)$$

$$D = \frac{-b^2}{R} \left[\ln\left(\frac{b}{2R}\right) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.3.107)$$

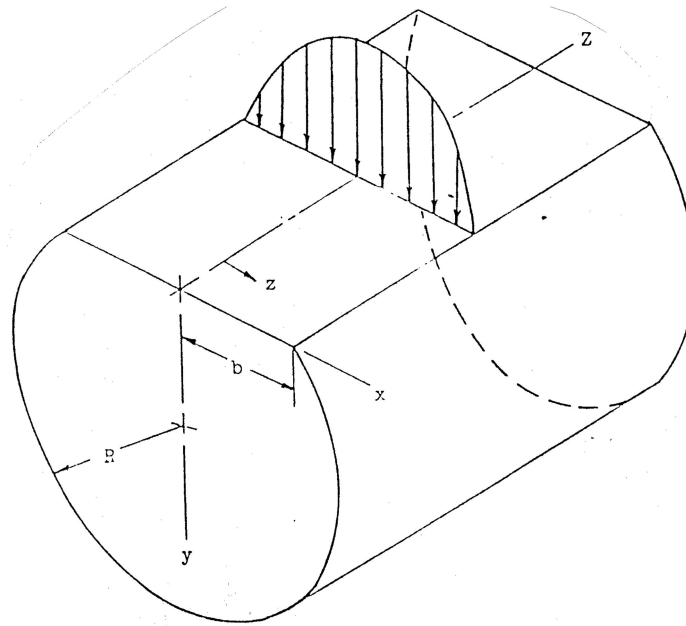


Figura 21. Distribuição de Tensão, em uma Superfície de Contato entre um Cilindro e uma Superfície Plana.(Sherif, 1976)

A grande vantagem de realização deste tipo ensaio está atrelada à necessidade de somente um equipamento de compressão para obtenção da resistência à tração. Esse tipo de equipamento está disponível em, praticamente, todos os laboratórios de ensaios de materiais em todo o mundo (VAN MIER e VAN VLIET, 2002).

2.4 Viscoelasticidade

2.4.1 Introdução

A maioria dos materiais apresenta propriedades que são consideradas dependentes do tempo, tais como as propriedades mecânicas e outras propriedades físicas (dielétricas, ópticas, etc), ou seja, variam com o tempo em resposta a uma carga ou deformação aplicada (Tschoegl (1997), Emri & Gergesova (2010)). Como consequência da Segunda Lei da Termodinâmica, uma porção da energia transmitida da deformação é sempre dissipada como calor por forças viscosas, mesmo que o restante possa ser armazenado elasticamente. O que torna as propriedades físicas dependentes do tempo é o fato de que a dissipação não é instantânea nem infinitamente lenta e, portanto, é um processo de taxa. Como parte da energia de deformação total é armazenada elasticamente e a parte restante é dissipada devido ao comportamento viscoso, a resposta do material fica aquém da função excitante.

Enquanto, na elasticidade, a variável tempo não está presente, na viscoelasticidade, por sua vez, a variável tempo é um parâmetro importante nas equações que regem esse comportamento material. O comportamento viscoelástico- que justamente incorporam deformação elástica e o comportamento dos fluidos- pode ser visto como uma escala de variação de comportamento, de modo que em uma extremidade há fluxo viscoso e na outra deformação elástica e entre essas extremidades havendo uma combinação do comportamento elástico e viscoso, segundo MASE e MASE (1999).

De acordo com Christensen (1982) um material viscoelástico tem capacidade de memória e os carregamentos e descarregamentos guardam uma dependência com a taxa ou tempo específico, isto é, o histórico de carregamento influencia a resposta. Dito de outra forma, a resposta do material não é determinada pelo estado corrente de tensão, mas também determinada por todos os estados passados de tensão. Este autor frisa que a formulação das relações constitutivas viscoelásticas lineares entre tensão e deformação específica obedece a condições isotérmicas e de homogeneidade material.

Em termos de resposta típica de um material viscoelástico, em contraposição a resposta elástica, podemos observar na figura 22, na descrição de Kelly (2019):

- (i) as curvas de carregamento e descarregamento não coincidem, mas formam um ciclo de histerese;
- (ii) existe uma dependência da taxa de deformação $d\varepsilon/dt$; Quanto mais rápido for o alongamento, maior será a tensão necessária;

(iii) pode ou não haver alguma deformação permanente após o completo descarregamento.

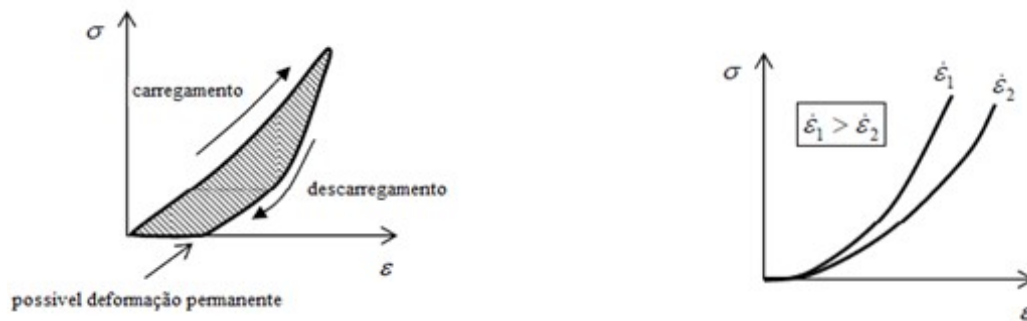


Figura 22. Resposta de um material viscoelástico em ensaio de tração.

Fonte: Adaptado de Kelly (2019).

Diante do que foi exposto, este trabalho de doutorado preocupa-se particularmente com a determinação do comportamento mecânico do caule da cana, ou, mais apropriadamente, das propriedades reológicas do tecido da cana.

O comportamento viscoelástico pode ser descrito por modelos analógicos, modelos analíticos utilizando integrais hereditárias, pelos modelos complexos, ou pelo Princípio da Correspondência Elástico – Viscoelástico ou ainda por métodos numéricos e equações diferenciais para casos não lineares.

O comportamento viscoelástico foi atribuído ao material vegetativo por MOSENIN, N. (1970), HUGHES, H. & SEGERLIND, L.J. (1972), AKYURT, M., (1969), DAL FABBRO, IMD.F. (2003) e por muitos outros.

Mohsenin (1970), comenta que a presença de umidade no material biológico oferece pequena resistência ao cisalhamento causando grandes deformações iniciais associadas à baixas tensões. Assim, em ensaios de material vegetativo, observa-se que a parte inicial da curva tensão-deformação é côncava com relação ao eixo das ordenadas, fazendo com que o módulo elástico cresça exponencialmente e deva estar sempre acompanhado da força e deformação correspondentes. Neste aspecto, o trabalho de Shelef e Mohsenin (1968) sobre a variação do módulo de elasticidade com a umidade do produto, fornece subsídio para as afirmações de Mohsenin.

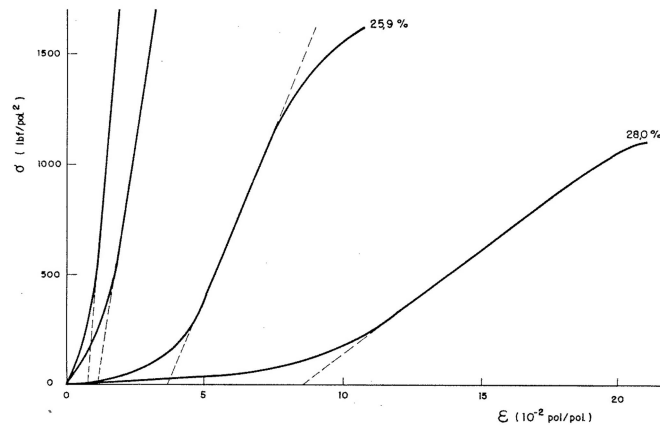


Figura 23. Variação do módulo elástico em função do teor de umidade em grãos de milho.

Fonte: Shelef e Mohsenin (1968)

2.4.2 Modelos viscoelásticos analógicos

A viscoelasticidade linear pode ser expressa em termos de modelos mecânicos construídos a partir de molas lineares e amortecedores. Esses modelos geram relações constitutivas que são equações diferenciais ordinárias no tempo que podem ser comparadas com resultados experimentais. Desta forma, podemos destacar os modelos utilizados na representação de materiais viscoelásticos, dentre outros: Kelvin-Voight, Maxwell, sólido linear padrão e Wiechert.

Os modelos mecânicos básicos de viscoelasticidade compreendem os modelos de Maxwell e Kelvin, sendo representados em sua forma geral por uma equação diferencial da lei viscoelástica linear. O modelo mola-amortecedor de Maxwell, representado na Fig. 24, pode ser descrito por uma mola hookeana associada em série com um amortecedor newtoniano. A mola deve ser visualizada como representando o componente elástico ou energético da resposta, enquanto o amortecedor representa o componente conformacional ou entrópico. A mola e o amortecedor, individualmente, descritos comportalmente, respectivamente pelas equações de tensão-deformação $\sigma = E\epsilon$ e $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$. Sendo E , o módulo de elasticidade, η a viscosidade.

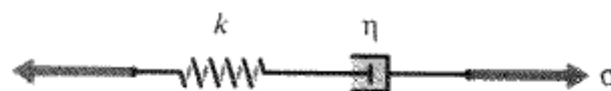


Figura 24. O modelo Maxwell

(Fonte: ROYLANCE, 2001)

Considerando que a deformação total é a soma das deformações individuais da mola e do amortecedor e que a tensão total é a mesma para ambos os elementos da associação em série, a equação constitutiva do modelo Maxwell pode ser descrita como:

$$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\epsilon} \quad (2.4.1)$$

O modelo de Kelvin (Voight), por outro lado, envolve a combinação de mola e amortecedor em paralelo e sua equação diferencial constitutiva é representada por:

$$\sigma = E\epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad (2.4.2)$$

ou

$$\dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.4.3)$$

onde $\tau = \eta/E$ é o tempo de retardo.

Os modelos Maxwell e Kelvin são os modelos viscoelásticos mais simples. No entanto, respostas mais realistas dos materiais podem ser modeladas usando mais elementos, por exemplo, com a combinação de 3 elementos. Com base na figura 24, Roylance (2001) representa os quatro possíveis modelos de três elementos. Assim, os modelos da figura 24 a-b são referidos como "sólidos", uma vez que reagem instantaneamente como materiais elásticos e se recuperam completamente após o descarregamento. Os modelos das Figs. 24 c-d são referidos como "fluidos", pois envolvem amortecedores na fase inicial de carregamento e não se recuperam após o descarregamento.

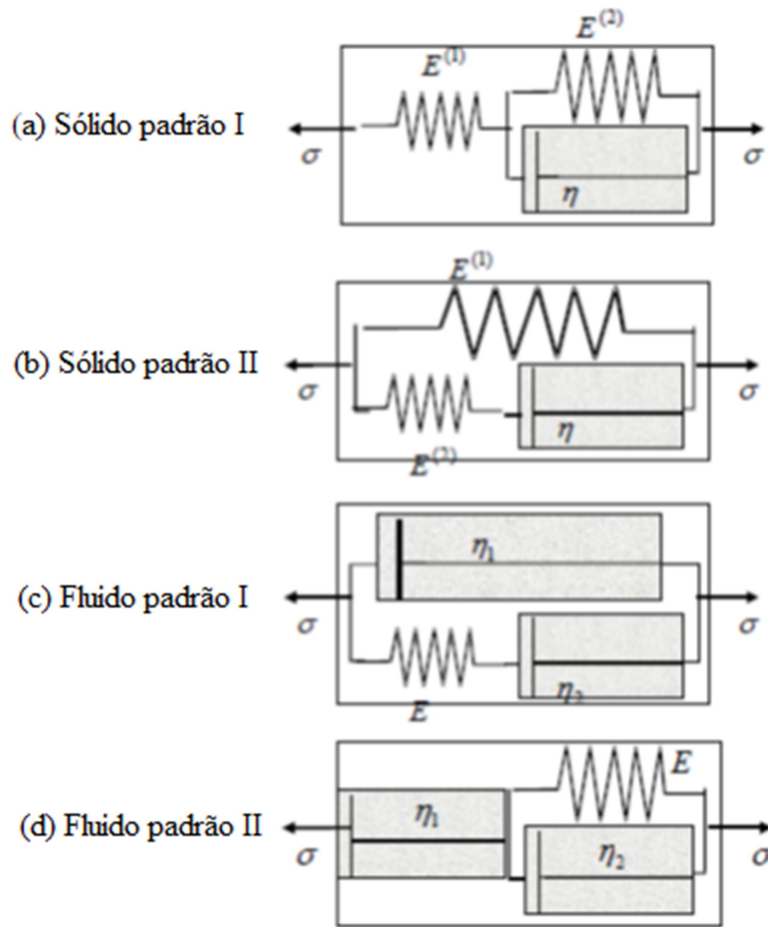


Figura 25. Modelos de Três Elementos.

Fonte: Adaptado de Kelly (2019)

O modelo da figura 24 (b) é muito útil e representa um sólido linear padrão na forma Maxwell, resultado da composição de uma mola em paralelo com uma unidade Maxwell. Esta mola tem rigidez k_e , assim chamada porque fornece uma rigidez “de equilíbrio” ou elastomérica que permanece depois que as tensões no braço de Maxwell se relaxaram à medida que o amortecedor se estende.

Neste arranjo, o braço Maxwell e a mola paralela k_e experimentam a mesma deformação, e a tensão total σ é a soma da tensão em cada braço: $\sigma = \sigma_e + \sigma_{mx}$.

$$k\dot{\epsilon} = \dot{\sigma}_{mx} + \frac{1}{\tau}\sigma_{mx} \rightarrow k_1 s\bar{\epsilon} = s\bar{\sigma}_{mx} + \frac{1}{\tau}\bar{\sigma}_{mx} \quad (2.4.4)$$

Este resultado pode ser escrito

$$\bar{\sigma} = E_s \bar{\epsilon} \quad (2.5.5)$$

onde para este modelo o parâmetro ε é

$$E_s = k_e + \frac{k_1 s}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.4.6)$$

A Equação (2.5.5) é claramente remanescente da Lei de Hooke $\sigma = E\varepsilon$, mas no plano de Laplace, é chamada de equação constitutiva viscoelástica associada. Aqui, a expressão específica para E_s é a do modelo Sólido Linear Padrão, mas outros modelos também poderiam ter sido usados.

As relações constitutivas para os quatro modelos mostrados na figura 25 são:

$$(a) \quad \sigma + \frac{\eta}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon + \frac{\eta E_1}{E_1 + E_2} \dot{\varepsilon} \quad (2.4.7)$$

$$(b) \quad \sigma + \frac{\eta}{E_2} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\varepsilon} \quad (2.4.8)$$

$$(c) \quad \sigma + \frac{\eta_2}{E} \dot{\sigma} = (\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\varepsilon} \quad (2.4.9)$$

$$(d) \quad \sigma + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E} \dot{\sigma} = \eta_1 \dot{\varepsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E} \ddot{\varepsilon} \quad (2.5.10)$$

Modelos mais complexos podem ser construídos usando mais e mais elementos. Um modelo reológico viscoelástico complexo geralmente terá a forma do modelo Maxwell generalizado ou da cadeia Kelvin generalizada, mostrada na Figura 26. O modelo generalizado de Maxwell consiste em N diferentes unidades Maxwell em paralelo, cada unidade com diferentes valores de parâmetros. A ausência da mola isolada garantiria um comportamento do tipo fluido, enquanto a ausência do amortecedor isolado garantiria uma resposta instantânea. A cadeia Kelvin generalizada consiste em uma cadeia de unidades Kelvin e, novamente, a mola isolada pode ser omitida se for necessária uma resposta do tipo fluido.

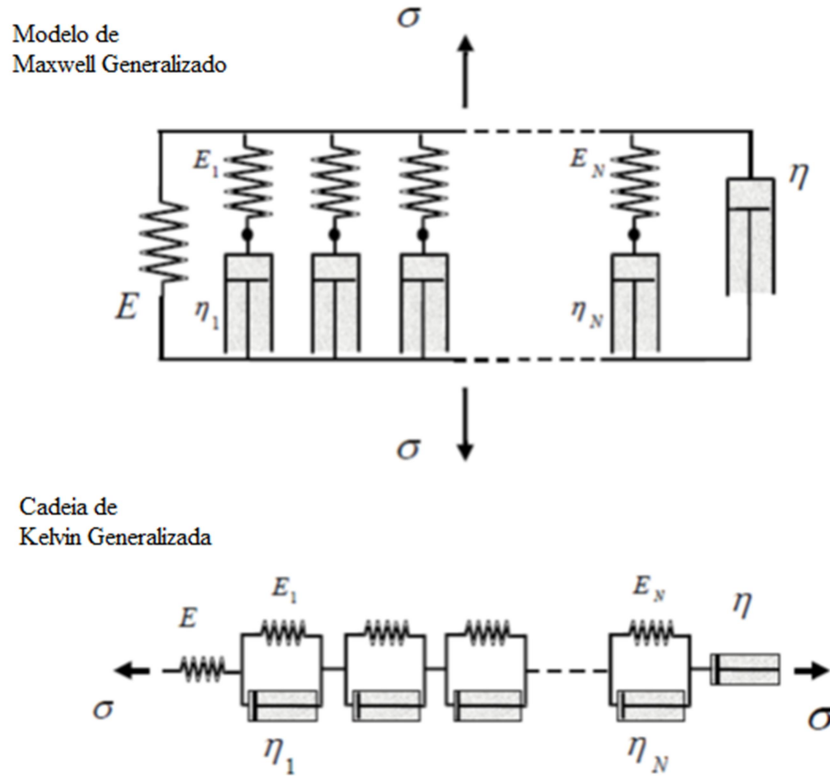


Figura 26. Modelos viscoelásticos generalizados.

Fonte: Kelly (2019)

De maneira geral, uma equação constitutiva viscoelástica linear será na forma generalizada:

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + p_2\ddot{\sigma} + p_3\ddot{\sigma} + p_4\sigma^{(IV)} + \dots = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} + q_3\ddot{\varepsilon} + q_4\varepsilon^{(IV)} + \dots \quad (2.4.11)$$

A equação acima também pode ser escrita na forma abreviada:

$$\mathbf{P}\sigma = \mathbf{Q}\varepsilon \quad (2.4.12)$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{Q} são os operadores diferenciais lineares:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad , \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=0}^n q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad (2.4.13)$$

Nos materiais poliméricos um modelo muito utilizado é o de Wiechert, cuja equação constitutiva pode ser representada por:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_e + \sum_j \bar{\sigma}_j = \left\{ k_e + \sum_j \frac{k_j s}{\left(s + \frac{1}{\tau_j} \right)} \right\} \bar{\varepsilon} \quad (2.4.14)$$

A quantidade entre chaves é o operador do módulo viscoelástico E_s definido na Equação 117 para o modelo Wiechert.

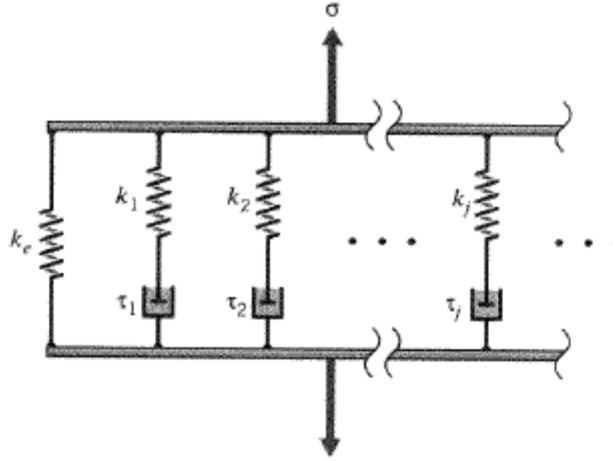


Figura 27. O modelo Wiechert.

Fonte: Roylance, 2001.

Uma forma de melhorar a resposta de materiais seria adotando mais elementos representativos em sua composição e/ou usando modelos não lineares. Por exemplo, as molas dos exemplos anteriores podem ser substituídas por relações de tensão-deformação não lineares mais gerais da forma:

$$\sigma = E\varepsilon^n \quad (2.4.15)$$

Várias expressões não lineares para amortecedores também podem ser usadas, por exemplo,

$$\sigma = A\varepsilon^n \dot{\varepsilon} \quad , \quad \sigma = Ae^{-\varepsilon/\varepsilon_0} \dot{\varepsilon} \quad (2.4.16)$$

Os dados materiais certamente serão mais bem comparados com essas expressões não lineares; no entanto, é claro, resultarão em equações diferenciais não lineares que serão mais difíceis de resolver do que suas contrapartes lineares.

2.4.3 Modelagem analítica por integrais hereditárias

O modelo analítico formula equações constitutivas envolvendo funções características do material, as quais podem ser determinadas experimentalmente, definindo o comportamento viscoelástico do material.

As relações constitutivas diferenciais para os modelos com três elementos impunham a necessidade da derivada para sua resolução, o que pode se tornar uma tarefa difícil, com a necessidade de eliminar variáveis de um conjunto de equações. Quando se modelam os materiais analiticamente com o uso de integrais hereditárias, a resolução de problemas viscoelásticos lineares é facilitada pela aplicação da transformada de Laplace.

De acordo com Roylance (2001), em termos de aspectos fenomenológicos da viscoelasticidade, a caracterização mecânica geralmente consiste em realizar ensaios de tração uniaxial semelhantes aos utilizados para sólidos elásticos, mas modificados para permitir a observação da dependência temporal da resposta do material. Entretanto, os ensaios mais comumente utilizados são três: fluência (*creep*), relaxamento de tensão e carga dinâmica (sinusoidal).

O ensaio de fluência consiste em medir a deformação específica dependente do tempo $\varepsilon(t)$ resultante da aplicação instantânea de uma tensão uniaxial estável (permanente) σ_0 . No experimento de *relaxation* uma deformação específica ε_0 é imposta e mantida constante, enquanto a medida da tensão $\sigma(t)$ é realizada. Em termos matemáticos, os carregamentos de fluência e *relaxation* são expressos em termos da função degrau unitário $[U(t - t_1)]$, definida por

$$[U(t - t_1)] = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ 1 & t > t_1 \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Assim, os carregamentos de fluência e *relaxation* são representados respectivamente por $\sigma = \sigma_0[U(t)]$ e $\varepsilon = \varepsilon_0[U(t)]$, com $[U(t)]$ representando a função degrau unitário aplicada no tempo $t_1 = 0$. Para funções contínuas do tempo $f(t)$, pode ser mostrado que para t' como variável de integração, vale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')[U(t' - t_1)]dt' = [U(t - t_1)] \int_{t_1}^t f(t')dt' \quad (2.4.18)$$

Na modelagem do comportamento de materiais viscoelásticos (seja através de equações diferenciais ou por meio de integrais analíticas) pode-se deparar com outra importante função de singularidade, $[\delta(t)]$ (derivada da função degrau unitário), chamada de função impulso unitário ou delta de Dirac, que por definição representa-se:

$$[\delta(t - t_1)] = 0, \quad t \neq t_1 \quad (2.4.19a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t - t_1)] = 1 \quad (2.4.19b)$$

Conforme ilustrado na Fig. 28, verificam-se três curvas de deformações específicas medidas em três diferentes níveis de tensão para um ensaio de fluência.

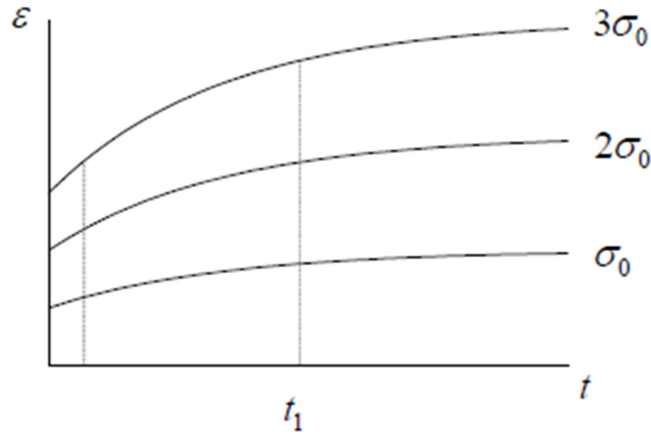


Figura 28. Deformação específica como uma função do tempo a diferentes cargas.

Fonte: Kelly (2019)

A relação entre deformação-específica e tensão é chamada de “compliance” (*compliance*) C e, no caso de deformação específica variável no tempo decorrente de uma tensão constante, a relação é a “compliance” de fluência (*creep compliance*):

$$C(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.4.20)$$

Analogamente a compliance, pode-se sobrepor as curvas de relaxamento por meio do “módulo de relaxamento”, definido como:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (2.4.21)$$

O monitoramento da tensão dependente do tempo resultante da imposição de uma deformação constante, através de máquinas de ensaio controladas por deslocamento, produz respostas *relaxation*, conforme exemplificado na figura 29.

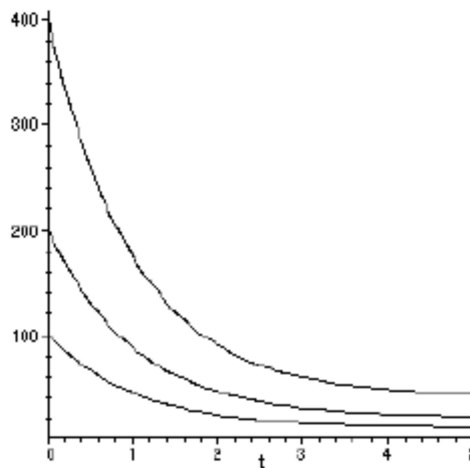


Figura 29. Medida da resposta de *relaxation*.

(Fonte: ROYLANCE, 2001)

A guisa de exemplo, a resposta de fluência a um carregamento $\sigma = \sigma_0[U(t)]$ num material Kelvin é determinada pela solução da equação diferencial:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\sigma_0[U(t)]}{\eta} \quad (2.4.22)$$

É válido destacar que as expressões das funções $\varepsilon_{11}(t)$ e $\sigma_{11}(t)$ podem retratar relacionamentos não lineares, gerando valores não constantes para as razões de tensão e de deformação específicas. Com efeito, a relação tensão com a deformação específica pode dar origem a um sistema de equações lineares ou não, envolvendo constantes ou funções do tempo, as quais caracterizam o material.

As taxas de tensão (*stress rate*) e de deformação específica (*strain rate*), para carregamento uniaxial, podem ser expressas, respectivamente, como

$$\dot{\sigma}_{11} = \text{stress rate} = \frac{d\sigma_{11}(t)}{dt} \quad (2.4.23)$$

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \text{strain rate} = \frac{d\varepsilon_{11}(t)}{dt} \quad (2.4.24)$$

A representação gráfica das funções $\sigma_{11}(t)$ e $\varepsilon_{11}(t)$ é feita pelas figura 29.

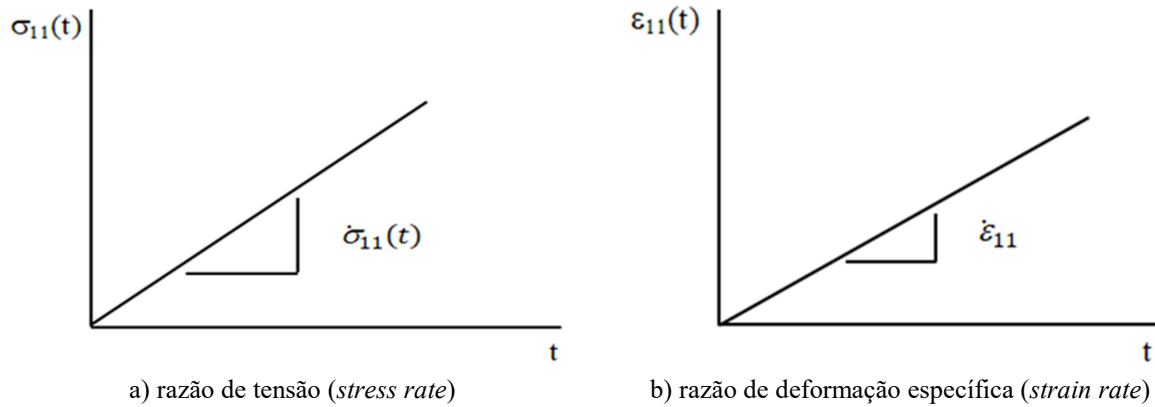


Figura 30. Taxas de tensão e de deformação específica para carregamento uniaxial.

MASE (1970) afirma que os materiais viscoelásticos diferem dos materiais elásticos nos relacionamentos entre os tensores de deformação e de tensão. Desse modo, é válido ressaltar que esses materiais, diferentemente dos materiais elásticos, não apresentam características constantes, ou seja, vão apresentar funções do tempo, as quais podem ou não ser lineares: $E(t)$, $G(t)$, $K(t)$, $\nu(t)$, que combinadas entre si, formam as funções $\psi(t)$ e $\phi(t)$, denominadas respectivamente “*creep*” e “*relaxation*”.

De acordo com Christensen (1982), num material viscoelástico linear, a tensão é linearmente relacionada ao histórico de deformação específica até um determinado tempo. A deformação resultante de qualquer incremento de tensão será acrescentada à deformação resultante de tensões anteriormente criadas no corpo. Isso é conhecido como integral hereditária, que na forma matemática é expressa pelo princípio da superposição de Boltzmann,

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)E(t) + \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.4.25)$$

onde $J(t)$ é a função compliancia para fluência (*creep*).

que no espaço unidimensional é dado por (Christensen apud Casula & Carcione, 1992):

$$\sigma = \psi * \dot{\epsilon} \quad (2.4.26)$$

ou

$$\varepsilon = \phi * \dot{\sigma} \quad (2.4.27)$$

Onde σ é a tensão, ε é a deformação específica, e ψ e ϕ são as funções *relaxation* e *creep*, respectivamente. Aplicando as propriedades de convolução (o símbolo “*” denota convolução no tempo) e transformando as equações (2.4.26) e (2.4.27) para o domínio da frequência tem-se:

$$\bar{\sigma} = Y \bar{\varepsilon} \quad (2.4.28)$$

e

$$\bar{\varepsilon} = J \bar{\sigma} \quad (2.4.29)$$

onde

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\psi}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.4.30)$$

é o módulo de *relaxation* complexo e,

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.4.31)$$

é a “compliance” de fluência complexa, onde ω é a frequência angular e t é a variável tempo.

Para caso da resposta da deformação específica, impondo-se a tensão constante na entrada, a integral hereditária é expressa como:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.4.32)$$

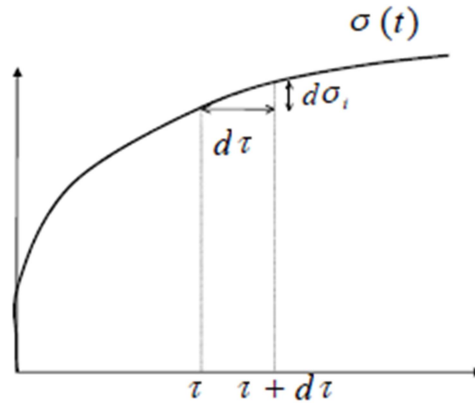


Figura 31. Formação da integral hereditária.

Fonte: Kelly (2019)

De acordo com Kelly (2019), os modelos viscoelásticos lineares podem ser estendidos para a faixa não linear de várias maneiras. Por exemplo, generalizando expressões da formula (2.4.33):

$$\sigma(t) = E(0)\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (2.4.33)$$

$$\sigma(t) = f_1(\varepsilon(t)) + \int_0^t R(t-\tau)f_2(\varepsilon(\tau))d\tau \quad (2.4.34)$$

onde f_1 , f_2 são funções não-lineares do histórico de deformação. A função relaxação pode também ser assumida como uma função de deformação bem como do tempo:

$$\sigma(t) = f_1(\varepsilon(t)) + \int_0^t K(t - \tau, \varepsilon) f_2(\varepsilon(\tau)) d\tau \quad (2.4.35)$$

Modelo teórico:

As considerações em andamento são relatadas por Dal Fabbro et al. (2005) e por Dal Fabbro et al. (2003).

Pode-se resumir, de uma forma genérica, o equacionamento viscoelástico como:

$$\sigma_{ij}(t) = f(\varepsilon_{ij}(t), \sigma_{ij}(t), \varepsilon_{ij}(t), E(t), \nu(t), G(t), K(t)) \quad (2.4.36)$$

A expressão do relacionamento viscoelástico, em termos das funções viscoelásticas $E(t)$, $\nu(t)$, $G(t)$ e $K(t)$, caracteriza o comportamento mecânico do material viscoelástico, de forma semelhante como as constantes elásticas caracterizam o material elástico.

Essas funções viscoelásticas podem ser compactadas em duas funções, $\psi(t)$ = função *creep* e $\phi(t)$ = função *relaxation*, as quais também caracterizam o material viscoelástico. O relacionamento de $\psi(t)$ e $\phi(t)$ com $E(t)$, $\nu(t)$, $G(t)$ e $K(t)$ é bastante simples. No entanto, a relação entre $\psi(t)$ e $\phi(t)$ é estabelecida no domínio de Laplace, como será visto mais adiante, conforme indica a equação (2.4.36).

Diante do que foi exposto, podemos, nesse caso, com base em MASE (1970), Roylance (20) distinguir dois ensaios básicos para a determinação de parâmetros viscoelásticos, conhecidos como ensaios de “*creep*” e “*relaxation*”. De acordo com a literatura, estes dois procedimentos básicos e teóricos induzem a formulação analítica de tensão viscoelástica linear e relações de deformação. No primeiro teste, um valor instantâneo de tensão é imposto ao espécime enquanto o histórico de deformação é registrado no tempo. No segundo teste, a situação é invertida. Estes procedimentos teóricos permitem obter equações viscoelásticas representadas pelas integrais hereditárias exibidas na Equação (2.4.37) e Equação (2.4.38), onde $\psi(t)$ é denominada função *creep* e $\phi(t)$ é denominada função *relaxation* (Mase, 1970).

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t \frac{d\sigma_{ij}(t')}{dt'} \psi(t - t') dt' \quad (2.4.37) \quad \sigma_{ij}(t) = \int_0^t \frac{d\varepsilon_{ij}(t')}{dt'} \phi(t - t') dt' \quad (2.4.38)$$

Se os tensores $\sigma_{ij}(t)$ e $\varepsilon_{ij}(t)$ são expressos através de seus componentes hidrostáticos e deviatóricos as relações acima são transformadas em:

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \frac{de_{ij}(t')}{dt'} \phi_d(t-t') dt' \quad (2.4.39) \quad e_{ij}(t) = \int_0^t \frac{ds_{ij}(t')}{dt'} \psi_d(t-t') dt' \quad (2.4.40)$$

$$\sigma_{kk}(t) = \int_0^t \frac{d\varepsilon_{kk}(t')}{dt'} \phi_H(t-t') dt' \quad (2.4.41) \quad \varepsilon_{kk}(t) = \int_0^t \frac{d\sigma_{kk}(t')}{dt'} \psi_H(t-t') dt' \quad (2.4.42)$$

onde Ψ_d , Ψ_H , ϕ_d e ϕ_H são respectivamente as funções *creep* deviatórico, *creep* hidrostático, *relaxation* deviatórico e *relaxation* hidrostático. As derivadas representam as taxas de deformação específica e taxas de tensão.

2.4.4 Princípio da Correspondência Elástico Viscoelástico

O Princípio da Correspondência Elástico - Viscoelástico pode ser compreendido tomando-se uma solução elástica como sendo a transformada de Laplace da solução viscoelástica e procedendo a inversão desta para o domínio real. Tem-se então a solução viscoelástica para o problema. Esse princípio é válido apenas para os casos de viscoelasticidade linear material e geométrica. Por exemplo, para o caso de compressão diametral de cilindros e esferas não pode ser aplicado esse princípio.

A transformada de Laplace pode ser expressa como

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.4.43)$$

As funções $\Psi(t)$ (*creep*) e $\phi(t)$ (*relaxation*) podem ser relacionadas, utilizando o Princípio da Correspondência Elástico Viscoelástica e com base na transformada de Laplace como

$$\bar{\psi}(s) \bar{\phi}(s) = 1/s^2 \quad (2.4.44)$$

onde $\bar{\psi}(s)$ e $\bar{\phi}(s)$ são as transformadas de Laplace de $\Psi(\mathbf{t})$ e $\phi(\mathbf{t})$, respectivamente e s é o parâmetro de Laplace.

Propondo um ensaio de tensão uniaxial (caso *relaxation*) para o qual se deve utilizar a equação de resposta de tensão (2.4.38). A transformada de Laplace desta equação, com a utilização conjunta da propriedade de transformação da integral no tempo e do teorema da convolução¹, gera, (Fodor, 1965),

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \left[\frac{d\varepsilon_{ij}(t')}{dt'} \right] \bar{\phi}(s) \quad (2.4.45)$$

Se a função de deformação específica imposta é tomada como:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_0(t) \quad (2.4.46)$$

onde ε_0 assume valor constante, tem-se que

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s^2} \bar{\phi}(s) \quad (2.4.47)$$

Assim pode-se concluir que:

$$\bar{\phi}(s) = \frac{s^2}{\varepsilon_0} \bar{\sigma}(s) \quad (2.4.48)$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\bar{\phi}(s) \right] \quad (2.5.49)$$

A Equação (2.4.44) permite a determinação de $\Psi(\mathbf{t})$. Pode-se definir a função $\mathbf{E}(\mathbf{t})$ como se fosse o módulo de elasticidade dependente do tempo, também denominado *uniaxial relaxation function*, e o módulo $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ denominado *constrained relaxation function*. As expressões para estes dois parâmetros são (Christensen, 1982),

$$E(s) = (3\bar{\phi}_d \bar{\phi}_h) / (\bar{\phi}_d + 2\bar{\phi}_h) \quad (2.4.50)$$

$$X(s) = (2\bar{\phi}_d + \bar{\phi}_h) / 3 \quad (2.4.51)$$

¹ A propriedade da transformada de Laplace de integral no tempo estabelece $L = \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} F(s)$. O teorema da Convolução diz que, para $L\{f(x) \cdot g(x)\} = L\{f(x)\} * L\{g(x)\}$, onde L representa a transformação de Laplace expressa pela equação (84) e o símbolo * (asterisco) a convolução.

2.4.5 Modelagem por módulos e *compliances* complexos

De acordo com Kelly (2019), Mase (1970) quando um material viscoelástico é submetido a um carregamento de tensão unidimensional variando senoidalmente, $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, um estado estacionário será eventualmente alcançado, com uma resposta senoidal de deformação específica de mesma frequência angular, $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta)$ com a mesma frequência angular, mas defasada de um ângulo δ . No caso contrário, com a deformação específica sendo a variável controlada, também há o retardo na resposta da tensão por um ângulo de fase.

Considerando a resposta do material sob excitação dinâmica, percebe-se que o ângulo de fase representa uma forma de caracterizar materiais viscoelásticos. Assim, sob as bases iniciais da Lei Generalizada de Hooke, considerando os termos de excitação e resposta no domínio do tempo, respectivamente, $F_{11}(t)$ e $U_{11}(t)$ para o caso uniaxial de aplicação de força ou deformação, obtém-se o relacionamento, $F_{11}(t) = E(t)U_{11}(t)$, que segundo Linares (1997) origina a função característica do material, definidora de um $E(t)$ viscoelástico:

$$E(t) = \frac{F_{11}(t)}{U_{11}(t)} \quad (2.4.52)$$

Dito de outra forma e a guisa de exemplo, se $F_{11}(t) = A \sin 2\pi f t$ e $U_{11}(t) = B \sin 2\pi f t$, onde **A** e **B** são amplitudes e **f** frequência, não havendo defasagem entre a função excitação e função resposta, ter-se á que,

$$E = \frac{A}{B} \quad (2.4.53)$$

A defasagem dessa função indicaria a presença de um comportamento viscoelástico.

Levando-se em conta este caso de defasagem, a tensão e a deformação podem ser representadas graficamente pelas projeções verticais de dois vetores rotativos de módulo constante, girando a uma velocidade angular constante ω , conforme ilustrado na figura 31. A representação das respostas temporais de σ e ε é feita na figura 32.

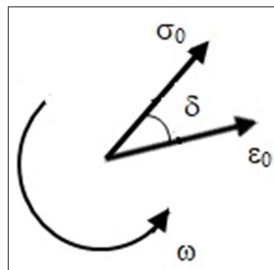


Figura 32. Vetores girantes de tensão e deformação específica.

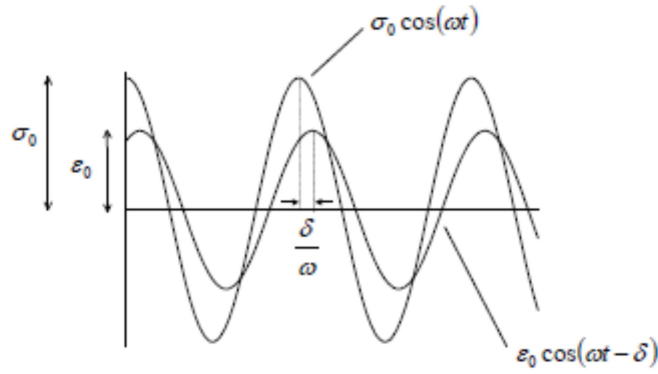


Figura 33. Tensão e deformação específica oscilatórios.

Fonte: Kelly (2019)

Escrevendo a função de tensão como uma quantidade complexa σ^* cuja parte real está em fase com a deformação específica e cuja parte imaginária está 90° fora de fase:

$$\sigma^* = \sigma'_0 \cos \omega t + i \sigma''_0 \sin \omega t \quad (2.4.54)$$

Considerando a defasagem δ entre os vetores tensão e deformação podemos representar as relações harmônicas entre os vários parâmetros:

$$\tan \delta = \sigma''_0 / \sigma'_0 \quad (2.4.55)$$

$$|\sigma^*| = \sigma_0 = \sqrt{(\sigma'_0)^2 + (\sigma''_0)^2} \quad (2.4.56)$$

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \cos \delta \quad (2.4.57)$$

$$\sigma''_0 = \sigma_0 \sin \delta \quad (2.4.58)$$

As razões de amplitudes de tensão e deformação definem o *módulo dinâmico absoluto* σ_0/ε_0 e a *compliance dinâmica absoluta* ε_0/σ_0 . Assim, as componentes em fase e defasadas dos vetores rotativos da figura 31 definem:

$$(a) \quad \text{o módulo de armazenagem} \quad E' = \frac{\sigma_0 \cos \delta}{\varepsilon_0} \quad (2.4.59)$$

$$(b) \quad \text{o módulo de perda} \quad E'' = \frac{\sigma_0 \sin \delta}{\varepsilon_0} \quad (2.4.60)$$

$$(c) \quad \text{a compliance de armazenagem} \quad J' = \frac{\varepsilon_0 \cos \delta}{\sigma_0} \quad (2.4.61)$$

$$(d) \quad \text{a compliance de perda} \quad J'' = \frac{\varepsilon_0 \sin \delta}{\sigma_0} \quad (2.4.62)$$

Expressando as funções de tensão e de deformação específica harmônicas na forma complexa tem-se uma generalização da descrição anterior do comportamento viscoelástico:

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (2.4.63)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \delta)} \quad (2.4.64)$$

O *módulo complexo* $E^*(i\omega)$ é definido, a partir de (2.4.63) e (2.4.64), como a quantidade complexa:

$$E^*(i\omega) = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \right) e^{i\delta} = E' + iE'' \quad (2.4.65)$$

Similarmente, a *compliance complexa* é definida como:

$$J^*(i\omega) = \frac{\varepsilon^*}{\sigma^*} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) e^{i\delta} = J' + iJ'' \quad (2.4.65)$$

2.5 Técnicas de *Moire*

Há diversas possibilidades de escolhas e métodos no sentido de mapear tensões e deformações em um dado material, desde os modelos matemáticos clássicos e computacionais e, mais, atualmente, chegando-se aos métodos fotoelásticos e fotomecânicos.

Considerando que tensões e deformações específicas são conceitos matemáticos que não podem ser medidos diretamente e sim determinados a partir da medida física dos deslocamentos. Assim, de acordo com Durelli (1967) na fotoelasticidade, o efeito óptico produzido em um volume (definido pelo caminho da luz e pela superfície da zona de observação perpendicular ao caminho da luz) está relacionado a uma tensão ou deformação específica calculada sobre este volume. Quando grades, ou moiré, são usados, o fenômeno físico produz deslocamentos diretamente. Ainda, de acordo com este mesmo autor, para o entendimento do fenômeno óptico, quando da utilização dos métodos *moiré* seja como técnica perfilométrica ou como um método fotoelástico, as propriedades eletromagnéticas e quânticas da luz são desprezadas.

A ideia de medir a deformação em um componente de engenharia anexando uma grade regular a ele e monitorar as mudanças nessa grade de amostra por comparação direta com uma grade não deformada é de certa antiguidade, com a discussão sobre o potencial da técnica de moiré, que remonta pelo menos a um século atrás (Walker, 1993). De fato, a medição da deformação no plano por moiré, como distinta da medição de deslocamento linear, permaneceu uma questão de pequena importância prática até os anos 60, pois a sensibilidade da técnica era limitada a grades de algumas centenas de linhas por polegada (até 40 linhas / mm), com o potencial de visualização medições de deformação na faixa de vários percentuais. Grades com densidades acima de 40 l/mm podem ser utilizadas, mas os métodos de observação dos padrões moiré devem ser modificados. Os padrões moiré produzidos por grades de baixa densidade podem ser observados a olho nu, utilizando luz comum. Para altas densidades o efeito da difração da luz torna-se dominante e luz coerente é necessária para a observação dos padrões moiré. Neste caso, as grades utilizadas não necessitam ser “régua” opacas e transparentes alternadamente, mas podem ser grades de fase, modificando a fase das frentes de onda incidentes em vez de sua amplitude.

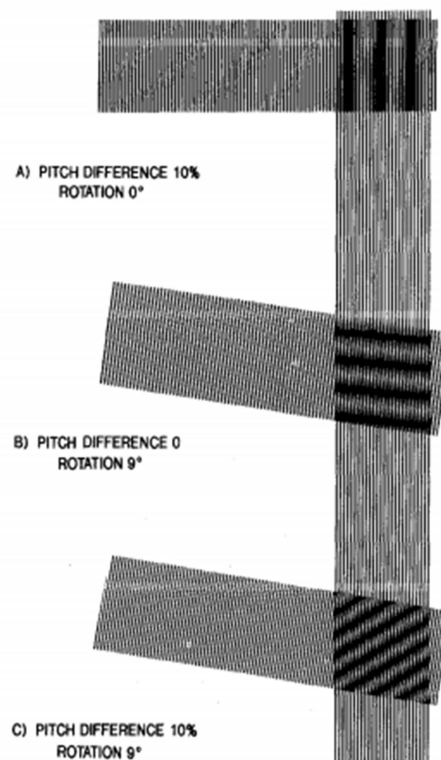


Figura 34. Geração de franjas de moiré geométricas.

Fonte: Walker, (1993)

O fenômeno Moiré é gerado quando telas de certa densidade de malha são superpostas, produzindo padrões ou franjas tipo onda, os quais movem-se quando suas posições relativas são exibidas (Sciammarella, 1982). O método denominado Moiré de sombra consiste na geração de um padrão de interferência com uma grade antes do objeto em estudo e sua sombra projetada sobre o mesmo objeto.

No momento em que duas ou mais grades ópticas- uma grade referencial que é fixa- e a segunda, a grade objeto, que sofre deslocamentos angulares. Tais grades possuem certa densidade e, ao serem superpostas, produz-se um movimento relativo entre essas, que, conseqüentemente, acaba gerando um conjunto de faixas semelhantes a ondas, com ângulo e período diferenciados das duas ou mais grades ópticas iniciais. A interação entre as grades de moiré resultam em “franjas de moiré”, o que permite determinar os esforços de tração de/em um dado material, a saber: o mapa de deformações na superfície do corpo, a distribuição de tensões, sob solicitações mecânicas usuais, isto é, carregamento uniaxial, flexão, torção, etc... Esse movimento entre as duas grades que gera um terceiro grupo de faixas é o que designamos por “padrões de moiré” ou “franjas padrão” e variam da cor escura (opaca)

gerada por ondas de interferência destrutiva até a cor clara total provocada por ondas de interferência construtiva.

Tais grades (também denominadas retículos) apresentam como formatos das linhas de grade que podem ser configurados de diversos modos, tais como linhas dispostas de modo paralelo, pontos equidistantes (ou “em cruz”), círculos equidistantes e linhas radiais. Em termos metodológicos, a definição do tipo de grade a ser utilizada, segundo Mazzeti et al (2004) deverá estar de acordo com o tipo de estudo a ser realizado.

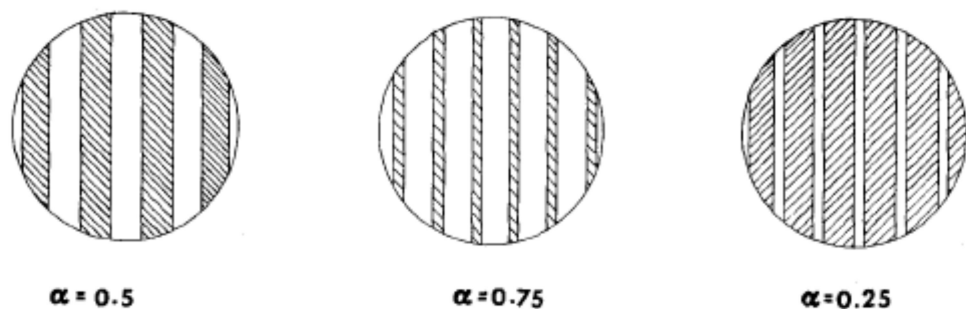


Figura 35. Características das grades de linhas.

Fonte: SCIAMMARELLA (1982).

Os métodos de moiré são classificados por SCIAMMARELLA (1982) em três métodos básicos:

- 1- Método de moiré intrínseco: provê o deslocamento dos pontos de uma superfície observada em relação a sua posição inicial.
- 2- Moiré de projeção: também conhecido como moiré de sombra, que prove o deslocamento dos pontos de uma superfície observada em relação a uma superfície de referência.
- 3- Moiré de reflexão: provê a inclinação do pontos de uma superfície observada em relação a um estado de referência

Compreendendo técnicas perfilométricas como aquelas que permitem analisar objetos ou ambiente do mundo real coletando dados sobre a suas formas, vale citar o trabalho de Lino (2008) que apresenta um detalhamento bastante produtivo das técnicas perfilométricas que basicamente se dividem em passivas e ativas.

As técnicas passivas (em que se destacam a estereoscopia e silhueta) envolvem a extração da superfície tridimensional de objetos e se caracterizam por não emitirem nenhum

tipo de radiação por si própria, mas apenas a iluminação do ambiente refletida. Já as técnicas ativas envolvem o uso de scanners ativos que emitem algum tipo de radiação (que podem incluir luz, ultra-som ou raio-X) e detectam a sua reflexão de maneira a sondar o objeto ou ambiente. No caso da revisão da literatura empreendida por Lino (2008), o autor se atém à projeção de luz branca e laser. Dentre essas técnicas, podem ser destacados o distanciômetros a laser, a triangulação, a projeção de luz estruturada, a projeção de luz codificada, a multiplexação temporal por códigos binários, a multiplexação temporal por códigos múltiplos, a codificação matemática, a codificação por vizinhança espacial, codificação direta, deslocamento de fase, entre outras.

Vale citar que dentre as técnicas ativas está a Técnica de Moiré, na qual a informação de distância é obtida a partir da interação entre um padrão de luz projetado sobre uma cena e um padrão de referência.

As técnicas de moiré (TM), segundo Lino (2008), constituem um conjunto de técnicas versáteis baseadas no fenômeno de moiré, empregadas na medição de deformações no plano e fora do plano, contornos topográficos, inclinação, curvatura e formas dos objetos. As TM mais empregadas são as de Projeção (*Phase Shifting*) e a de Sombra (*Shadow Moiré*).

Albiero et al., usando padrões de isodeformações gerados pela TM, descreve a técnica fotoelástica de moiré como:

família de métodos que são hábeis para gerarem microfotografias do objeto de estudo, assim como de determinarem a distribuição de tensão e deformação em objetos a partir de uma carga controlada, isto ocorre devido a padrões de regiões claras e escuras geradas por uma grade sobreposta.

(ALBIERO et al. Determination of wood specimens using isostrain patterns generated for Moiré Technique. BioEng, Campinas, 1(2):163-172, mai/ago.,2007)

Especificamente, na técnica de moiré de sombra, aplica-se apenas um retículo, que fica fixado em frente ao corpo de prova sendo denominado como grade de referência. Na técnica de moiré de sombra, o retículo cujas faixas claras são transparentes é colocado à frente do objeto. Quando o retículo é iluminado por uma fonte, a sombra dele é projetada sobre a superfície do objeto, gerando o retículo modelo. A interação entre essas duas grades gera o padrão de franjas moiré. Já quanto à técnica de projeção, o retículo é projetado sobre a superfície do objeto, modulando ou acompanhando a superfície, gerando o retículo modelo. O retículo projetado sobre o plano de referência dá origem ao retículo de referência e as franjas são observadas sobrepondo as duas imagens.

Ademais, a técnica de moiré apresenta mais vantagens, se comparada a outros modelos, justamente por ser rápida e simples, exigir aparato experimental convencional e de baixo custo e, por fim, oferecer um processamento de imagens e aplicação mais simples.

No caso deste trabalho, reiteremos a pertinência e relevância da associação de técnicas de moiré a uma caracterização viscoelástica do material estudado justamente por acreditar que aliar duas abordagens permite uma compreensão mais exata do comportamento viscoelástico de um material. Além disso, é importante frisar que a técnica de moiré não oferece diretamente dados de deformação e tensão. Desse modo, vale citar autores como Cavaco e Silva (2002), Mazzeti Filho (2004) e Lino (2002), Lino (2005), cujas contribuições foram a de trazer reflexões de ordem metodológica no sentido de traçar um modelo de implementação de métodos numéricos e/ou modelos matemáticos específicos que foram combinados à técnica de moiré. Desse modo, segundo os motivos supracitados, optou-se pelo método para conduzir este trabalho, especificamente, o método conhecido como *Moiré de Sombra*.

Tratando, propriamente, a técnica de moiré, a justificativa por tal abordagem tem respaldo justamente por conta de a técnica, enquanto método óptico, envolver um ensaio não destrutivo, bem como, devido à sua natureza de não-contato, a técnica não altera a resposta dos objetos alvos de estudo.

Nesse caso, vale citar Gomes et al (2009) que preconizam que tais técnicas de moiré são favoráveis no que toca à versatilidade, agilidade e facilidade de coleta de dados, além de que oferecem relativa confiabilidade e, principalmente, não exigem o contato com o corpo em estudo.

Sobre Técnica de Moiré, destaca-se no trabalho de pesquisa de LINO (2008), que aplicou duas técnicas à Moiré de Sombra, Multiplicação de Franjas e Deslocamento de Fase, produzindo, ao final, em um modelo digital topográfico (MDT) da superfície da pêra. Os resultados do estudo de Lino evidenciam que as Técnicas de Moiré, além de apresentarem alta precisão e exatidão, podem ser aplicadas com resultados satisfatórios na topografias de objetos com superfície irregular, tais como órgãos vegetais.

Também, vale trazer o trabalho de Mazzeti (2004), que também ratificou a viabilidade e elevada precisão da Técnica Moiré de Sombra para determinar as posições relativas de um disco giratório flexível, simulando o corte mecanizado de cana-de-açúcar.

O estudo empreendido por Gazzola (2013), lançando mão da técnica de moiré por *phase-shifting* para determinação de tensões e deformações, pautou-se em uma abordagem

qualitativa e quantitativa em que os resultados gerados pela técnica de moiré foram comparados com outros resultados obtidos por ensaio experimental de extensometria elétrica e simulação computacional. As conclusões a que chegam Gazzola apontam que a técnica de moiré mostra-se hábil, qualitativamente, em determinar campo de deslocamento e, quantitativamente, em determinar campo de deslocamento, deformações e tensões.

Com efeito, o uso de métodos fotoelásticos ganhou um importante espaço na comunidade científica graças aos avanços no desenvolvimento de tecnologias de captura e processamento de imagens, como atesta Fujita (2015), bem como por permitir “a visualização da distribuição de tensões e deformações nos corpos em estudo de maneira rápida, confiável e sem distinção de suas características individuais” (GAZZOLA, 2013). Também, SILVA (2014) cita que, dentre os métodos perfilométricos, mostrados na literatura pertinente à área, a Técnica de *Moiré* se mostra como uma ferramenta científica confiável, considerada rápida, de baixo custo e exequível.

HU apud Lino (2002) afirma que as Técnicas de *moiré* (TM), de Sombra e Projeção, são as técnicas perfilométricas mais comumente utilizadas devido principalmente, à sua simplicidade e rapidez de medição, tendo sido alvo de freqüentes estudos e apresentando vários tipos de aplicações. Nas TM tradicionais muitas informações contidas entre duas franjas vizinhas são perdidas. Por isso, a partir dos anos 70, foram desenvolvidas várias técnicas de medição de fase, que aplicados às TM aumentam grandemente a sua resolução, acurácia e repetitibilidade.

A técnica de medição de fase mais comumente utilizada é a Técnica do Deslocamento de Fase (*Phase shifting*), a qual necessita 3 ou 5 imagens, com pequenos deslocamentos das franjas entre elas, com a finalidade de gerar o mapa de fase e a superfície de contorno dos objetos em estudos. Essa técnica também pode ser aplicada a outras técnicas óticas além das TM.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo apresentará a metodologia empregada para os ensaios experimentais. Serão descritas as características físicas dos espécimes empregados na fase experimental deste estudo, assim como será relatado todo o processo de trabalho, incluindo uma descrição sobre os equipamentos e instrumentos utilizados, o local da investigação e a metodologia aplicada.

Serão apresentados os ensaios de compressão em amostras de espécimes vegetais em forma geométricas cilíndricas submetidas a uma análise mecânica prévia e a utilização da técnica moiré com objetivo de se caracterizar o comportamento do material vegetal diante de forças e deformação.

3.1 Ensaios Uniaxiais e Constritos de Compressão

Para se atingir o primeiro objetivo, na investigação das propriedades mecânicas dependentes do tempo de cana-de-açúcar, os espécimes foram submetidos aos ensaios monotônicos de carregamento quasi-estático em compressão uniaxial e restrita.

Os colmos de cana-de-açúcar foram aleatoriamente coletados de plantação da cultura e separados em feixes, cada um deles representativo de uma área no campo (talhão) em processo de colheita (Figura 35). As amostras representam duas das variedades mais cultivadas no estado de São Paulo, especificamente a RB 855156 e IAC65-155, exibindo em termos médios, aferição para colheita, conteúdo de sólidos solúveis de 18,89 BRIX, sacarose% (Pol) = 16,34, umidade = 68,11% e teor de fibra = 13,00%.



Figura 36. Amostras de cana-de-açúcar de talhões de campo

Os ensaios de compressão uniaxial simples em parênquima, doravante denominados **ENSAIOS 1**, foram realizados no Laboratório de Ensaios em Materiais Biológicos da FEAGRI/UNICAMP. O equipamento atuante nestes ensaios foi a Máquina Universal de Ensaios OTAWA (Cannery Machinery), ilustrada na figura 36, modelo ST500, governada por motor elétrico-inversor-fuso, com célula de carga de 500 Kgf nas taxas de deformação (*deformation rate*) de 0.4, 0.8, 1.2 e 2.0 mm/s, carregadas até a falha. Um número de 6 replicações foi mantida para os casos.

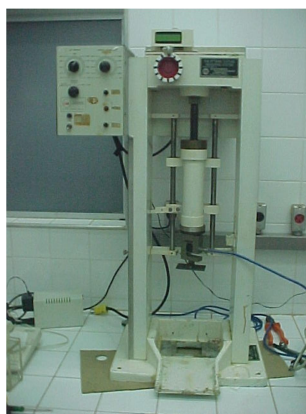


Figura 37. Máquina Universal de Ensaios OTAWA.

As amostras de formato cilíndrico foram confeccionadas por vazadores de ponta cônica (dimensões $\varnothing = 19,22$ mm e $h = 22,66$ mm), atuando na direção axial da região intermodal do colmo, envolvendo apenas o tecido do parênquima em sua direção longitudinal. As medições do corpo de prova, diâmetro e comprimento, foram efetuadas com paquímetro digital MTX, resolução 0,01 mm.

A tabela 03 exibe as dimensões das amostras (diâmetro e comprimento) em função da taxa de deformação.

Tabela 03. Dimensões de espécimes cilíndricos do parênquima de cana-de-açúcar e valores de taxa de deformação para ensaios uniaxiais

Taxa de Deformação (mm/s)	Altura \pm SD (mm)	Área de seção transversal \pm SD (mm ²)
0,4	22,20 \pm 0,66	285,98 \pm 3,81
0,8	22,52 \pm 0,94	285,18 \pm 3,71
1,2	22,11 \pm 0,91	280,46 \pm 12,02
2,0	22,51 \pm 0,77	283,35 \pm 5,83

Na modalidade de compressão restrita do parênquima, corpos de prova foram confeccionados numa quantidade de 10 espécimes cilíndricos de cana-de-açúcar (*Saccharum*

spp.) com diâmetro de $11,75 \pm 0,16$ (12 mm), comprimento de $49,53 \pm 1,24$ mm e área de seção transversal de $108,40 \pm 2,91$ mm² foi carregada axialmente a uma taxa de deformação específica de 0,05 mm/s. Estes ensaios, doravante denominados **ENSAIOS 2**, foram conduzidos em uma máquina de ensaio GR048 EMIC DL, com acionamento mecânico pneumático, mantendo 300 KN de capacidade de carga e realizado na célula de carga Z (2000 Kgf), instalada no Laboratório de Estruturas da FEAGRI/UNICAMP.

Para calcular o coeficiente de Poisson dependente do tempo $\nu(t)$, um arranjo do tipo “rigid die” foi selecionado. Na figura 37 observa-se a representação do ensaio constrito.

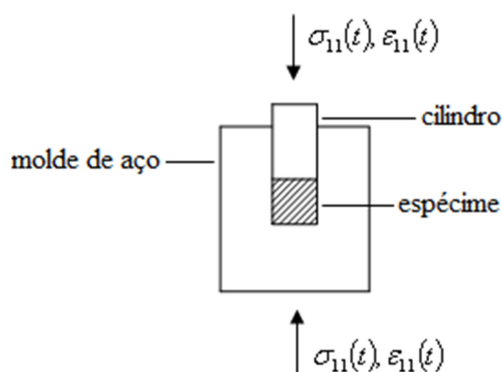


Figura 38. Arranjo “rigid die” para carregamento constrito de espécimes cilíndricos.

Na modalidade de compressão uniaxial simples em corpo integral, os ensaios, doravante denominados **ENSAIOS 3**, também foram conduzidos em uma máquina de ensaio OTAWA, descrita anteriormente, envolvendo os casos a diferentes taxas de deformação, respectivamente, 0,4, 0,8, 1,2 e 2,0 mm/s, carregadas até a falha. Para cada caso foi mantido um número de 6 replicações. As amostras cilíndricas integrais da região internodal, envolvendo tanto casca quanto parênquima em sua composição, foram preparadas diretamente dos colmos de cana-de-açúcar utilizando-se de serra de fita para corte, morsa para fixação dos espécimes e esquadro para manter a perpendicularidade da superfície de corte com o eixo longitudinal.

A tabela 04 exibe as dimensões das amostras (diâmetro e comprimento) em função da taxa de deformação para os ENSAIOS 3.

Tabela 04. Dimensões de espécimes cilíndricos integrais de cana-de-açúcar e valores de taxa de deformação para ensaios uniaxiais

Taxa de Deformação (mm/s)	Altura \pm SD (mm)	Área de seção transversal \pm SD (mm ²)
0,4	39,67 \pm 0,49	246,80 \pm 18,28
0,8	38,72 \pm 0,59	261,20 \pm 33,54
1,2	38,78 \pm 0,47	248,57 \pm 47,65
2,0	38,70 \pm 0,65	242,31 \pm 18,02

3.2 Ensaios de Compressão Diametral associados à *Moiré*

Para investigar o comportamento mecânico de materiais sujeitos a um estado triplo de tensões e características não-lineares da relação tensão-deformação foram realizados ensaios de compressão diametral entre placas planas e paralelas, doravante denominados **ENSAIOS 4**, notadamente utilizando-se da metodologia de Lobo-Carneiro (conhecida como “*Brazilian Test*”). Neste trabalho, além da cana-de-açúcar, material vegetativo objeto principal da investigação, também espécimes de borracha e madeira foram avaliados, de tal forma que comparações fossem realizadas no tocante a anisotropia e homogeneidade.

O equipamento utilizado na realização dos ENSAIOS 4 foi a máquina de ensaio EMIC DL30000F do Laboratório de Estruturas da Faculdade de Engenharia Agrícola (FEAGRI), com taxa de deformação constante (0,5 mm/min). Este equipamento fornece dados de tempo (s), deformação (mm) e Força (Kgf). Para verificar a escala de trabalho, corpos de provas de sacrifício foram submetidos previamente à uma carga e deformação máximos.

As características dimensionais dos corpos de provas (ϕ e L), taxa de deformação (v), o passo de grade de Ronchi, força e deslocamento máximos são apresentados na tabela 05, tabela 06 e tabela 07, respectivamente representativas dos materiais, borracha, madeira e cana-de-açúcar.

Tabela 05. Dados de corpos de prova de borracha em ensaio de compressão diametral associada a *moire*.

BORRACHA						
CP	ϕ (mm)	L (mm)	V (mm/min)	Grade (mm)	Fmáx (Kgf)	dmáx (mm)
B1F	68,85	77,05	0,8	0,1	115,38	4,301
B1L	68,85	77,05	0,8	0,1	123,62	3,812
B2F	38,07	76,66	0,8	0,1	71,08	6,594
B2L	38,07	76,66	0,8	0,1	56,66	4,021
B3F	18,31	31,83	0,8	0,1	146,29	4,665
B3L	18,31	31,83	0,8	0,1	91,69	3,917

Tabela 06. Dados de corpos de prova de madeira (*Eucalyptus citriodora*) em ensaio de compressão diametral associada a *moire*.

MADEIRA						
CP	ϕ (mm)	L (mm)	V (mm/min)	Grade (mm)	Fmáx (Kgf)	dmáx (mm)
MF1	69,08	76,13	1,0	0,1	1800,75	3,237
MF4	38,01	76,57	0,8	0,1	923,04	2,146
MF2	22	38	1,0	0,1	736,58	5,158
MF3	18,02	33,42	0,8	0,1	308,02	1,284
ML1	69	76	1,0	0,1	1829,60	2,960
ML2	22,01	38	1,0	0,1	732,46	3,488
ML4	38	76	0,8	0,1	924,07	1,748
ML3	18,02	33,42	0,8	0,1	309,05	2,082

Tabela 07. Dados de corpos de prova de cana-de-açúcar (*Sacharum spp*) em ensaio de compressão diametral associada a *moire*.

CANA-DE-AÇÚCAR						
INTEGRAL DIAMETRAL-LATERAL						
CP	ϕ (mm)	L (mm)	V (mm/min)	Grade (mm)	Fmáx (Kgf)	dmáx (mm)
CID1	32	77	0,5	0,1	124,65	1,808
CID2	33	40	0,5	0,1	70,05	2,901
CID3	32	32	0,5	0,1	39,15	3,260
CIL1	29,44	77	0,5	0,4	127,74	2,105
CIL2	29,42	42,13	0,5	0,4	79,32	1,618
CIL3	29,24	31,29	0,5	0,4	69,02	2,466
ID41	29,96	77	0,5	0,6	93,75	1,446
ID42	33	40	0,5	0,6	100,96	3,038
ID43	32	32	0,5	0,6	84,47	4,142
MCID6	29,05	58,50	0,5	0,6	149,38	4,039
MCIL7	29	58	0,5	0,4	125,68	3,966
PARENQUIMA DIAMETRAL/LATERAL						
CP	ϕ (mm)	L (mm)	V (mm/min)	Grade (mm)	Fmáx (Kgf)	dmáx (mm)
MCPD1	19,15	31,11	0,5	0,4	34	3,181
MCPL2	19,03	31,01	0,5	0,4	51,51	5,509
MCPD3	15,97	39,88	0,5	0,4	60,78	3,936
MCPL4	16,88	40,47	0,5	0,4	48,42	4,979
MCPD5	18,86	57,99	0,5	0,6	70,05	2,645

Técnica de *moiré* de sombra associada à compressão diametral

O método denominado *moiré* de sombra foi utilizado para gerar os padrões de interferência sobre a superfície dos espécimes. A técnica em questão foi selecionada para os ensaios porque o movimento relativo das franjas permite a geração de padrões diferenciados associados ao carregamento do espécime contínuo. Esses padrões são formados pelas deformações do espécime, que infere distribuições de tensão.

A técnica em questão, com o arranjo experimental ilustrado na figura 39, foi realizada pela iluminação do objeto em estudo depois de uma grade por uma fonte de luz (no caso em questão um projetor multimídia), gerando, deste modo, uma interferência óptica entre a grade e sua sombra. A geração de dados permite projetar curvas de isodeformação.

Os carregamentos foram realizados numa sequência pré-especificada, com intervalos aproximados de 10 Kgf ou 20 Kgf, para permitir a coleta conjunta de dados gerados pela prensa e das imagens de interferência sobre o objeto.

As imagens das franjas interferométricas de Moiré (padrões), projetadas sobre o corpo de prova, foram capturadas por câmera digital Samsung HD de resolução 1920x1080, com 6.4 Mega pixel. Os padrões são enviados ao computador para posterior processamento.

A guisa de exemplo, a figura 40 mostra um conjunto parcial de fotos, obtidas por câmera digital, de um corpo de prova confeccionado com borracha em compressão diametral e produzindo interferência óptica de *moiré*.

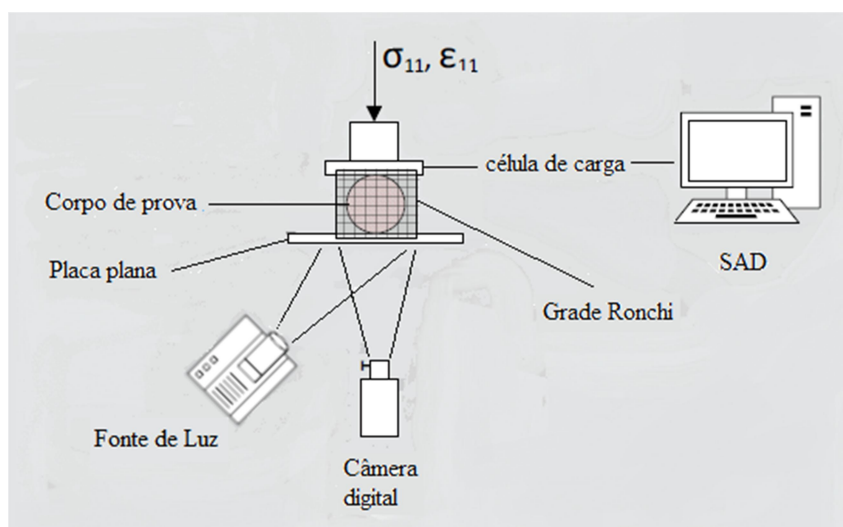


Figura 39. Arranjo experimental para geração dos padrões de moiré em compressão diametral de cilindro entre placas planas e paralelas.

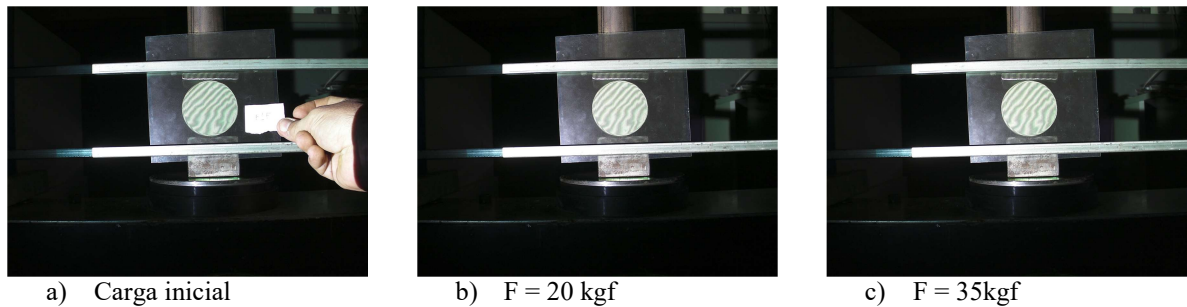


Figura 40. Conjunto de 3 imagens de fotografias dos padrões de *moiré* tomadas do modelo cilíndrico em carregamento diametral, grade 0,1 mm.

Com o uso da ferramenta ImageJ®, as imagens de corpos com franjas *moiré* são posteriormente submetidas a tratamento para seleção da região de interesse, aumento de contraste, filtragem para eliminação de ruídos, transformação de formato JPEG para Bitmap, a partir de resultado ilustrado na figura 41.

Desta forma, utilizando o método de subtração de campo inteiro conforme descrito por POST et. al (1994), pela subtração de intensidade pixel a pixel de uma imagem referida a um carregamento X_i da de uma imagem num nível de carregamento X_{i+1} , permite a verificação do deslocamento das curvas de isodeformação. Neste trabalho o processo de subtração avaliou dois estados consecutivos em relação ao estado inicial de carregamento com o emprego do dispositivo do ImageJ®, “*Image calculator*”, conforme exemplo (figura 42).

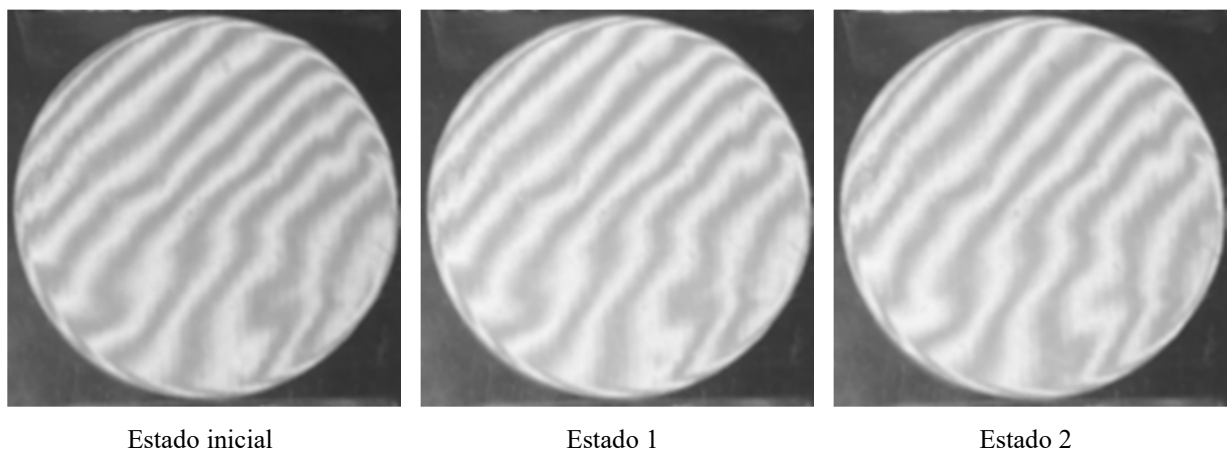


Figura 41. Resultados dos tratamentos de seleção, conversão de formato, contraste e filtragem em imagens de *moiré*.

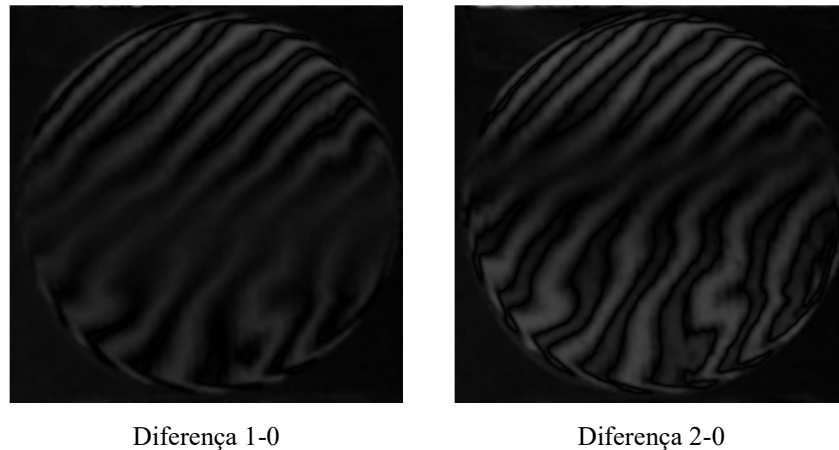
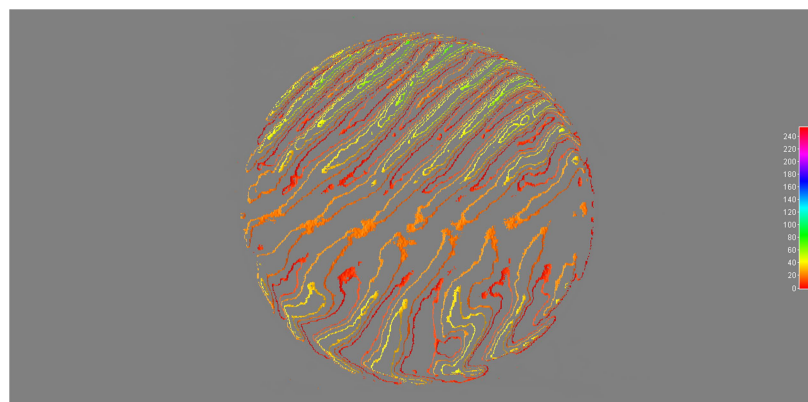


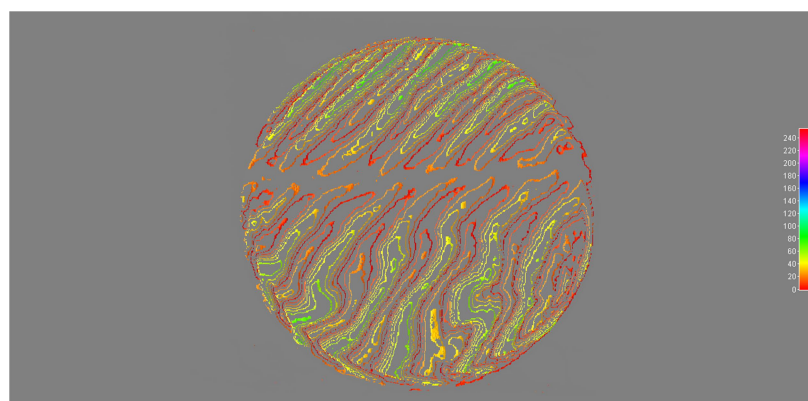
Figura 42. Processo de subtração aplicado ao estado 1 e ao estado 2 de carregamentos.

Os resultados dos deslocamentos podem ser visualizados com a utilização da ferramenta “*Surface Plot*” do ImageJ®, com intensidades de pixels registradas na faixa de 0-240 e cores associadas (figura 43).

Assim, com a observação das curvas isóclinas e isocromáticas, inferências são tomadas para caracterizar a isotropia do material, concentração de tensões, dentre outras informações de maneira qualitativa e quantitativa.



Superfície de diferença 1



Superfície de diferença 2

Figura 43. Resultados de deslocamentos de franjas

Técnica de *moiré* de sombra associada à compressão uniaxial em cana-de-açúcar

Levando em consideração o material da cana-de-açúcar, avaliações dos padrões *moiré* também foram levadas a cabo para o caso de carregamento uniaxial. Assim, as características dimensionais dos corpos de provas (ϕ e L), taxa de deformação (v), o passo de grade de Ronchi, força e deslocamento máximos são apresentados na tabela 08.

Tabela 08. Dados de corpos de prova de cana-de-açúcar (*Sacharum spp*) em ensaio de compressão uniaxial associada a *moire*.

CANA-DE-AÇÚCAR						
INTEGRAL AXIAL						
CP	ϕ (mm)	L (mm)	V (mm/min)	Grade (mm)	Fmáx (Kgf)	dmáx (mm)
CIA1	31,15	69,03	0,5	0,4	361,59	6,934
CIA2	29,55	59,65	0,5	0,4	319,36	6,901
CIA3	30,38	46,7	0,5	0,4	428,55	4,692
PARÊNQUIMA AXIAL						
CP	ϕ (mm)	L (mm)	V (mm/min)	Grade (mm)	Fmáx (Kgf)	dmáx (mm)
MAP1	20,19	56,68	0,5	0,4	75,20	7,149
MAP2	20,16	35,17	0,5	0,4	86,53	4,129
MAP3	20,40	43,28	0,5	0,4	92,72	5,273

Parâmetros da compressão diametral de corpo cilíndrico entre placas planas

No tocante ao desenvolvimento de tensões e deformações na região de contato cilindro-placa, utilizam-se das equações iterativas (tabela 09) para avaliar os parâmetros b (meia-largura da área de contato), D (deformação total) e Z. Isto é obtido de forma iterativa procurando a convergência de dados. Neste caso, utilizou-se a ferramenta de otimização “Solver” do Microsoft Excel®, por processo de diferenças mínimas, a partir dos dados de carregamento, dimensões do objeto e dos módulos elástico, E, e de Poisson ν . Na figura 44 representa-se um extrato dos dados obtidos no Solver para o corpo de prova CID1 (vide tabela 05).

Tabela 09. Parâmetros da compressão diametral de cilindro entre placas planas

(64)	(65)	(66)	(67)
$E = \frac{8(1-\nu^2)Z^2F}{\pi D}$	$Z = \frac{R}{b}$	$\frac{D}{d} = \frac{1}{2Z^2} \left[\ln(2Z) + \frac{1}{2} \right]$	$D = \frac{-b^2}{R} \left[\ln\left(\frac{b}{2R}\right) - \frac{1}{2} \right]$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
E	1,75E+09		t (s)	F (N)	Numerador	Denominador	b calc		b solver	dif		D
ni	0,4		0,016667	252,56	-0,00695	-23475423002	0,000738		0,000738	3,22707E-10		0,000145226
R	0,016		0,5	262,67	-0,00723	-23418119663	0,000745		0,000745	6,41795E-10		0,000147924
			1,4667	272,77	-0,00751	-23363025293	0,000753		0,000753	8,56748E-10		0,000150563
			2,2	282,87	-0,00779	-23309924844	0,00076		0,00076	8,37508E-10		0,000153151
			3,1333	292,97	-0,00806	-23258677631	0,000767		0,000767	4,65475E-10		0,00015569
			3,9167	303,08	-0,00834	-23209117189	0,000774		0,000774	7,07119E-10		0,000158185
			5,45	313,18	-0,00862	-23161219523	0,000781		0,000781	4,19792E-10		0,000160633
			6,55	323,28	-0,0089	-23114843494	0,000788		0,000788	1,10088E-09		0,000163039
			7,35	333,38	-0,00918	-23069885474	0,000794		0,000794	1,33549E-09		0,000165405
			8,7	343,49	-0,00945	-23026222760	0,0008		0,0008	1,73786E-09		0,000167735
			9,9333	353,59	-0,00973	-22983850853	0,000807		0,000807	4,54304E-10		0,000170027
			11,367	363,69	-0,01001	-22942681800	0,000813		0,000813	1,15842E-09		0,000172284
			12,583	373,79	-0,01029	-22902622972	0,000819		0,000819	2,73718E-11		0,000174507
			14,133	383,9	-0,01057	-22863602835	0,000825		0,000825	7,38626E-10		0,000176701
			15,967	394	-0,01084	-22825624979	0,00083		0,00083	7,17625E-10		0,000178861

Figura 44. Uso do Solver para otimização de dados

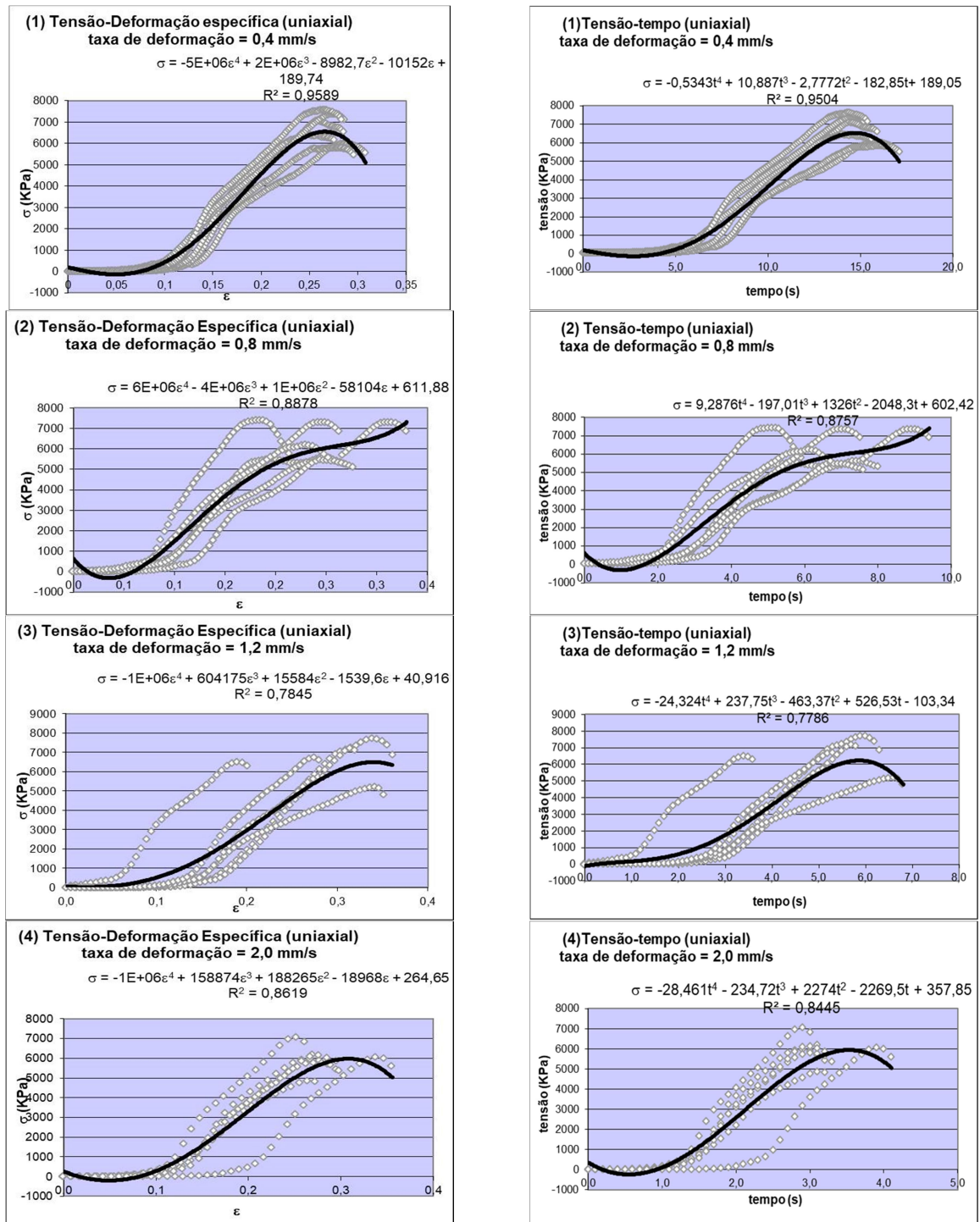
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Ensaio de Compressão Uniaxial e Restrita em Cana-de-açúcar

Os resultados dos testes uniaxiais simples e restritos produziram curvas de tensão-deformação específica e tensão-tempo, a partir das quais os $E(t)$ e $\nu(t)$ dependentes do tempo foram obtidos. Os dados experimentais foram submetidos ao programa EXCELL®, assim foi realizado um tratamento adequado para o ajuste das curvas polinomiais. As funções viscoelásticas de fluência e relaxamento foram finalmente obtidas por meio da transformada de Laplace, como descrito a seguir. A influência da taxa de deformação também foi investigada em testes uniaxiais.

4.1.1 Ensaio 1: Compressão uniaxial simples do parênquima

Os resultados dos testes uniaxiais simples mostram os conjuntos de curvas tensão-deformação específica e tensão-tempo para cada taxa de deformação (0,4 mm/s, 0,8 mm/s, 1,2 mm/s e 2,0 mm/s, respectivamente). Estes conjuntos são apresentados na Figura 45 (a e b). Um ajuste polinomial de grau 4, juntamente com o coeficiente de determinação R^2 , foi realizado. Uma boa correlação foi exibida pelos dados com os coeficientes R^2 produzindo valores de 0,7786 a 0,9589.



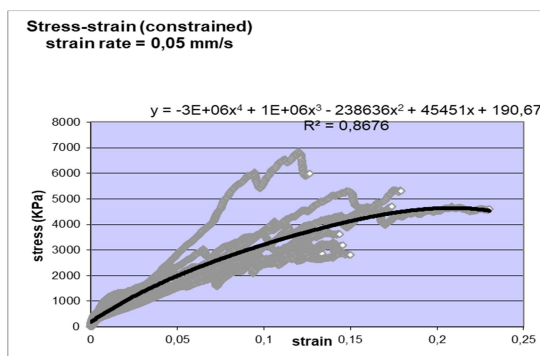
a) Tensão-deformação específica

b) Tensão-tempo

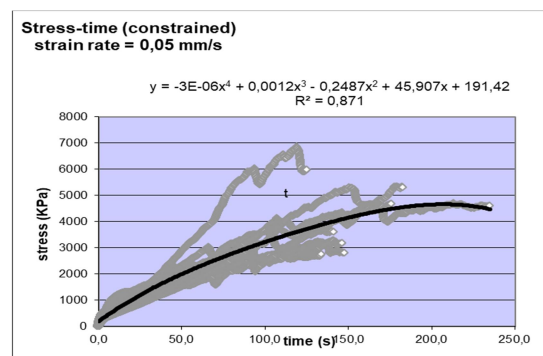
Figura 45. Respostas tensão-deformação específica e tensão-tempo na compressão uniaxial do parênquima do colmo

4.1.2 Ensaios 2: Compressão uniaxial restrita do parênquima

Os resultados dos testes uniaxiais restritos mostram o conjunto de curvas tensão-deformação específica ou tensão-tempo para uma taxa de deformação de 0,05 mm/s. Na figura 46 apresentam-se os conjuntos de curvas tensão-deformação específica ou tensão-tempo, para 10 repetições em cada experimento. Um ajuste polinomial de grau 4 mostrou uma boa correlação dos dados, produzindo valores dos coeficientes R^2 de 0,8676 e 0,871, respectivamente.



a) $\sigma(\varepsilon) = -3 \cdot 10^6 \varepsilon^4 + 10^6 \varepsilon^3 - 238636 \varepsilon^2 + 45451 \varepsilon + 190,67$



b) $\sigma(t) = -3 \cdot 10^{-6} t^4 + 0,0012 t^3 - 0,2487 t^2 + 45,907 t + 191,42$

Figura 46. Respostas tensão-deformação específica e tensão-tempo na compressão restrita.

4.1.3 Ensaios 3: compressão uniaxial simples de colmos integrais

Os resultados dos testes uniaxiais simples em colmos integrais, ilustrados na figura 47, mostram o conjunto de curvas tensão-deformação específica para cada taxa de deformação (0,4 mm/s, 0,8 mm/s, 1,2 mm/s e 2,0 mm/s, respectivamente). Em cada caso um número de 6 repetições foi realizado. Os dados foram correlacionados a uma curva de ajuste polinomial de grau 4, produzindo valores dos coeficientes R^2 variando de 0,375 a 0,8274.

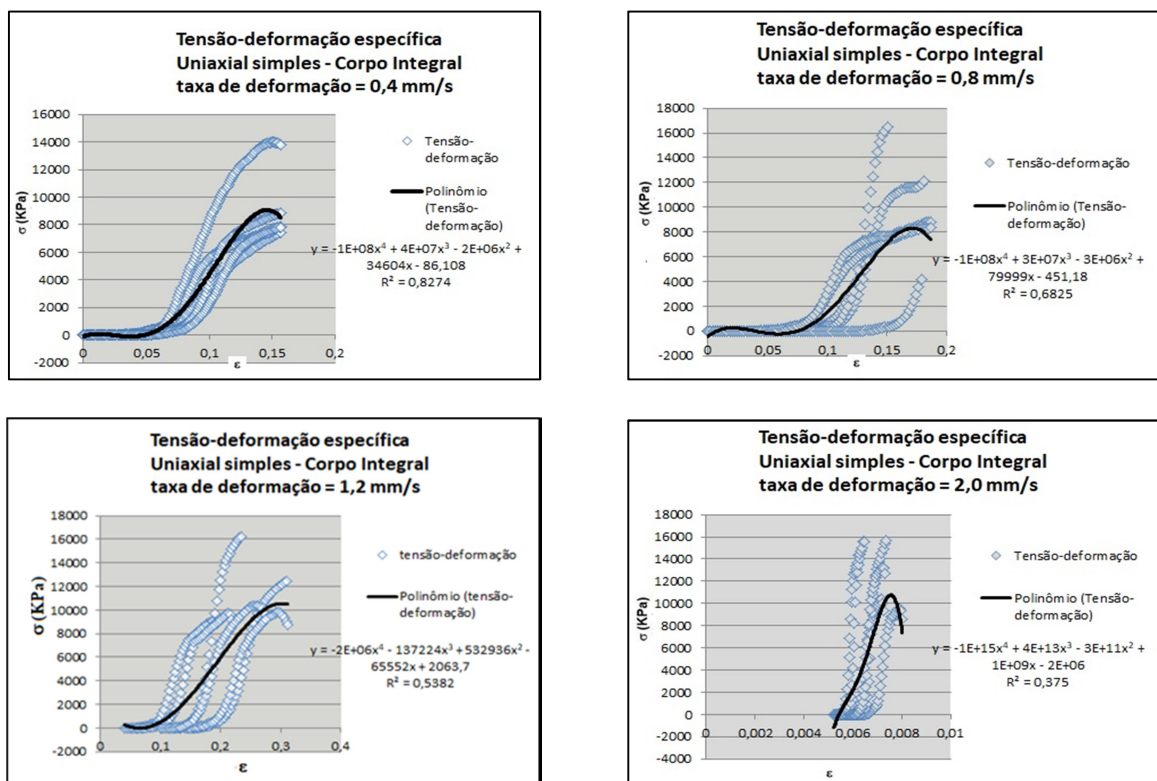


Figura 47. Curvas tensão-deformação específica e influência da taxa de deformação para o ensaio uniaxial em colmos integrais.

4.1.4 Análise de resultados do ponto de vista da viscoelasticidade

Considerando os resultados obtidos nos ensaios anteriores, relacionados à porção intermodal do parênquima e integral de colmos de cana-de-açúcar, uma análise do comportamento material sob o ponto de vista da teoria da viscoelasticidade foi realizada.

Os ENSAIOS 1 possibilitam a obtenção direta do parâmetro viscoelástico $E(t)$, $\psi(t)$ e $\phi(t)$. Desta forma, a partir dos resultados da coluna a (figura 45), o relacionamento da tensão σ com a deformação específica ε , [$\sigma = f(\varepsilon)$] é expresso por:

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -5.10^6\varepsilon^4 + 2.10^6\varepsilon^3 - 8982,7\varepsilon^2 - 10152\varepsilon + 189,74 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = 6.10^6\varepsilon^4 - 4.10^6\varepsilon^3 + 10^6\varepsilon^2 - 58104\varepsilon + 611,88 \quad (4.2)$$

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -10^6\varepsilon^4 + 604175\varepsilon^3 + 15584\varepsilon^2 - 1539,6\varepsilon + 40,916 \quad (4.3)$$

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -1.10^6\varepsilon^4 + 158874\varepsilon^3 + 188265\varepsilon^2 - 18968\varepsilon + 264,65 \quad (4.4)$$

Tomando a derivada da função de tensão $\sigma(\varepsilon)$ obtém-se a razão de rigidez ou elasticidade tensão-deformação específica, a função $E(\varepsilon)$, de tal forma que:

$$E(\varepsilon) = \dot{\sigma}(\varepsilon) \quad (4.5)$$

Procedendo com as derivadas, respectivamente, em (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) vem:

$$E_{0,4}(\varepsilon) = -20.10^6\varepsilon^3 + 6.10^6\varepsilon^2 - 17965,4\varepsilon - 10152 \quad (4.6)$$

$$E_{0,8}(\varepsilon) = 24.10^6\varepsilon^3 - 12.10^6\varepsilon^2 + 2.10^6\varepsilon - 58104 \quad (4.7)$$

$$E_{1,2}(\varepsilon) = -4.10^6\varepsilon^3 + 1812525\varepsilon^2 + 31168\varepsilon - 1539,6 \quad (4.8)$$

$$E_{2,0}(\varepsilon) = -4.10^6\varepsilon^3 + 476622\varepsilon^2 + 376530\varepsilon - 18968 \quad (4.9)$$

Se a função deformação específica imposta é tomada como:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(t) \quad (4.10)$$

Considerando a taxa de deformação (v) e o comprimento inicial do corpo de prova (L_0) (Tabela 03), a função deformação específica torna-se:

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{v \cdot t}{L_0} \quad (4.11)$$

As funções governantes desempenhadas pela prensa de ensaio convencional para carregamento axial de amostras de cana-de-açúcar (*Saccharum spp.*) foram respectivamente:

$$\varepsilon_{11}(t) = 0,0180t \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{11}(t) = 0,0355t \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{11}(t) = 0,0543t \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_{11}(t) = 0,0888t \quad (4.15)$$

Para a obtenção da função viscoelástica módulo de *relaxation* simples, $E(t)$, no domínio do tempo, substituímos as funções deformação específica, (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15), respectivamente em (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9):

$$E_{0,4}(t) = -116,64t^3 + 1944t^2 - 323,37t - 10152 \quad (4.16)$$

$$E_{0,8}(t) = 1073,73t^3 - 15123t^2 + 71000t - 58104 \quad (4.17)$$

$$E_{1,2}(t) = -640,41t^3 + 5344,21t^2 + 1692,42t - 1539,6 \quad (4.18)$$

$$E_{2,0}(t) = -2800,91t^3 + 3758,37t^2 + 33435,86t - 18968 \quad (4.19)$$

A influência da taxa de deformação sobre as funções viscoelásticas $E(t)$, representadas pelas equações (4.16) a (4.19), é observada na figura 48.

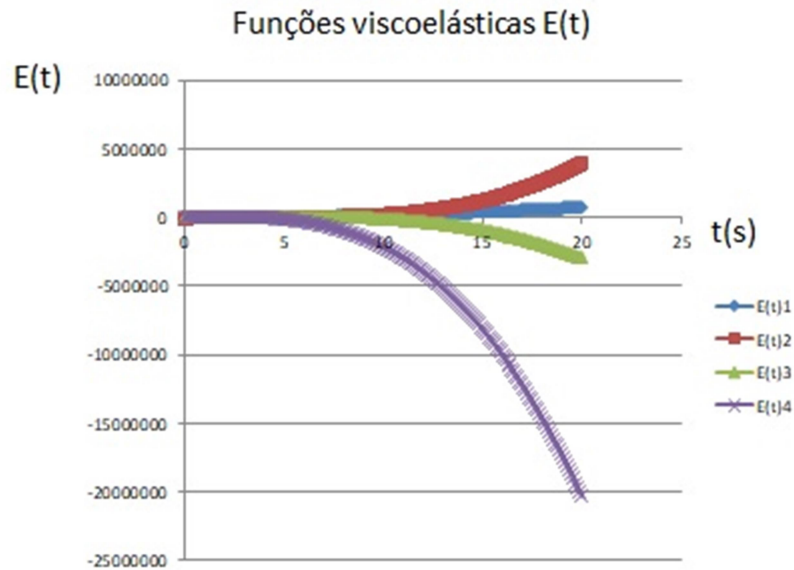


Figura 48. Respostas temporais das funções viscoelásticas $E(t)$ para cada caso de taxa de deformação.

Partindo-se das funções $\sigma(\varepsilon)$, representadas pelas equações (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) e das funções deformações específicas impostas, equações (4.12), (13), (14) e (15), procede-se com o relacionamento tensão-tempo:

$$\sigma_{11}(t) = -0,52488t^4 + 11,66t^3 - 2,91t^2 - 182,74t + 189,74 \quad (4.20)$$

$$\sigma_{11}(t) = 9,53t^4 - 178,96t^3 + 1260,25t^2 - 2062,69t + 611,88 \quad (4.21)$$

$$\sigma_{11}(t) = -8,69t^4 + 96,73t^3 + 45,95t^2 - 83,6t + 40,916 \quad (4.22)$$

$$\sigma_{11}(t) = -62,18t^4 + 111,25t^3 + 1484,55t^2 - 1684,35t + 264,65 \quad (4.23)$$

As curvas tensão-tempo, apresentadas na figura 44b em função da taxa de deformação, produzem os seguintes relacionamentos:

$$\sigma_{0,4}(t) = -0,5343t^4 + 10,887t^3 - 2,7772t^2 - 182,85t + 189,05 \quad (4.24)$$

$$\sigma_{0,8}(t) = 9,2876t^4 - 197,01t^3 - 1326t^2 - 2048,3t + 602,42 \quad (4.25)$$

$$\sigma_{1,2}(t) = -24,324t^4 + 237,75t^3 - 463,37t^2 + 526,53t - 103,34 \quad (4.26)$$

$$\sigma_{2,0}(t) = -28,461t^4 - 234,72t^3 + 2274t^2 - 2269,5t + 357,85 \quad (4.27)$$

Para verificar a influência da taxa de deformação na resposta do material, curvas médias de tensão foram agrupadas em mesmo gráfico, conforme ilustrado na figura 49. Da direita para a esquerda podem ser observadas, partindo da menor taxa de deformação no sentido crescente, diminuição do atraso de resposta e maior inclinação da curva, possivelmente devido à superação das componentes de escoamento no comportamento material.

Tendo como referência Shelef e Mohsenin (1968), as propriedades mecânicas do vegetal são influenciadas pelo teor de umidade, fibras e outros parâmetros descritos na literatura, de tal forma que o caráter viscoelástico de um material é evidenciado pelas variações em sua resposta de acordo com a taxa de deformação.

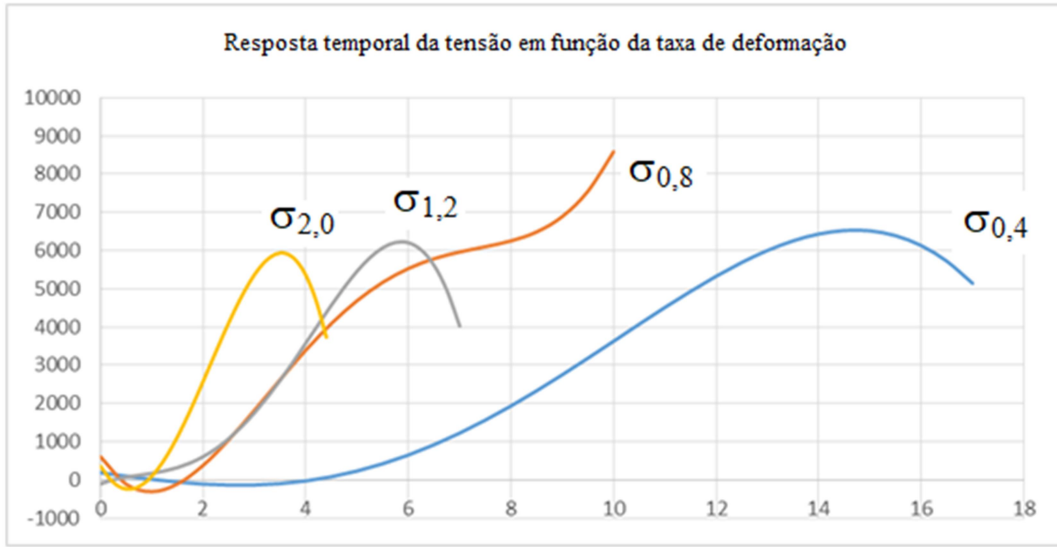


Figura 49. Resposta temporal da tensão em função da taxa de deformação

A partir das funções $\sigma(t)$ apresentadas na figura 45b e considerando a abordagem de que a derivada destas funções representa a função viscoelástica *relaxation* simples, $E(t)$, temos, respectivamente, para cada taxa de deformação, 0,4, 0,8, 1,2 e 2,0 mm/s:

$$E(t) = -2,1372t^3 + 32,661t^2 - 5,5544t - 182,85 \quad (28)$$

$$E(t) = 37,1504t^3 - 591,03t^2 + 2652t - 2048,3 \quad (29)$$

$$E(t) = -97,296t^3 + 713,25t^2 - 926,74t + 526,53 \quad (30)$$

$$E(t) = -113,844t^3 - 704,16t^2 + 4548t - 2269,5 \quad (31)$$

Na modalidade de ensaio de compressão uniaxial restrita obtém-se o módulo $M(t)$ diretamente da inclinação da curva tensão-deformação específica. Este parâmetro será associado a $E(t)$, por meio de equação teórica, para que a função viscoelástica de Poisson $\nu(t)$ seja obtida.

Dos resultados apresentados na compressão restrita, o relacionamento da tensão σ com a deformação específica ε , $[\sigma = f(\varepsilon)]$ é expresso por:

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -3 \cdot 10^6 \varepsilon^4 + 10^6 \varepsilon^3 - 238636 \varepsilon^2 + 45451 \varepsilon + 190,67 \quad (4.32)$$

Tomando a derivada da função de tensão obtém-se a razão de rigidez ou elasticidade tensão-deformação específica, a função $M(\varepsilon)$, de tal forma que:

$$M(\varepsilon) = \dot{\sigma}(\varepsilon) \quad (4.33)$$

Procedendo com a derivada na função $\sigma(\varepsilon)$, equação (4.32):

$$M_{0,05}(\varepsilon) = -12 \cdot 10^6 \varepsilon^3 + 3 \cdot 10^6 \varepsilon^2 - 477272 \varepsilon + 45451 \quad (4.34)$$

Considerando uma taxa de deformação de 0,05 mm/s, a deformação específica imposta será de:

$$\varepsilon_{11}(t) = 0,0010095t \quad (4.35)$$

Substituindo (4.35) em (4.34) obtemos a função *relaxation* restrita, $M(t)$:

$$M(t) = -0,0123t^3 + 3,057t^2 - 481,81t + 45451 \quad (4.36)$$

Outra forma de obtenção de $M(t)$ seria pela derivada direta de $\sigma(t)$ apresentada na figura 46-b:

$$M(t) = -0,000012t^3 + 0,0036t^2 + 0,4974t + 45,907 \quad (4.37)$$

Com o objetivo de obter as funções viscoelásticas *creep* e *relaxation*, respectivamente, $\phi(t)$ e $\psi(t)$, procede-se inicialmente com a aplicação da transformada de Laplace \mathcal{L} na equação de tensão (4.24):

$$\bar{\sigma}_{11}(s) = \left(-\frac{12,82}{s^5}\right) + \left(\frac{65,32}{s^4}\right) - \left(\frac{5,55}{s^3}\right) - \left(\frac{182,85}{s^2}\right) + \left(\frac{189,05}{s}\right) \quad (4.38)$$

Similarmente, a transformada de Laplace da Equação (4.12) (Fodor, 1965) é:

$$\bar{\varepsilon}_{11}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s^2} = 0,0180/s^2 \quad (4.39)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s^2} \bar{\phi}(s) \quad (4.40)$$

$$\bar{\phi}(s) = \frac{s^2}{\varepsilon_0} \bar{\sigma}(s) \quad (4.41)$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{\phi}(s)] \quad (4.42)$$

Pela combinação de (4.40), (4.41) e (4.38), depois da inversão da transformada de Laplace² podemos concluir que:

$$\phi(t) = -356,11t + 3628,88t - 5,55 \quad (4.43)$$

A equação (85), [$\bar{\psi}(s)\bar{\phi}(s) = \frac{1}{s^2}$], produz pela transformada inversa de Laplace de $\bar{\psi}(s)$:

$$\psi(t) = -0,035e^{6,68t} \quad (4.44)$$

A função viscoelástica $v(t)$ é obtida de equacionamentos que aproveitam os resultados experimentais de $E(t)$ e $M(t)$, obtidos respectivamente dos ensaios uniaxiais simples e restrito (ENSAIOS 1 e ENSAIOS 2). Da Lei de Hooke Generalizada (2.3.15):

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+v}(\varepsilon_{ij} + \frac{v}{1-2v}\delta_{jj})$$

Impondo-se as condições da compressão restrita vem:

$$\sigma_{11} \neq 0, \varepsilon_{11} \neq 0, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} \neq 0$$

Do ensaio de compressão restrita observa-se o relacionamento:

$$\sigma_{11} = M\varepsilon_{11}$$

Nas descrições da literatura (Hughes & Segerlind, 1972 e Dal Fabbro, 1979) observa-se:

$$\sigma_{11} = (\frac{E}{1+v} \frac{1-v}{1-2v})\varepsilon_{11}$$

Assim, a função M assume a forma:

$$M = \frac{E}{1+v} \frac{1-v}{1-2v} \quad (4.45)$$

Com as devidas transformações algébricas, o isolamento de uma função de v , ($f(v)$), da Equação (4.45) produz:

$$f(v) = \frac{1-3v^2-2v^3}{1-v^2} = \frac{E(t)}{M(t)} \quad (4.46)$$

Por outro lado, utilizando as equações (4.28) e (4.27), respectivamente para $E(t)$ e $M(t)$, define-se a razão $S(t)$:

² para tempos longos ($t \rightarrow \infty$) desprezamos o quarto e o quinto termos de $\phi(t)$.

$$S(t) = \frac{E(t)}{M(t)} = \frac{-2,1372t^3 + 32,661t^2 - 5,5544t - 182,85}{-0,00001t^3 + 0,0036t^2 + 0,4974t + 45,907} \quad (4.47)$$

A variação de $S(t)$, calculada utilizando a função gráfica do Excel, é mostrada na figura 50:

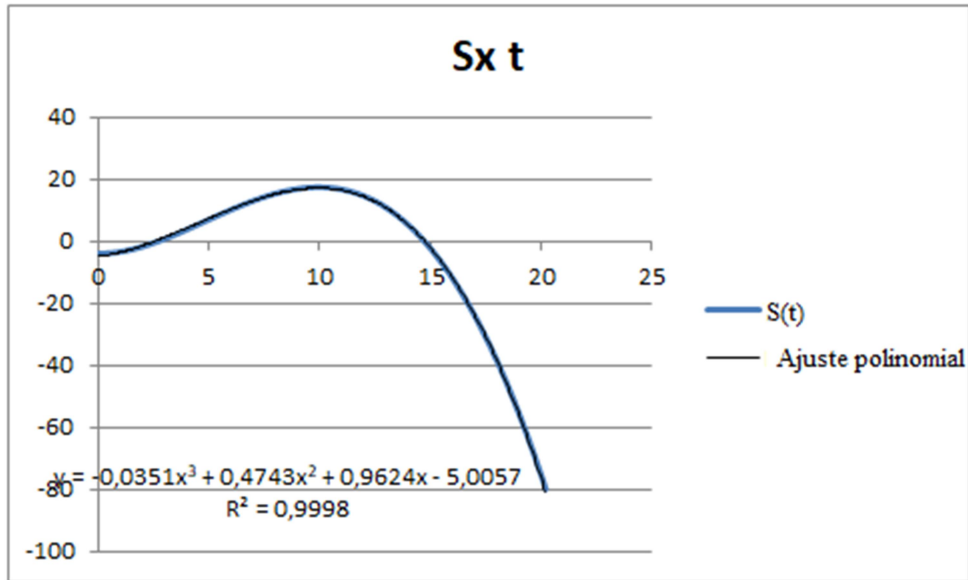


Figura 50. Variação de $S(t)$.

A distribuição da função $f(v)$ é calculada pela ferramenta de otimização Solver do Excel, S_{solver} , de tal forma a minimizar, por diferenças quadradas, $|S(t) - f(v)|$.

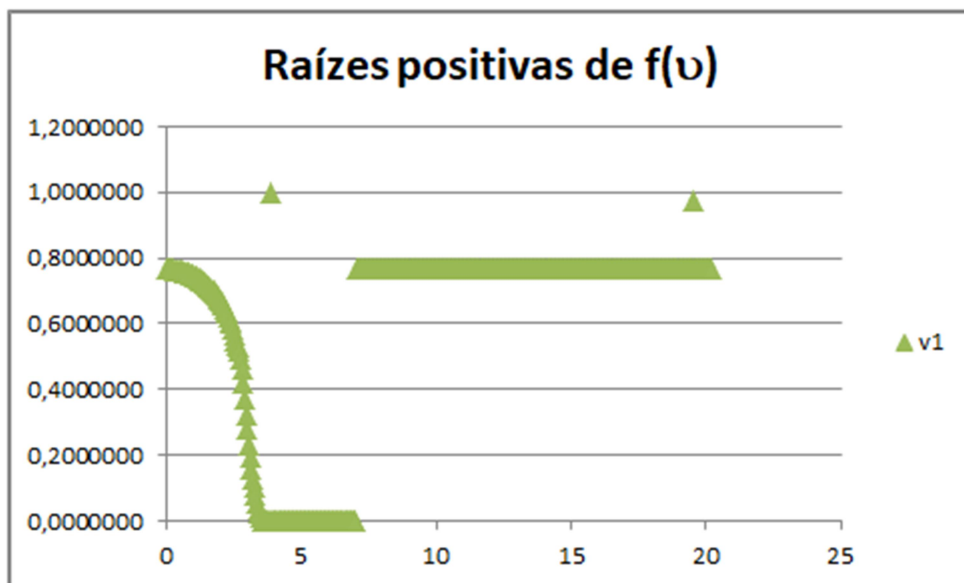


Figura 51. Variação da função de Poisson no tempo

A variação de $f(v)$ no intervalo $]v=-1, v=1[$ é mostrada na figura 52:

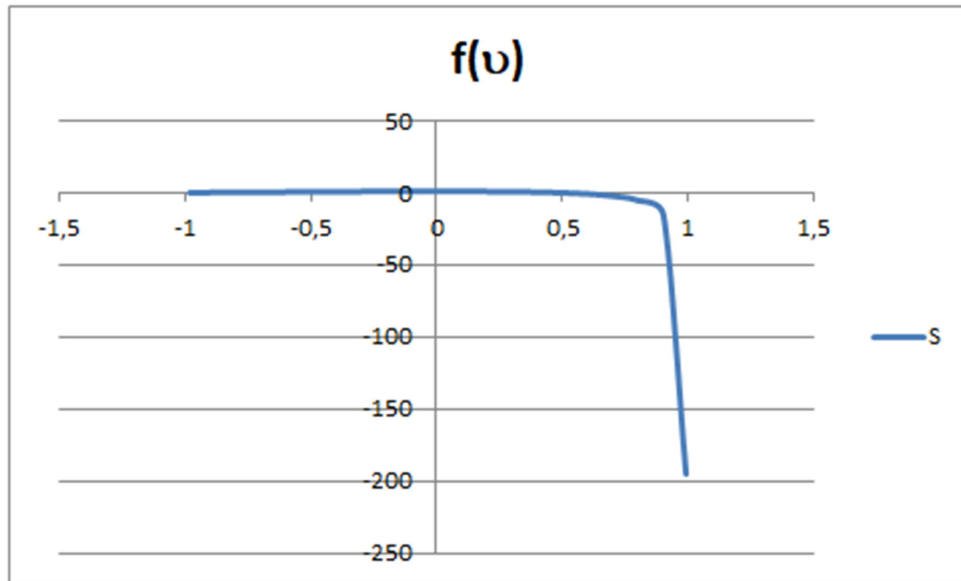


Figura 52. Variação de $f(v)$.

Observando na figura 51 que as raízes positivas de $f(v)$ são praticamente constantes no intervalo de 7,05s a 20s, e da plotagem gráfica de $S(t)$, figura 50, obtém-se uma aproximação da função de Poisson, $v(t)$, por:

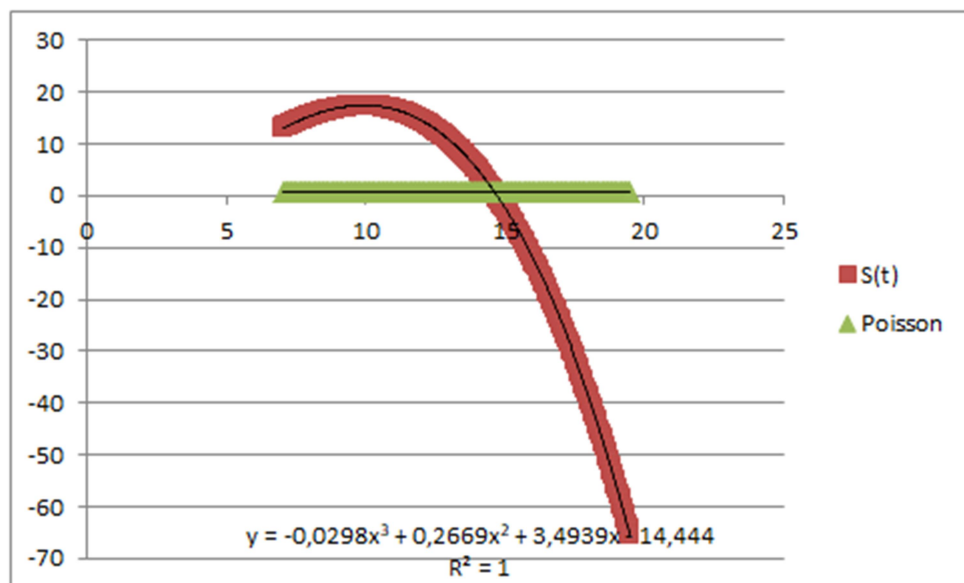


Figura 53. Variação de Poisson e $S(t)$ no intervalo [7.5s , 20.2 s].

$$v(t) = -0,0298t^3 + 0,2669t^2 + 3,4939t - 14,444 \quad (4.48)$$

De acordo com Lakes (1999), levando em conta considerações termodinâmicas da energia da deformação na teoria da elasticidade, a faixa permitida para o coeficiente de

Poisson, ν , é -1,0 a +0,5. Este mesmo autor enumera valores típicos do coeficiente de Poisson: quase zero – cortiça; 0,1 a 0,4 - espumas poliméricas típicas; 0,27 – aços comuns; 0,33 alumínio; 0,45 – chumbo e 0,5 – borracha e tecidos biológicos moles.

Considerando na Equação (4.46) a relação $E(t)/M(t)$ uma constante R , pesquisam-se os valores de ν típicos para vegetais ($\nu = 0,30$ a $0,40$):

$$2\nu^3 + (3 - R)\nu^2 + (R - 1) = 0 \quad (4.49)$$

Para a constante $R = (0,75$ a $0,47)$ implica $\nu = (0,3$ a $0,40)$.

Análise dos ENSAIOS 3 (integral)

Com os ENSAIOS 3, realizados em colmos integrais, observou-se o comportamento tensão-deformação em função da taxa de deformação e equacionamentos realizados para a obtenção dos parâmetros viscoelásticos $E(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$. Desta forma, a partir dos resultados da coluna a (figura 47), o relacionamento da tensão σ com a deformação específica ε , $[\sigma = f(\varepsilon)]$ é expresso por:

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -1.10^8 \varepsilon^4 + 4.10^7 \varepsilon^3 - 2.10^6 \varepsilon^2 + 34604\varepsilon - 86,11 \quad (4.50)$$

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -1.10^8 \varepsilon^4 + 3.10^7 \varepsilon^3 - 3.10^6 \varepsilon^2 + 79999\varepsilon - 451,18 \quad (4.51)$$

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -2.10^6 \varepsilon^4 - 137224\varepsilon^3 + 532936\varepsilon^2 + 65552\varepsilon + 2063,7 \quad (4.52)$$

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -1.10^{15} \varepsilon^4 + 4.10^{13} \varepsilon^3 - 3.10^{11} \varepsilon^2 + 1.10^9 \varepsilon - 2.10^6 \quad (4.53)$$

Tomando a derivada da função de tensão $\sigma(\varepsilon)$ obtém-se a razão de rigidez ou elasticidade tensão-deformação específica, a função $E(\varepsilon)$, de tal forma que:

$$E(\varepsilon) = \dot{\sigma}(\varepsilon) \quad (4.54)$$

Procedendo com as derivadas, respectivamente, em (4.50), (4.51), (4.52) e (4.53)

vem:

$$E_{0,4}(\varepsilon) = -4.10^8 \varepsilon^3 + 12.10^7 \varepsilon^2 - 4.10^6 \varepsilon + 34604 \quad (4.54)$$

$$E_{0,8}(\varepsilon) = -4.10^8 \varepsilon^3 + 9.10^7 \varepsilon^2 - 6.10^6 \varepsilon + 79999 \quad (4.55)$$

$$E_{1,2}(\varepsilon) = -8.10^6 \varepsilon^3 - 411672\varepsilon^2 + 1065872\varepsilon + 65552 \quad (4.56)$$

$$E_{2,0}(\varepsilon) = -4.10^{15} \varepsilon^3 + 12.10^{13} \varepsilon^2 - 6.10^{11} \varepsilon + 10^9 \quad (4.57)$$

Se a função deformação específica imposta é tomada como:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(t) \quad (4.58)$$

Considerando a taxa de deformação (v) e o comprimento inicial do corpo de prova (L_0) (Tabela 04), a função deformação específica torna-se:

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{v \cdot t}{L_0} \quad (4.59)$$

As funções governantes desempenhadas pela prensa de ensaio convencional para carregamento axial de amostras de cana-de-açúcar (*Saccharum spp.*) foram respectivamente:

$$\varepsilon_{11}(t)_{[IN_{0,4}]} = 0,0101t \quad (4.60)$$

$$\varepsilon_{11}(t)_{[INT_{0,8}]} = 0,0207t \quad (4.61)$$

$$\varepsilon_{11}(t)_{[INT_{1,2}]} = 0,0309t \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_{11}(t)_{[INT_{2,0}]} = 0,0517t \quad (4.63)$$

Para a obtenção da função viscoelástica módulo de *relaxation* simples, $E(t)$, no domínio do tempo, procedesse com a substituição das funções deformação específica, (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63), respectivamente em (4.54), (4.55), (4.56) e (4.57):

$$E_{0,4}(t) = -412,12t^3 + 12241,2t^2 - 40400t + 34604 \quad (4.64)$$

$$E_{0,8}(t) = -3547,89t^3 + 38564,1t^2 - 124200t + 79999 \quad (4.65)$$

$$E_{1,2}(t) = -236,02t^3 - 393,07t^2 + 32935,44t + 65552 \quad (4.66)$$

$$E_{2,0}(t) = -5,53 \cdot 10^{11}t^3 + 3,21 \cdot 10^{11}t^2 - 3,1 \cdot 10^{10}t + 10^9 \quad (4.67)$$

Partindo-se das funções $\sigma(\varepsilon)$, representadas pelas equações (4.50), (4.51), (4.52) e (4.53) e das funções deformações específicas impostas, equações (4.60), (4.61), (4.62) e (4.63), procede-se com o relacionamento tensão-tempo:

$$\sigma_{11}(t)_{0,4} = -1,041t^4 + 41,21t^3 - 204,02t^2 + 349,5t - 86,11 \quad (4.68)$$

$$\sigma_{11}(t)_{0,8} = -18,36t^4 + 266,09t^3 - 1285,47t^2 + 1655,98t - 451,18 \quad (4.69)$$

$$\sigma_{11}(t)_{1,2} = -59,01t^4 - 4,05t^3 + 508,85t^2 + 2025,57t + 2063,7 \quad (4.70)$$

$$\sigma_{11}(t)_{2,0} = -7,14 \cdot 10^9t^4 + 5,53 \cdot 10^9t^3 - 8,02 \cdot 10^8t^2 + 5,17 \cdot 10^7t - 2 \cdot 10^6$$

(4.71)

Com o objetivo de obter as funções viscoelásticas *creep* e *relaxation*, respectivamente, $\phi(t)$ e $\psi(t)$, procede-se inicialmente com a aplicação da transformada de Laplace \mathcal{L} nas equações de tensão (4.68) a (4.70) que foram obtidas diretamente dos ensaios:

$$\bar{\sigma}_{11}(s)_{[INT_{0,4}]} = \left(-\frac{24,98}{s^5}\right) + \left(\frac{247,26}{s^4}\right) - \left(\frac{408,04}{s^3}\right) + \left(\frac{349,5}{s^2}\right) - \left(\frac{86,11}{s}\right) \quad (4.72)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(s)_{[INT_{0,8}]} = \left(-\frac{440,64}{s^5}\right) + \left(\frac{1596,54}{s^4}\right) - \left(\frac{2570,94}{s^3}\right) + \left(\frac{1655,98}{s^2}\right) - \left(\frac{451,18}{s}\right) \quad (4.73)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(s)_{[INT_{1,2}]} = \left(-\frac{1416,24}{s^5}\right) - \left(\frac{24,3}{s^4}\right) + \left(\frac{1017,7}{s^3}\right) + \left(\frac{2025,57}{s^2}\right) + \left(\frac{2063,7}{s}\right) \quad (4.74)$$

$$\bar{\sigma}_{11}(s)_{[INT_{2,0}]} = \left(-\frac{171,36}{s^5}\right) + \left(\frac{33,18.10^9}{s^4}\right) - \left(\frac{16,04.10^8}{s^3}\right) + \left(\frac{5,17.10^7}{s^2}\right) - \left(\frac{2.10^6}{s}\right) \quad (4.75)$$

Similarmente, conforme Fodor (1965), aplicando conjuntamente a transformada de Laplace às equações de imposição da taxa de deformação (equações (4.60) a (4.63)) e na resposta de tensão por integral hereditária (equação 2.4.38):

$$\bar{\varepsilon}_{11}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s^2}$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(s)_{[INT_{0,4}]} = 0,0101/s^2 \quad (4.76)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(s)_{[INT_{0,8}]} = 0,0207/s^2 \quad (4.77)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(s)_{[INT_{1,2}]} = 0,0309/s^2 \quad (4.78)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}(s)_{[INT_{2,0}]} = 0,0517/s^2 \quad (4.79)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \frac{\varepsilon_0}{s^2} \bar{\phi}(s)$$

$$\bar{\phi}(s) = \frac{s^2}{\varepsilon_0} \bar{\sigma}(s)$$

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{\phi}(s)]$$

$$\phi(s)_{[INT_{0,4}]} = \frac{s^2}{0,0101} \left[\left(-\frac{24,98}{s^5}\right) + \left(\frac{247,26}{s^4}\right) - \left(\frac{408,04}{s^3}\right) + \left(\frac{349,5}{s^2}\right) - \left(\frac{86,11}{s}\right) \right] \quad (4.80)$$

$$\phi(s)_{[INT_{0,8}]} = \frac{s^2}{0,0207} \left[\left(-\frac{440,64}{s^5}\right) + \left(\frac{1596,54}{s^4}\right) - \left(\frac{2570,94}{s^3}\right) + \left(\frac{1655,98}{s^2}\right) - \left(\frac{451,18}{s}\right) \right] \quad (4.81)$$

$$\phi(s)_{[INT_{1,2}]} = \frac{s^2}{0,0309} \left[\left(-\frac{1416,24}{s^5}\right) - \left(\frac{24,3}{s^4}\right) + \left(\frac{1017,7}{s^3}\right) + \left(\frac{2025,57}{s^2}\right) + \left(\frac{2063,7}{s}\right) \right] \quad (4.82)$$

$$\phi(s)_{[INT_{2,0}]} = \frac{s^2}{0,0517} \left[\left(-\frac{171,36}{s^5}\right) + \left(\frac{33,18.10^9}{s^4}\right) - \left(\frac{16,04.10^8}{s^3}\right) + \left(\frac{5,17.10^7}{s^2}\right) - \left(\frac{2.10^6}{s}\right) \right] \quad (4.83)$$

Pela combinação de (4.40), (4.41) e (4.38), depois da inversão da transformada de Laplace, as funções *relaxation* são obtidas, conforme cada caso de taxa de deformação, como segue:

$$\phi(t)_{[INT_{0,4}]} = -356,11t + 3628,88t - 5,55 \quad (4.84)$$

$$\phi(t)_{[INT_{0,8}]} = -356,11t + 3628,88t - 5,55 \quad (4.85)$$

$$\phi(t)_{[INT_{1,2}]} = -356,11t + 3628,88t - 5,55 \quad (4.86)$$

$$\phi(t)_{[INT_{2,0}]} = -356,11t + 3628,88t - 5,55 \quad (4.87)$$

Do relacionamento no domínio de Laplace entre as funções *creep* e *relaxation*, expressado pela equação (85), $\bar{\psi}(s)\bar{\phi}(s) = \frac{1}{s^2}$, produz pela transformada inversa de Laplace de $\bar{\psi}(s)$:

$$\psi(t)_{[INT_{0,4}]} = -0,035e^{6,68t} \quad (4.88)$$

$$\psi(t)_{[INT_{0,8}]} = -0,035e^{6,68t} \quad (4.89)$$

$$\psi(t)_{[INT_{1,2}]} = -0,035e^{6,68} \quad (4.90)$$

$$\psi(t)_{[INT_{2,0}]} = -0,035e^{6,68} \quad (4.91)$$

Na tabela 10 se expressa o coeficiente de correlação R^2 , do ajuste polinomial de grau 4, em função da taxa de deformação utilizada no ENSAIO 3. Neste conjunto verifica-se que a aderência aos dados diminui na medida em que a taxa de deformação cresce.

Possivelmente, para grandes deformações, no colmo integral a região da casca (mais rígida em relação ao parênquima) pode controlar a resposta do espécime de maneira mais elástica do que viscoelástica.

Tabela 10. Coeficiente de correlação R^2 em função da taxa de deformação para ensaios uniaxiais integrais.

Taxa de deformação (mm/s)	R^2 (ajuste polinomial grau 4)
0,4	0,8274

0,8	0,6825
1,2	0,5381
2,0	0,375

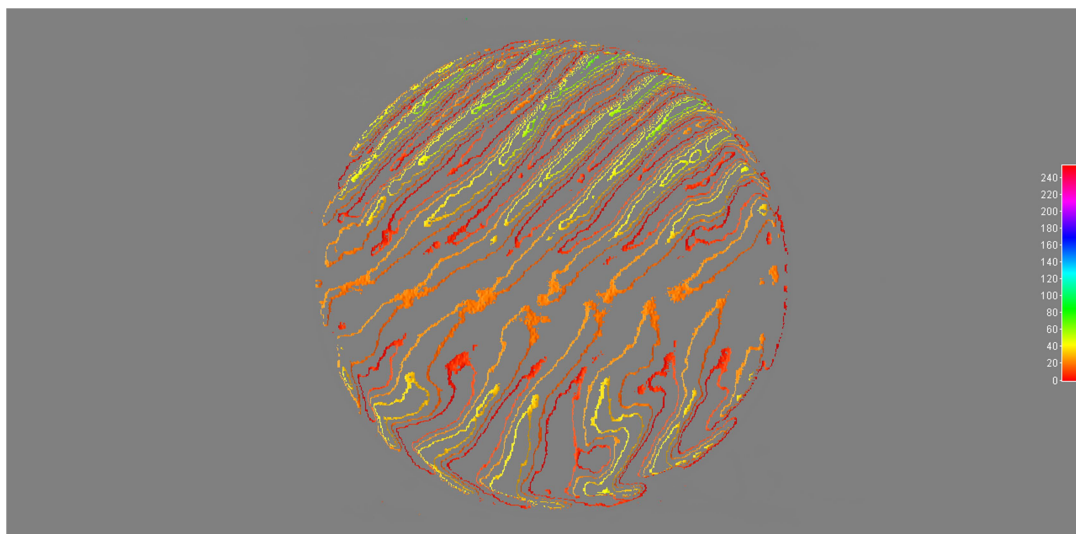
4.2 Técnica de *Moiré* por Sombra Associada a Ensaaios de Compressão Diametral

Para verificar a distribuição de tensões (direção, intensidade e concentração) e possíveis influências de não-linearidades (geométricas e materiais), realizaram-se ensaios de compressão diametral assistidos pela técnica de *Moiré* de sombra. No tocante à propriedade de anisotropia, outros materiais (borracha e madeira) foram ensaiados para uma análise comparativa com a cana-de-açúcar.

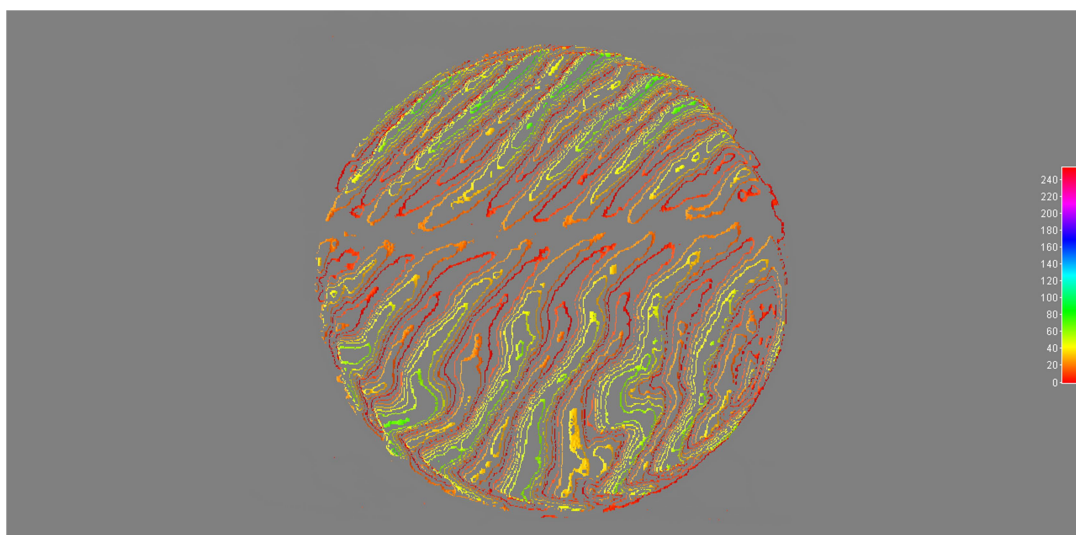
Os corpos de prova foram submetidos a cinco estados de carregamento (com variação na carga desde o estado inicial de pré-carga até o estágio final de proximidade com a ruptura), sob uma taxa de carregamento constante. Os parâmetros de Força, deformação (deslocamento) e tempo foram medidos diretamente na Máquina de ensaio. Um projetor de luz e grades de reticulados de determinado passo foram utilizados para produzir as franjas de *Moiré*, projetadas diretamente sobre as faces diametral e lateral do objeto. Uma câmera digital foi acoplada para captar as imagens de franjas devidas a cada estado de carregamento.

A configuração de franjas de *Moiré* é usada para avaliar qualitativamente a distribuição de tensões e deformações. Num primeiro momento a análise foi realizada observando a influência do fator dimensional (diâmetro e comprimento) na resposta do material (borracha, madeira e cana-de-açúcar). Em seguida, um comparativo na propriedade de isotropia é realizado com diferentes materiais (borracha e madeira), mas de dimensões aproximadamente iguais. Para o caso específico de cana-de-açúcar as comparações envolvem configurações de franjas em corpos de prova da porção parênquima e da porção integral e distribuições da cana-de-açúcar com distribuições em borracha e madeira.

4.2.1 Resultados e análise de *moiré* em espécimes de borracha



a) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$; $F_1 = 20 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,4884 \text{ mm}$



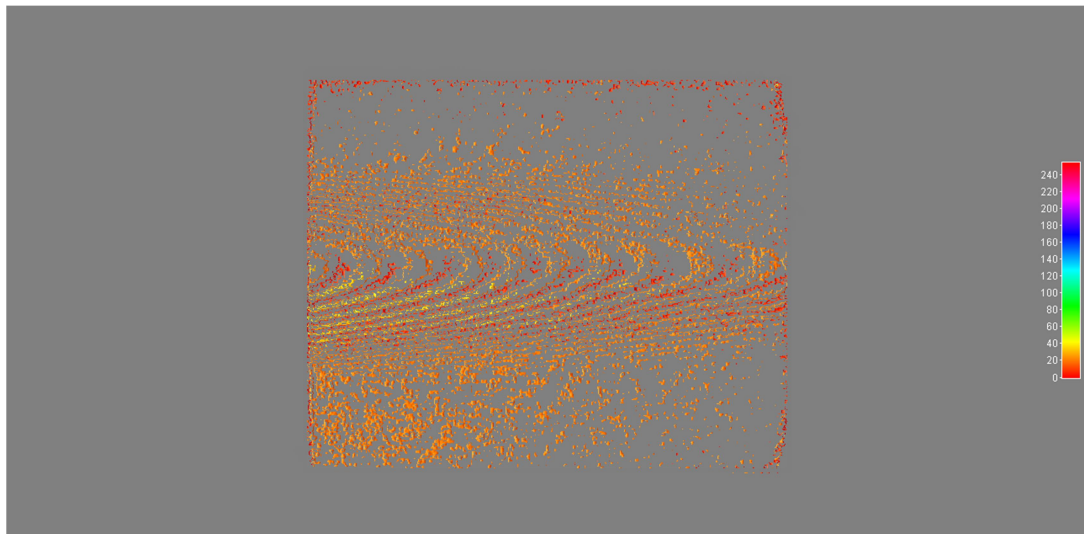
b) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_2 = 35 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 1,1004 \text{ mm}$

Figura 54. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B1F).

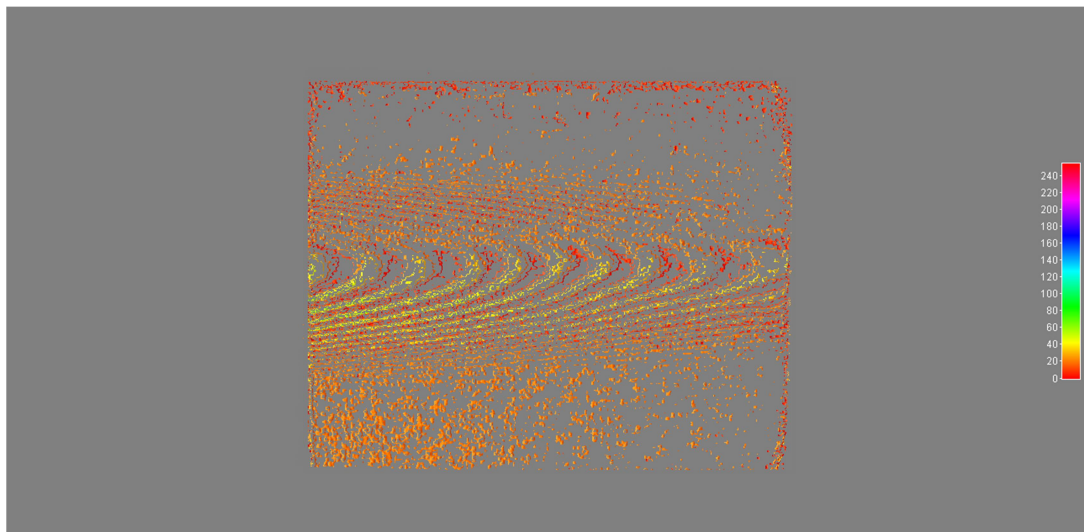
[Corpo de prova: $\phi = 68,85 \text{ mm}$, $L = 77,05 \text{ mm}$]

Análise: No estado inicial de carregamento, em termos de isóclinas, verifica-se distribuição aproximadamente uniforme das franjas de Moiré na direção de aproximadamente 45° e concentração de tensões na metade hemisférica superior. Nesta metade o espaçamento das franjas é mais regular, denotando distribuição de tensão linear. Observa-se a formação de uma região com menor tensão na direção horizontal aproximadamente na parte central do objeto. No estado final de carregamento há permanência de uma região horizontal central de baixas

ou nulas tensões com concentrações de tensões e distribuição mais uniforme na porção hemisférica superior.



a) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min; $F_1 = 25$ kgf, $\delta_1 = 0,3283$ mm

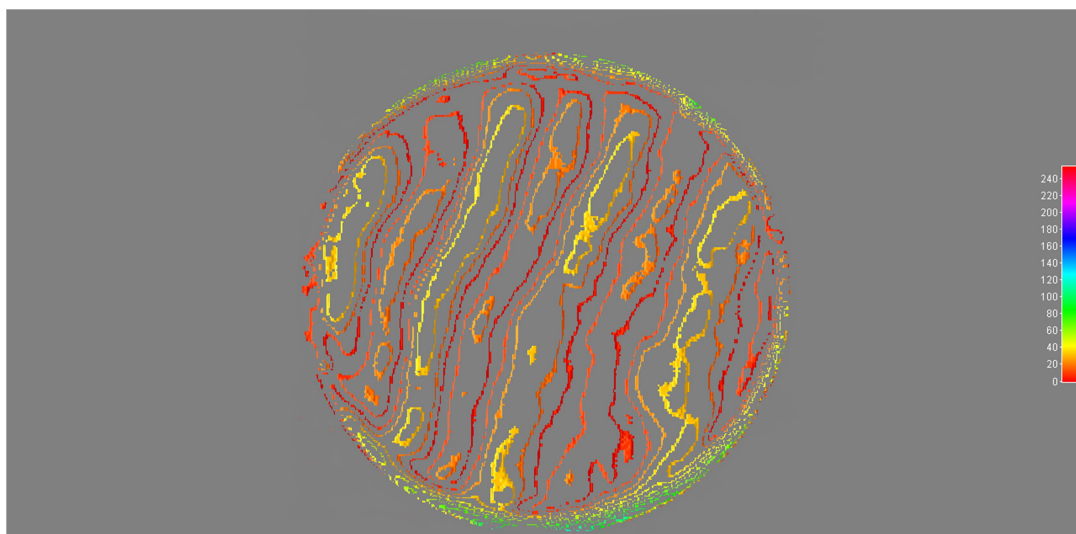


b) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min, $F_2 = 35$ kgf, $\delta_2 = 0,6127$ mm

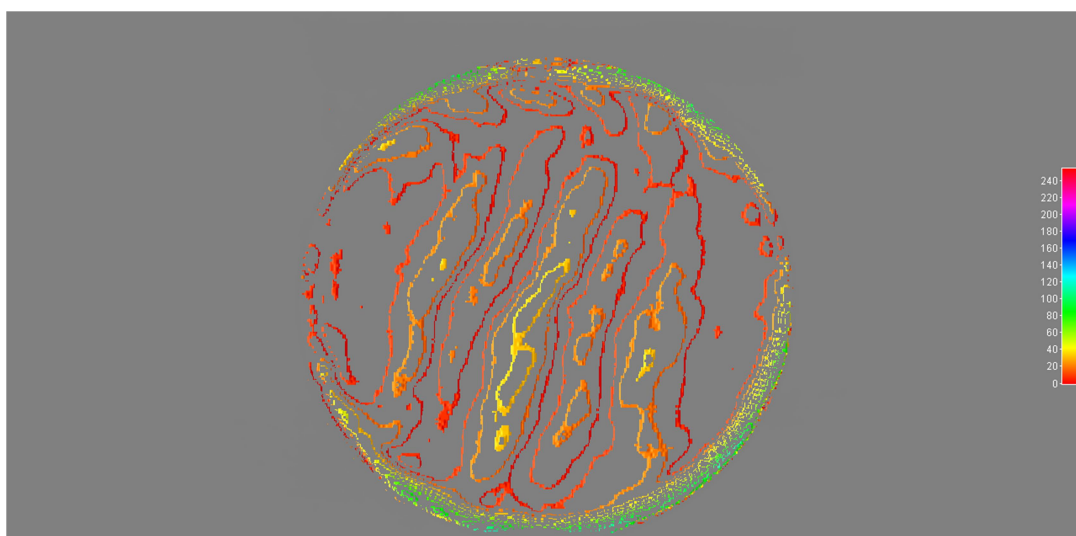
Figura 55. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B1L).

[Corpo de prova: $\phi = 68,85$ mm, $L = 77,05$ mm]

Análise: Ocorrência de franjas concêntricas de formato semi-elíptico com maior densidade na região central e direção longitudinal. Nesta região observam-se também as maiores intensidades (cor vermelho), juntamente com a região do bordo superior (contato da placa plana superior).



a) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min; $F_1 = 20$ kgf, $\delta_1 = 2,7414$ mm

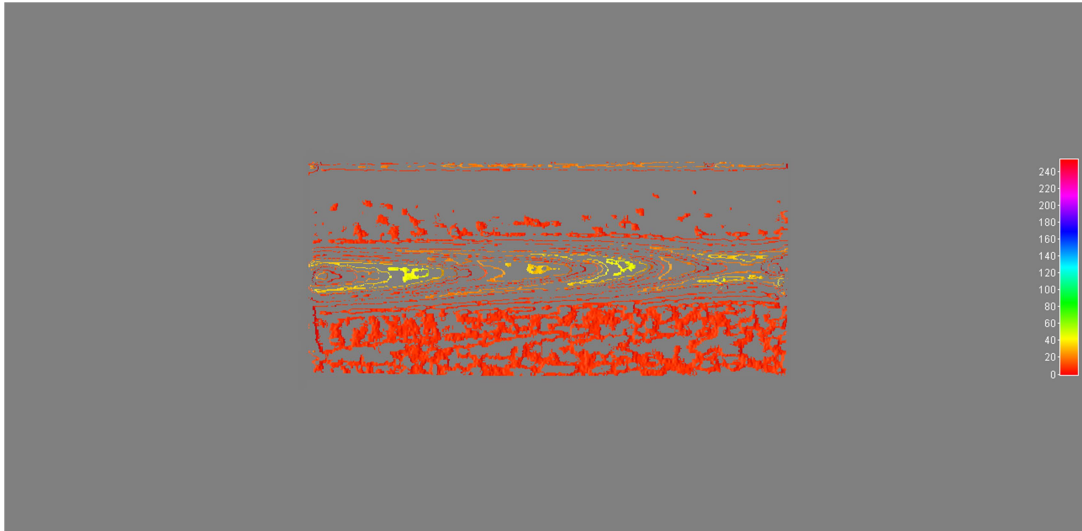


b) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min, $F_2 = 30$ kgf, $\delta_2 = 3,6661$ mm

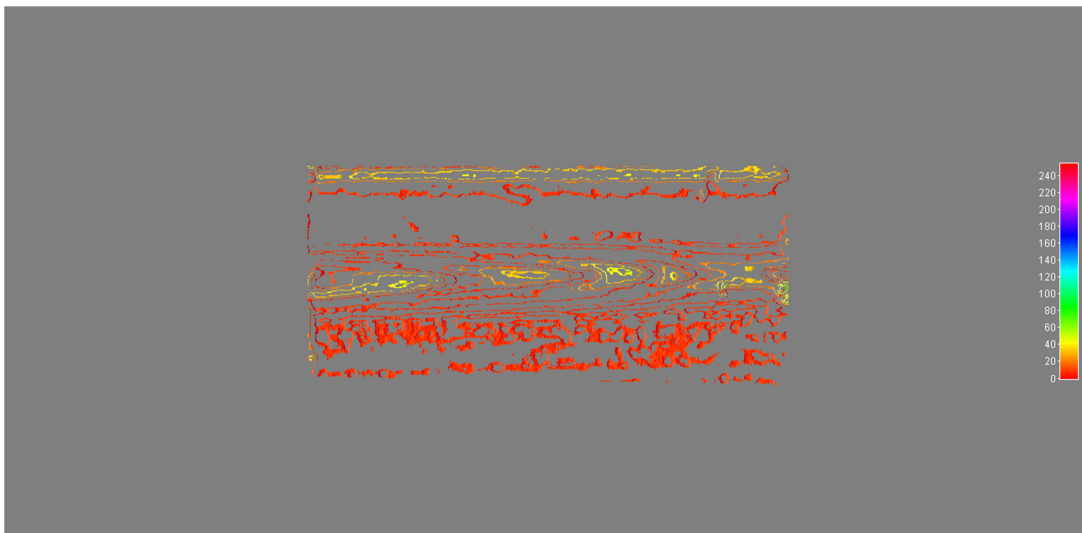
Figura 56. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B2F).

[Corpo de prova: $\phi = 38,07$ mm, $L = 76,66$ mm]

Análise: Diâmetro menor em comparação com o corpo de prova B1F, com concentração (menor espaçamento entre franjas e regularidade) e maior intensidade (isocromáticas verde-azul) de tensão na borda. Parte interior com espaçamento de franjas maior na região central, denotando menor intensidade. Isóclinas de orientação aproximadamente vertical e intensidade baixa (cor laranja-amarelo). Pólos esquerdo e direito com baixa intensidade (regiões vazias).



a) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min; $F_1 = 20$ kgf, $\delta_1 = 1,0639$ mm

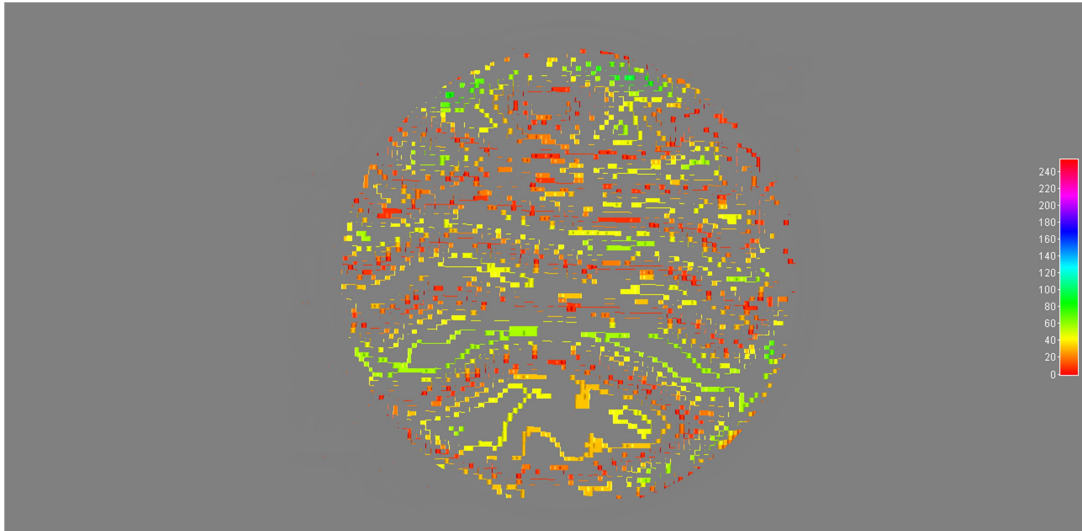


b) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min, $F_2 = 35$ kgf, $\delta_2 = 2,4077$ mm

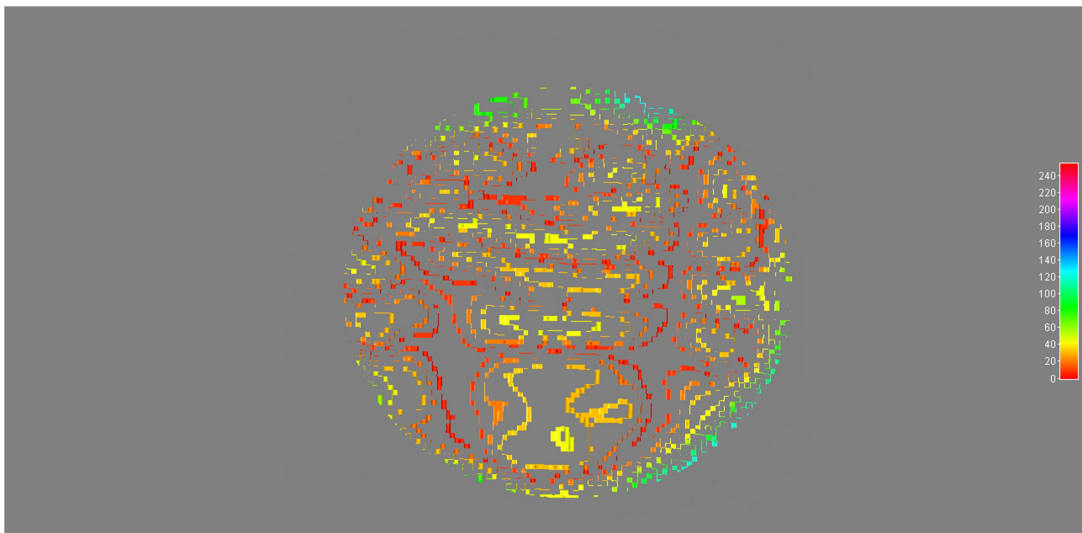
Figura 57. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B2L).

[Corpo de prova: $\phi = 38,07$ mm, $L = 76,66$ mm]

Análise: Isóclinas com espaçamento entre franjas e orientação mais uniforme na parte central (formato de semi-elipses). Isocromáticas de maior intensidade (amarelo) na região central em comparação com as isóclinas do restante do corpo (laranja).



a) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$; $F_1 = 20 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,2692 \text{ mm}$

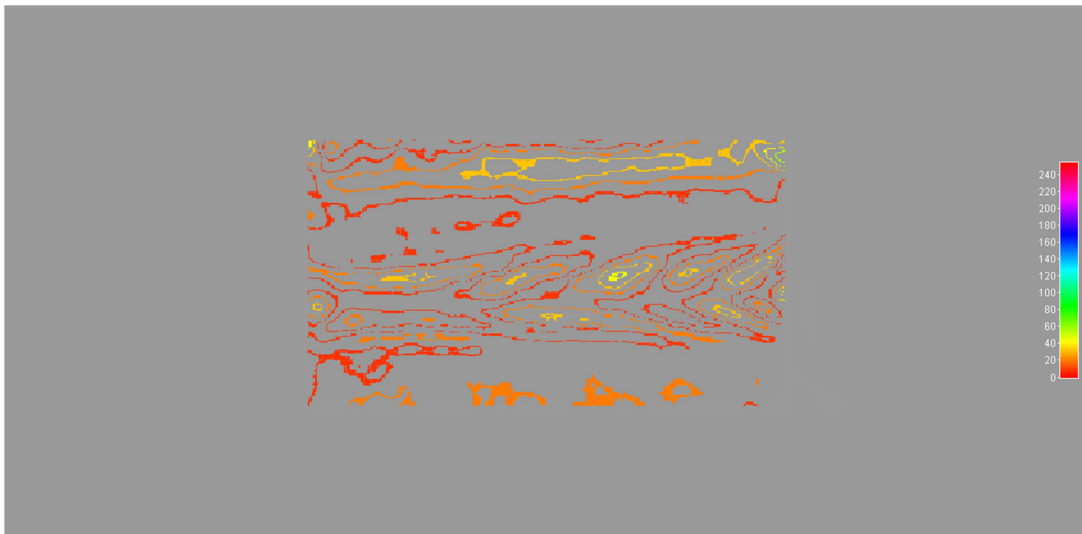


b) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_2 = 40 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 1,2038 \text{ mm}$

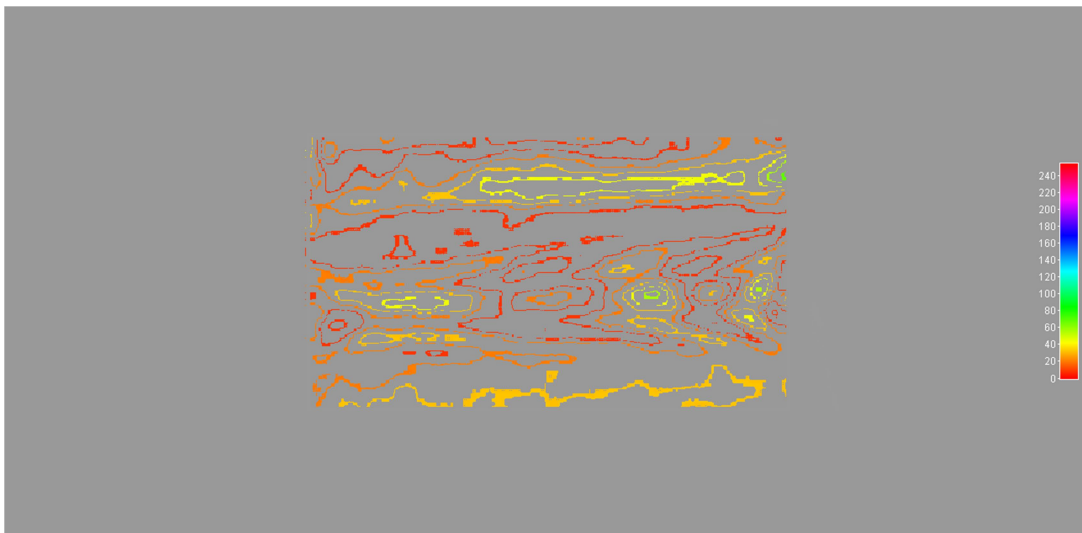
Figura 58. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B3F).

[Corpo de prova: $\phi = 18,31 \text{ mm}$, $L = 31,83 \text{ mm}$]

Análise: Com a diminuição simultânea do diâmetro e do comprimento do objeto, houve distribuição horizontal com isocromáticas (pontos de maior intensidade) na cor vermelho de forma irregular.



a) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min; $F_1 = 50$ kgf, $\delta_1 = 2,3734$ mm



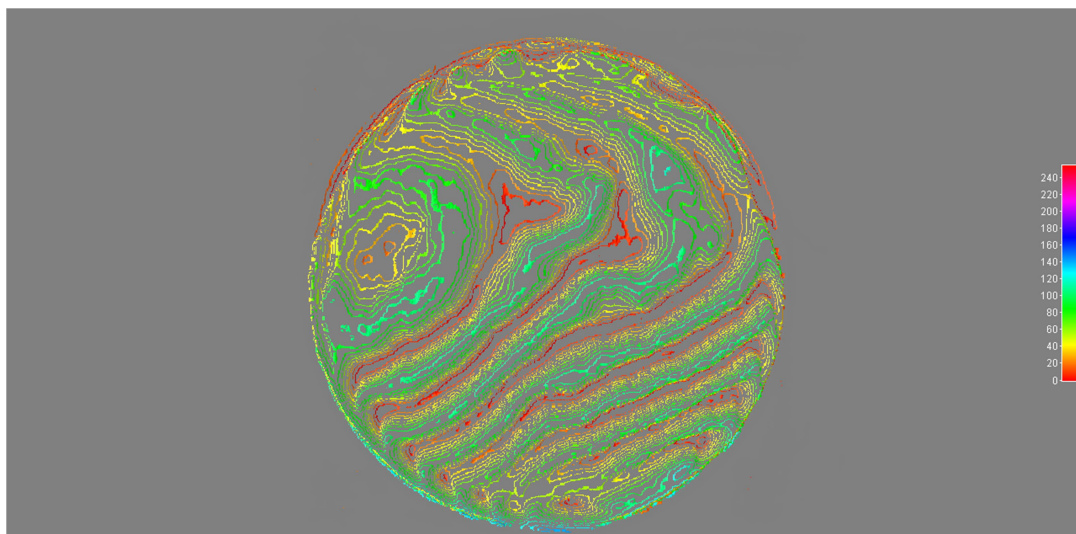
b) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min, $F_2 = 90$ kgf, $\delta_2 = 3,8589$ mm

Figura 59. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em borracha (B3L).

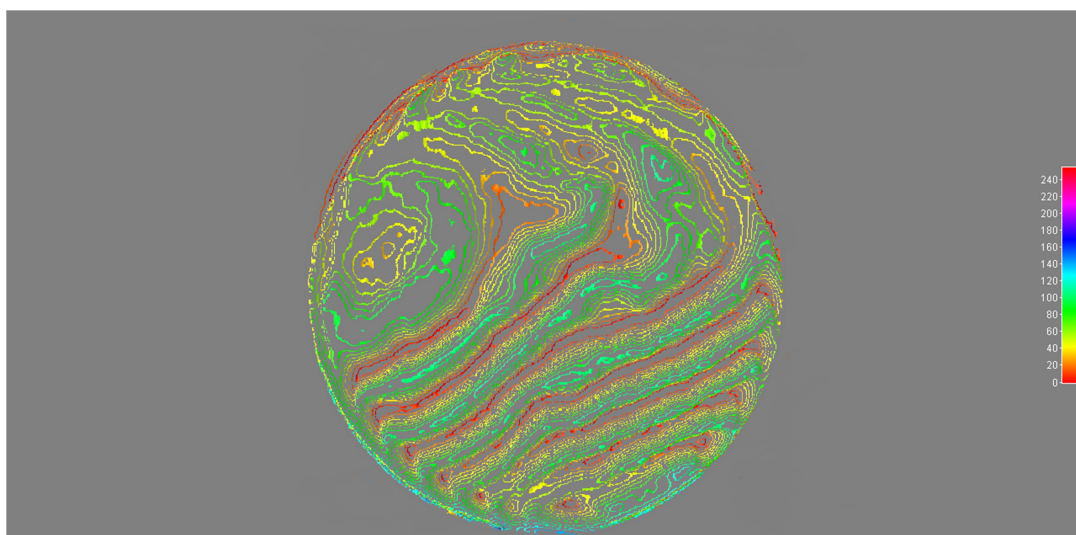
[Corpo de prova: $\phi = 18,31$ mm, $L = 31,83$ mm]

Análise: Distribuição irregular aproximadamente na direção horizontal, espaçamento entre franjas maior. As maiores intensidades foram encontradas nas bordas.

4.2.2 Resultados e análise de *moire* em espécimes de madeira



a) Carregamento: $V = 1,0$ mm/min; $F_1 = 300$ kgf, $\delta_1 = 0,4712$ mm



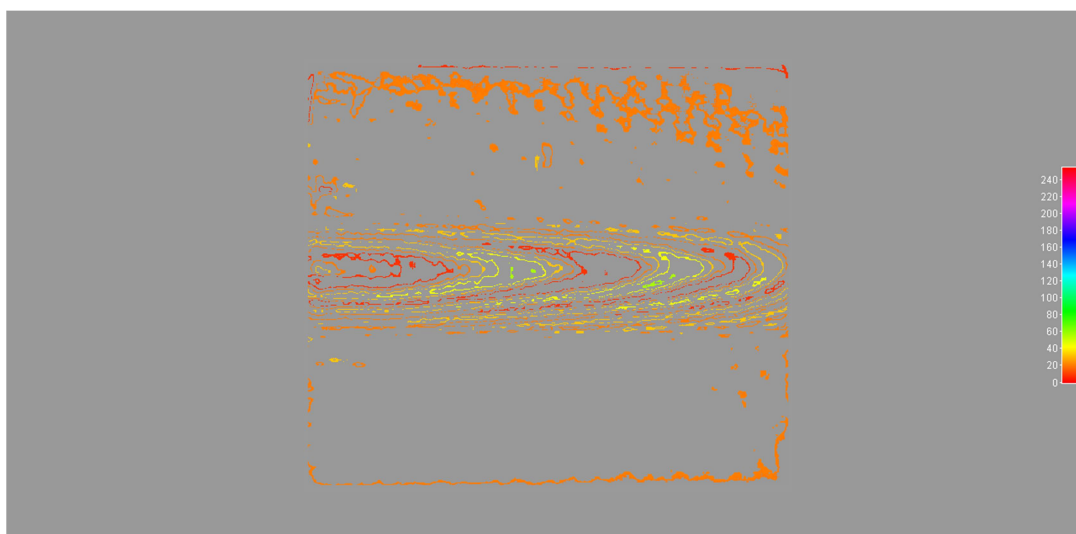
b) Carregamento: $V = 1,0$ mm/min, $F_2 = 629$ kgf, $\delta_2 = 1,0321$ mm

Figura 60. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF1).

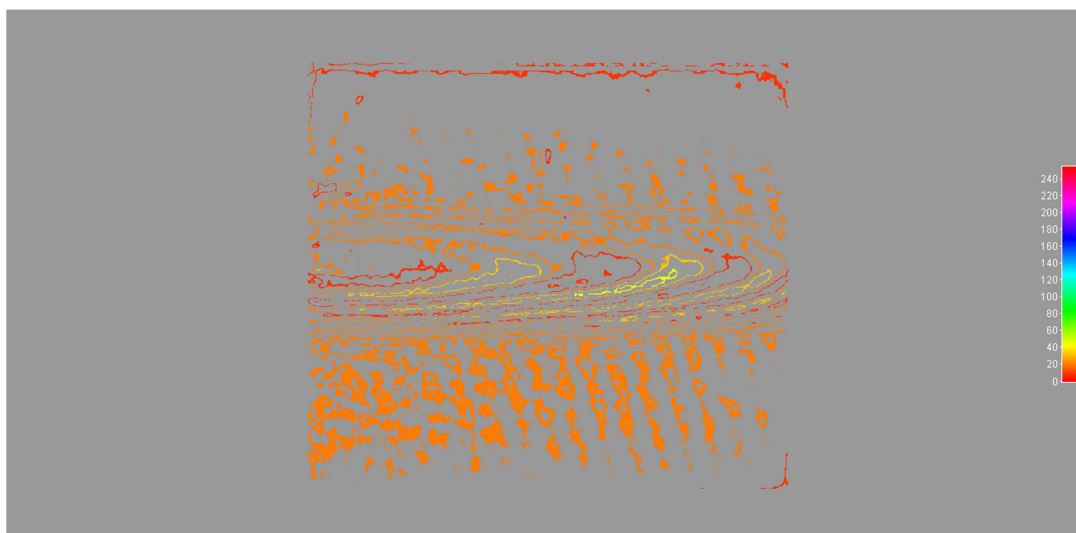
[Corpo de prova: $\phi = 69,08$ mm, $L = 76,19$ mm]

Análise: As isóclinas revelam direção de aproximadamente 45° , com distribuição linear de tensões, evidenciada pela densidade de franjas constante. Na posição hemisférica meridional há alguns pontos irregulares com concentração de tensões. As maiores intensidades, no entanto, são encontradas na borda (cor azul). Na porção superior hemisférica observa-se maior espaçamento entre franjas, denotando menor densidade, no entanto, são encontrados maiores valores de tensão. O processo de formação de franjas evidencia não homogeneidade

material (diferenças na distribuição entre a parte superior e inferior) e anisotropia (mudança de direção de orientação das franjas entre a parte superior e inferior).



a) Carregamento: $V = 1,0 \text{ mm/min}$; $F_1 = 300 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,6053 \text{ mm}$

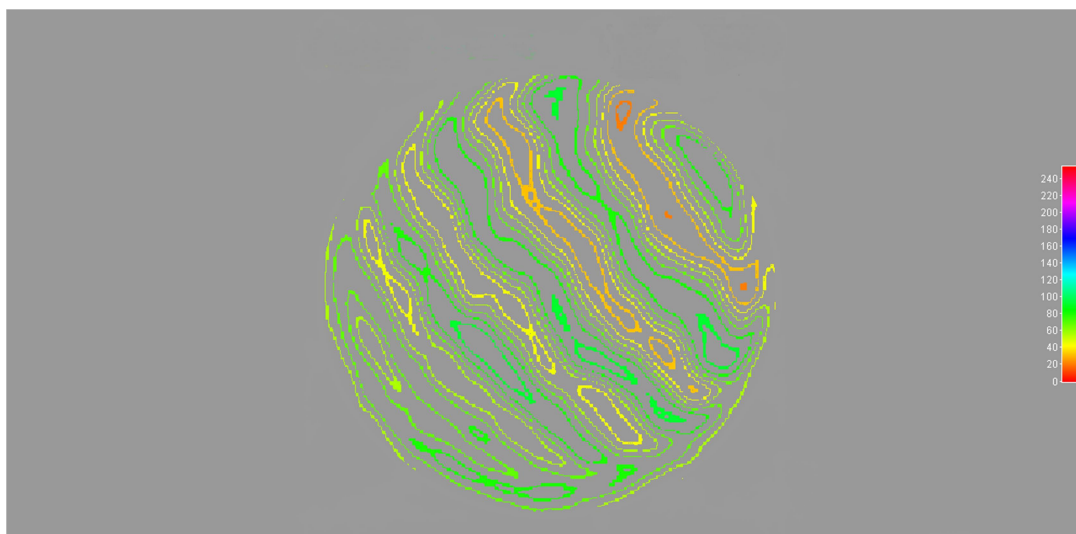


b) Carregamento: $V = 1,0 \text{ mm/min}$, $F_2 = 600 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,9920 \text{ mm}$

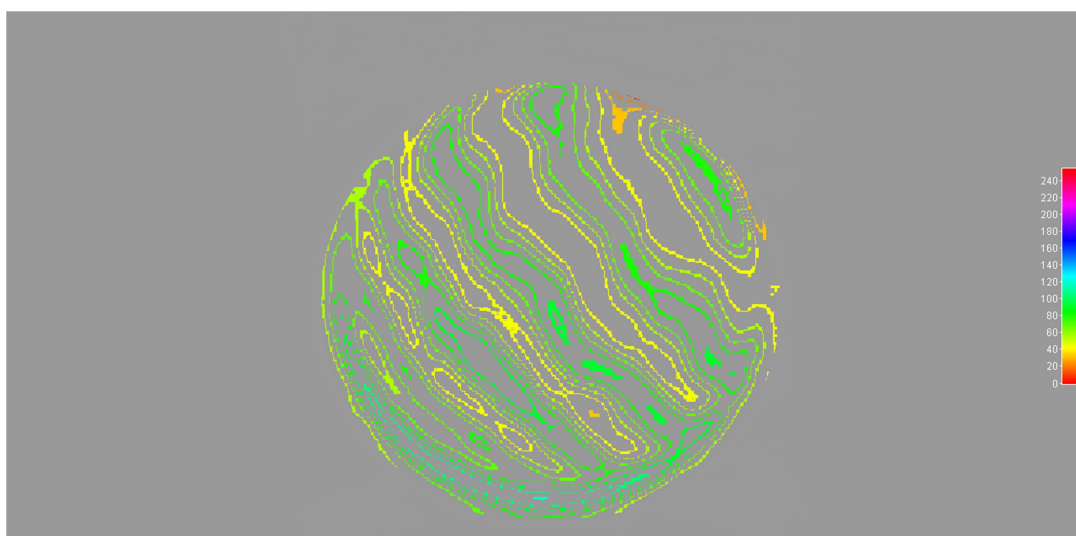
Figura 61. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML1).

[Corpo de prova: $\phi = 69 \text{ mm}$, $L = 76 \text{ mm}$]

Análise: Distribuição mais uniforme na parte central (longitudinal), cor laranja. Regularidade de formação de franja no formato de curvas semi-elípticas concêntricas. As maiores intensidades são evidenciadas pelas isocromáticas vermelhas.



a) Carregamento: $V = 1,0 \text{ mm/min}$; $F_1 = 120 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,6354 \text{ mm}$

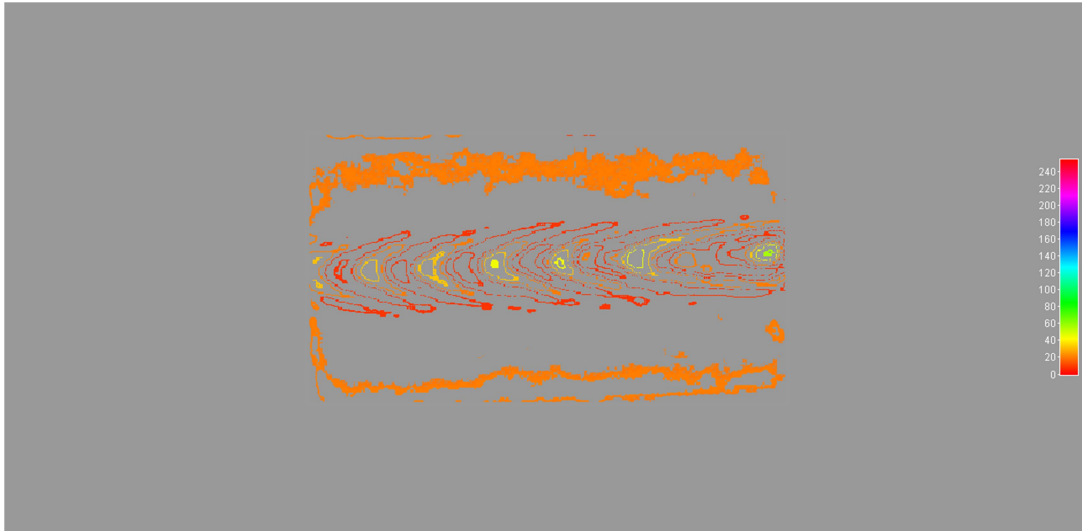


b) Carregamento: $V = 1,0 \text{ mm/min}$, $F_2 = 240 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 1,1552 \text{ mm}$

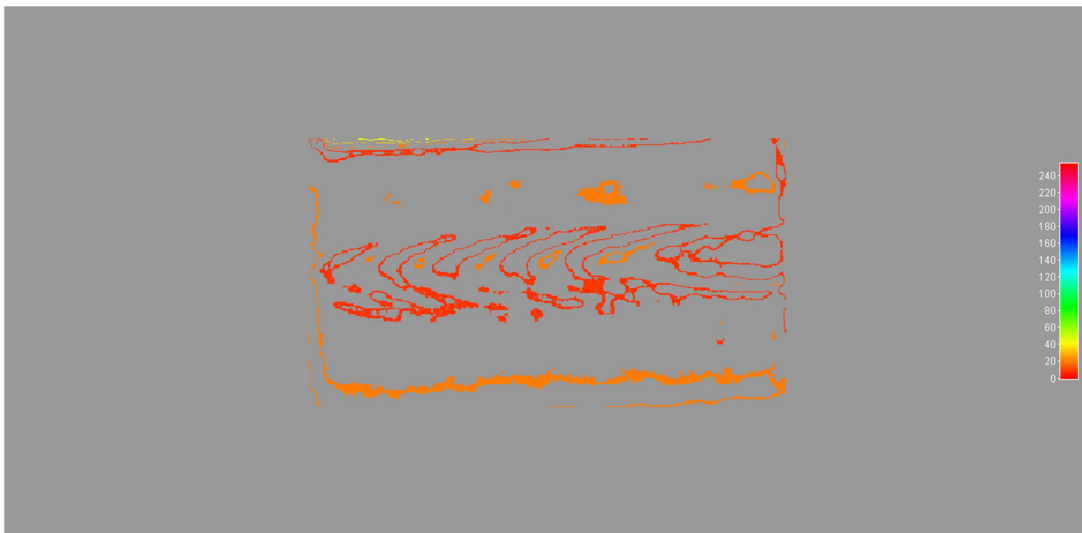
Figura 62. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF2).

[Corpo de prova: $\phi = 22 \text{ mm}$, $L = 38 \text{ mm}$]

Análise: Isóclinas apontam direção aproximadamente 45° esquerda, intensidade regular (isocromática verde-amarelo). Maior espaçamento de franjas. Concentração no bordo inferior (azul).



a) Carregamento: $V = 1,0 \text{ mm/min}$; $F_1 = 120 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,5598 \text{ mm}$

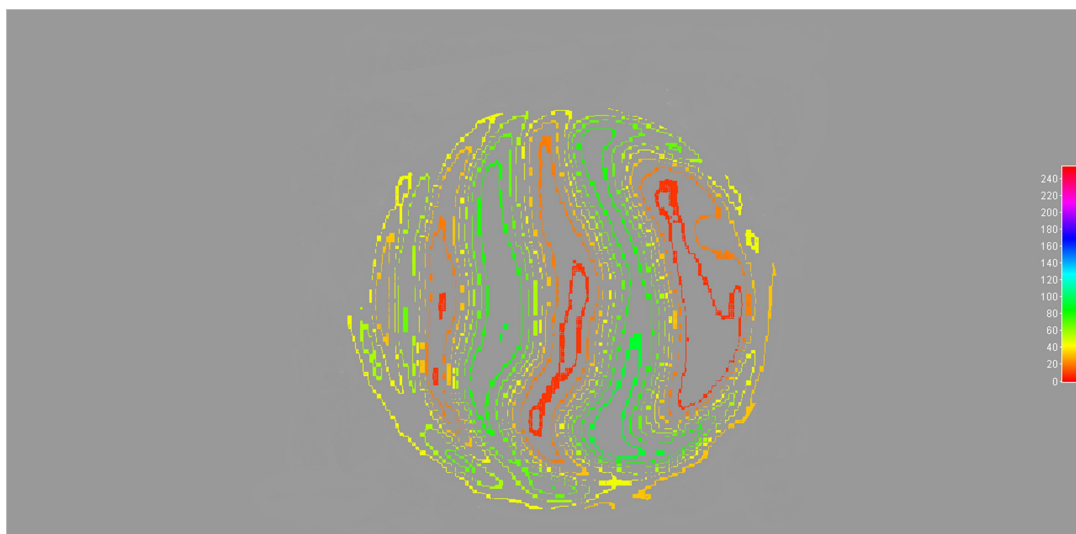


b) Carregamento: $V = 1,0 \text{ mm/min}$, $F_2 = 240 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,9096 \text{ mm}$

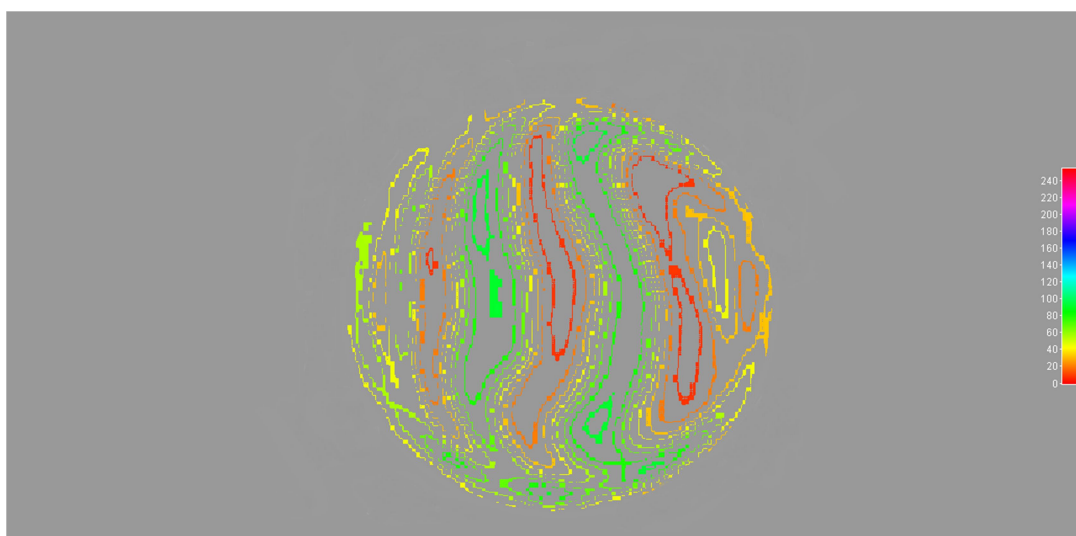
Figura 63. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML2).

[Corpo de prova: $\phi = 22 \text{ mm}$, $L = 38 \text{ mm}$]

Análise: Região de contato superior: borda de concentração de tensão. Distribuição central: isóclinas com formato de curvas semi-elípticas concêntricas de intensidade baixa (vermelho/laranja).



a) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min; $F_1 = 50$ kgf, $\delta_1 = 0,2666$ mm

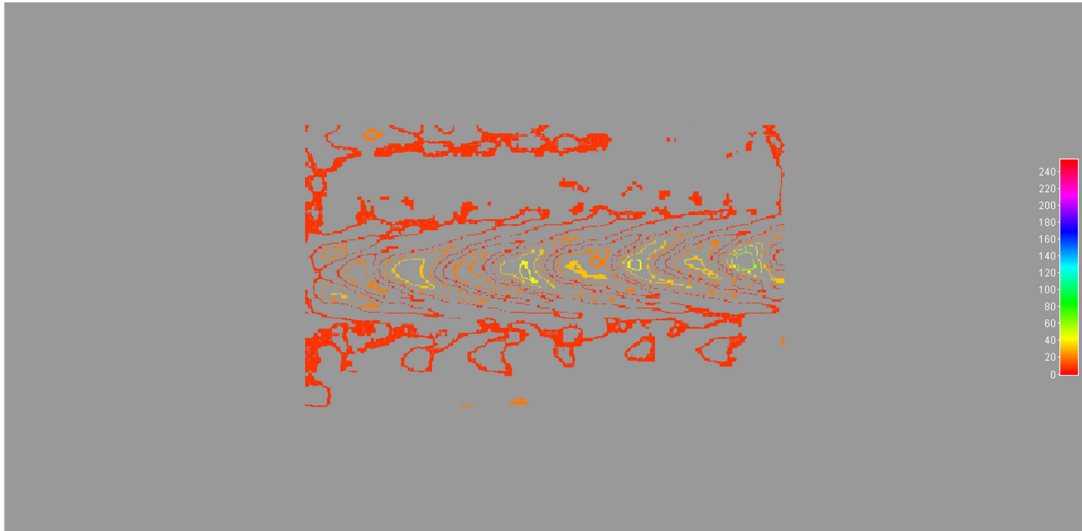


b) Carregamento: $V = 0,8$ mm/min, $F_2 = 100$ kgf, $\delta_2 = 0,4319$ mm

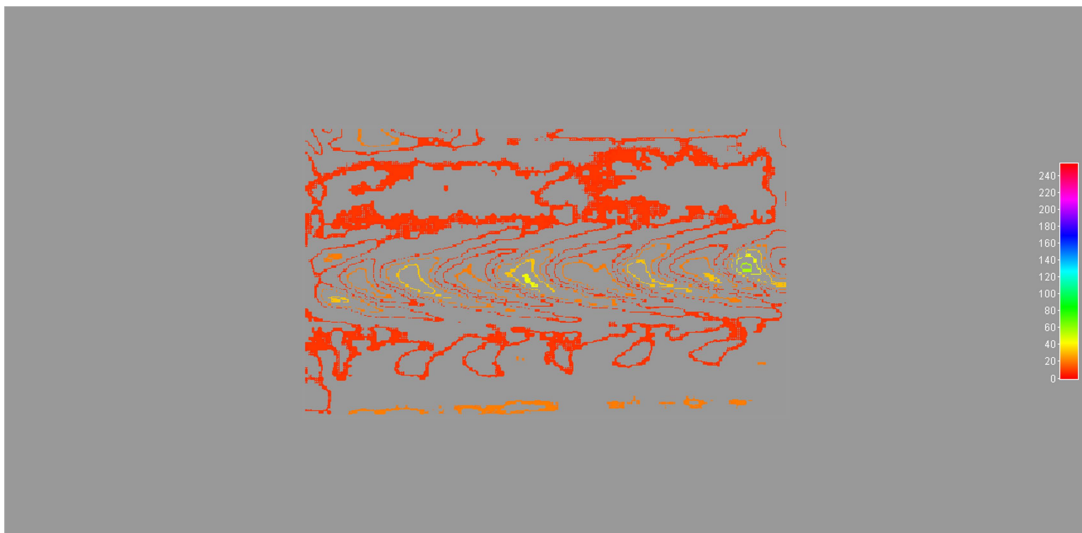
Figura 64. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF3).

[Corpo de prova: $\phi = 18,02$ mm, $L = 33,42$ mm]

Análise: observa-se que o centro da placa plana superior não está alinhado com o centro do objeto. Isóclinas na direção vertical, espaçamento nas extremidades com menor densidade de franjas na cor vermelho-verde. Presença de duas faixas verticais centrais de maior densidade com maior regularidade (cor verde).



a) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_1 = 50 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,1232 \text{ mm}$

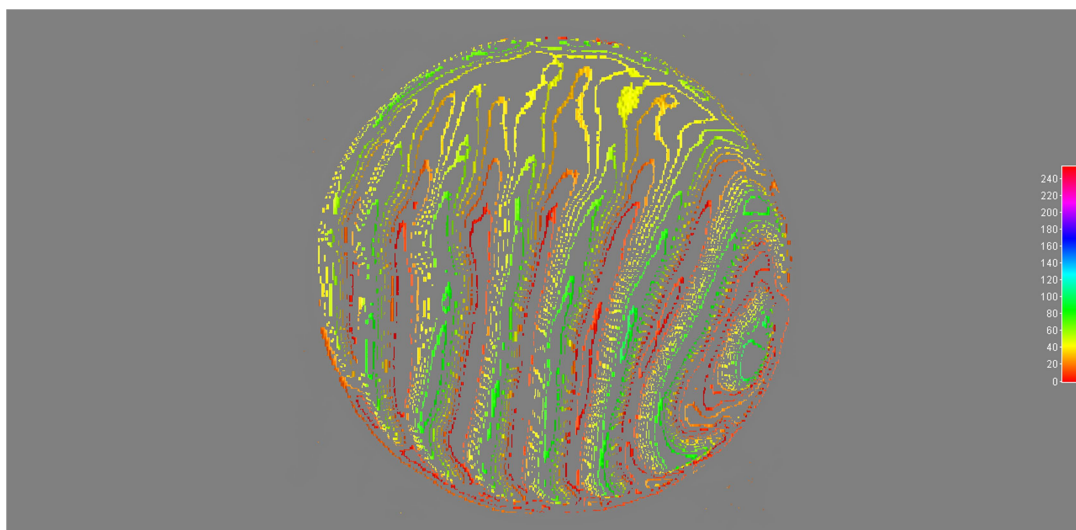


b) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_2 = 100 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,8014 \text{ mm}$

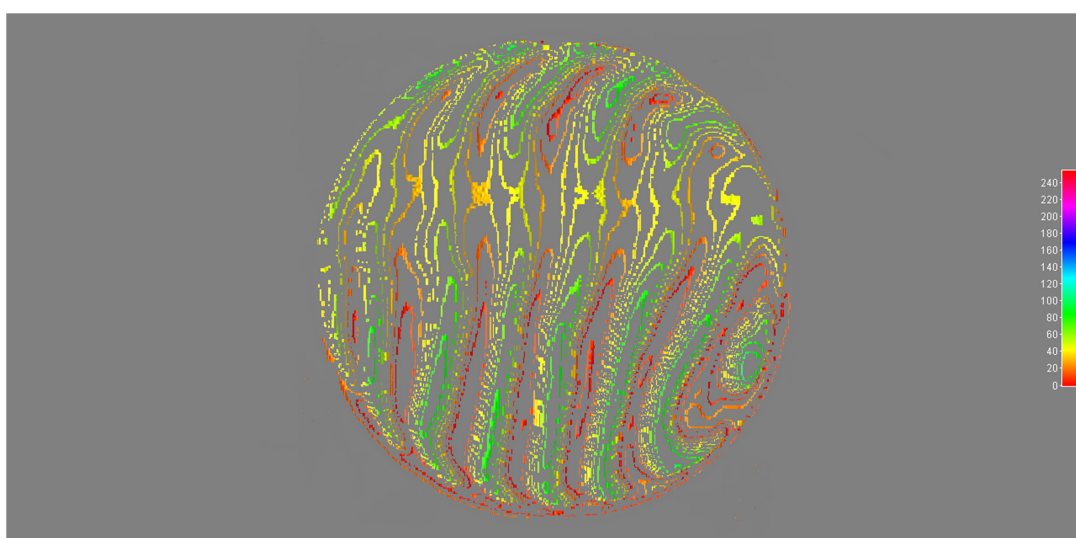
Figura 65. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML3).

[Corpo de prova: $\phi = 18,02 \text{ mm}$, $L = 33,42 \text{ mm}$]

Análise: Faixa central longitudinal, mais regular com isocromáticas (amarelo/laranja). Porção anelar interior mais irregular na distribuição.



a) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_1 = 150 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,3556 \text{ mm}$

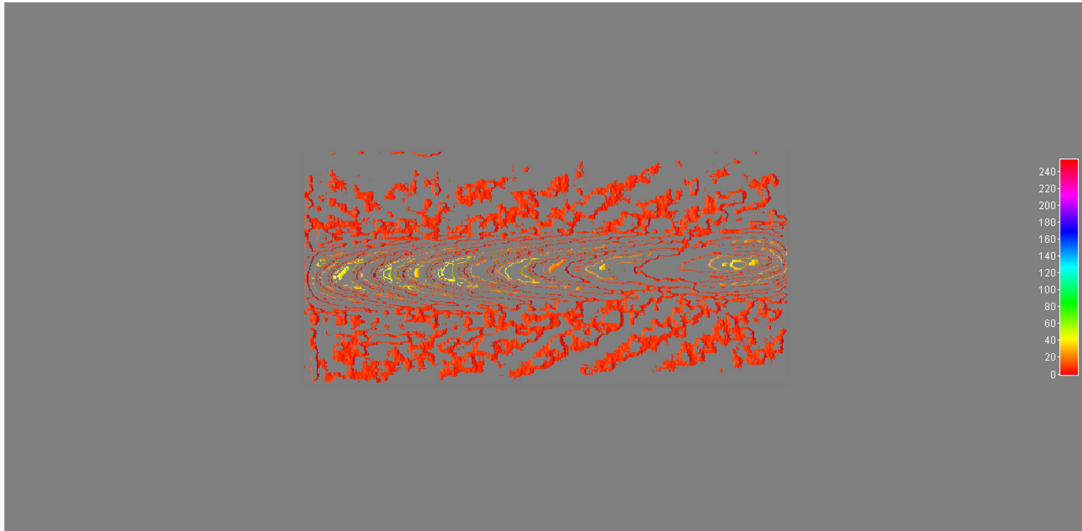


b) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_2 = 300 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,7350 \text{ mm}$

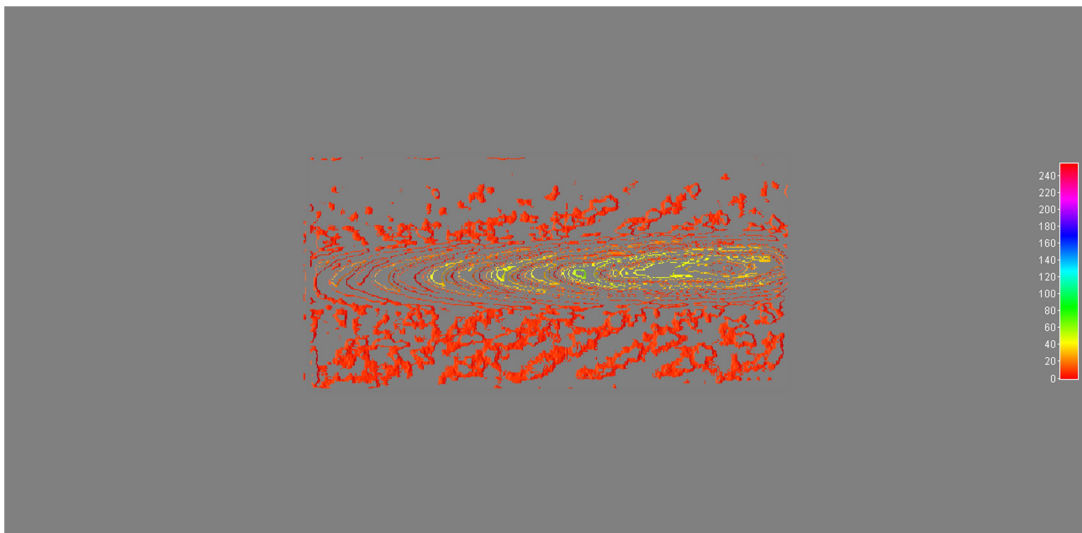
Figura 66. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (MF4).

[Corpo de prova: $\phi = 38,01 \text{ mm}$, $L = 76,57 \text{ mm}$]

Análise: Isóclinas de direção aproximadamente vertical com leve inclinação para a direita. Formação de região horizontal. Concentração na borda: menor espaçamento de franjas evidenciando maior densidade e regularidade do espaçamento evidenciando linearidade na distribuição de tensões. Parte hemisférica superior: menor concentração.



a) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_1 = 150 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,4354 \text{ mm}$



b) Carregamento: $V = 0,8 \text{ mm/min}$, $F_2 = 300 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,6880 \text{ mm}$

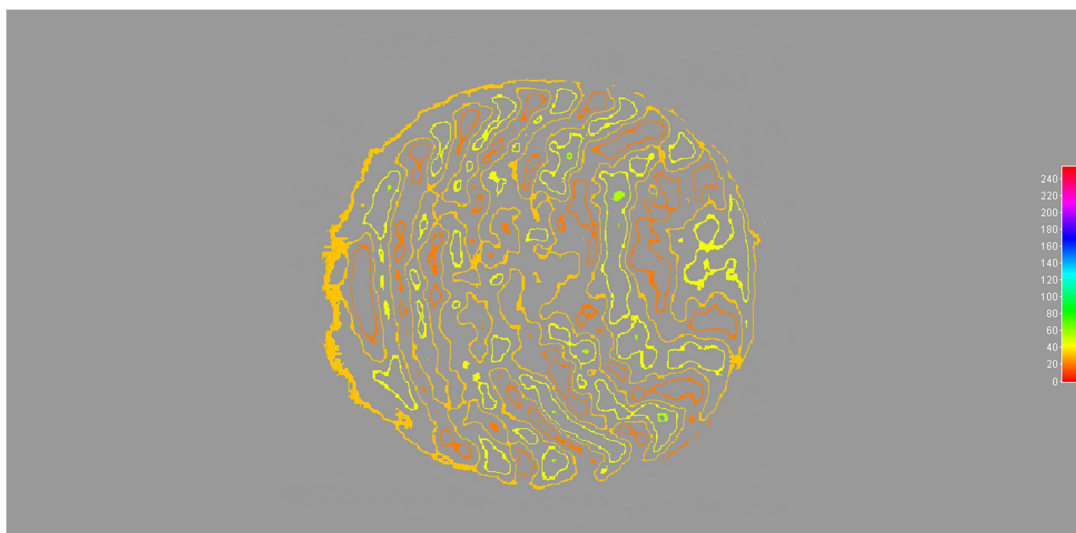
Figura 67. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em madeira (ML4).

[Corpo de prova: $\phi = 38 \text{ mm}$, $L = 76 \text{ mm}$]

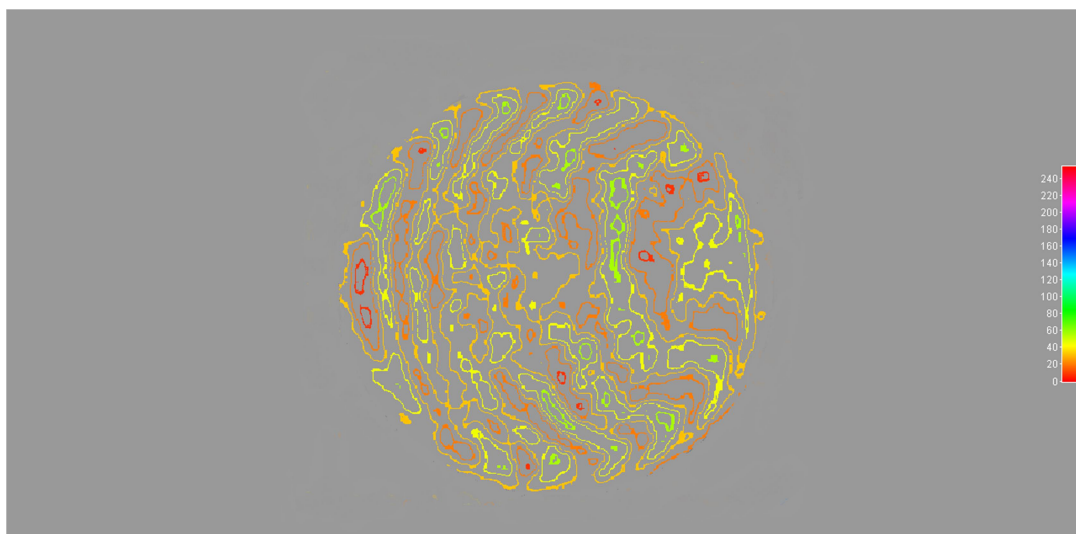
Análise: Isóclinas apontam eixo central com curvas semi-elípticas paralelas, maior regularidade, maior intensidade (amarelo). Parte anelar, fora do círculo central, irregular na cor laranja.

4.2.3 Resultados e análise de *moire* em espécimes de cana-de-açúcar

4.2.3.1 Corpos de prova integrais



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 30 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0366 \text{ mm}$

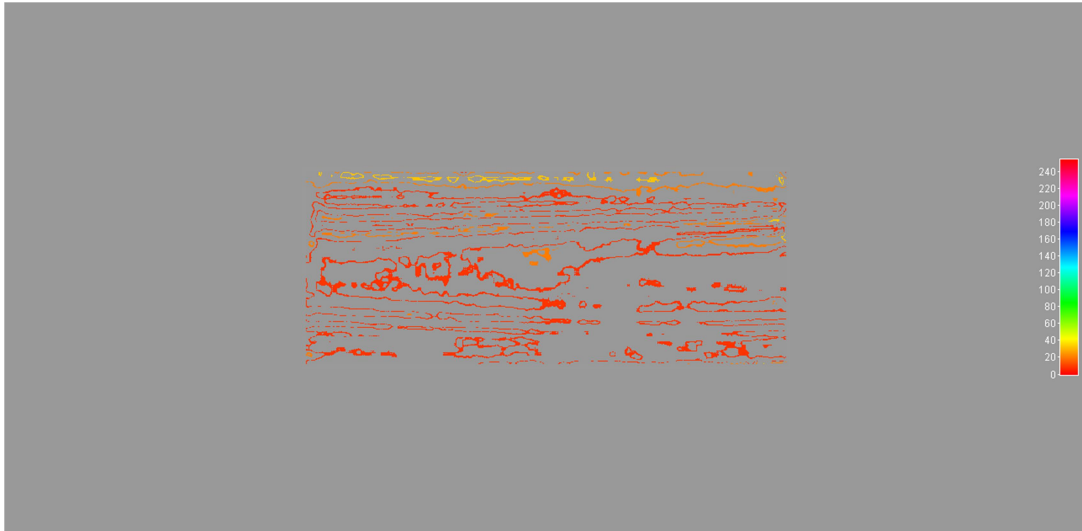


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 40 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,1322 \text{ mm}$

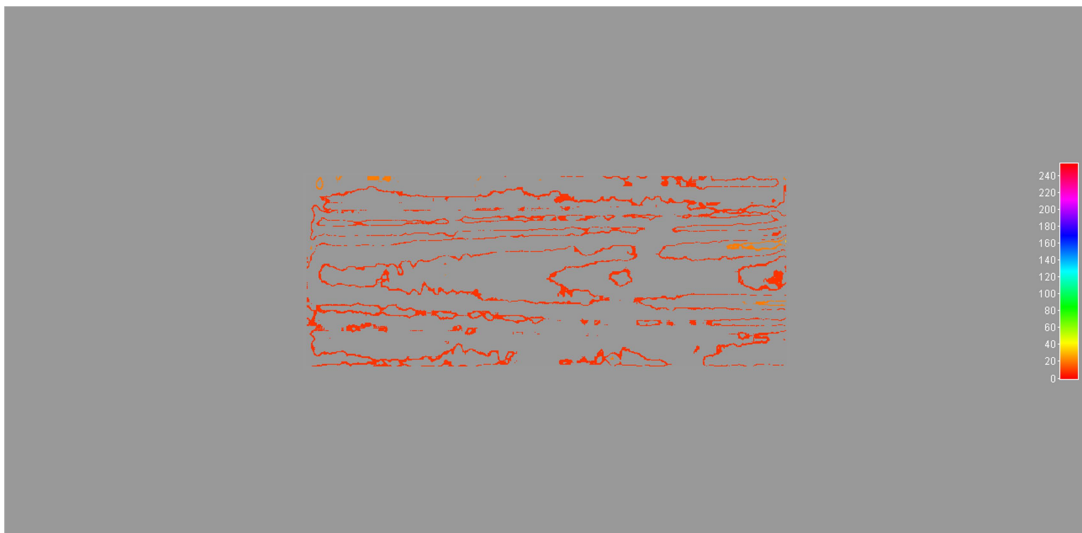
Figura 68. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CID1).

[Corpo de prova: $\phi = 32 \text{ mm}$, $L = 77 \text{ mm}$]

Análise: Isóclinas evidenciam distribuição de linhas mais espaçadas aproximadamente na direção vertical. Concentração nas bordas circulares, com baixa intensidade (amarelo) e de pontos no interior (vermelho).



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 37 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,3462 \text{ mm}$

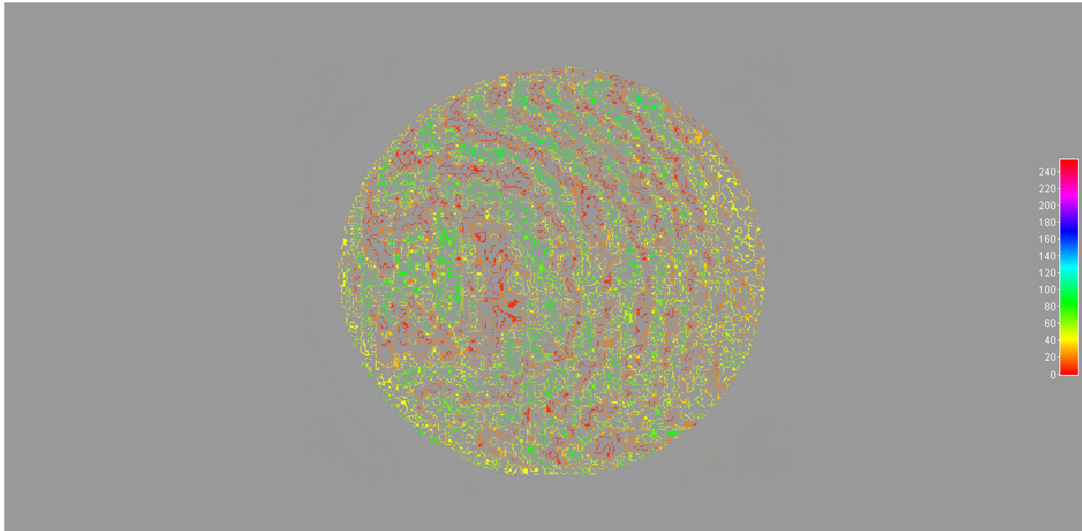


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 47 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,5048 \text{ mm}$

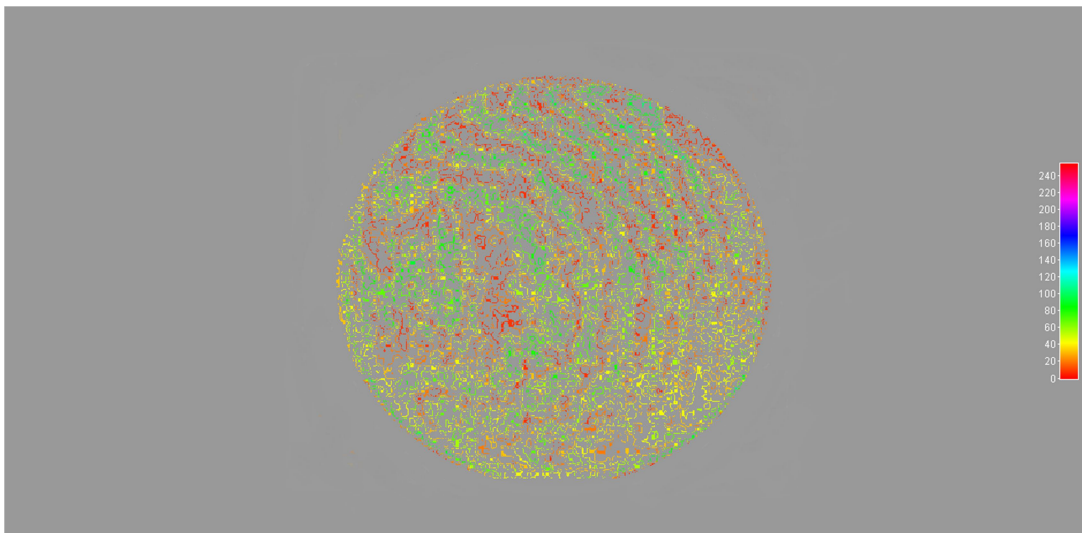
Figura 69. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CIL1).

(Corpo de prova: $\phi = 29,44 \text{ mm}$, $L = 77 \text{ mm}$)

Análise: Linhas aproximadamente paralelas longitudinalmente. Maior irregularidade na porção interior.



a) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_1 = 10$ kgf, $\delta_1 = 0,1343$ mm

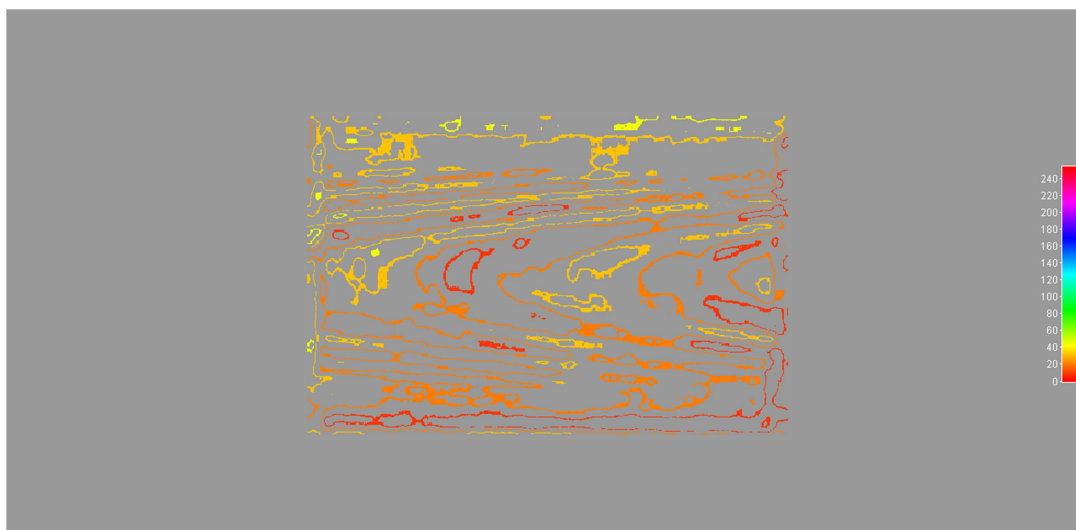


b) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_2 = 15$ kgf, $\delta_2 = 0,3267$ mm

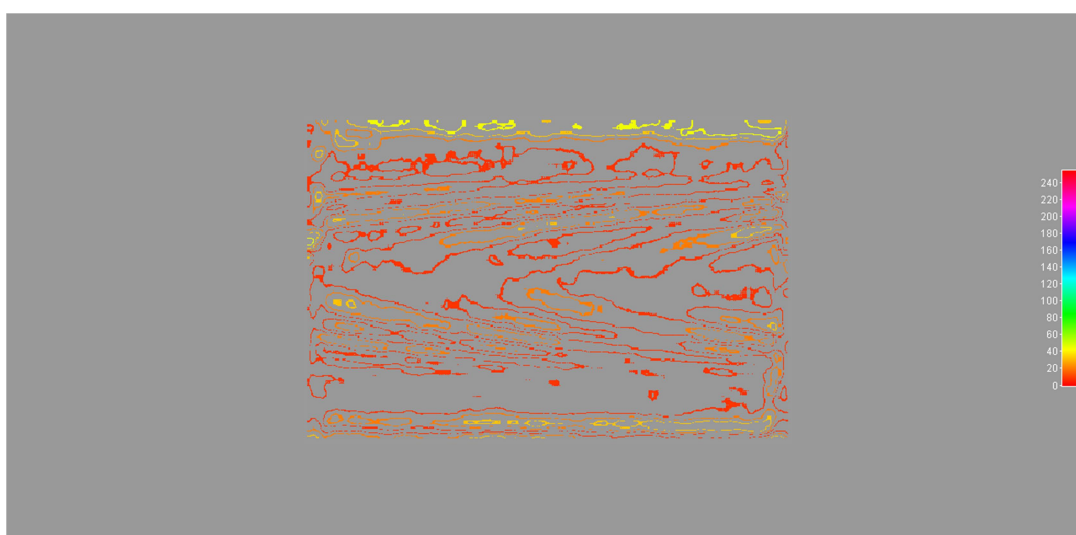
Figura 70. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CID2).

[Corpo de prova: $\phi = 33$ mm, $L = 40$ mm]

Análise: Isóclinas: linhas semiesféricas paralelas da direita para esquerda, espaçamento regular. Na extremidade esquerda, posição central, há presença de irregularidades.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 35 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0558 \text{ mm}$

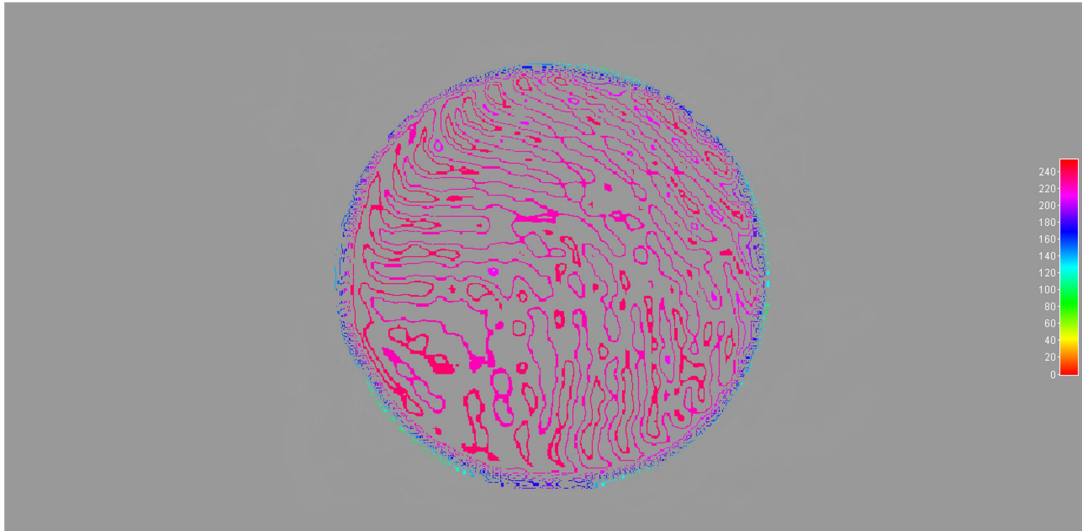


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 40 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,1363 \text{ mm}$

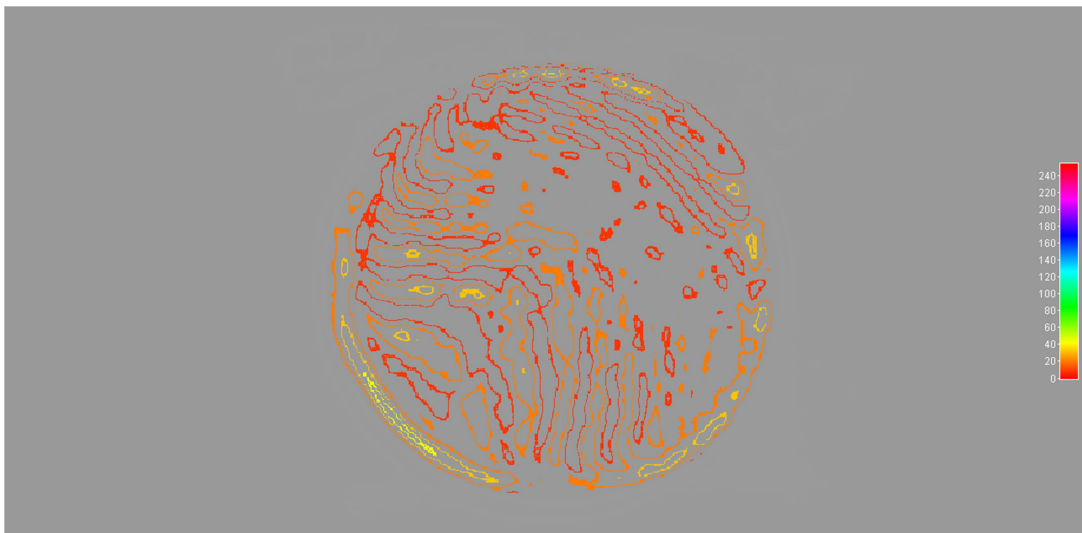
Figura 71. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CIL2).

[Corpo de prova: $\phi = 29,42 \text{ mm}$, $L = 42,13 \text{ mm}$]

Análise: Isocromáticas evidenciam forma semi-elíptica no centro direção longitudinal, irregularidade maior, espaçamento entre franjas maior (menor densidade). Concentração de tensão nas bordas de contato com placas planas e paralelas.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 10 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,1882 \text{ mm}$

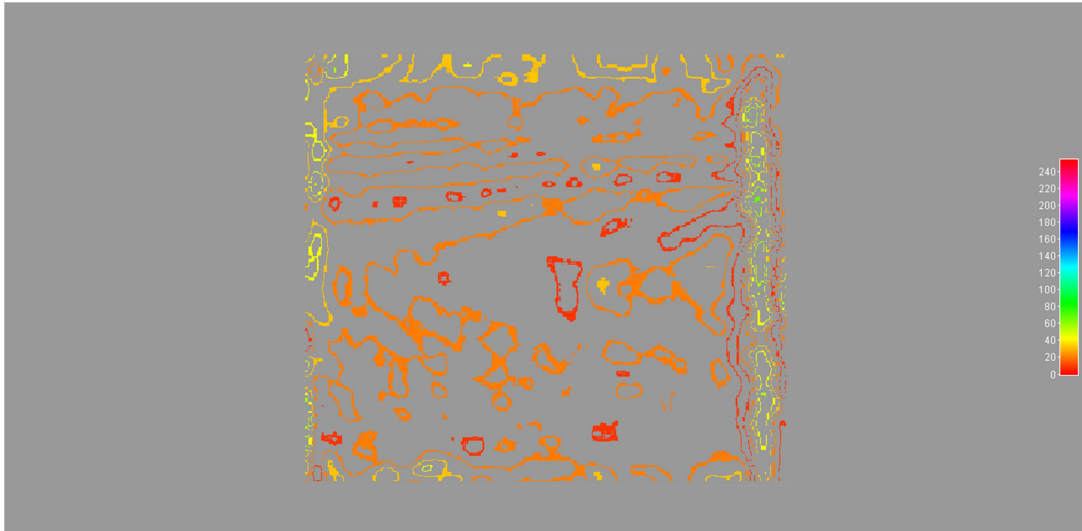


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 15 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,5292 \text{ mm}$

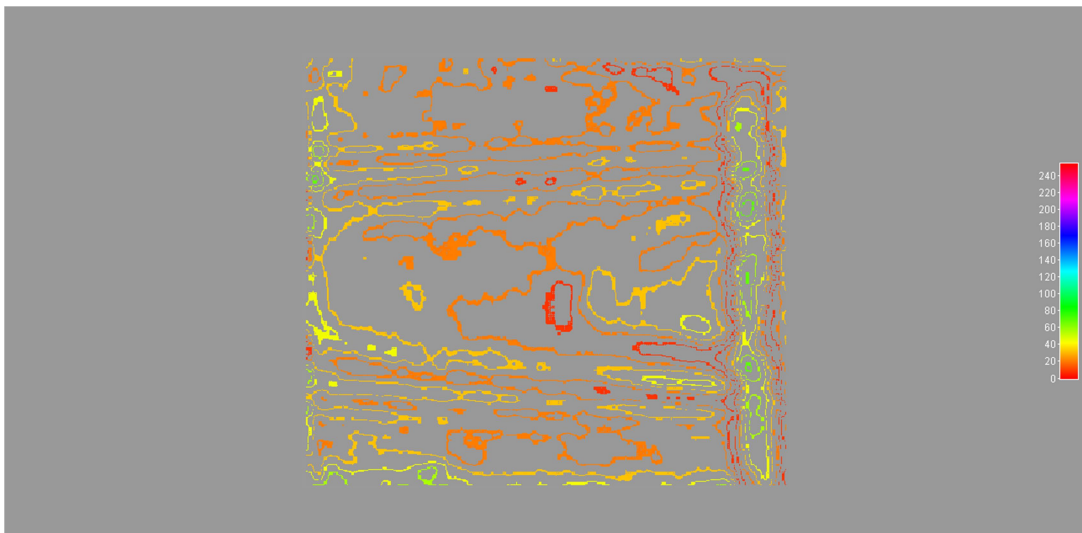
Figura 72. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,1 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CID3).

[Corpo de prova: $\phi = 32 \text{ mm}$, $L = 32 \text{ mm}$]

Análise: isóclinas – concentração nas bordas, alta intensidade (azul). Maior intensidade no centro (cor roxo), disposição em “L” invertido com maior espaçamento. Baixas tensões na diagonal superior.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 30 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0926 \text{ mm}$



b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 35 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,1817 \text{ mm}$

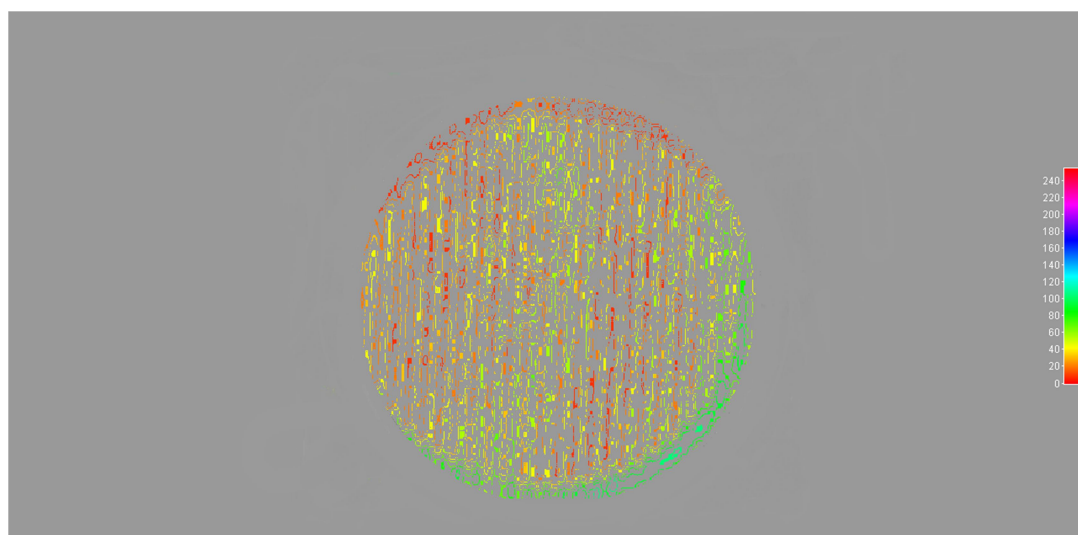
Figura 73. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (CIL3).

[Corpo de prova: $\phi = 29 \text{ mm}$, $L = 31,29 \text{ mm}$]

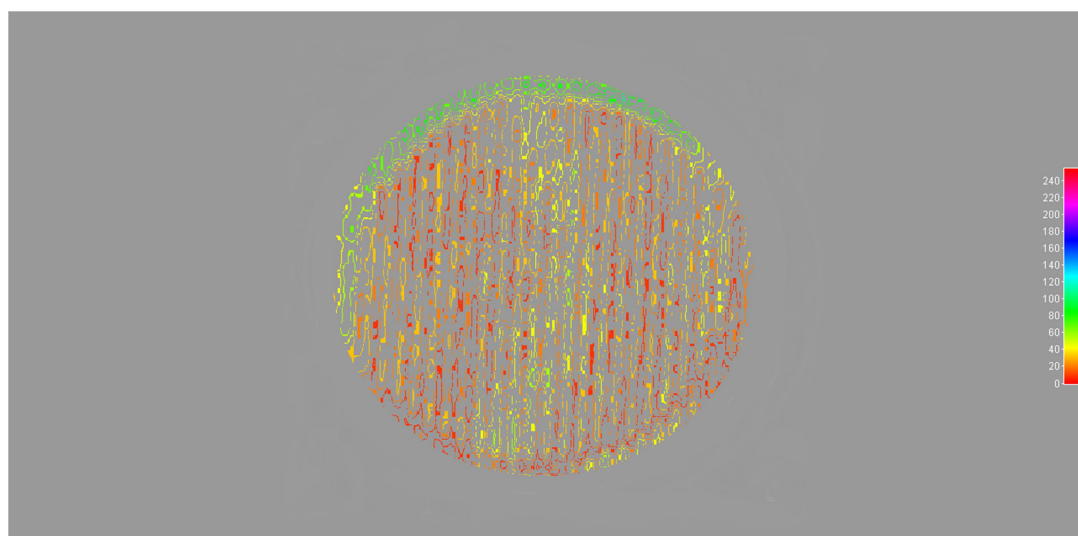
Análise: isocromáticas de baixa intensidade de tensão. Isóclinas: maior dispersão na região central. Parte anelar com orientação paralela às fibras.

ID41/ID42/ID43/MCID6/MCIL7 – Figuras 73, 74, 75, 76, 77

Observação: Utilização de grade de 0,6 mm implicando franjas não definidas e dispersão do sinal luminoso.



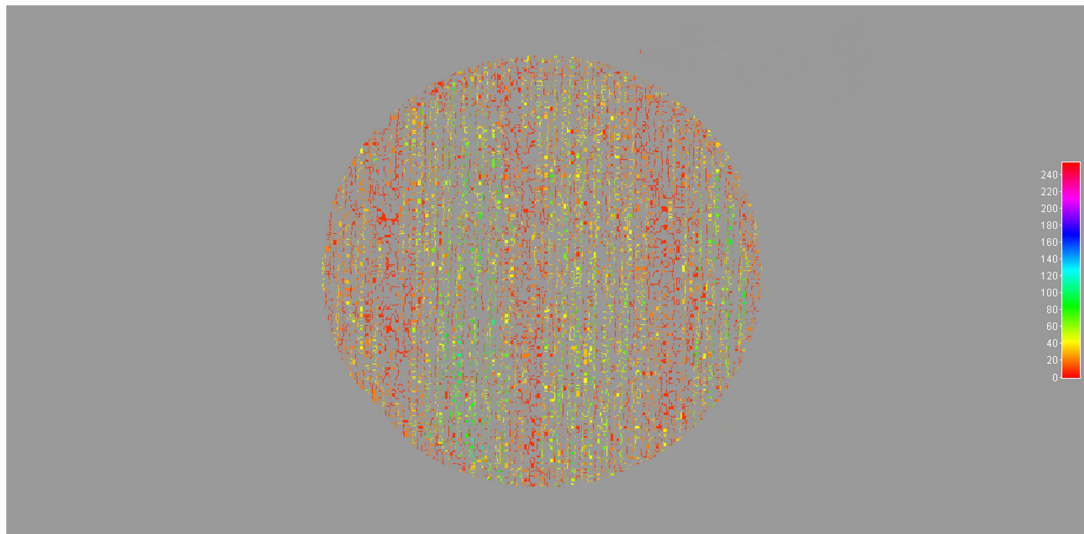
a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 30 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,1801 \text{ mm}$



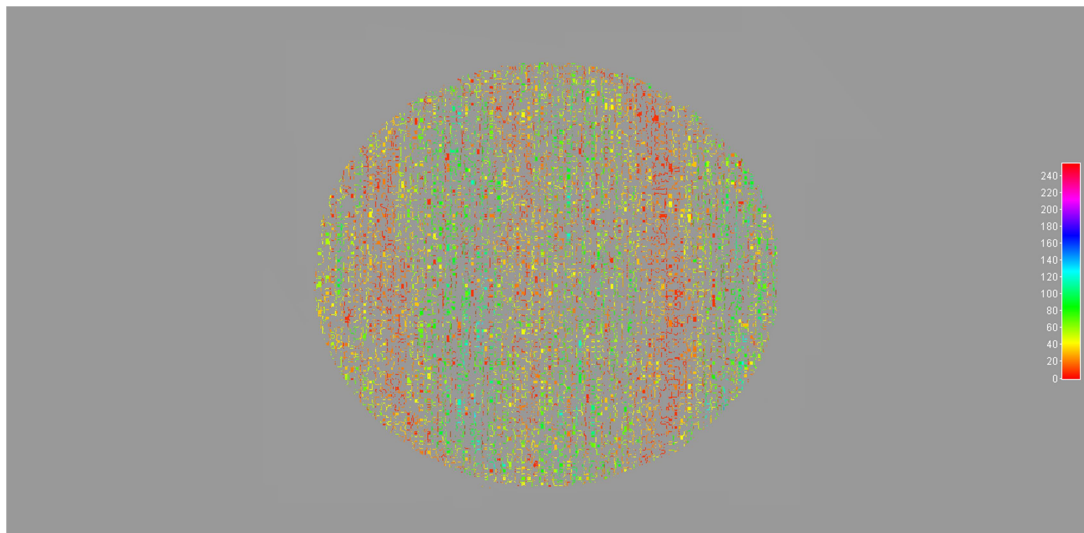
b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 50 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,5275 \text{ mm}$

Figura 74. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (ID41).

[Corpo de prova: $\phi = 29,95 \text{ mm}$, $L = 77 \text{ mm}$]



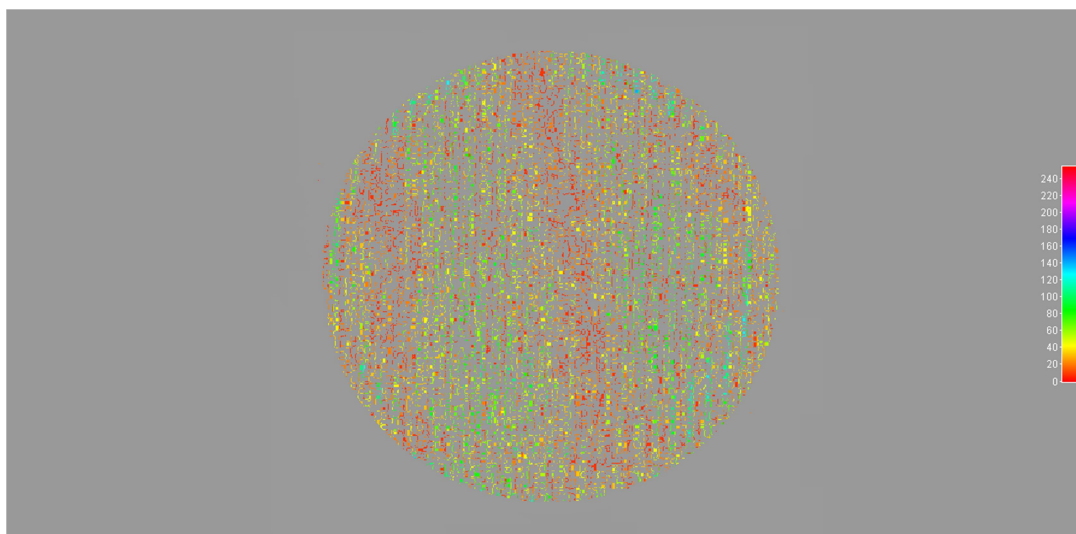
a) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_1 = 40$ kgf, $\delta_1 = 0,0371$ mm



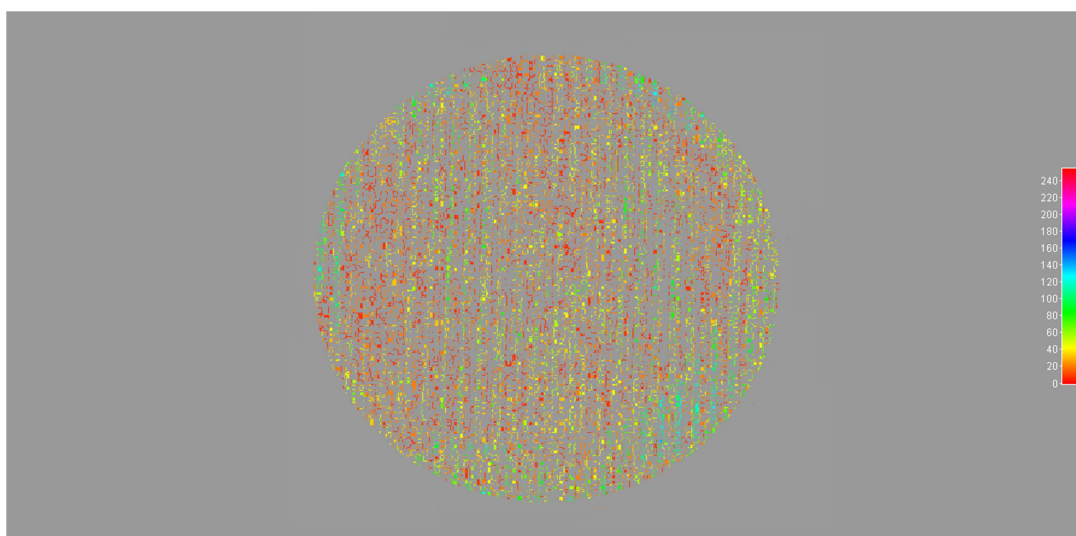
b) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_2 = 50$ kgf, $\delta_2 = 0,1827$ mm

Figura 75. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (ID42).

[Corpo de prova: $\phi = 33$ mm, $L = 40$ mm]



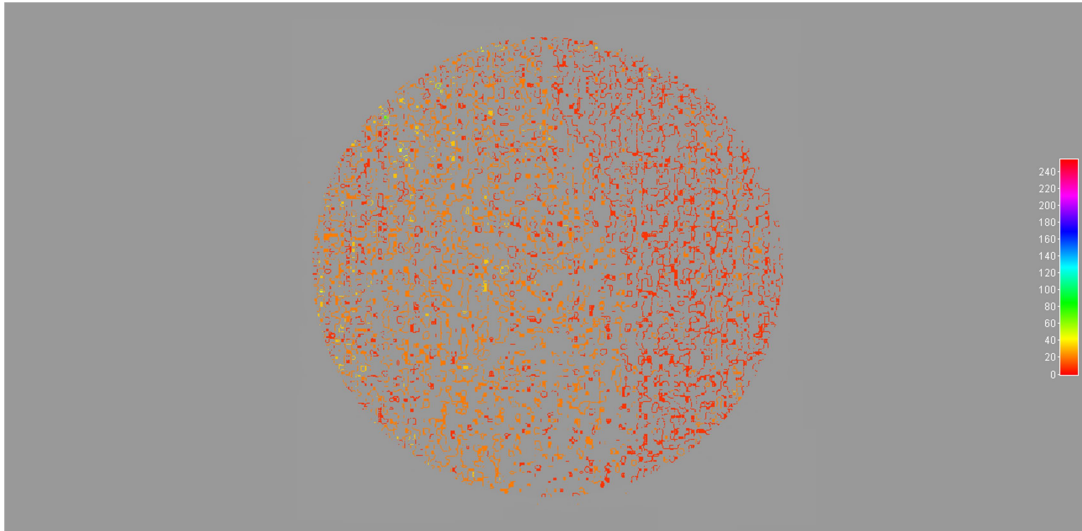
a) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_1 = 20$ kgf, $\delta_1 = 0,1554$ mm



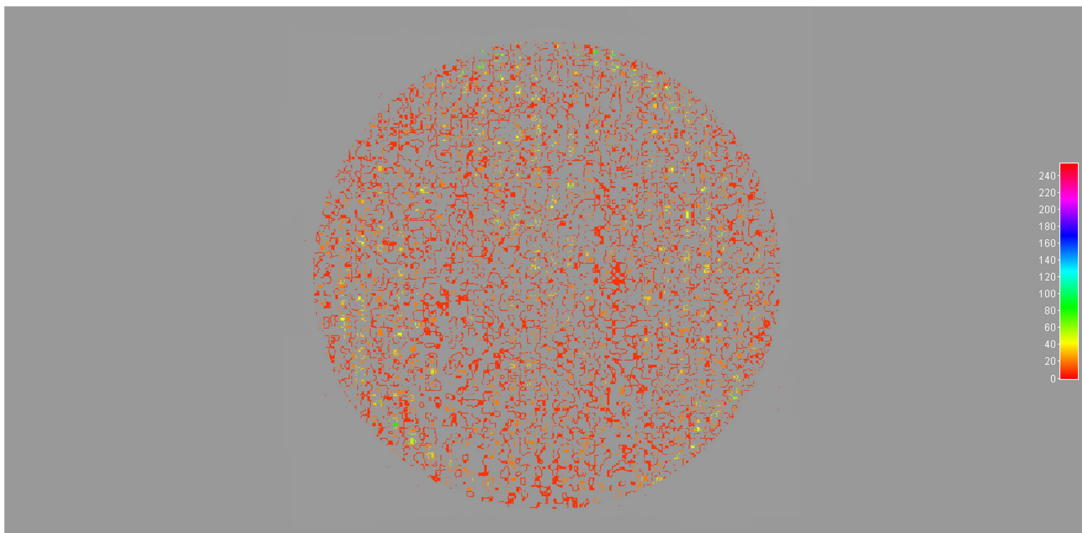
b) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_2 = 30$ kgf, $\delta_2 = 0,4834$ mm

Figura 76. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (ID43).

[Corpo de prova: $\phi = 32$ mm, $L = 32$ mm]



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 30 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,1459 \text{ mm}$



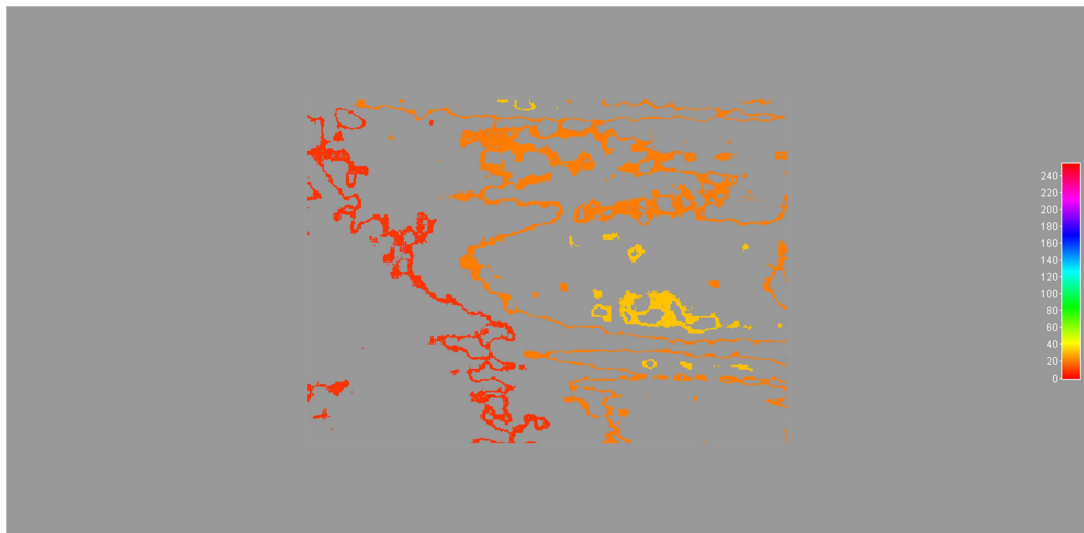
b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 50 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,4903 \text{ mm}$

Figura 77. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCID6).

[Corpo de prova: $\phi = 29,05 \text{ mm}$, $L = 58,50 \text{ mm}$]



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 40 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,2098 \text{ mm}$

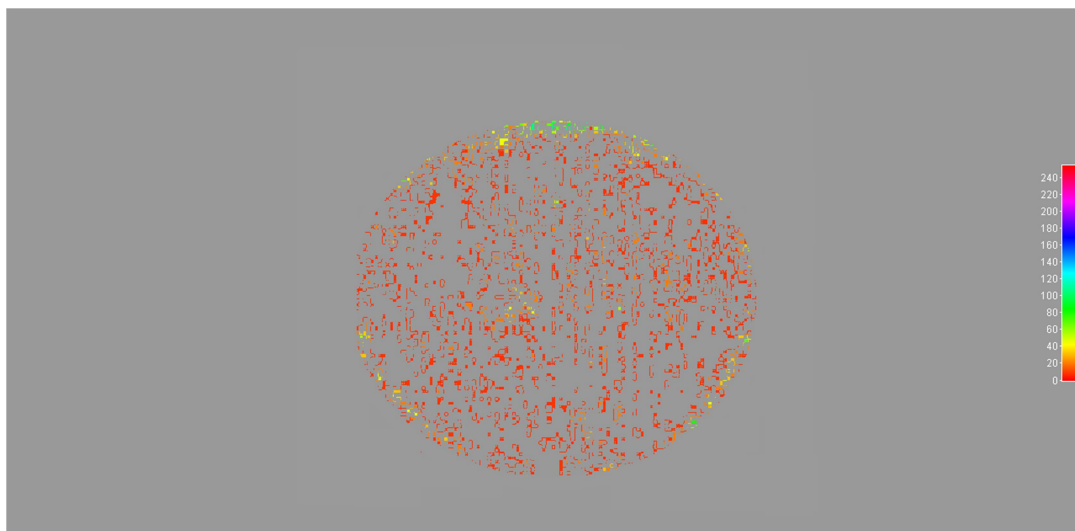


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 60 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,6257 \text{ mm}$

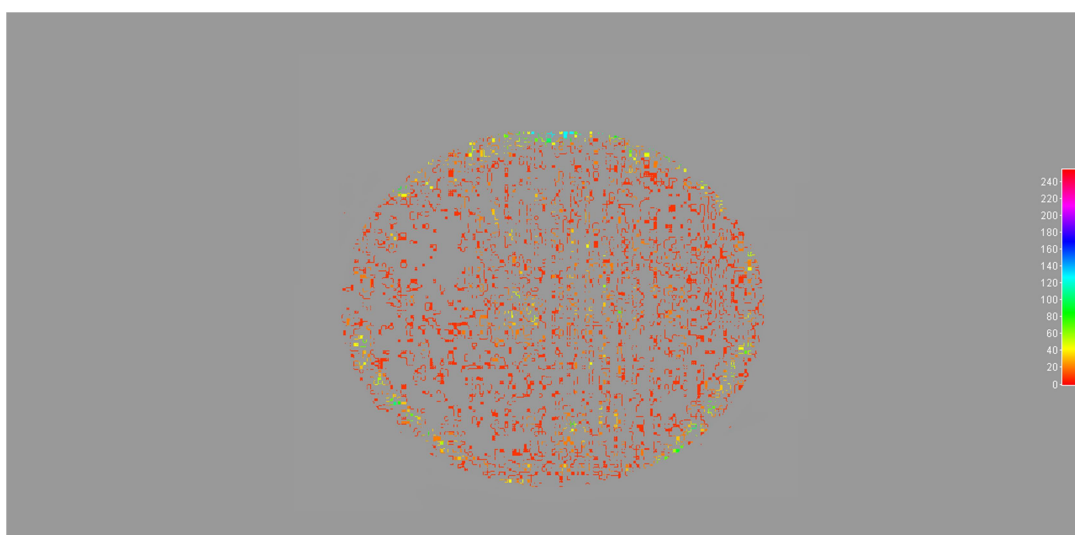
Figura 78. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCIL7).

[Corpo de prova: $\phi = 29 \text{ mm}$, $L = 58 \text{ mm}$]

4.2.3.2 Corpos de prova do parênquima



a) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_1 = 13$ kgf, $\delta_1 = 0,5172$ mm

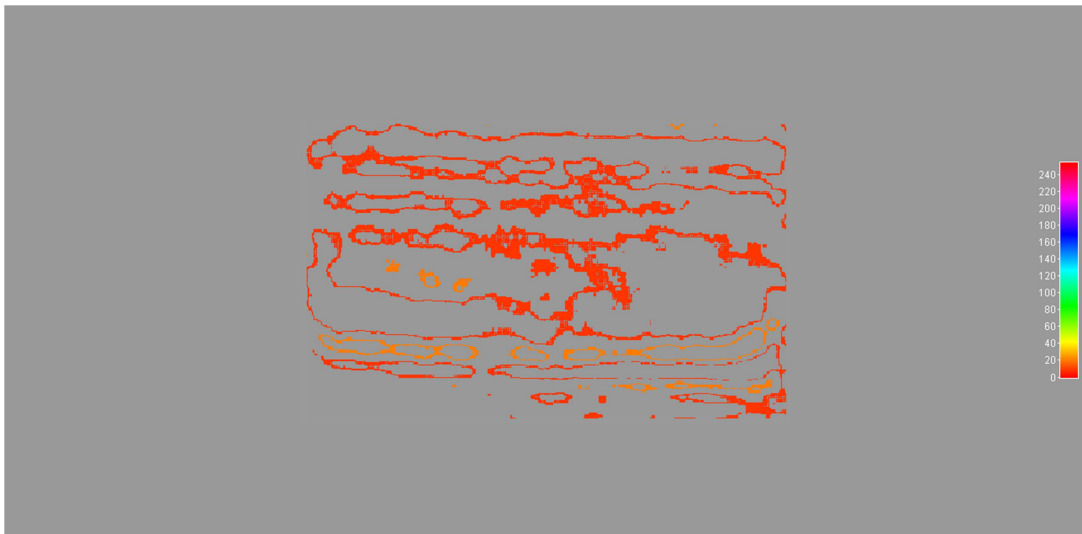


b) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_2 = 15$ kgf, $\delta_2 = 0,7915$ mm

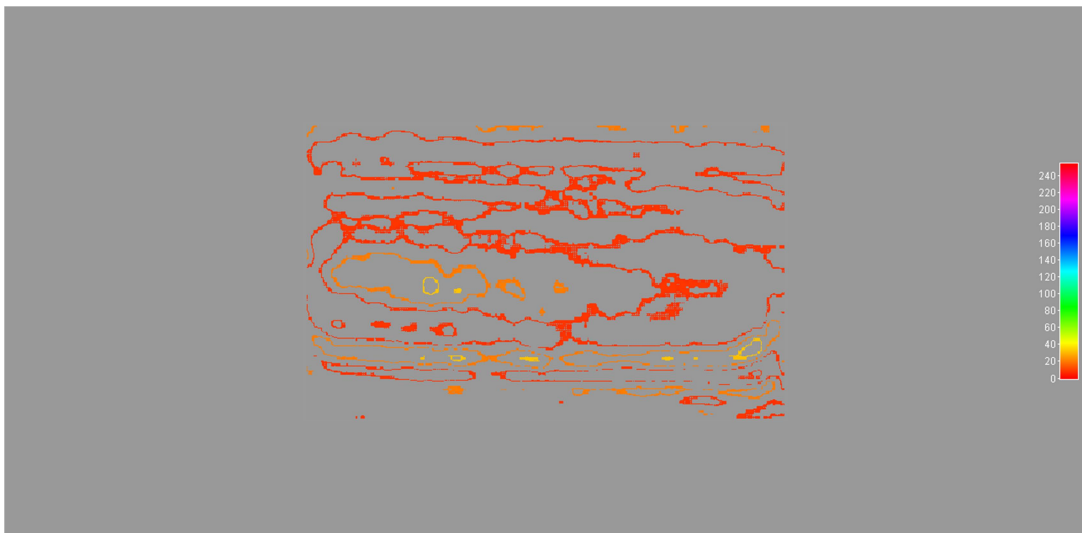
Figura 79. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPD1).

[Corpo de prova: $\phi = 19,15$ mm, $L = 31,11$ mm]

Análise: com a utilização da grade de 0,4 mm houve muita dispersão na formação de franjas.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 13 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,6037 \text{ mm}$

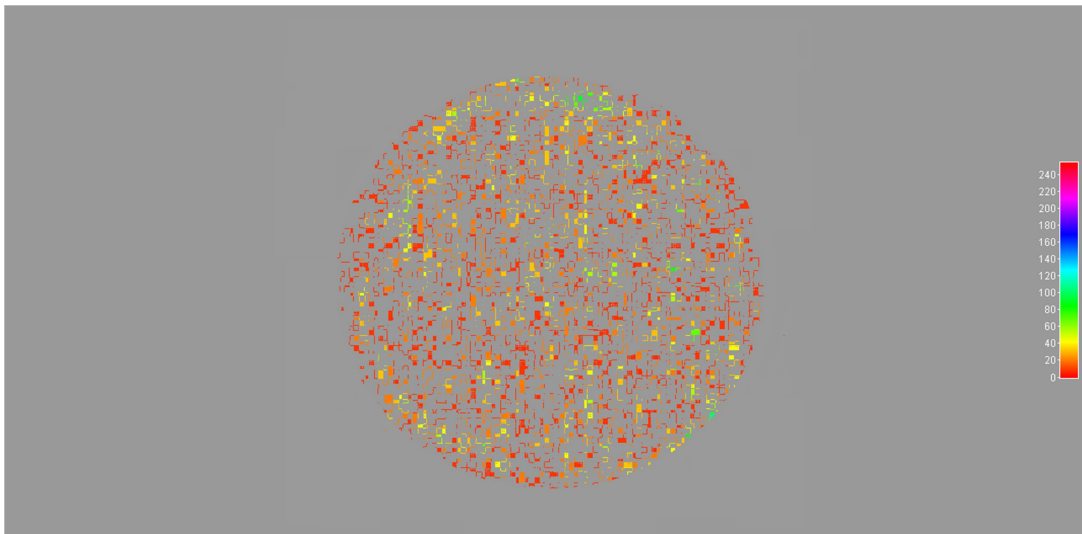


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 15 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 1,1117 \text{ mm}$

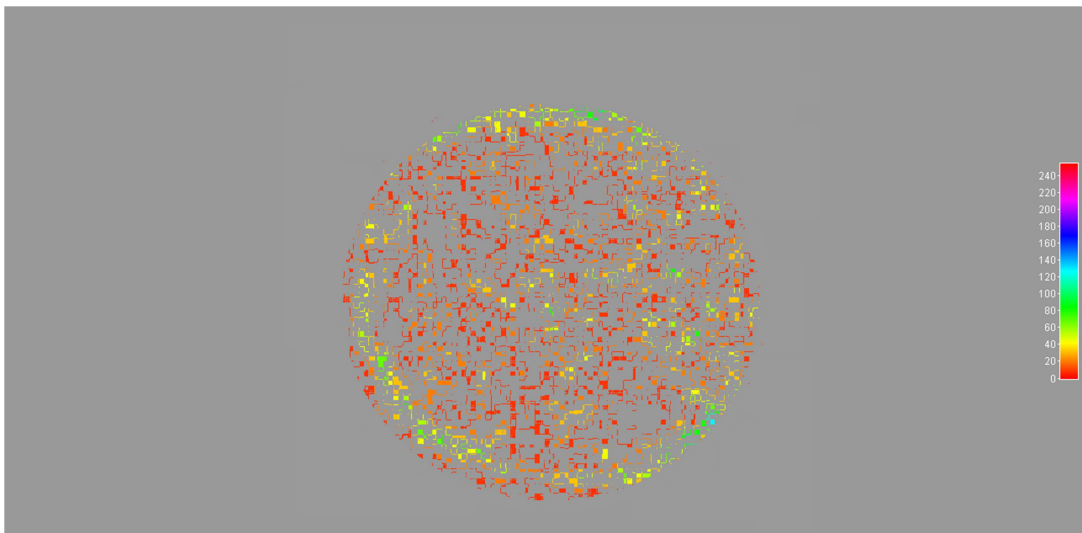
Figura 80. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPL2).

[Corpo de prova: $\phi = 19,03 \text{ mm}$, $L = 31,01 \text{ mm}$]

Análise: utilização da grade de 0,4 mm, direção não tão alinhada, maior concentração no parênquima anelar, região central de menor intensidade.



a) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_1 = 10$ kgf, $\delta_1 = 0,7142$ mm

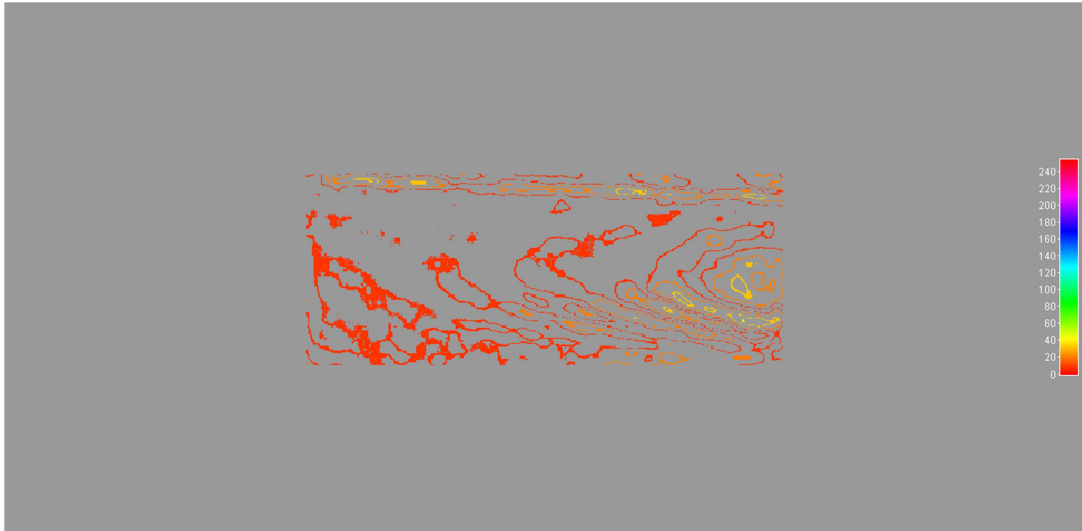


b) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_2 = 15$ kgf, $\delta_2 = 1,2760$ mm

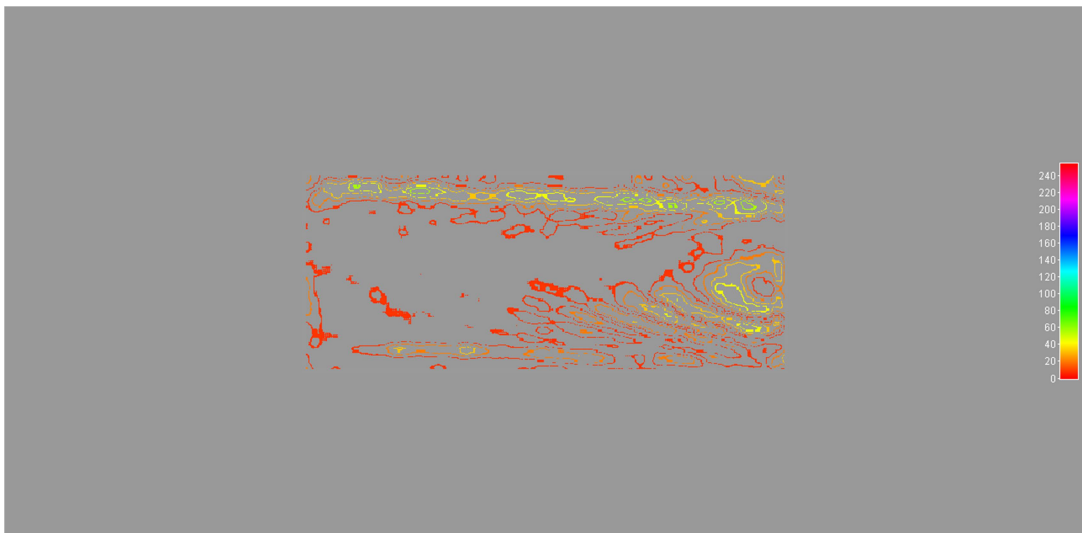
Figura 81. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPD3).

[Corpo de prova: $\phi = 15,97$ mm, $L = 39,88$ mm]

Análise: utilização de grade de 0,4 mm, sinal luminoso muito disperso, maior intensidade na borda.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 10 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,7904 \text{ mm}$

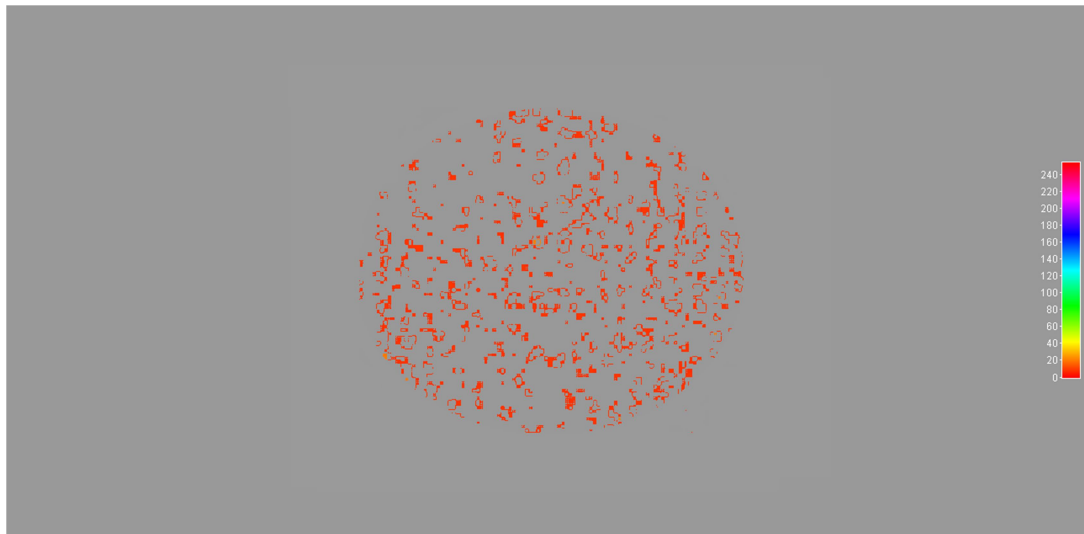


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 15 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 1,4274 \text{ mm}$

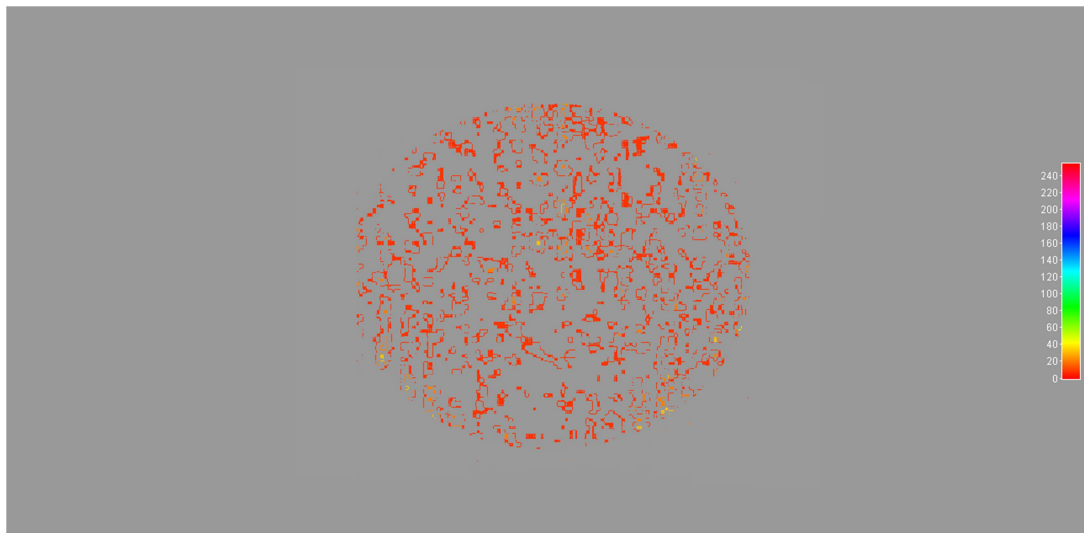
Figura 82. Vista lateral de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPL4).

[Corpo de prova: $\phi = 16,88 \text{ mm}$, $L = 40,47 \text{ mm}$]

Análise: Região esquerda com baixa intensidade na região central. Maiores densidades na borda de contato superior e extremidade direita. Problema de planicidade no contato cilindro-placa placa.



a) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_1 = 10$ kgf, $\delta_1 = 0,1161$ mm



b) Carregamento: $V = 0,5$ mm/min, $F_2 = 15$ kgf, $\delta_2 = 0,4043$ mm

Figura 83. Vista frontal de franjas de *moiré*, grade 0,6 mm, em dois estados de carregamento na compressão diametral em cana-de-açúcar (MCPD5).

[Corpo de prova: $\phi = 18,86$ mm, $L = 57,99$ mm]

Análise: dificuldade na obtenção de franjas devido ao uso de grade de 0,6 mm.

4.2.4 Análise comparativa entre materiais

De forma geral os espécimes em borracha, comparativamente aos espécimes de madeira e cana-de-açúcar, apresentaram maior homogeneidade na distribuição de tensões ao longo da seção diametral sob avaliação.

Entre os materiais madeira e cana-de-açúcar, o primeiro mostrou resultados de maior grau de isotropia. Assim, pelos resultados das curvas de isodeformação de moiré, a cana-de-açúcar poderia ser classificada quanto ao comportamento mecânico como material anisotrópico.

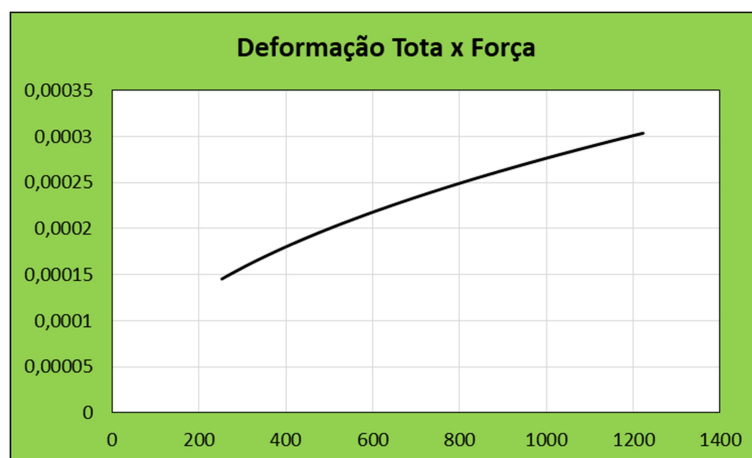
4.2.5 Resultados de tensões de contato na compressão diametral

Com a utilização de processo iterativo aplicado às equações (64) a (67) obtém-se as relações deformação total versus Força e meia largura da área de contato (b) versus Força.

4.2.5.1 Ensaio em Colmos de Cana-de-Açúcar

Constantes materiais adotadas: $E = 1,75 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,4$ (Fonte:)

Integral



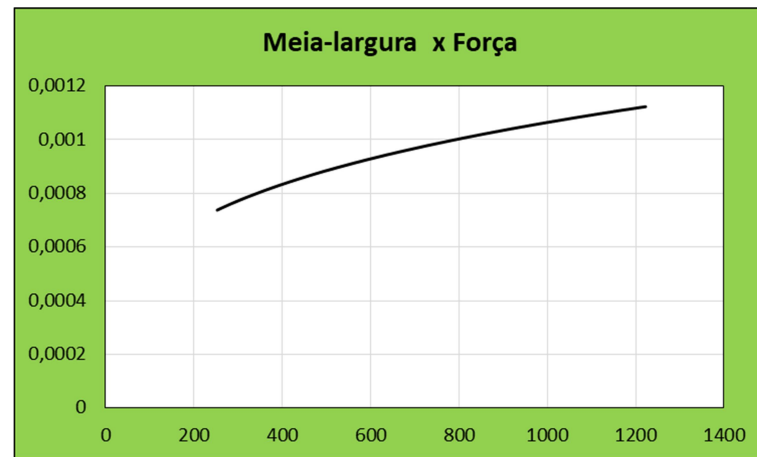


Figura 84. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em colmo de cana-de-açúcar integral [CID1].

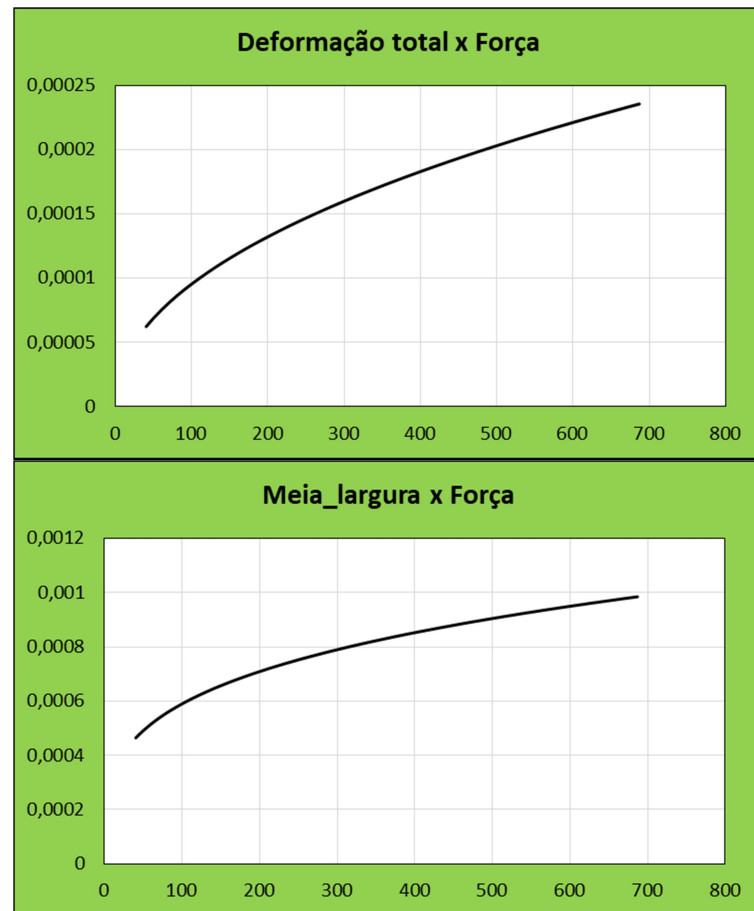


Figura 85. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em colmo de cana-de-açúcar integral [CID2].

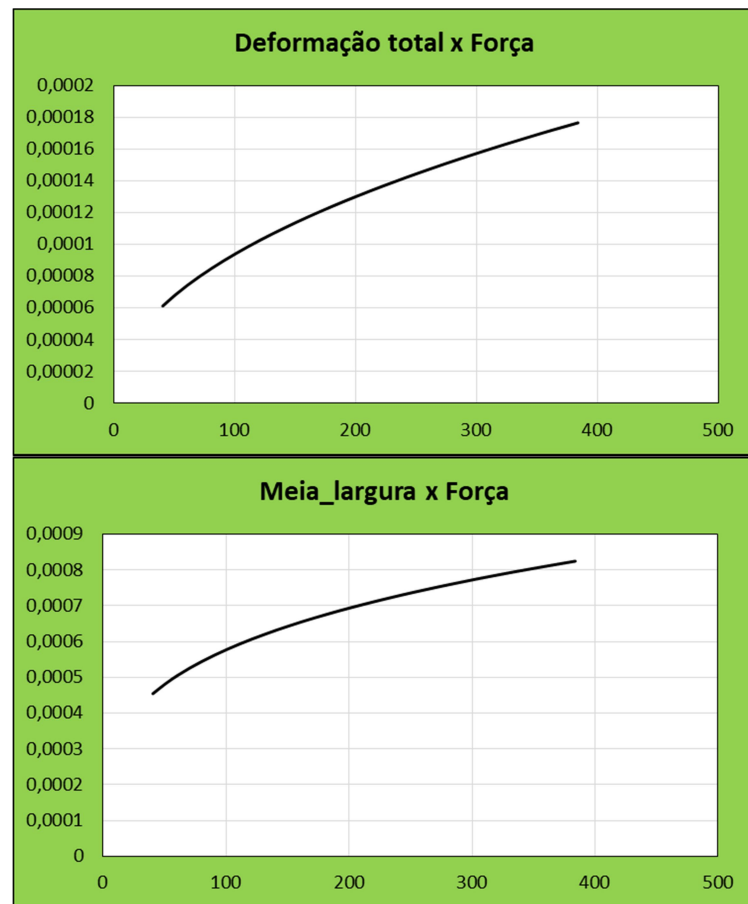


Figura 86. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em colmo de cana-de-açúcar integral [CID3].

Porção do Parênquima

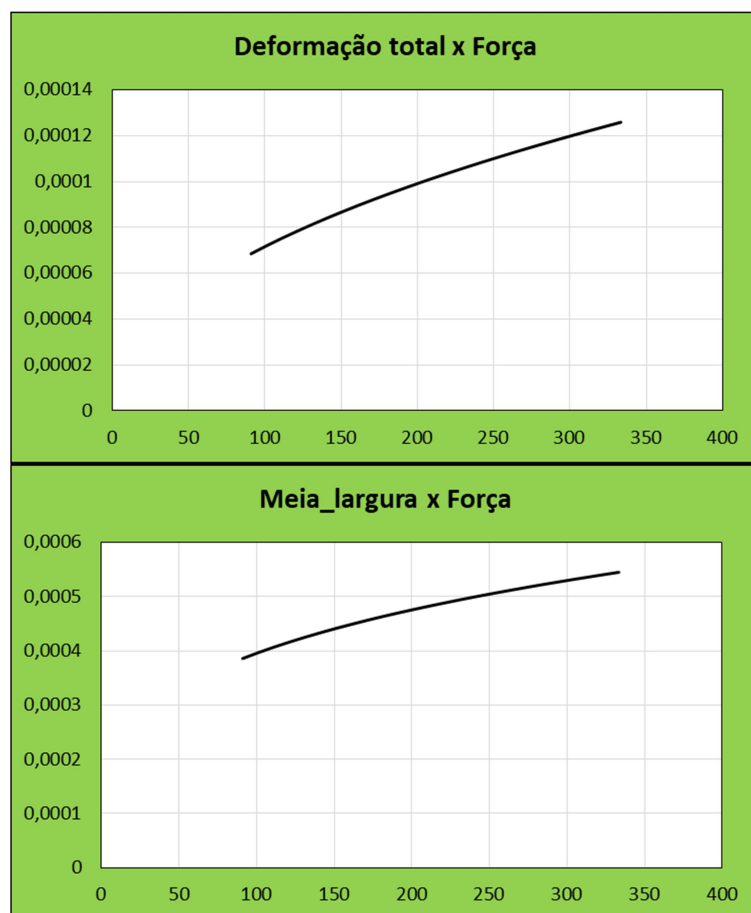


Figura 87. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral na porção parenquimatosa de colmos de cana-de-açúcar [MCPD1].

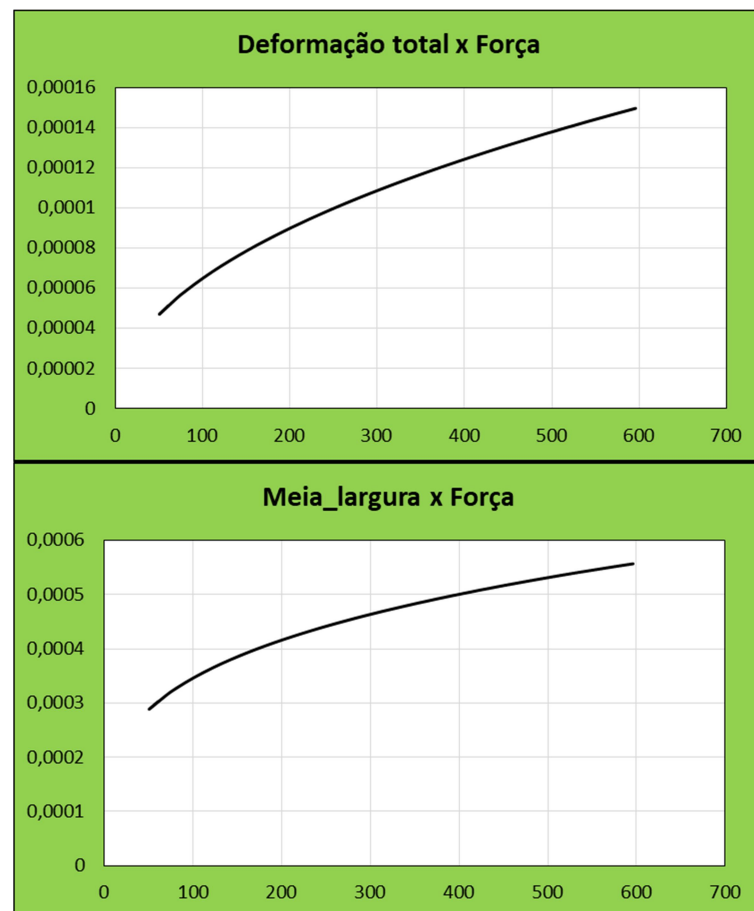


Figura 88. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral na porção parenquimatosa de colmos de cana-de-açúcar [MCPD3].

4.2.5.2 Ensaio em corpos de prova de madeira (*Eucalyptus Citriodora*)

Constantes materiais adotadas: $E = 18,4 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,4$ (Fonte: SONELASTIC, 2019)

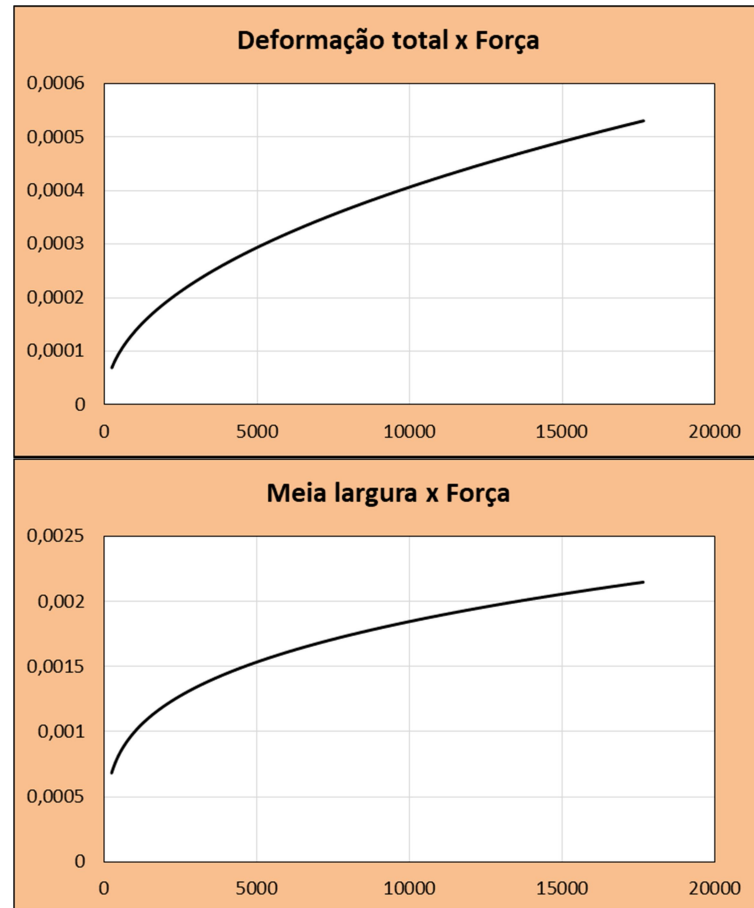


Figura 89. Deformação total e meia-largura em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em madeira [MF1].

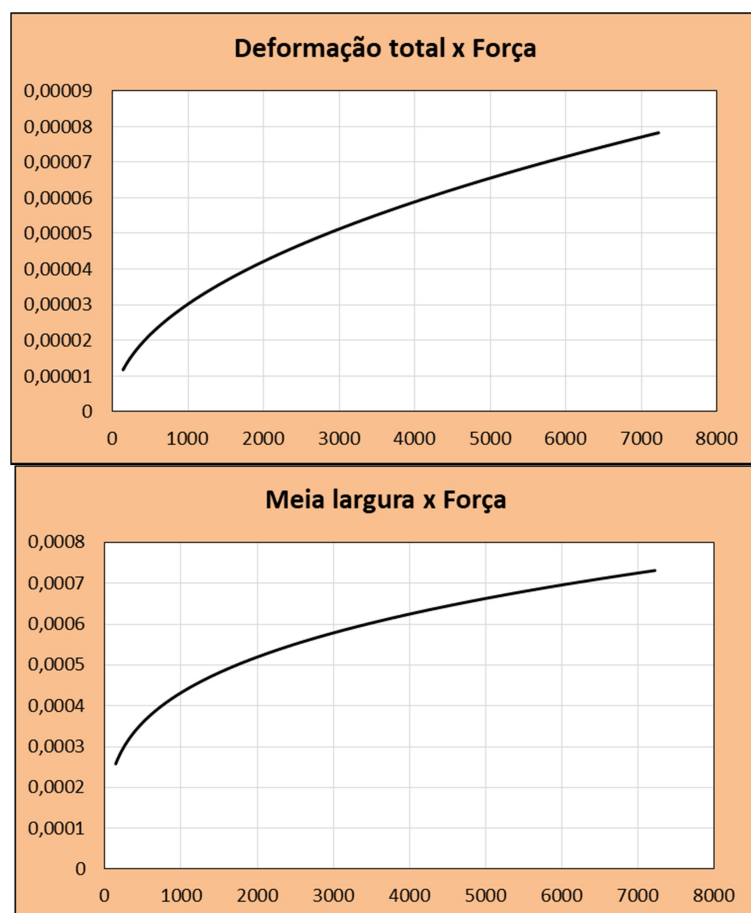


Figura 90. Deformação total e meia-largura em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em madeira [MF2].

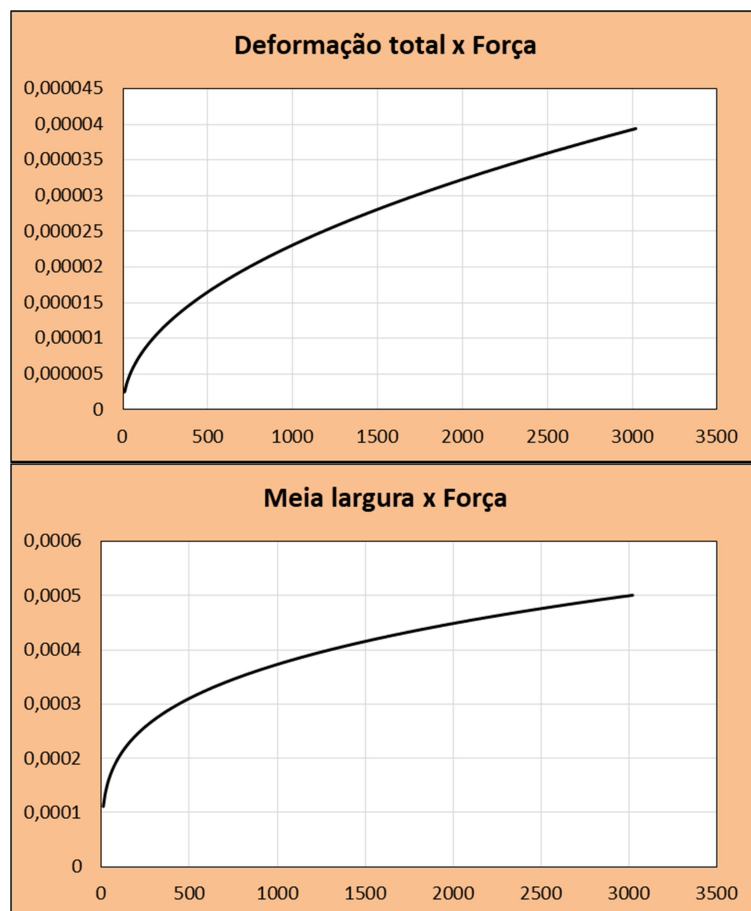


Figura 91. Deformação total e meia-largura em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em madeira [MF3].

4.2.5.3 Ensaio em corpos de prova de borracha

Constantes materiais adotadas: $E = 2,7 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,5$ (Fonte: CTB, 2019)

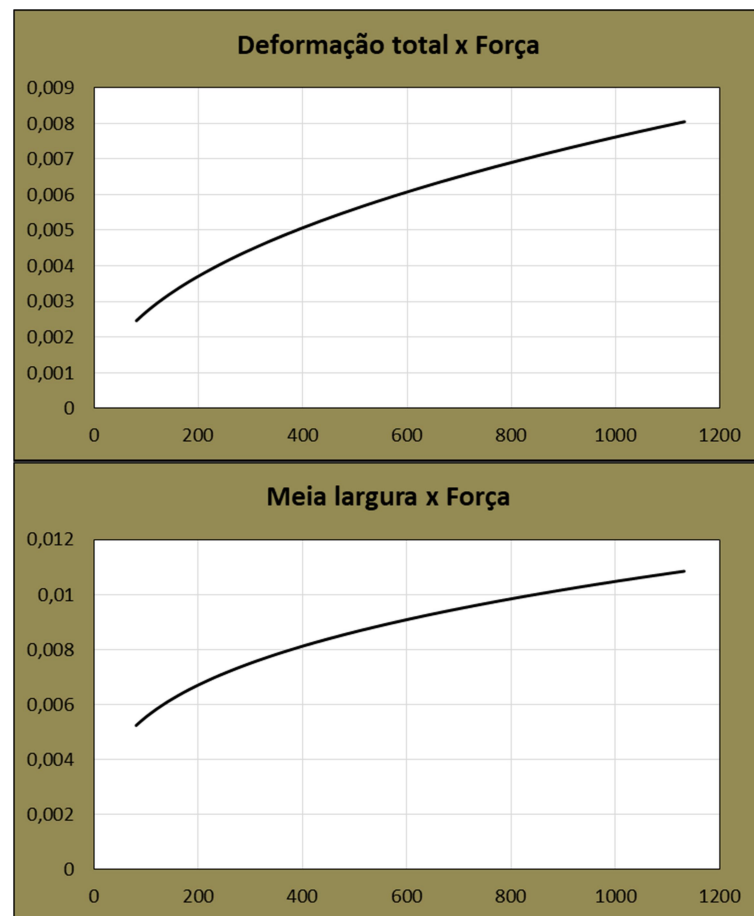


Figura 92. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em borracha [B1F].

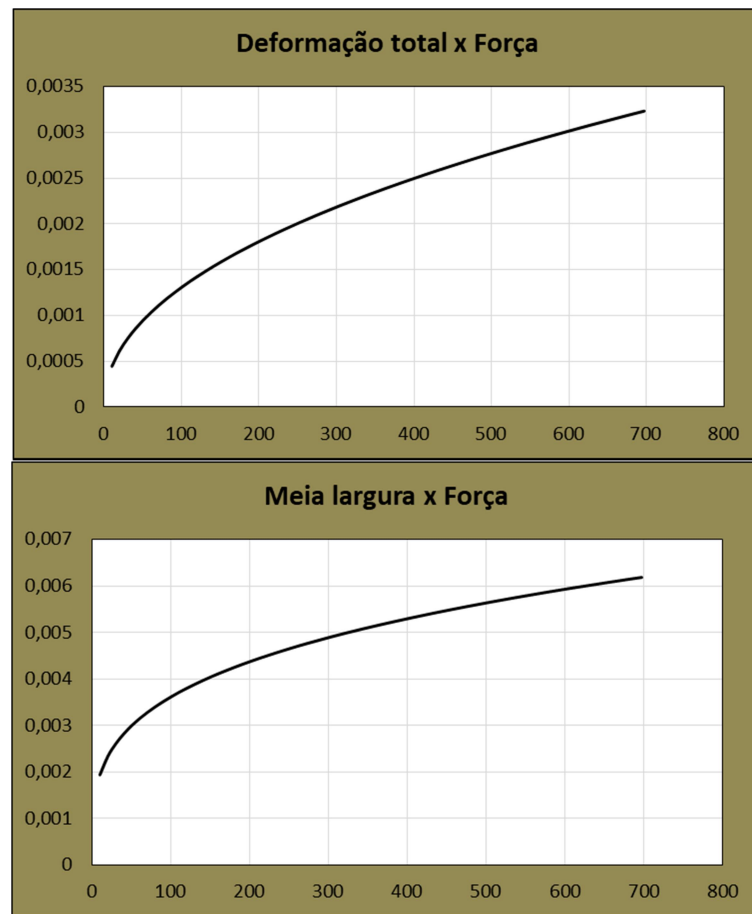


Figura 93. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em borracha [B2F].

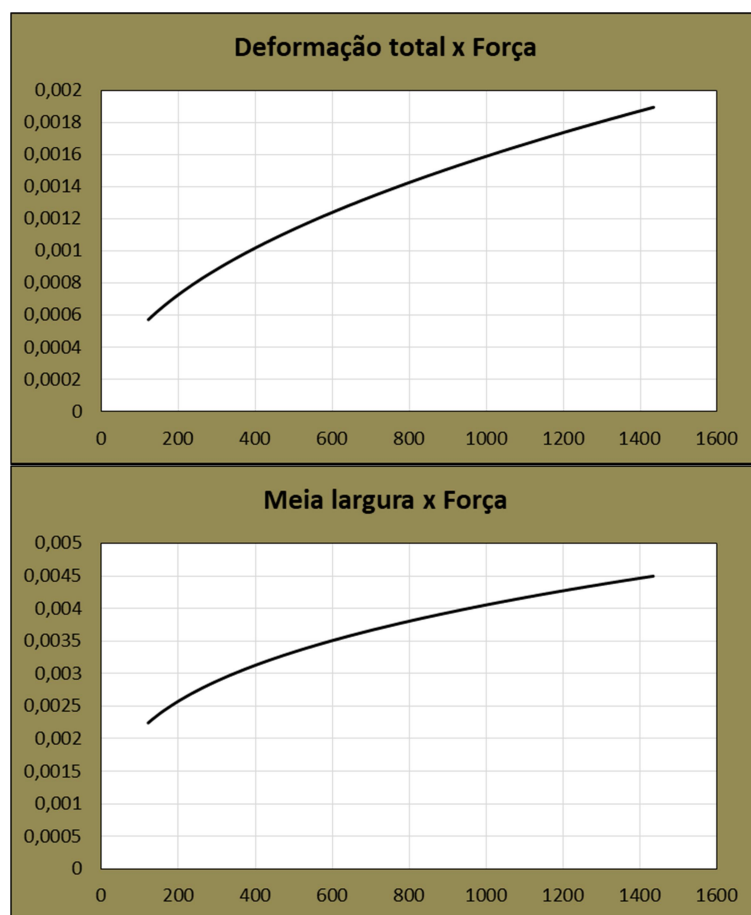
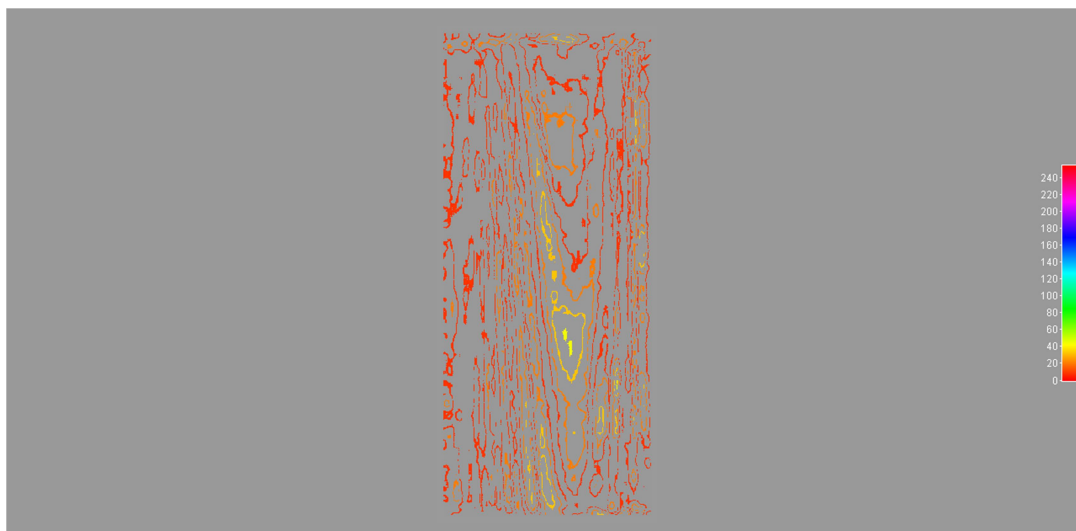


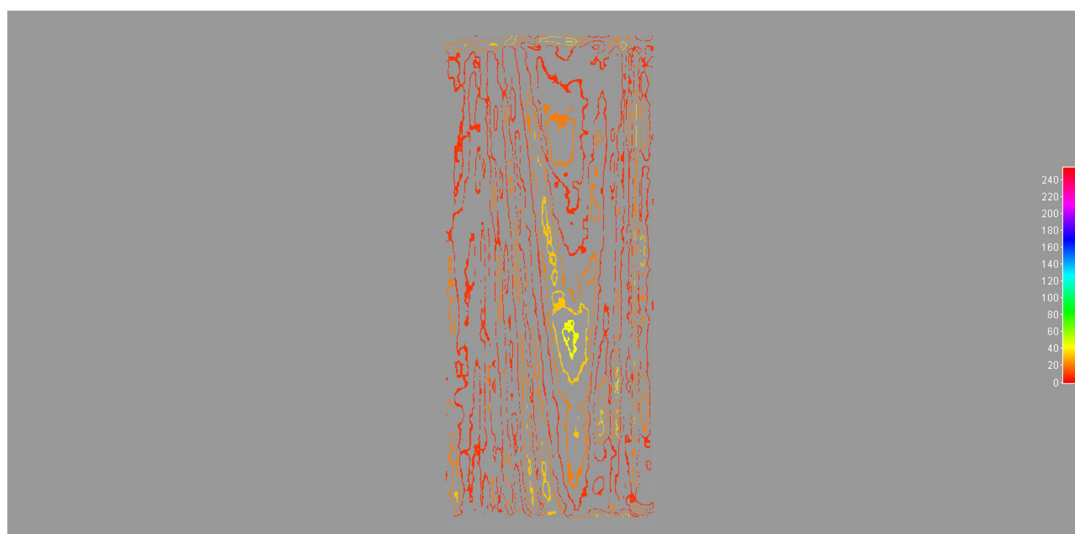
Figura 94. Deformação total e meia-largura da área de contato em função do carregamento em ensaio de compressão diametral em borracha [B3F].

4.3 Ensaio de compressão axial em cana-de-açúcar associados à técnica de *moiré* por sombra

4.3.1 Resultados e análise de *moiré* na porção integral



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 50 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0696 \text{ mm}$

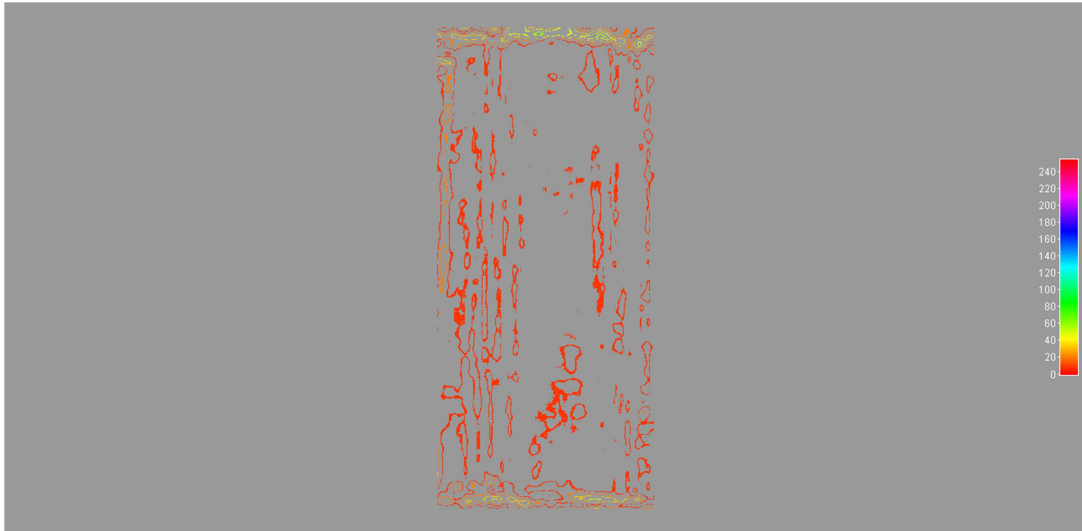


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 60 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,1307 \text{ mm}$

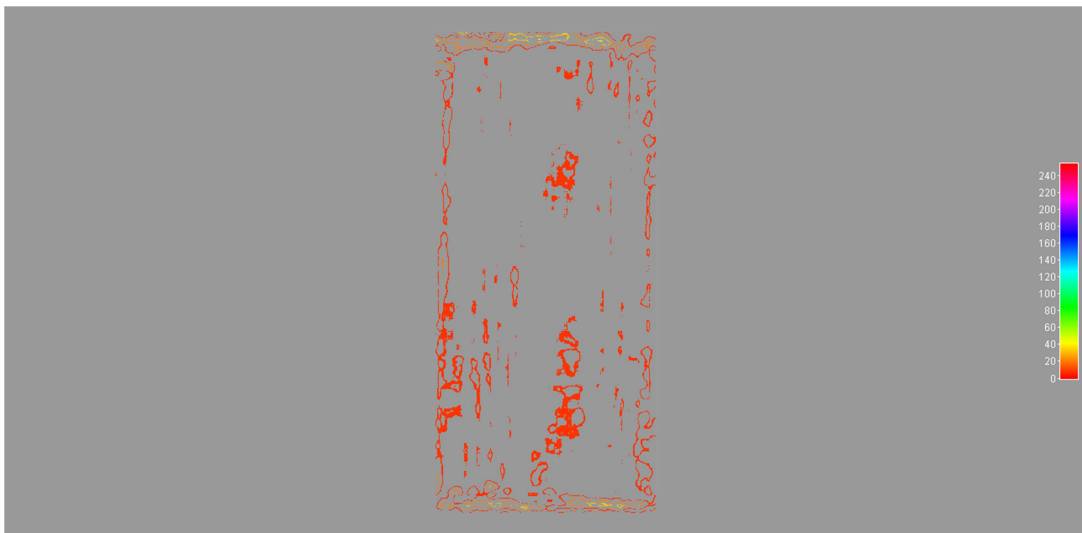
Figura 95. Configuração de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (CIA1).

[Corpo de prova: $\phi = 31,15 \text{ mm}$, $L = 69,03 \text{ mm}$]

Análise: maior intensidade no entorno da linha de centro, porém menor concentração evidenciada pela densidade da distribuição de franjas (maior espaçamento). Isóclinas: parte central mais irregular na direção; parte anelar centro-borda: maior regularidade na distribuição longitudinal.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 35 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0669 \text{ mm}$

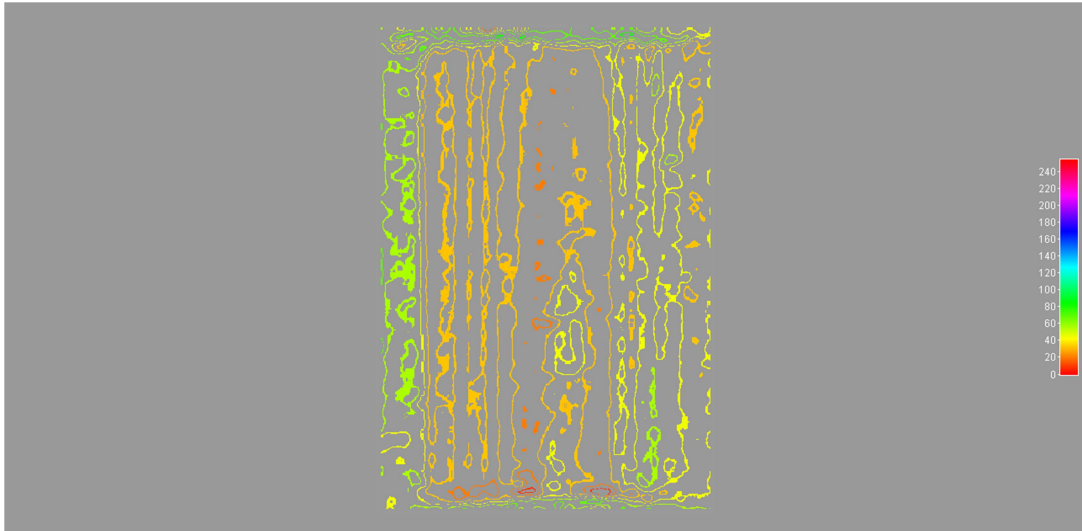


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 45 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,1448 \text{ mm}$

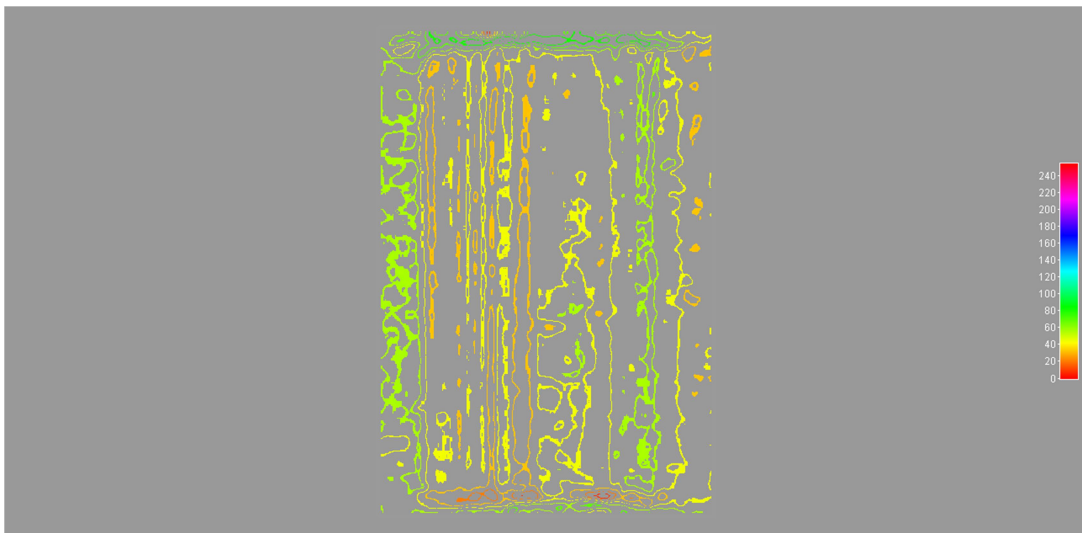
Figura 96. Configuração de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (CIA2).

[Corpo de prova: $\phi = 29,55 \text{ mm}$, $L = 59,65 \text{ mm}$]

Análise: formação de muitas regiões vazias e isocromáticas na cor laranja. Isóclinas com concentração em pontos do centro e bordas. Franjas não regulares.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 30 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0205 \text{ mm}$



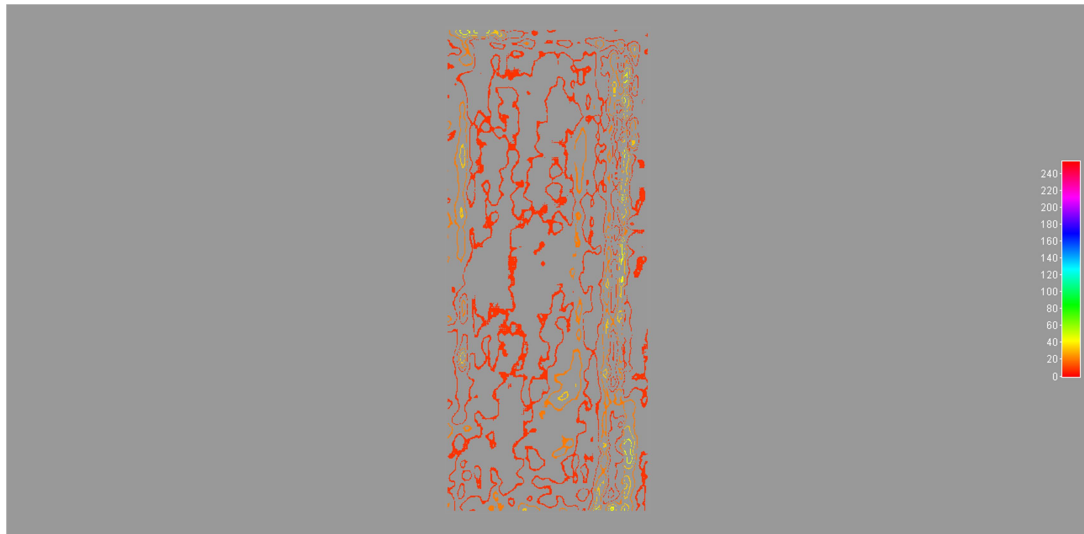
b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 40 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,0535 \text{ mm}$

Figura 97. Configuração de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (CIA3).

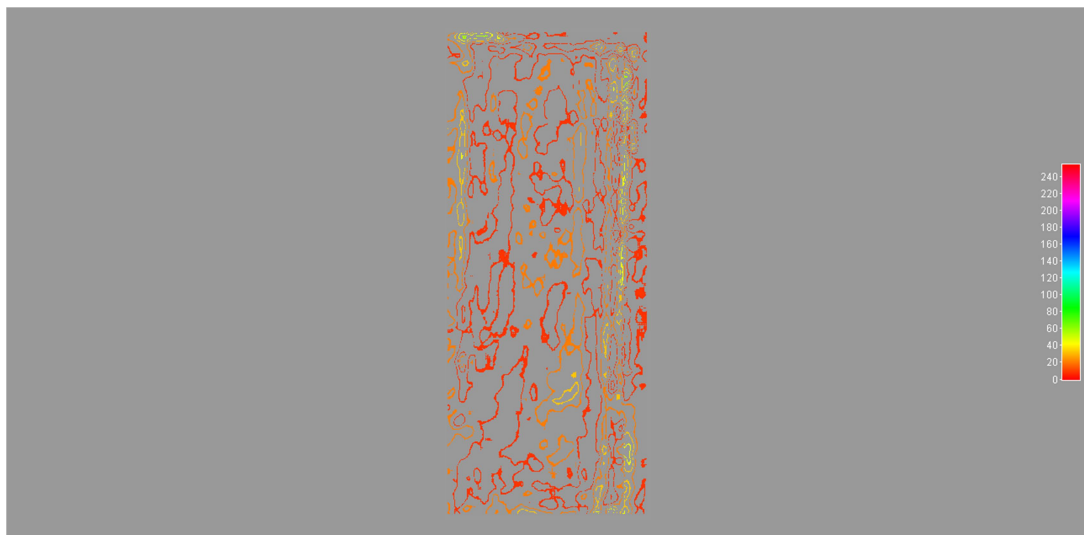
[Corpo de prova: $\phi = 30,38 \text{ mm}$, $L = 46,7 \text{ mm}$]

Análise: isóclinas – concentração borda esquerda, direção longitudinal não paralela; isocromática – maior intensidade na borda esquerda e fibra longitudinal direita.

4.3.2 Resultados e análise de *moiré* na porção do parênquima



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 5 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,6909 \text{ mm}$

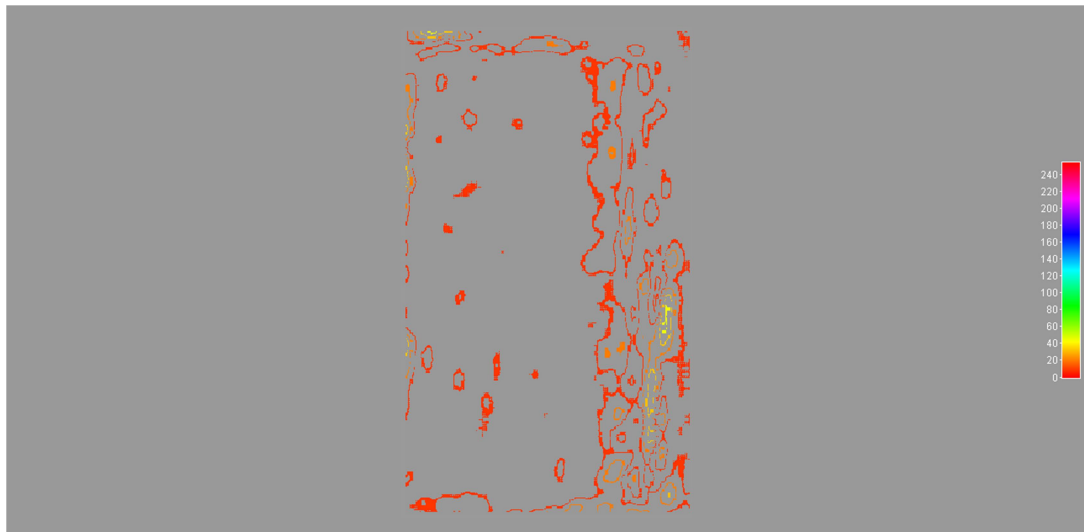


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 10 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,9779 \text{ mm}$

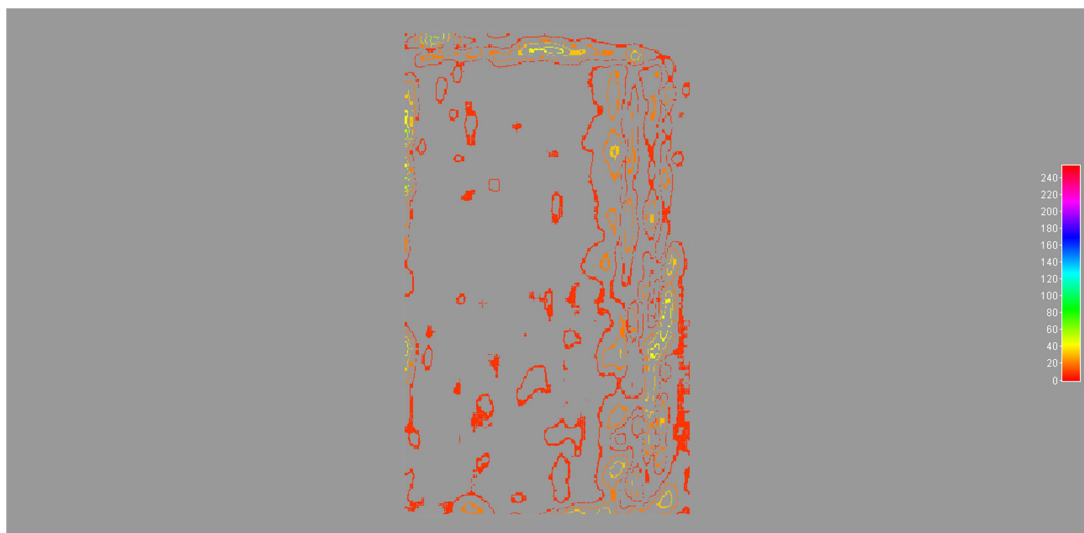
Figura 98. Configuração de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (MAP1).

[Corpo de prova: $\phi = 20,19 \text{ mm}$, $L = 56,68 \text{ mm}$]

Análise: isocromáticas de baixas intensidades, maiores intensidades observadas na direção de algumas fibras na porção direita do corpo de prova. Isóclinas: dispersão das franjas.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 10 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,3337 \text{ mm}$

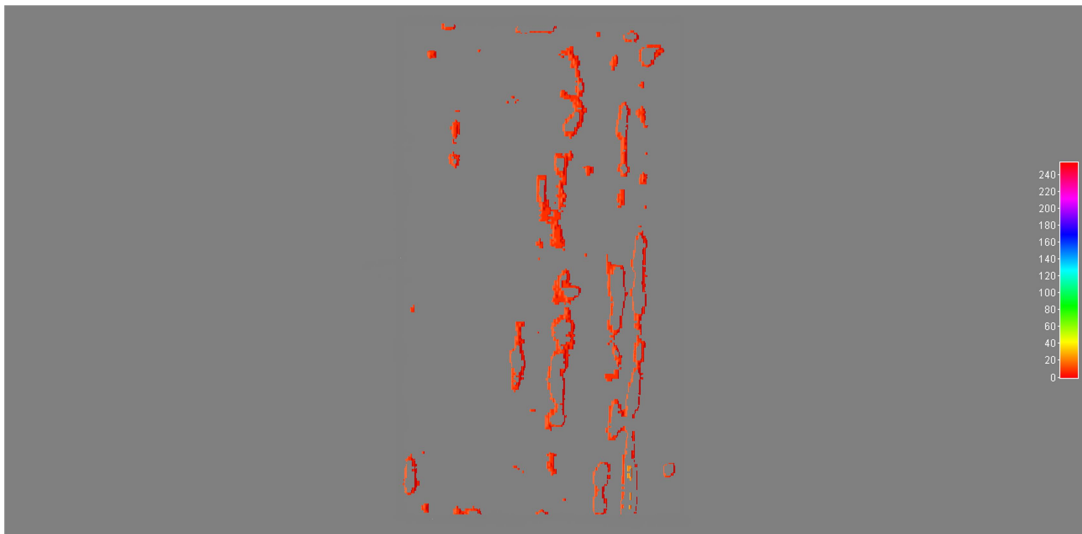


b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 20 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,7431 \text{ mm}$

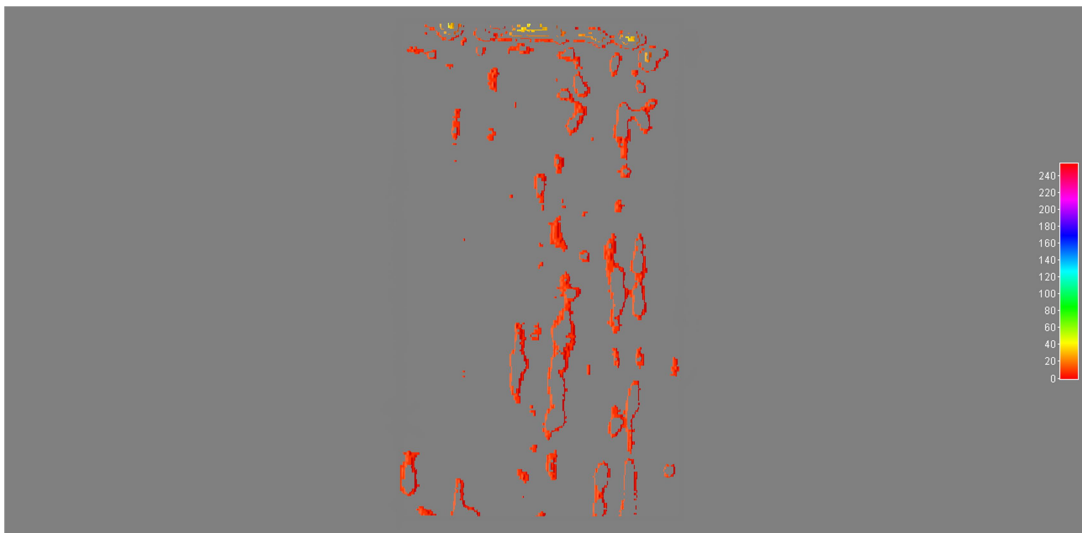
Figura 99. Configuração de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (MAP2).

[Corpo de prova: $\phi = 20,16 \text{ mm}$, $L = 35,17 \text{ mm}$]

Análise: regiões vazias na porção esquerda, presença de franjas com alinhamento na porção direita. Evidências de problemas de planicidade no contato.



a) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_1 = 10 \text{ kgf}$, $\delta_1 = 0,0879 \text{ mm}$



b) Carregamento: $V = 0,5 \text{ mm/min}$, $F_2 = 20 \text{ kgf}$, $\delta_2 = 0,3909 \text{ mm}$

Figura 100. Configuração de franjas de *moiré*, grade 0,4 mm, em dois estados de carregamento na compressão axial em cana-de-açúcar (MAP3).

[Corpo de prova: $\phi = 20,40 \text{ mm}$, $L = 43,28 \text{ mm}$]

Análise: grande quantidade de regiões vazias no lado direito. Isocromáticas de intensidade constante (maior parte na porção direita).

5 CONCLUSÕES

Tendo em vista a caracterização do comportamento mecânico de material vegetal no campo teórico da Viscoelasticidade, com o uso da metodologia analítica de integrais hereditárias, a análise dos resultados de ensaios de compressão uniaxiais e constrictos demonstraram utilidade na geração de dados para a obtenção das funções viscoelásticas *creep*, $\phi(t)$, e *relaxation*, $\psi(t)$, com o auxílio de Transformadas de Laplace. O comportamento viscoelástico foi verificado em colmos de cana-de-açúcar em termos de resposta temporal para diferentes taxas de deformação e porções materiais (integral e parênquima)

As funções módulo de elasticidade $E(t)$ e coeficiente de Poisson $\nu(t)$, dependentes do tempo foram obtidas de ensaios mecânicos. A ressalva para o caso de $\nu(t)$ é que sua obtenção por meio da equação de Hughes & Segerlind (1972), que sugere o relacionamento de Poisson ν com os módulos E e M dos ensaios uniaxial e constricto, não se verifica diretamente no caso de funções dependentes do tempo, a menos que uma aproximação seja realizada para linearizar funções.

Para os ensaios de compressão diametral, em termos de carregamento, ajustes de funções de potência mostraram fator de correlação $R^2 = 1$ para relacionamentos Deformação total versus força e Meia largura de contato versus força.

A análise dos padrões de franjas, geradas pela técnica de *Moiré* de sombra, e consequente mapa de isodeformações, em corpos submetidos à compressão diametral, mostrou-se efetiva na inferência do comportamento material de maneira qualitativa quanto à distribuição e concentração de tensões, homogeneidade e isotropia. Neste aspecto, levando-se em conta a diferença constitutiva de materiais, corpos de prova de cana-de-açúcar foram comparados com espécimes de madeira e borracha, mostrando que a borracha apresentou maior homogeneidade na distribuição de tensões. Entre os materiais madeira e cana-de-açúcar, o primeiro evidenciou maior isotropia, ao passo que a cana-de-açúcar comportou-se de maneira completamente isotrópica.

Considerando a análise experimental de tensões, a técnica de *moiré* mostra-se promissora, demandando ajustes no arranjo experimental, envolvendo desde calibrações, passo de grade, entre outros fatores de modo a contribuir com automatização do processo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABNT. **ABNT NBR 7222:2011: Concreto e argamassa – Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de provas cilíndricos.** ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2011.
- AKYURT, M., **Constitutive relations for plant materials..** Unpublished PhD Thesis, Purdue University, 1969
- ALBIERO, D., RODRIGUES, S., BERALDO, A.L., MACIEL, A.J.S., DAL FABBRO, I.M., MAZETTI, V., GAMERO, A.C. **.Determination of Wood Specimens using Isostrain Patterns Generated for Moiré Technique.** BioEng, Campinas, 1(2): 163-172, mai/ago., 2007.
- AMARAL, F.C.S., TAVARES, S. R. L. **Diferença do teor de fibra da cana-de-açúcar para fins energéticos motivada pelo bioma.** (Doc. 159). Rio de Janeiro: Embrapa Solos, 2013. 25p.
- ARTSCHWAGER, E., BRANDES, E. W. **Sugarcane (*Saccharum officinarum* L.):**origin, classification, characteristics and descriptions of representative clones. Washington: USDA, 1958. 307 p. (Agricultural Handbook, 122).
- ASAE STANDARDS: **ASAE S368.1: Compression test of food material of convex shape.** ASAE STANDARDS 1989, St Joseph, MI, 36: 368-71, 1989.
- CASULA, G., CARCIONE, J. M., **Generalized mechanical model analogies of linear viscoelastic behavior.** Bollettino Di Geofisica Teorica Ed Applicata, Vol XXXIV, N. 136, December, 1992.
- CAVACO, M. A. M.; SILVA, D. M. S. Métodos Híbridos Experimentais na Análise de Tensões em Dutos. In: 6ª Conferência sobre tecnologia e equipamentos, Salvador, Brasil, 2002.
- CHRISTENSEN, R.M. **Theory of viscoelasticity: an introduction.** New Iork: Academic Press, 1982.
- COLLINS, J. A. **Projeto mecânico de elementos de máquinas: uma perspectiva de prevenção da falha/Jack A. Collins; tradução Pedro Manoel Calas Lopes Pacheco...[et al.]**- Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- CONSECANA - Conselho dos Produtores de Cana-deAçúcar, Açúcar e Álcool do Estado de São Paulo. 2006. Manual de instruções. 5.ed. Piracicaba: CONSECANA. 112p.
- CTB. Módulo de Elasticidade, Módulo de Yung, Módulo de Corte e Módulo de Compressibilidade. Disponível em: <https://www.ctborracha.com/borracha-sintese->

historica/propriedades-das-borrachas-vulcanizadas/propriedades-fisicas/propriedades-mecanicas/modulos/. Acesso em: 20/07/2019.

DAL FABBRO, I. M et al. **Viscoelastic behavior of vegetative material supported by linear analytical models**. In: Proceedings of the ITAFE 03, Izmir, Turkey, October, 2003.

DAL FABBRO, I.M. **Strain failure of apple material**. Unpublished PhD Thesis. Department of Agricultural Engineering, Michigan State University, 1979.

DINARDO-MIRANDA, L. L. , VASCONCELOS, A . C. M., LANDELL, M. G. A. (Ed.). **Cana-de-açúcar**. Campinas: Instituto Agrônômico, p. 45-56, 2008.

DURELLI, A. J. **Applied Stress Analysis**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.

DURELLI, A. J., PARKS, V. J. **Moiré analysis of strain**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970.

EMRI, I., GERGESOVA, M. **Time-Dependent Behavior of Solid Polymers**. Pages: 247-330, IN: RHEOLOGY, Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Crispulo Gallegos (ed.), Chapter: January 2010, Vol I, EOLSS Publishers/ UNESCO, (2010).

FABBRO, I. M. D. ; CUCCIOLI, E. A. ; RAIMO, E. ; BASTOS, M. A. A. . **Time dependent modulus of elasticity of vegetative material**. In: Proceedings of the ITAFE 05, Adana, Turkey, 2005.

FABBRO, I. M. D. ; DEL VECHIO, A. D. ; MANOEL FILHO, F. ; ARAUJO, O. A. . **Time dependent Poisson's ratio of vegetative material**. In: Proceedings of the the ITAFE 05, Adana, Turkey, 2005.

FINDLE, W. N., LAI, J. S., ONARAN, K. **Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials, with an introduction to linear viscoelasticity**. Elsevier/North Holland, v. 18, New York, 1976.

FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**. Berlin New York : Springer-Verlag, 1975.

FODOR, G. **Laplace Transform in Engineering**. Akademiai Kiado. Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1965.

FUJITA, I. K. **Aplicação de Técnicas de Moiré de Sombra na Medição de Tensões em Elementos Estruturais Submetidos a Ensaio de Tração**. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola, 2015.

GAZZOLA, J. **Análise da Técnica Óptica de Moiré como Método Fotomecânico para Qualificação e Quantificação de Tensões**. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola, 2013.

- HEBERT, L. P. **Culture of sugarcane for sugar production in Louisiana.**(Agriculture Handbook N°. 262). U.S. Department of Agriculture, Agricultural Research Service, Washington, DC, June 1964.
- HIBBELER, R. **Engineering Mechanics: Statics.** Prentice Hall, 2004.
- HUGHES, H. , SEGERLIND, L. J. **A rapid mechanical method for determining Poisson's ratio in biological materials.** ASAE, paper n°.71-310, 1972.
- JOHNSON, K., L. **Contact mechanics.** Cambridge University Press, 1987.
- KELLY, P.A. *Mechanics Lecture Notes: An introduction to Solid Mechanics.* Disponível em: <http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/index.html> . Acesso em 04/05/2019. The Auckland University, Engineering Faculty, New Zealand.
- Viscoelasticity. Solid Mechanics Part I. Disponível em: http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_I/BookS_M_Part_I/10_Viscoelasticity/10_Viscoelasticity_Complete.pdf
- LAKES, R. S. **Viscoelastic solids.** CRC Press, 1999.
- LAURENTI, R. **Estudo metodológico das geometrias de corpos vegetais para ensaios. Mecânicos.** Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- LAVANHOLI M.G.D.P. 2008. Qualidade da cana-de-açúcar como matéria-prima para produção de açúcar e álcool. In: DINARDO-MIRANDA L. L. et al. (Ed.). **Cana-de-açúcar.** Campinas: Instituto Agrônomo. p. 697-722.
- LINO, A. C. L. **Técnica optica de moire visando a aplicação no estudo de superfícies irregulares.** Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 2002
- LINO, A. C. L. **Aplicação de moiré de projeção com deslocamento de fase na construção de modelos digitais topográficos de órgãos vegetais.** 92 p. Tese de Doutorado em Engenharia Agrícola – Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 2008.
- MASE, G. E. **Continuum mechanics.** Shaun's Outline Series. McGraw-Hill Company, 1970.
- MAZZETI, F. V., **Utilização da Interferometria de Moiré no Estudo de Tensões Dinâmicas em Discos Flexíveis.** 115p. Dissertação de Mestrado em Engenharia Agrícola – Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 2004.
- MOHSEENIN, N. N. **Physical Properties of Plants and Animal Materials.** 1970. New York: Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 1, 734p.

MORROW, C.T., D.D. HAMANN, N.N. MOHSENIN, AND E.E. FINNEY. **Mechanical characterization of red delicious apples**. ASAE paper no. 71-372, 1971.

MORROW, C.T. **Viscoelasticity in a selected agricultural product**. 1965. Unpublished M. S. Thesis. Pennsylvania State University.

MARQUES, M. O.: MARQUES , T. A.: TASSO JÚNIOR, L. C. **Tecnologia do Açúcar. Produção e Industrialização da Cana-de-açúcar**. Jaboticabal, Funep, 2001. 166p.

MOHSENIN, N. N. **Physical Properties of Plants and Animal Materials**. 1970. New York: Gordon and Breach Science Publishers, Vol. 1, 734p.

NORDEN, B. N. **On the compression of a cylinder in contact with a plane surface** . (Final Report). NBSIR 73-243. Institute for Basic Standards, National Bureau of Standards, Washington, 1973.

NORTON, R. L. **Projeto de máquinas: uma abordagem integrada/** Robert L. Norton; trad. João Batista de Aguiar, José Manoel de Aguiar ...[et al.] 2°. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

POPOV, E. P. **Mechanics of materials**. Englewood-Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1978.

POPOV, V. **Contact mechanics and friction: physical principles and applications**. Springer Science Business Media, 2010.

POST, D., HAN, B., IFJU, P. **High sensitivity moiré: experimental analysis for mechanics and materials**. New York : Springer, 1994.

PRAGER, W. **An Introduction to Plasticity**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, 1959.

ROYLANCE, D. Engineering Viscoelasticity. MIT, 2001. Disponível em: https://ocw.mit.edu/courses/materials-science-and-engineering/3-11-mechanics-of-materials-fall-1999/modules/MIT3_11F99_visco.pdf . Acesso em: 10/05/2008.

RIPOLI, T. C. C.; RIPOLI, M. L. C. **Biomassa de cana-de-açúcar: colheita, energia e ambiente**. Piracicaba: Barros & Marques Ed. Eletrônica, 2004. 302p.

SCARPARI, M. S. , BEAUCLAIR, E. G. F. Anatomia e botânica. In: DINARDO-MIRANDA, L. L. , VASCONCELOS, A . C. M., LANDELL, M. G. A. (Ed.). **Cana-de-açúcar**. Campinas: Instituto Agronômico, p. 45-56, 2008.

SCIAMMARELLA, C. A. **The Moiré Method – A Review**. Experimental Mechanics, Volume 22(11): 418-433, Society for Experimental Stress Analysis, November 1982.

- SILVA, M. V. G. **Aplicação da Técnica Moiré em Medições Dinâmicas**. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola, 2014.
- SONELASTIC. **Caracterização dos módulos de elasticidade de madeiras**. Disponível em://http: sonelastic.com/pt/fundamentos/tabelas-propriedades-materiais/madeiras.html. Acesso em: 10/07/2019.
- SHATERZADEH-YAZDI, M. H. **Análise de contato entre dois corpos elásticos usando o Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2015.
- SHELEF, L. , MOHSENIN, N. N. **Effect of moisture content on mechanical properties of shelled corn**. Cereal Chemistry 46(3):242-245, 1968.
- SHERIF, S. M. **The quase-static contact problem for nearly-imcompressible agricultural products**. Tese (doutorado). Agricultural Engineering Department, E. leasing, MI: Michigan State University, 1976.
- SHIGLEY, J. E. **Mechanical engineering design**. McGraw-Hill, 1972
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3rd ed., Mac Graw-Hill: New York, (1970).
- TSCHOEGL, N. W., **Time dependence in material properties: an overview**. Mechanics of Time-Dependent Materials **1**: 3-31, 1997.
- VAN DILLEWJN, C. **Botany of sugarcane**. Waltham, Mass, 1952, 371 p.
- VIAN, C. E. F. **Cana-de-açúcar: qualidade de matéria-prima**. Agência Embrapa de Informação Tecnológica (AGEITEC). Disponível em: https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/cana-de-acucar/arvore/CONTAG01_138_22122006154842.html. Acesso em: 10/06/2019.
- VÉLEZ PASOS, C. A. **Análise do Comportamento Mecânico de Laranjas à granel mediante modelo de elementos finitos**. Dissertação (mestrado). Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1987.
- VAN MIER, J. G. M., VAN VLIET, M. R. A. Uniaxial tension test for the determination of fracture parameters of concrete: state of art. Engineering Fracture Mechanics 69: 235-247, 2002.
- WALKER, C. A., **A Historical Review of Moiré Interferometry**. Experimental Mechanics 34(4):281-299, Society for Experimental Stress Analysis, December 1994. Amsterdam, Elsevier, 1993.