ARLETE DE JESUS BRITO

GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: UM ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UNICAMP

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA DE ENSINO

ORIENTAÇÃO: ANTONIO MIGUEL (UNICAMP)

São Paulo

Agosto/1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA FE/UNICAMP

Brito, Arlete de Jesus
B777g Geometria não-euclidianas : um estudo histórico pedagógico / Arlete de Jesus Brito. -- Campinas, SP : [s.n.], 1995.

Orientador : Antonio Miguel
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação.

1. Geometria. 2. Geometria não-euclidiana. 3. Percepção espacial. 4. Verdade (Filosofia). I. Miguel, Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. III. Título.

Este exemplar corresponde a redação final da Dissertação defendida por Arlete de Jesus Brito e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data 08/08/95

Assinatura

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do Título de MESTRE em EDUCAÇÃO na Área de Concentração: Metodologia de Ensino à Comissão Julgadora da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, sob a orientação do Prof. Dr. Antonio Miguel.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS:
UM ESTUDO HISTÓRICO-PEDAGÓGICO

ARLETE DE JESUS BRITO

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Antonio Miguel

Prof. Dr. Lafayete de Moraes

Prof. Dr. Milton José de Almeida

São Paulo

Agosto/95

Este trabalho é dedicado a todas
as pessoas que se apaixonaram, alguma
vez na vida, pela Geometria.

AGRADECIMENTOS

Ao Luciano, pelos momentos divididos durante este Mestrado, tanto os de carinhosa espera, quanto os de colaboração direta.

Aos meus pais por terem, durante toda minha vida, incentivado e apoiado todas as minhas idéias e atitudes.

Aos meus amigos, pelo interesse com o qual sempre ouviram meus comentários sobre este trabalho.

À Rosa pela correção de Português.

Aos seguintes professores, cujas interlocuções foram essenciais para este trabalho:

Antonio Miguel (meu orientador)
Anna Franchi
Dario Fiorentini
Dione Lucchesi de Carvalho
Lafayete de Moraes
José Luiz Sigrist
Maria Inês Rosa
Milton José de Almeida
Sérgio Aparecido Lorenzato

SUMÁRIO

RESUMO

Esta dissertação realiza um estudo histórico-pedagógico cujo eixo temático central são as condições que possibilitaram o surgimento das geometrias não-euclidianas.

Nela é feita uma rápida contextualização da geometria euclidiana, na qual são levantados os elos de ligação entre tal geometria e a antiga concepção grega de verdade.

A seguir, são estudadas algumas tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides realizadas durante a Idade Moderna. Nessa parte do trabalho, são discutidos os fatos que, na época, podem ter sido obstáculos para a percepção da possibilidade de produção de uma nova geometria.

Finalmente são discutidas as relações existentes entre a Teoria do Conhecimento de Kant e a produção das novas geometrias, e como tal produção interferiu na concepção matemática de verdade.

No decorrer do texto são examinadas questões de caráter pedagógico e explicitados os pressupostos teóricos de um estudo que se pretende histórico-pedagógico.

SUMMARY

This work is a historical-pedagogical study. It is centred in the conditions that facilitated the arising of non-Euclidean geometry.

In the first chapter, it discusses the relationships between the Eucliean geometry and the ancient Greek conception of truth.

The next step, it analyzes some tries to deduce Euclide's parallel axiom from the other nine axioms of the Euclidean geometry. In this chapter, it examines the historical facts that could have been obstacles to the creation of non-Euclidean geometry.

The third chapter presents the relationships between Kant's philosophy and the producing of the non-Euclidean geometry and how this ideas influenced the mathematical conception of truth.

Along the text, it examines the theorical presuppositions of a historical-pedagogical study.

INTRODUÇÃO

"Os inícios quase sempre são secretos."

O Mahabharata

Nesta dissertação é apresentado um estudo histórico-pedagógico das geometrias não-euclidianas.

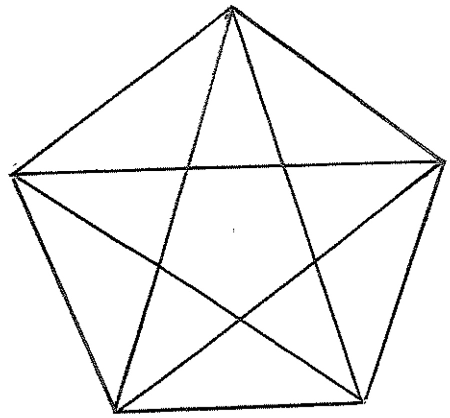
Ela está escrita em forma de diálogo. Porém esse diálogo não reflete um estudo de caso ou algo assim. Esse diálogo se passa em um ambiente pedagógico idealizado.

Foi imaginada uma disciplina sobre geometrias não-euclidianas em um curso de licenciatura em Matemática, definidos os perfis dos personagens e escrito o texto a partir de um problema gerador.

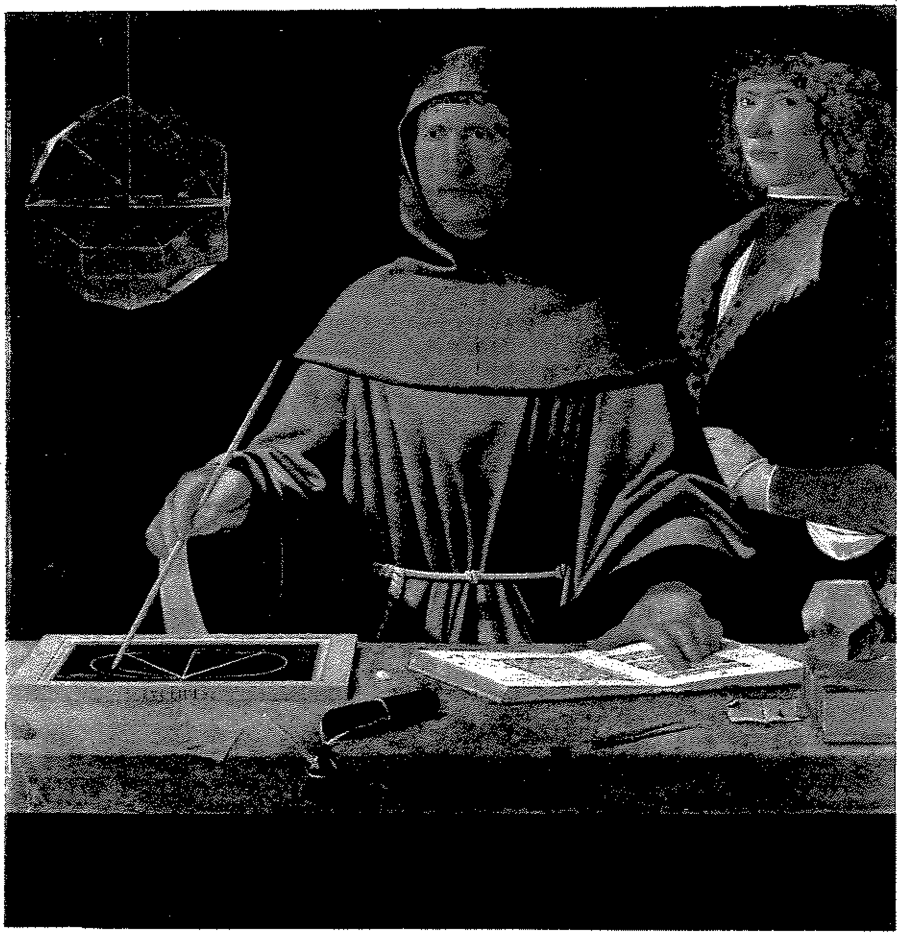
O problema articulador das idéias do enredo é a desconfiança histórica sobre a possibilidade de demonstração do quinto postulado de Euclides.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos os quais tratam dos seguintes assuntos:

Capítulo I:



Pentágono estrelado pitagórico



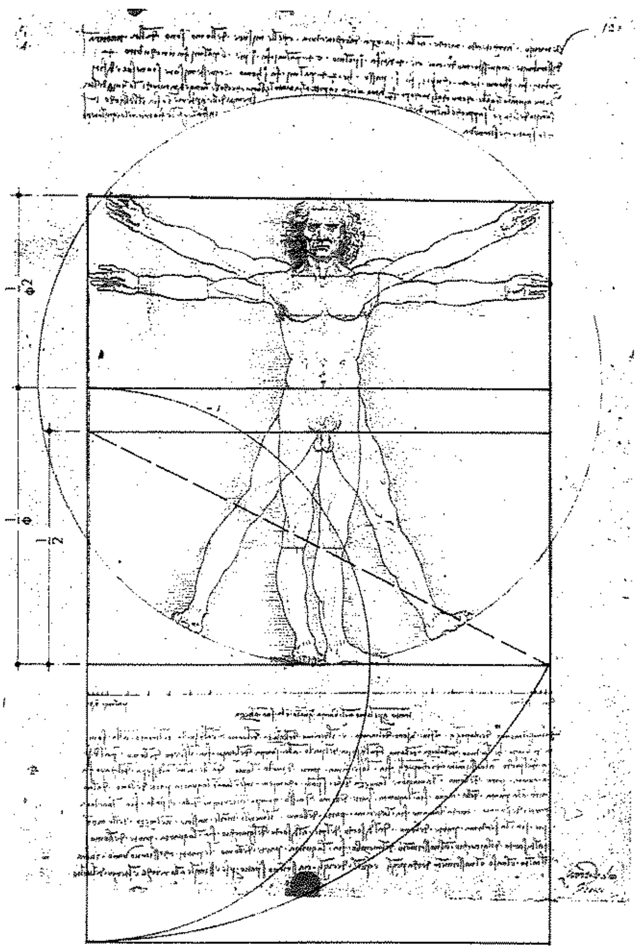
"Frade Luca Pacioli e seu aluno"
J. de Barbari
(1440/50-1516)

Capítulo II:

"O criador"

Bíblia Moralisée

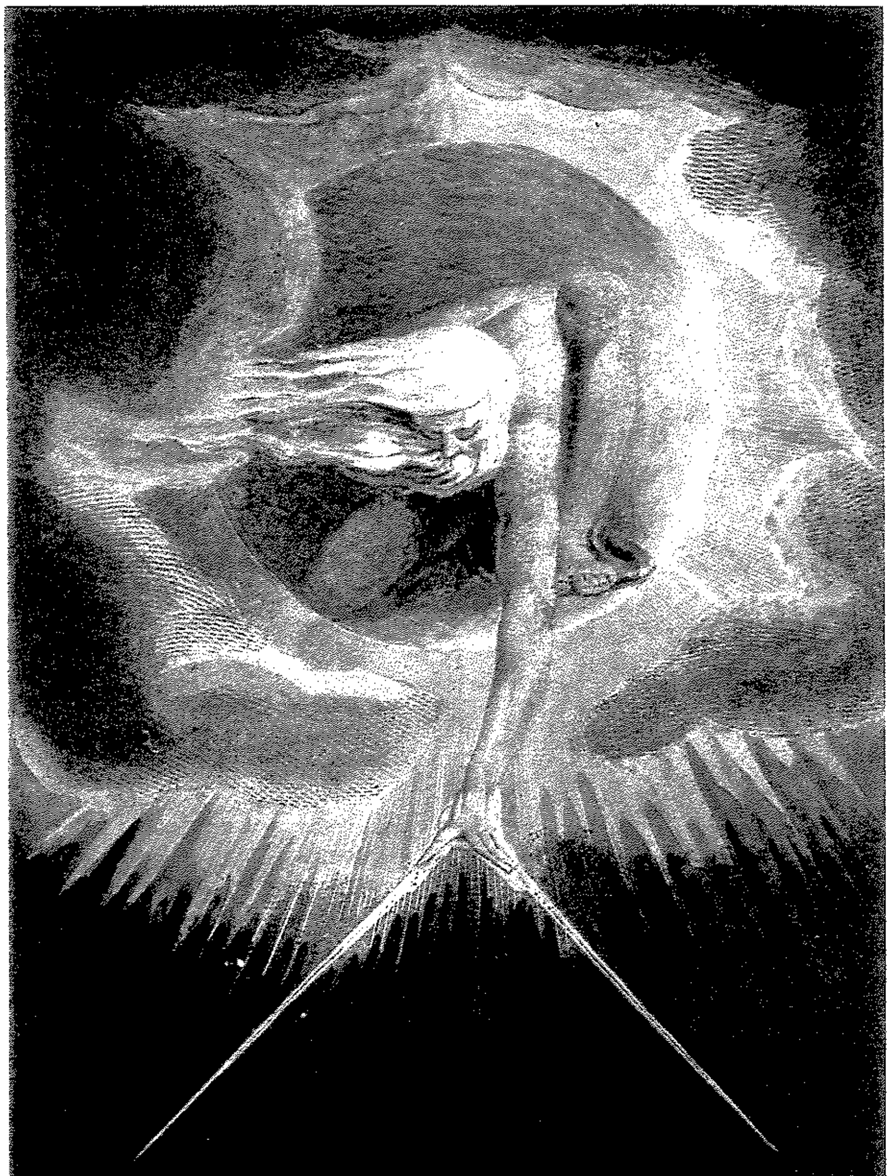
França - c. 1250



"Homem Vitruviano"

Leonardo da Vinci

c. 1490

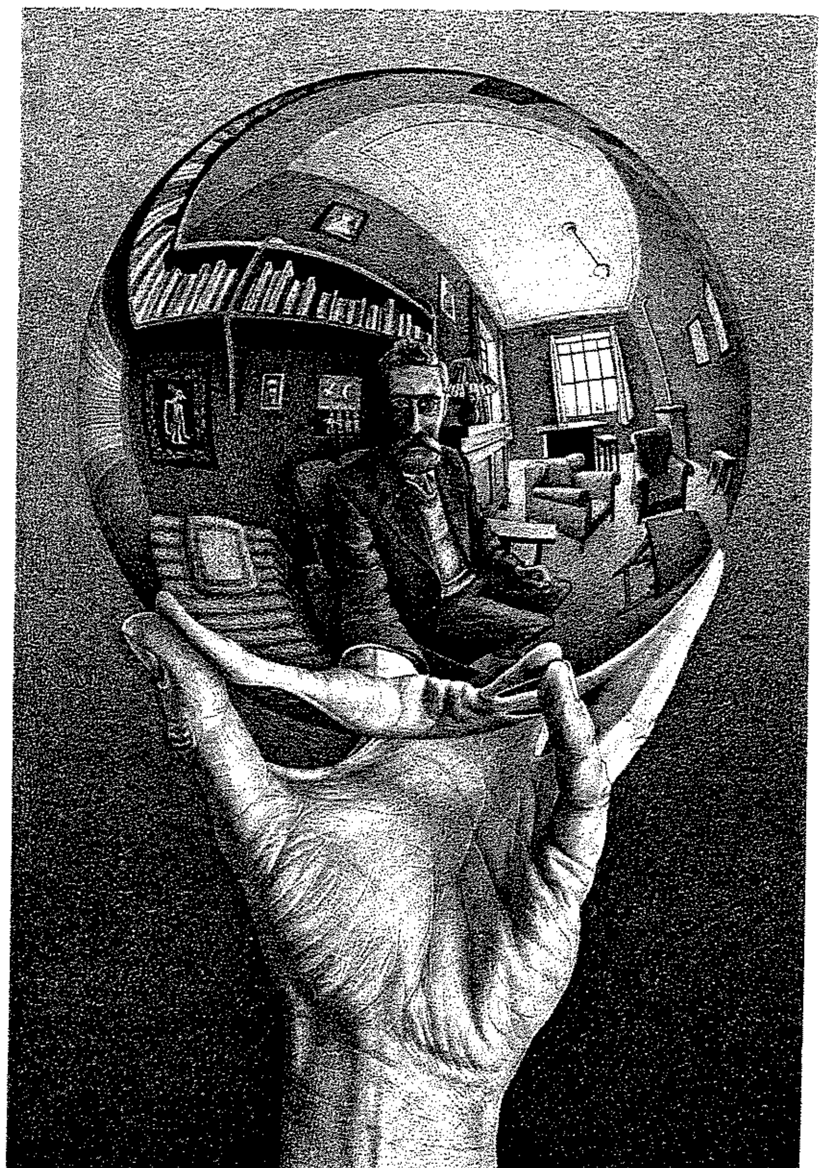


"O ancião dos Dias"

W. Blake

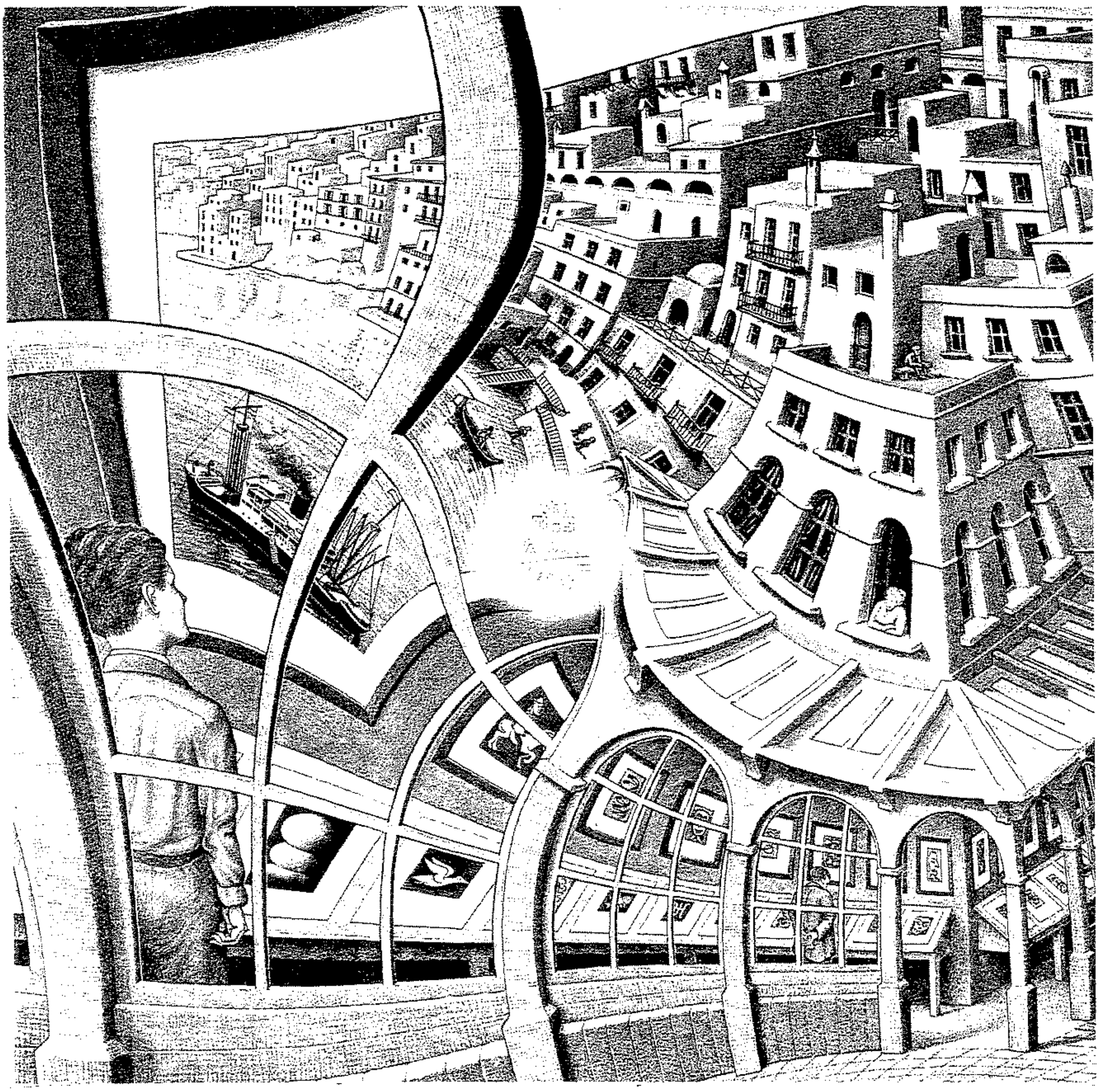
1794

Capítulo III:



"Hand met spiegelende bol"

M. C. Escher



"Prentententoonstelling"

M. C. Escher

O capítulo IV traz algumas considerações avaliativas sobre a dissertação.

CAPÍTULO I
CONTEXTUALIZANDO A GEOMETRIA EUCLIDIANA

"La ciencia geométrica es un arte intelectual, capaz de dar a cosas geométricas una forma nueva - definiciones - y hacer con ellas, todas o algunas, un mundo coherente, habitable para la vida mental humana."

Juan D. G. Bacca, 1944

AULA I

Professora: Gostaria de iniciar nosso curso de Geometria com uma citação do lógico alemão Gottlob Frege: "as verdades da Geometria governam todas as coisas que for possível intuir espacialmente, sejam reais ou produtos da nossa imaginação. As fantásticas visões do delírio, as magníficas invenções da lenda e da poesia, onde os animais falam e as estrelas se imobilizam, onde os homens se transmutam em pedras e as árvores se tornam homens, onde as pessoas se salvam de afogamento puxando-se a si próprias pelos cabelos - tudo fica, na medida em que for objeto da intuição, submisso aos axiomas da Geometria."[1]

Aluno A: Esse Frege é realmente um lógico? A mim parece mais um louco. Imaginem só, relacionar a Geometria com estas insanidades! Essas coisas que ele afirma lembram-me do filme "As aventuras do Barão de Munchausen"[2] principalmente a cena na qual, o personagem que empresta o nome ao filme, salva a si próprio e a seu cavalo do afogamento se auto-puxando pelo cabelo. Pura fantasia. Isso não tem relação alguma com a geometria.

Aluno B: Concordo com você *A*. Existe um compromisso da Geometria com o espaço real, portanto nela não há lugar para esses 'delírios fantásticos', usando as palavras do próprio Frege.

Professora: Então, o que vocês entendem por Geometria?

Aluno A: "A Geometria tem por objetivo primitivo as propriedades do círculo e da linha reta e abarca, em suas especulações, todo o tipo de curvas o que a divide em elementar e transcendente."[3]

---

[1] FREGE, G. - 1953 - p. 20 apud BARKER, S. F. , 1976.

[2] Filme produzido por Prominent Features/ Laura Film - dirigido por Terry Gilliam - distribuído por Columbia Pictures

Professora: O que você está chamando de transcendente?

Aluno A: O estudo de curvas outras que não a linha reta ou o círculo.

Aluno B: A Geometria estuda as figuras e as propriedades das mesmas.

Professora: Que tipo de figuras?

Aluno B: Como disse A, retas, curvas várias, figuras bidimensionais, sólidos...

Aluno A: Não vamos esquecer de que as figuras geométricas visualisadas por nós são somente representações das figuras reais.

Professora: E o que são figuras reais?

Aluno A: Ora, professora, todos sabem que as figuras reais são as existentes ao nível das Idéias. As figuras que estudamos em Geometria não pertencem ao nosso mundo empírico, "a realidade não está nas coisas sensíveis, está nas Idéias ou Formas (...) a verdade não pode, portanto, adquirir-se pelo exame, por meio dos sentidos, do universo exterior sensível, mas apenas pelo pensamento puro, pela atividade da alma isolada do corpo."[4]

Professora: Então, que tipo de figuras estudamos em Geometria?

Aluno A: Figuras que existem no mundo das Idéias, às quais temos acesso somente por intermédio de suas representações falhas e imperfeitas. "A Geometria é o conhecimento do que existe eternamente."[5]

Aluno D: Devo ter entrado em sala errada. Não é possível que vocês realmente acreditem no que estão dizendo. A Geometria, assim como tudo o que ela estuda, é uma criação humana, social e histórica. "As exigências da realidade material são o determinante no desenvolvimento, até mesmo, de uma ciência tão abstrata como a Matemática" [6]

---

[3]Definição de Geometria encontrada na Enciclopedia ou Dicionário raciocinado das ciências e das artes e dos ofícios organizada por DIDEROT e D'ALEMBERT - Tradução Fúlvia M. L. Moretto - Ed. UNESP - 1989

[4]PLATÃO - "Teoria das Formas" apud CARAÇA, B. J., 1978, p. 185.

[5] Definição dada por Platão à Geometria no livro A república , 1964 - p. 217.

[6]FERNANDES, C. S. - "Glosas de una concepción humanista, dialética y materialista de la história de la Matemática" - in BOLEMA especial número 02 - 1992 - p. 96.

Aluno B: Concordo com *D* e gostaría de explicar minha concepção de figuras reais. Figuras reais são as existentes na mente do indivíduo. Nós não temos acesso às "coisas em si", apenas conseguimos apreender dessas coisas o que delas se manifesta para nós[7]. As figuras estudadas pela Geometria são nossas representações dos objetos existentes no espaço. Ou seja, se não existisse o Homem, não existiria a Geometria.

Aluno A: Essa é a coisa mais absurda que já ouvi! Professora, o que você pensa sobre as posições aqui colocadas? Quem está certo?

Professora: Todas as colocações parecem-me igualmente interessantes, uma vez que cada uma delas expressa uma posição filosófica, apesar de aparentemente não haver convergência entre elas. Prefiro não julgar quem está ou não correto, vamos guardar as definições dadas por vocês à Geometria e no decorrer do curso nós as retomaremos com o intuito de discutir seus fundamentos. Talvez com essas discussões surja algum consenso no grupo. Por enquanto, gostaria de lembrar que, etimologicamente, Geometria significa medida da terra, o que pode sugerir uma origem empírica...

Aluno C: Já está tudo confuso, e ela ainda me vem com esse negócio de origem empírica!

Aluno D: Certamente, professora. "As matemáticas orientais surgiram como uma ciência prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. A ênfase inicial foi dada naturalmente à aritmética prática e à medição. Porém, uma ciência cultivada durante séculos como um ofício especial e cuja tarefa não é apenas aplicar, mas também ensinar os seus segredos, desenvolve tendências para a abstração. Gradualmente ela virá a ser estudada por si própria. A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos

---

[7] A fala do auno *B* refere-se à diferenciação, realizada por Kant entre, as "coisas em si", ou número e a manifestação destas coisas ao nosso entendimento, isto é, o fenômeno.

escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos - mas não mais do que isso - da geometria teórica."[8]

Aluno C: E como a geometria transformou-se em um conhecimento que se utiliza do método dedutivo?

Professora: Alguém gostaria de explicar?

Aluno D: A transformação da matemática em ciência dedutiva deu-se na Grécia. Segundo Struik, a invenção do método dedutivo relaciona-se não só com o tipo de organização social grega, escravagista, na qual a classe dominante considerava desonrosos os trabalhos manuais, dedicando-se, por esse motivo à contemplação filosófica; mas também com a atmosfera do racionalismo jônico de então, o qual colocava ao conhecimento não só a questão "Como?", mas também o "Por quê?".

Aluno C: Racionalismo jônico? O que é isto?

Aluno D: Na bacia do Mediterrâneo ocorreram várias transformações econômicas por volta do século X a.C.. Civilizações poderosas, até então, desapareceram, como foi o caso das civilizações minóica e hitita, enquanto outras, como por exemplo a egípcia, tiveram seu poder muito reduzido. Outros povos haviam se estabelecido historicamente, entre eles os gregos. A Idade do Bronze foi substituída pela Idade do Ferro. A utilização do ferro baixou o custo dos instrumentos de produção, gerando um excedente social e estimulando o comércio. Por volta dos séculos VII e VI a.C., nas cidades que surgiram ao longo da Ásia Menor, a velha aristocracia fundiária começava a desmoronar-se e o poder, cada vez mais, concentrava-se nas mãos de potentados locais, os tiranos, apoiados por classes mercantis. Como resultado dessas transformações, surgiram as cidades-estado autônomas, das quais, as mais importantes desenvolveram-se na Jônia: Mileto, Quios, Samos, Atenas e outras. A ciência grega teve a sua origem, por volta do século VI a.C., nessas cidades, particularmente em Mileto. A escola jônica buscava na natureza, por meio de um

---

[8]STRUIK, D. J. , 1987, p. 47, 48. Nessa oração, o autor refere-se às tendências para a abstração no desenvolvimento da matemática. Gostaríamos de observar que esta tendência para a abstração vem acompanhada de uma tendência para generalizações.

esquema racional, a explicação para a origem e funcionamento do universo, dispensando a intervenção dos deuses. "Os primeiros estudos de matemática grega tinham um objetivo principal: compreender o lugar do homem no universo de acordo com um esquema racional. A matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as idéias em seqüências lógicas, a encontrar princípios fundamentais"[9]. Daí o motivo de Struik falar em um racionalismo jônico. Já Bernal[10] refere-se a esse movimento como sendo o naturalismo jônico.

Aluno B: Não foi por esta época que Thales nasceu em Mileto?

Professora: Exatamente.Thales é considerado um filósofo jônico. Atribui-se a ele a teoria de que a princípio tudo seria água, e que desta teriam se formado a terra, o ar e os seres vivos.

Aluno B: Não é a Thales que devemos, também, a introdução do método dedutivo na matemática?

Aluno A: Ao que tudo indica, sim.Thales de Mileto, que viveu entre 640-549 a.C., era mercador grego e em suas viagens adquiriu seus conhecimentos matemáticos no Egito e na Babilônia, na primeira metade do século VI a.C., introduzindo-os, posteriormente, na Grécia. Segundo Hogben[11], Thales realizou, por método indireto, a medição da altura da grande pirâmide; fez experiências com o âmbar; foi o primeiro a observar as atrações magnéticas; a estudar o imã; predisse o eclipse ocorrido a 28 de maio de 585 a.C.; além de ter sido o primeiro a utilizar o método dedutivo para provar a veracidade das afirmações geométricas.

Aluno D: Não sei se podemos afirmar, com tanta certeza, fatos sobre a vida de Thales. A história desse período é escrita a partir de muitas conjecturas, possibilitando aos historiadores discordarem entre si em relação aos dados suscitados por elas. Por exemplo, Aaboe, em seu livro *Episódios da história antiga*

---

[9]STRUIK, D. J. , 1987, p. 73.

[10] BERNAL, J. D., 1969, p. 177.

[11] HOGBEN, L., 1970, p. 122.

da matemática[12] afirma que muitos dos feitos atribuídos a Thales são exagerados. Segundo esse autor, seria impossível a Thales predizer um eclipse em 585 a.C..

Professora: Szabó, em seu artigo *Transformação da matemática em ciência dedutiva e o início de sua fundamentação sobre definições e axiomas*[13] , questiona a idéia de ter sido Thales o primeiro a utilizar o método dedutivo na matemática. Nesse artigo, Szabó analisa três tipos essenciais de tentativas para explicar as perguntas: por que e como, na Grécia, a matemática deixou de ser 'prescritiva', ou seja, um conhecimento prático-empírico, para tornar-se dedutiva? Segundo ele, o primeiro tipo de explicação relaciona o surgimento da matemática dedutiva ao avanço sócio-político-cultural do estado grego; ao desenvolvimento da dialética, entendida como a arte da disputa de argumentos entre debatedores; e ao estágio de evolução lógica dessa cultura. Um segundo tipo de resposta à questão seria que os gregos herdaram um conhecimento matemático considerável dos egípcios e dos babilônios. Porém, as prescrições da matemática oriental de diferentes origens nem sempre eram conciliáveis. Por exemplo, a fórmula para a área do círculo encontrada pelos babilônios era $3r^2$, já os egípcios utilizavam a fórmula $(8/9\ 2r)^2$. Os gregos viram-se obrigados a decidir quais das fórmulas eram corretas e isso os levou para o caminho da dedução, da demonstração matemática. A última tentativa para elucidar esse fato compara o desenvolvimento da matemática dedutiva e sua fundamentação sobre definições e axiomas com o nascimento da lógica Aristotélica.

Aluno A: Essa última explicação deixa muito a desejar, já que temos notícias da demonstração do teorema de Pitágoras muito antes do nascimento de Aristóteles.

Professora: Segundo Szabó, estas três tentativas de elucidação poderiam ser consideradas mais ou menos corretas, se não permanecessem na esfera de generalidades abstratas. Nenhuma delas pode ser comprovada por dados históricos e,

---

[12] AABOE, A. , 1984 , p. 47.

[13] SZABÓ, A. - "The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms" - in Scripta Mathematica - Vol. XXVII - Número I

portanto, não podem ser elevadas do nível de possibilidade ao nível de probabilidade histórica.

Aluno C: Szabó tem alguma explicação para a transformação da matemática em ciência dedutiva?

Professora: Sim, ele tem. Segundo ele, Thales, ao levar os conhecimentos adquiridos no Egito para a Grécia, fundou a geometria grega,. Porém, Thales apenas preparou a transformação da matemática para ciência dedutiva; a verdadeira transição ocorreu mais tarde, devido ao trabalho de Pitágoras. Foi este último que começou a estudar os teoremas da matemática por meio da abstração, independentemente de aspectos concretos (empíricos), e a investigar os princípios (axiomas e definições) da matemática. Aliás, o conjunto de teoremas mais antigo de que temos notícia foi escrito pelos pitagóricos e refere-se aos números pares e ímpares.

Aluno B: Pelo que foi dito aqui há pouco, Pitágoras também era jônico, não era?

Aluno A: Pitágoras, filho de um gravador de jóias, nasceu em Samos, 550 a.C., portanto era, realmente, jônico. Viajou pelo Egito, Babilônia e, provavelmente, foi à India. Ao retornar, instalou-se em Crotona - hoje Itália - fundando uma escola que misturava o estudo da ciência com ritos religiosos. Os pitagóricos estudavam geometria, aritmética, astronomia e música.

Aluno B: Música !?!

Aluno A: Sim, "Pitágoras via nos números a chave para compreender o universo. Relacionava-os, por um lado, com a geometria, mostrando que era possível construir quadrados e triângulos a partir de pontos adequadamente arranjados e, por outro lado, com a física, descobrindo que cordas cujos comprimentos tinham entre si simples razões numéricas, emitiam notas com intervalos musicais regulares - oitavas, terceiras, etc. Isso vinha criar um elo de ligação entre a *harmonia*, previamente apreciada por via exclusivamente sensitiva, e as razões entre números e, portanto, as formas geométricas. Os pitagóricos estabeleceram a tonalidade geral da geometria grega"[14]...

Aluno D: Além de engajarem-se em atividades políticas. Os chamados pitagóricos relacionavam-se com elementos aristocráticos. Salientavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade.

Professora: Não devemos confundir Pitágoras com os pitagóricos. Pitágoras mudou o objetivo da geometria dando-lhe uma forma a qual permitiu que se tornasse parte da educação dos homens livres. De acordo com a concepção da antiga sociedade escravagista grega, as atividades práticas não eram dignas dos homens livres, os quais deviam engajar-se somente na contemplação teórica. O trabalho manual era desprezado pelas classes dominantes, a única exceção era a arquitetura que se elevava ao nível de uma profissão para cidadãos. Tal exceção pode ser explicada se lembrarmos que a arquitetura depende fundamentalmente da geometria. "Pitágoras passou a vida a fazer conferências sobre números e figuras perante vastos auditórios, e, por sinal, casou-se com uma de suas alunas, chamada Teona. Não tardou, porém, a aparecer os prenúncios de uma nova atitude.(...) Os alunos de Pitágoras constituíram-se em sociedades secretas e investiram a matemática do augusto e pavoroso mistério que desde então a vem obumbrando."[15]

Aluno C: Está difícil chegarmos nesta transição da matemática de prescritiva para um saber que utiliza o método dedutivo!

Professora: Szabó observa que o antigo significado da palavra δεικνυμι (demonstrar) era "visualizar concretamente". Cita como exemplo a passagem do *Menon,* de Platão, na qual Sócrates, desenhando na areia, faz com que um escravo ignorante resolva o problema de determinar um quadrado que tenha o dobro da área de um outro quadrado dado. Ou seja, demonstrar significava visualizar. Hogben também chama a atenção para a importância do desenho na areia para o desenvolvimento da matemática. Ele afirma que "não resta a menor dúvida que os

---

[14] BERNAL, J. D., 1969, p. 183

[15] HOGBEN, L , 1970, p. 201.

arquitetos dos templos e os coletores de impostos já haviam adquirido a prática de traçar modelos na areia para orientá-los na arte de medir sombras e dimensões, muito antes de aparecerem os primeiros homens que colecionaram as figuras traçadas e tentaram formular os princípios fundamentais das artes construtivas. O traçado na areia continuou a ser, por séculos e séculos, o único resolutivo dos problemas geométricos"[16].

Aluno C: Então, o método dedutivo surgiu da visualização?

Professora: Exatamente o contrário. O método dedutivo surgiu de uma tendência anti-ilustrativa na matemática grega. Ainda segundo Szabó, o objetivo desta tendência não era apenas fundamentar, com a certeza da teoria, as verdades adquiridas por meio da ilustração, mas também eliminar de todos os teoremas ilustrativos sua característica visual. O caminho encontrado para atingir esse objetivo foi a adoção da forma de demonstração indireta. Podemos perceber como era freqüente esse tipo de demonstração nos estudos dos pitagóricos sobre os números pares e ímpares, dos dezessete teoremas escritos sobre estes números, seis utilizavam a demonstração indireta. Assim, o desenvolvimento da ciência dedutiva está conectado com a forma de demonstração por absurdo.

Aluno D: Nessa época os matemáticos já haviam inventado essa forma de demonstração?

Professora: Segundo Szabó, "a forma indireta de demonstração não foi criada por matemáticos, nem foram eles os primeiros a usá-la; os pitagóricos do sul da Itália tomaram-na, já pronta, dos filósofos eleáticos que também viveram ali por volta do início do século V a.C. (...) . De acordo com nosso conhecimento atual, não há dúvida de que o método de demonstração indireta foi primeiramente usado entre os gregos por Parmênides. Eram os eleáticos que provavam suas afirmações através da prova da impossibilidade da tese contrária. Foram Parmênides e os eleáticos que,

---

[16] HOGBEN, L, 1970, p. 120.

claramente, fizeram da ausência de contradição o critério de verdade de uma afirmação."[17]

Aluno B: Quem eram os eleáticos?

Professora: O eleatismo era a doutrina dos filósofos pré-socráticos da escola de Eléa, fundada por Xenófanes de Cólofon, filósofo grego (séc. VI a.C.), cujo representante principal, Parmênides de Eléa defendia as teses da unidade e da imobilidade absoluta do ser. O filósofo eleático mais conhecido por nós, matemáticos, foi Zenão devido aos seus famosos paradoxos sobre o movimento. Como podemos perceber pelos paradoxos de Zenão, os filósofos eleáticos utilizavam o método da demonstração indireta para provar fatos que eram completamente opostos à experiência do senso comum e à ilustração. Conforme Szabó, a possibilidade de demonstrar a existência de medidas incomensuráveis, e, portanto, a existência dos números irracionais, foi o que levou os pitagóricos a adotarem a forma eleática de demonstração por absurdo, juntamente com a atitude anti-ilustrativa.

Aluno C: Será que os pitagóricos adotaram a doutrina eleática somente devido à possibilidade, criada por esta, de demonstrar a existência dos números irracionais, ou haverá alguma ligação entre tal adoção e aquele fato observado por *D* sobre a posição política dos pitagóricos?

Professora: Esta sua observação é muito interessante *C*, não havia pensado nisto! Provavelmente a aproriação da filosofia eleática pelos pitagóricos relaciona-se também à defesa, feita por eles, da imutabilidade da ordem social. Temos aí um elo entre a ordem político-social grega e a transformação da matemática de um conhecimento empírico-prático para um conhecimento que se utiliza do método dedutivo. Aliás, verdade matemática como foi constituída por aqueles gregos é uma verdade da imutabilidade.

Aluno A: Por quê?

---

[17]SZABÓ , A., op. cit., p. 45,46.

Professora: Nas antigas sociedades orientais, a matemática era utilizada para construir pirâmedes, barcos, torres, enfim, coisas permantentes. Esta geometria apropriava-se do espaço, não levando em consideração o fator tempo, o que é muito compreensível, se observarmos quão vagarosas eram as mudanças nestas sociedades. Espaço e tempo eram completamente independentes. "A arquitetura, a agrimensura e o comércio haviam secularizado o espaço nos países que os matemáticos gregos visitavam, mas o registro do tempo ainda era, em grande parte, prerrogativa da casta sacerdotal."[18]

Aluno C: Por que a casta sacerdotal guardava segredo sobre a medida do tempo?

Aluno D: É obvio *C*, pense no Egito, por exemplo. O registro do tempo possibilitava a previsão das cheias do Nilo. Tal previsão delegava um poder "divino" aos sacerdotes.

Professora: Ao apropriarem-se dos conhecimentos dos antigos povos do oriente e isolarem a linha, o ângulo e o ponto, os gregos da Antiguidade acharam que haviam chegado a elementos imutáveis, exteriores ao tempo e, portanto, eternos. "A partir desta base inabalável, bem podia a razão alçar seu vôo e conquistar, sozinha, o resto da verdade"[19]. Podemos perceber a importância social que a verdade matemática adquiriu na sociedade grega - principalmente quando se tornou objeto contemplativo - analisando a Teoria das Idéias de Platão.

Aluno D: Seria esse o início da tradição de considerar a Matemática como a ciência que fornece verdades absolutas sobre o universo?

Professora: Tal tradição parece ter raízes em dois pontos da filosofia grega. Um é realmente esta busca por um método racional que ordene, de forma imutável, o caos. Outro é o fato dessa filosofia postular, implicitamente, uma tríplice unidade entre ser, verdade ôntica e verdade ontológica na geometria.

Aluno C: Não entendi.

---

[18] HOGBEN, L., op. cit., p. 126.

[19] Ibidem - p. 125.

Professora: Segundo Juan Garcia Bacca[20], os matemáticos gregos consideravam que a verdade geométrica era unitária. Para eles, a essência dos seres geométricos era única; a forma desta essência se manifestar também era única, por exemplo, para eles, a linha reta tinha uma essência que se manifesta somente de uma forma, diferentemente dos entes físicos como por exemplo a água, que apesar de ter um ser único, podia se manifestar no estado sólido, líquido ou gasoso. Além disso, a verdade de cada ser geométrico era única, porque era propriedade do ser, e o conhecer era um identificar-se com essa essência unitária de cada ente geométrico. As conseqüências dessa maneira de encarar a geometria, para o processo de aquisição do conhecimento, eram que o centro deste processo ficava no objeto, o que implica em uma atitude passiva frente ao conhecimento.

Aluno A: Com toda essa preocupação com a unicidade das coisas não é de se admirar que para Pitágoras o número um é o princípio criador, o número da razão!

Aluno C: Ah! Parece que estou compreendendo. Para os gregos, os entes geométricos só podiam ser de uma maneira o que eram, só podiam exibir de uma maneira o que eram e só podiam oferecer-se ao conhecimento inteligível de uma maneira. É isso?

Professora: Exatamente. Assim, para os gregos, as verdades geométricas eram absolutas no sentido de independerem do tempo e do ser humano, além de fornecerem explicações racionais para o funcionamento do universo.

Aluno D: Deixe-me ver se entendi. Para os gregos, a geometria era o conhecimento racional do universo, e devido a isto, identificava-se com ele, com sua verdade e com sua unicidade. Daí também conclui-se que, para eles, a forma como a geometria estava organizada era a única possível!

Aluno C: Não entendi por que a geometria fornece explicações racionais para o funcionamento do universo.

---

[20]BACCA, J. D. G. - "Los fundamentos de la Geometria" in EUCLIDES - Elementos de Geometria - Tradução J. D. G. Bacca - México - Universidad Nacional Autónoma de México - 1944.

Aluno A: Porque, na cultura grega, aritmética, astronomia, óptica, estática e teoria musical possuíam um enfoque geométrico.

Professora: Mas, nem sempre foi assim. Conforme Bkouche[21], para os primeiros sábios gregos, a aritmética era a ciência racional por excelência. Percebemos claramente este fato se observarmos a extrema preocupação dos pitagóricos para com os números. Assim, Arquitas de Tarento, pitagórico que viveu cerca de 400 a.C., declarava que somente a aritmética era suscetível de provas satisfatórias, a geometria não. Segundo Bkouche, "a geometria nasceu de problemas colocados pelas relações espaciais (no sentido físico do termo), seu primeiro objetivo foi o estudo da medida das grandezas espaciais (comprimentos, áreas, volumes, ângulos), ou seja, a determinação de relações entre os objetos no espaço, expressas sob a forma de relações numéricas (relações de números inteiros). O estatuto da geometria era o de uma ciência natural, o que não significa que seus métodos fossem empíricos, mas que sua racionalidade se apoiava sobre dados empíricos" [22]. Depois de algum tempo ocorreu uma transformação na matemática grega e o enfoque que era dado à aritmética passou a ser dado à geometria. Temos dois tipos de explicação para essa transformação. Uma afirma que a descoberta das grandezas incomensuráveis, realizada, provavelmente, nas últimas décadas do século V a.C., trouxe consigo a impossibilidade de exprimir medidas como relações numéricas, levando os geômetras a redefinirem as medidas como grandezas geométricas.

Aluno B: Qual o problema que os geômetras gregos viam nas grandezas incomensuráveis?

Aluno D: A máxima pitagórica era: os números governam o mundo. A descoberta de grandezas, que não podem ser expressas como relação de números inteiros, colocou em questão essa máxima. Imagine o impacto causado por essa descoberta em uma filosofia que pregava a imutabilidade das verdades estabelecidas...

Aluno B: Ah! Qual a outra explicação para a transformação?

---

[21]BKOUCHE , R., 1982

[22] Ibidem, p. 14.

Professora: Szabó afirma que a utilização da geometria para expressar quantidades deveu-se à busca de um maior nível de generalização nas demonstrações. Segundo ele, com a utilização de pedras para representar os números, conforme faziam os primeiros pitagóricos, podia-se simbolizar os números seis, oito, mas não um número genérico. Os segmentos de reta, ao contrário, podem simbolizar um número arbitrário qualquer. Temos um exemplo desta forma de generalização nas demonstrações nos *livros VII, VIII e IX dos "Elementos"* de Euclides. Até a Idade Moderna, quando se falava em geometria, estava-se falando em matemática em geral, astronomia, óptica geométrica, estática e teoria musical. Do século XV ao XVIII ocorreu um divórcio entre a música teórica e o campo teórico da geometria, mas segundo Khun[23] tal divórcio nunca foi completo. É interessante notar que "o cálculo matemático vulgar, conhecido por 'logística' permaneceu vivo durante todos os períodos da história grega. Euclides rejeitou-o, mas Arquimedes e Herão utilizaram-no com facilidade e sem hesitações"[24].

Aluno B: E por falar em Euclides, como surgiu a idéia de um sistema axiomático?

Aluno A: Se não estou enganado, o sistema axiomático deriva do método dedutivo e do esquema de organização local, ou seja, daquele que estabelece a validez de um resultado a partir de outros fatos geométricos conhecidos de antemão.

Professora: Muito bem!

Aluno B: Euclides foi o primeiro a organizar um sistema axiomático?

Professora: Não. Segundo Szabó[25], temos notícia de outros trabalhos matemáticos sistemáticos análogos e anteriores aos *Elementos,* escritos por Euclides cerca de 300 a.C.. O primeiro matemático que estabeleceu um sistema foi Hipócrates de Quios (c. 430 a.C.), filósofo jônico. Hipócrates, que pelo nome deve ter nascido em Quios, viveu em Atenas, ganhando a vida ensinando geometria. Deve-se a ele o estudo da quadratura das lúnulas, figuras planas delimitadas por arcos de círculos. O estudo

---

[23]KHUN, T. , 1977.

[24] STRUIK, D. J. , op. cit. , p. 109.

[25] SZABÓ, A., op. cit.

das lúnulas foi motivado pelo problema da possibilidade ou não de se achar um quadrado de área equivalente a de um círculo. Em seguida, na primeira metade do século IV a.C., tem-se notícia do trabalho de Leon e, na segunda metade desse mesmo século, do tabalho de Theudius de Magnésia.Todos esses autores escreveram *Elementos*, título dado a todos os tratados de matemática gregos.

Aluno C: Conforme Boyer, "sabemos da existência de pelo menos três *Elementos* anteriores ao de Euclides, inclusive o de Hipócrates de Quios, mas não resta traço desses, nem de outros rivais potenciais de tempos antigos. Os *Elementos* de Euclides superaram de tanto seus competidores que foram os únicos a sobreviver"[26].

Professora: Esta posição de Boyer é questionável. A suposta superioridade lógica não pressupõe a não sobrevivência das demais obras anteriormente referidas. Aliás, quase toda a obra os *Elementos* de Euclides é composta de compilações de trabalhos de outros autores. Por exemplo, o livro VII dos *Elementos* é a compilação de um livro texto do séc. V a.C., provavelmente o de Hipócrates; o livro V é dedicado à teoria das proporções de Eudoxo, pitagórico que viveu entre os séculos V e IV a.C.

Aluno B: Que falta de originalidade de Euclides, ficar copiando o trabalho dos outros... Euclides também era jônico?

Professora: Não. Euclides nasceu em outra fase da cultura grega: a helenística, também conhecida como "fase alexandrina".

Aluno B: Alexandrina deriva de Alexandre?

Professora: Exatamente. No século IV a.C., Felipe da Macedônia e seu filho Alexandre unificaram, através da conquista militar, todas as cidades-estado gregas, além de apoderarem-se da Pérsia, Egito e Babilônia, formando um grande império. Este período de unificação das cidades-estado gregas é denominado fase helenística da cultura grega. Neste período foi fundada a cidade de Alexandria, no Egito. "A característica mais impressionante de Alexandria foi seu cosmopolitismo - parte egípcio, parte grego - com uma diversidade liberal de judeus, persas e babilônios,

---

[26]BOYER, C. B., 1974, p. 76.

atraindo, até mesmo, estudiosos e comerciantes de lugares distantes como a India. Deste modo, Alexandria se tornou o lugar de encontro de diferentes tradições."[27] Em Alexandria foi fundada uma instituição, subsidiada pelo Estado, com propósito deliberado de organizar o conhecimento científico existente: o Museu. Euclides, funcionário do Museu, insere-se no contexto da fase alexandrina da cultura grega.

Aluno B: Ah, então está explicado o trabalho de compilação de outras obras...

Professora: Sem dúvida. Os *Elementos* foram de suma importância para o desenvolvimento posterior da matemática, uma vez que neles está organizado todo o conhecimento matemático de uma época, com exceção dos estudos sobre as seções cônicas e da geometria esférica. "São o mais antigo exemplo que possuímos do que hoje chamamos de um sistema axiomático"[28]. Quais os tipos existentes de sistemas axiomáticos?

Aluno C: Só existe um tipo de sistema axiomático. Porém, podemos estudá-lo como um sistema axiomático interpretado ou como um sistema axiomático não-interpretado.

Professora: E qual a diferença entre estes enfoques?

Aluno C: No sistema axiomático interpretado, fazemos um estudo semântico das sentenças, isto é, dos axiomas e teoremas. No sistema axiomático não-interpretado, damos enfoque ao estudo sintático das sentenças.

Aluno B: Você poderia explicar melhor este negócio de estudo sintático e semântico?

Aluno C: Posso tentar. "Um axioma (ou um teorema) pode ser apreciado em dois caminhos distintos. Pode ser analisado como uma sentença, isto é, como um objeto que aparece no papel quando nós escrevemos sobre ele; ou como o significado da sentença escrita, ou seja, o fato que é expresso pelo axioma."[29] No primeiro caso,

---

[27] JOSEPH, G. G. - "Eurocentrism in Mathematics: The historical Dimensions" in Kertel, C. (ed.) - Mathematics, Education and Society - Paris - UNESCO (Division of Science, Thecnical and Enviromental Education) - 1989.

[28]TRUDEAU, R. J. , 1987, p. 5.

[29] SHOENFIELD, J. R. , 1967, p. 2.

estamos fazendo um estudo sintático do sistema axiomático, no segundo, um estudo semântico.

Professora: Já que estamos falando de axiomas e teoremas, alguém poderia expor como se compõe um sistema axiomático?

Aluno C: Eu posso. Primeiro introduzimos os termos técnicos os quais serão utilizados no discurso. Esses são os *termos primitivos*. Depois, definimos, por meio dos termos primitivos, todos os outros termos que utilizaremos, os quais são designados por *termos definidos*. A seguir, utilizando os termos primitivos e os definidos, fazemos uma lista primária de afirmações, as quais aceitamos como verdadeiras por convenção. Essa é a lista dos axiomas. Por último, fazemos as afirmações demonstráveis a partir de regras de inferência previamente estabelecidas. A essas asserções denominamos teoremas.

Aluno D: Euclides fez tudo isto?

Aluno C: Na realidade não. Nos elementos encontramos somente termos definidos, postulados, axiomas e teoremas. Euclides utilizou-se da distinção, articulada por Aristóteles, entre postulado e axioma. Nos *Elementos,* se as afirmações aceitas sem demonstração referem-se a fatos da geometria, elas são chamadas de *postulados*. Se forem noções gerais, são denominadas de *axiomas*. Hoje, porém, não fazemos mais esta diferenciação. Atualmente, entendemos por postulados o conjunto de axiomas e de regras de inferências utilizadas na demonstração. Assim, todo axioma é um postulado, porém nem todo postulado é um axioma.

Aluno B: Não compreendi direito qual a diferença entre postulado e axioma utilizada por Euclides.

Aluno C: Por exemplo: quando falo - dados dois pontos quaisquer posso traçar uma reta - estou referindo-me a entes geométricos.

Aluno B: Isto é um postulado, pelo dito há pouco. Mas as noções gerais...

Aluno C: Por exemplo: se a quantidades desiguais adicionarmos quantidades iguais, os totais serão desiguais.

Aluno B: Isto é óbvio!

Aluno A: Claro que sim! É por isto que aceitamos essas afirmações sem termos que demonstrá-las! Se me permite *C*, gostaria de complementar sua fala. No século V d.C., o neoplanônico Proclo em seu *Comentário sobre o primeiro livro de Euclides*, fornece três caminhos distintos para explicar a diferença entre axioma e postulado. Segundo ele, o primeiro é dizer que "um postulado afirma a possibilidade de uma construção. O segundo consiste em falar que um postulado é uma proposição com significado geométrico, enquanto um axioma é uma proposição comum à geometria e à aritmética. Finalmente, o terceiro modo de explicar a diferença entre as duas palavras é embasado na autoridade de Aristóteles. As palavras axioma e postulado parecem não ser usadas por Aristóteles exclusivamente no sentido matemático. Um axioma é aquilo que é verdade por si mesmo, independentemente do significado das palavras que o constituem; um postulado, embora não seja um axioma, é admitido sem demonstração."[30]

Professora: Segundo Heath[31], axiomas são verdades universais e auto-evidentes. São válidas para qualquer ciência. Já os postulados, são suposições, nem sempre auto-evidentes, porém considerados como verdadeiros, diferentes para cada ciência. Além da evidência, há outro motivo para aceitarmos axiomas ou postulados - como vocês preferirem - sem demonstração. Qual é ele?

Aluno C: Ah, poderíamos tentar demonstrar todas as afirmações a partir de outras, as quais também demonstraríamos a partir de outras afirmações e assim por diante. O problema é que cairíamos ou num círculo vicioso, ou num eterno retorno, o que inviabilizaria qualquer tentativa de organização de um sistema, além, é claro, de termos mais o que fazer na vida do que ficar toda ela organizando um sistema axiomático.

Aluno B: Faz sentido...

Professora: Voltando aos *Elementos*, quantos são os postulados ali encontrados?

---

[30]BONOLA, R. , 1955 - p. 18.

[31] HEATH, T. L. - A manual of greek mathematics - p. 194-195 apud FANG, J e TAKAYAMA, K. P. - Sociology of mthematics and mathematics - NY - Paideia Press - 1975 - p. 166

— ...

Aluno D: Cinco?

Aluno B: Isso, são cinco.

Professora: E quais são eles?

Aluno C: O primeiro postula o seguinte: "dados dois pontos P e Q do plano, existe uma única linha reta que passa por P e Q". O segundo é "dado um segmento qualquer AB podemos prolongá-lo em ambos os sentidos".

Aluno B: Fica estranho dizer "postula".

Professora: Postular para os gregos significava pedir. Assim, quando Euclides escreve nos *Elementos* "postula-se" está pedindo que se aceitem aquelas afirmações como verdadeiras. E os outros três postulados, quais são eles?

Aluno A: Para cada centro e raio, posso desenhar um círculo.

Aluno C: Todos os ângulos retos são congruentes.

Aluno B: Desculpem-me, mas vocês estão usando os termos ponto, reta, plano, círculo, raio, segmento e ângulo sem dizerem o que significam eles.

Aluno C: Para isto existem as definições.

Professora: E quais são elas?

Aluno C: Você quer saber as vinte e três?

Professora: Não, somente as dos termos utilizados até agora.

Aluno A: Ponto é aquilo que não tem partes. Linha reta é aquela que repousa igualmente sobre todos os seus pontos.

Aluno B: Você quer dizer que a menor distância entre dois pontos é uma reta.

Professora: O enunciado original é realmente o expresso por *A*. Ou melhor, original em termos, pois os exemplares hoje existentes dos *Elementos* não são traduções realizadas diretamente do original de Euclides, mas traduções de cópias de cópias e assim por diante. Segundo Trudeau[32], através destas cópias foram-se acumulando alterações, deliberadas ou não, do texto original. Theon de Alexandria, no século VI d. C., fez algumas mudanças deliberadas no texto, clarificando a linguagem,

[32]TRUDEAU, R. J. , op. cit. , p. 22, 23 .

interpolando passagens nas demonstrações e adicionando provas alternativas para os teoremas. Cerca de quatrocentos anos após a revisão de Theon, uma cópia (ou cópia da cópia) foi traduzida para o árabe. Em 1120, uma cópia da tradução árabe (ou a cópia de uma cópia) foi traduzida para o inglês pelo filósofo Adelard de Bath. Então, por volta de 1270, a tradução de Adelard foi revisada à luz de outras fontes árabes pelo cientista italiano Campanus de Novara. Finalmente, a revisão de Campanus, ou uma cópia dela, foi imprimida em Veneza no ano de 1482. Assim, hoje, quando dizemos "segundo Euclides", estamos fazendo-o metaforicamente. Bem, mas estávamos definindo termos...

Aluno A: Como estava dizendo, superfície plana é aquela que repousa igualmente sobre todas as retas que ela contém. *C*, o que falta?

Aluno C: Círculo é uma figura plana, circundada por uma só linha, que se chama perímetro, sendo que a medida das distâncias do centro a qualquer ponto do perímetro é constante. Diâmetro do círculo é uma reta qualquer que passa pelo centro e possui extremos no perímetro do círculo. Euclides não define raio, mas raio é um segmento de reta cujos extremos são o centro e um ponto qualquer no perímetro do círculo, ou, se preferirmos, na circunferência. Euclides também não define segmento, pois não usa este termo.

Aluno B: Mas vocês falaram em segmento.

Aluno A: É aquela história da cópia da cópia da cópia a qual a professora se referiu. Mas podemos definir segmento de reta como a parte da reta compreendida entre dois pontos pertencentes a ela mais os dois pontos, mesmo porque, em uma de suas definições, Euclides afirma que os extremos de uma linha são pontos.

Aluno C: Finalmente, ângulo plano é a inclinação mútua de duas retas que se encontram e não são coincidentes.

Professora: Faltou superfície e linha.

Os alunos *A* e *C* trocam um olhar bastante significativo.

Aluno A: Linha é o que tem comprimento e não tem largura. Superfície é o que tem somente largura e comprimento.

Professora: Ótimo! Estou prevendo que será muito bom trabalhar com esta turma. Para nosso próximo encontro, pesquisem quais são as demais definições encontradas nos *Elementos*. Voltando aos postulados, quem poderia enunciar o quinto?

Aluno B: Desculpem-me, mas preciso fazer uma observação. Vocês utilizaram vários termos, além daqueles aos quais me referi anteriormente, sem defini-los. Por exemplo inclinação, largura, comprimento, relação de pertinência...

Aluno A: Você deve estar lembrado quando *C* discorreu brilhantemente sobre a estrutura do sistema axiomático utilizado por Euclides, explicando que este autor não especificou em sua obra os termos não definidos, isto é, os termos primitivos utilizados.

Aluno C: Obrigado *A*, pelo elogio. Só quero acrescentar que não podemos desmerecer Euclides por este pequeno deslize. Ao contrário, se considerarmos a época na qual escreveu sua obra - por volta de 300 a. C. - perceberemos a grandiosidade de seu feito. Não é sem motivo que os *Elementos* são a obra mais divulgada depois da Bíblia.

Professora: Vamos terminar nossa aula de hoje por aqui, em nosso próximo encontro retomaremos a discussão com o o quinto postulado, está bem? Então até lá.

AULA II

Prof.: Em nosso último encontro, levantamos nossas concepções de Geometria, discorremos um pouco sobre as origens da Geometria, sobre sistema axiomático, sobre os *Elementos* e as definições e axiomas contidos nesta obra. Havíamos parado no quinto postulado. O que diz o quinto postulado?

Aluno D: Paralelas são aquelas que, estando num mesmo plano, não se encontram mesmo se prolongadas indefinidamente.

Aluno B: Se o postulado for esse, então "uma hipérbole e sua assíntota seriam paralelas"[33]

Prof.: Observação interessante, *B*! O geômetra e filósofo estóico grego, Geminus, no século I a.C., fez este mesmo comentário sobre a definição dada por Euclides a retas paralelas.

Aluno D: Você tem razão *B*. Então fica assim: retas paralelas são aquelas que, estando num mesmo plano, mantém sempre a mesma distância uma da outra se prolongadas indefinidamente em ambas as direções.

Aluno A: Desculpe-me *D*, mas imagine só se um grego da Antiguidade Clássica afirmaria uma coisa destas. Não, esse não é o quinto postulado.

Aluno D: E por que um grego não afirmaria uma coisa dessas?

Aluno A: Porque, para ele, "as proposições primitivas (axiomas e postulados) eram sugeridas pela abstração da experiência ou pela intuição"[34], logo ele não diria algo como "prolongadas indefinidamente".

---

[33]. - Comentário de Geminus (século I a. C.) sobre a definição dada por Euclides a retas paralelas. Geminus faz uma comparação entre esta definição e a proposta por seu mestre, Poseidônios, (enunciada pelo aluno *D* no parágrafo seguinte) concluindo que duas retas podem ser paralelas no sentido euclidiano, sem o ser no sentido de Poseidônios - apud BONOLA, R. - op. cit. - p. 2 e 3.

[34]MORENO L. E BROMBERG, S., 1987, p. 8 e 9.

Prof.: A tem razão, o quinto postulado é equivalente ao exposto por D, qual seja, "paralelas são aquelas que, estando num mesmo plano, mantém sempre a mesma distância uma da outra se prolongadas indefinidamente em ambas as direções", mas seu enunciado é outro. Aliás, a última afirmação enunciada por *D* é a definição 23 dos *Elementos*. Essa formulação da definição 23 foi dada por Poseidônios, filósofo grego e comentarista da obra de Euclides. Por volta do ano 100 a.C., Poseidônios já havia sugerido mudar o V postulado por esta definição. Quero fazer um comentário sobre a concepção de postulado como uma afirmação intuitivamente verdadeira. "Sendo Euclides, como um bom grego, visual nato não **pede**, isto é, não postula nada do que esteja dado imediatamente à intuição geométrica (...) a construção não é para ele um meio de fazer existir os objetos geométricos para depois investigar as propriedades que podem ser deduzidas da construção, sem ter que construi-las. A construção não é uma "prova da existência", como se diz atualmente, para o geômetra grego, o critério de existência é "a existência visível", imediata ou não, e se a coisa não estiver imediatamente visível, o procedimento que emprega não é pura e simplesmente uma construção, mas uma construção que torne possível uma visão."[35]

Aluno *B:* Mas, e a tendência anti-ilustrativa?

Professora: Antonio Miguel, em sua tese de doutorado *Três estudos sobre História e Educação Matemática,* salienta que a axiomática contida nos *Elementos* de Euclides pode ser interpretada, em sua quase totalidade, como uma "física do espaço". Segundo Miguel, esta axiomática é, "na realidade, o reflexo do mundo físico, ainda que Euclides se esforce o máximo possível para ocultar este fato e tente permanecer fiel ao dogma platônico de ser o mundo físico o reflexo imperfeito do mundo das Idéias."[36] Após esta análise, Miguel conclui que "seria legítimo falar de um empirismo euclidiano sobreposto a um racionalismo euclidiano, o que revela o caráter epistemológico dual do empreendimento euclidiano: empírico no que se

[35]BACCA, J. D. G. , op. cit., p. LXXIV e LXXV .

[36] MIGUEL, A. , 1993, p. 146.

refere ao seu conteúdo e racional no que diz respeito ao método de justificação do valor cognitivo das proposições."[37]

Aluno B: Ou seja, apesar da tendência anti-ilustrativa, a visualização continuou, implicitamente, presente na geometria grega.

Professora: Talvez esse fato esteja relacionado com a importância da luz na cultura grega. Segundo Hogben, os habitantes das antigas civilizações "viviam na abundância da luz solar que projetava sombras longas e nítidas, bem definidas na areia. A arte de medir sombras era uma das grandes artes da Antiguidade. A geometria do triângulo resultou da prática da medição da sombra para fins arquitetônicos." [38]

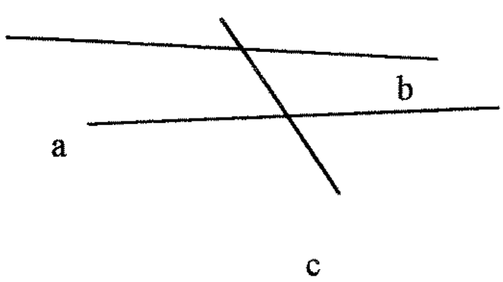
Aluno D: Estou curioso para saber como se enuncia o quinto postulado.

Aluno C: Quando duas retas ***a*** e ***b***, cortadas por uma transversal ***c***, formarem ângulos internos do mesmo lado não suplementares, as ditas retas prolongadas suficientemente , se encontrarão do lado em que a soma dos ângulos internos for menor.

Aluno B: Esta é a coisa mais sem evidência que já ouvi! Não consigo imaginar o que está sendo dito! Professora, você poderia representar este enunciado na lousa através de um desenho?

Prof.: Claro, seria algo assim:

(lousa)



[37]Ibidem, p. 146.

[38] HOGBEN, L. , op. cit., p. 149.

Aluno B: Ah...Que interessante! Visuais como os gregos eram, Euclides preferiu utilizar-se deste enunciado tão pouco evidente só para não cair no "prolongadas indefinidamente".

Aluno D: Porém, se formos observar direito, a forma como está enunciado o quinto postulado é bem mais simples de ser visualizada do que a proposta por Poseidônios - pelo menos para os gregos, que dispensavam tanta importância à luz e ao que podia ser visto - pois o enunciado do quinto postulado não supõe que precisemos ir até o infinito para verificar sua veracidade.

Prof.: Boa observação *D*. Mas voltemos aos teoremas, quantos são eles nos *Elementos*?

Aluno C: Eu só li o livro I. Nele há quarenta e oito proposições demonstradas.

Aluno B: Quarenta e oito em um só livro! Se todos os treze livros possuírem a mesma quantidade de proposições, haverá, deixe-me ver...seiscentas e vinte e quatro!! E com apenas cinco postulados!

Prof.: Foi um pouco menos. "Os treze livros que compõem a obra primacial de Euclides contêm 465 proposições: 93 problemas e 372 teoremas."[39] Este foi o grande mérito de Euclides, demonstrar todos estes teoremas com apenas cinco postulados. O que entendemos por teorema?

Aluno D: Teorema é uma afirmação que pode ser deduzida a partir dos axiomas. Necessita de demonstração para tornar-se válido dentro de um sistema, ou seja, para que fique comprovada sua veracidade.

Prof.: Isto mesmo. Quem se recorda de algum teorema?

Aluno C: Nos triângulos isósceles, os ângulos da base são congruentes entre si.

Aluno B: Isto não parece um teorema. Onde estão o ***se*** e o ***então***?

Aluno A: Ora *B*, podemos dizer a afirmação enunciada por *C* da seguinte forma: "se um triângulo for isósceles, então os ângulos da base são congruentes entre si".

Prof.: E como se demonstra este teorema?

---

[39]SOUZA, J. C. M. , 1948, p. 10.

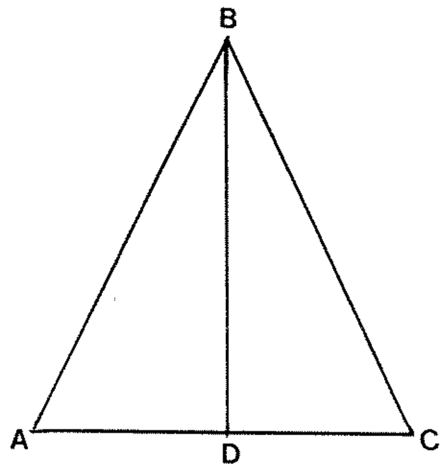
Aluno D: Primeiro separamos a hipótese “se um triângulo for isósceles”, a seguir verificamos quais os passos necessários para chegarmos na tese “então os ângulos da base são congruentes entre si”.

Prof.: Quais seriam estes passos?

Aluno B: Posso ir à lousa desenhar?

Prof.: Parece que não eram são só os gregos da Antiguidade os "visuais natos". Claro *B*, venha à lousa.

Aluno B: (na lousa)



Vamos considerar o triângulo ABC isósceles de forma que AB = BC.

Podemos traçar a bissetriz do ângulo B.

A bissetriz encontrará o lado AC no ponto D.

Assim, temos dois triângulos: BAD e BCD.

Agora temos:

BA = BC pois ABC é isósceles

∠ ABD* = ∠ CBD pois BD é bissetriz do ∠ABC

BD = BD . Portanto os triângulos BAD e

BCD são congruentes, pelo caso de congruência LAL.

Logo,

* Estamos considerando como ∠ ABD, o ângulo formado pelos segmentos de reta AB e BD, com vértice em B.

$\angle BAC \cong \angle BCA$

Prof.: Muito bem *B*. Vamos analisar esta prova. O que *B* utilizou para afirmar que o triângulo ABC é isósceles?

Alunos: A hipótese.

Prof.: E o que garante que em triângulos isósceles temos dois lados de medidas iguais?

Aluno D: Espere um instante professora, estou procurando nas definições que você pediu para pesquisar. Lembro-me de ter lido algo sobre triângulos isósceles. Aqui está. É a definição 20: "entre as figuras triláteras, isósceles é aquela que tem somente dois lados congruentes".

Prof.: E o que garante que podemos traçar a bissetriz de um ângulo?

_ ...

Aluno C: Lembrei! É o teorema nove: "dividir em dois um ângulo dado".

Prof.: Por que podemos asseverar que o caso Lado Ângulo Lado nos garante a congruência de triângulos?

Aluno A: O teorema quatro: "se dois triângulos têm lados congruentes dois a dois e se os ângulos respectivos formados por estes lados também são congruentes, então os triângulos são congruentes".

Prof.: Quero chamar a atenção de vocês para dois fatos. O primeiro é que o argumento utilizado por *B* na demonstração é denominado *modus ponens*.

Aluno D: Modus ponens! De onde vem este nome?

Prof.: Este argumento lógico "conserva o nome tradicional 'modus', 'modo'; 'ponere', 'afirmar'. Esse argumento dedutivamente legítimo também é denominado 'modus ponendo ponens', 'o modo pelo qual, afirmando, se afirma'. Ele se baseia no seguinte argumento lógico: se P, então Q; ora P, logo Q."[40] Percebam que *B* iniciou com: "se o triângulo for isósceles, então os ângulos da base serão congruentes entre si. A seguir, afirmou que o triângulo era isósceles e deduziu a tese. O segundo fato que quero chamar a atenção de vocês é que a demonstração realizada por *B* na lousa

[40] HEGENBERG, L., 1925, p. 71.

é válida para qualquer triângulo isosceles, já que está logicamente assentada na admissão de verdades universais - admitidas convencionalmente ou demonstradas - deste sistema axiomático. *B* fez sua demonstração para um elemento de uma classe - a classe dos triângulos isósceles - e se para esse elemento vale uma propriedade - os ângulos da base são congruentes entre si - então, pelo princípio da generalização universal, esta propriedade é válida para qualquer elemento desta classe. Aí está o caráter de universalidade das demonstrações desenvolvidas por Euclides nos *Elementos*.

Aluno A: Mesmo porque o desenho de *B* é uma representação falha da figura perfeita.

Aluno D: Lá vem ele de novo com esta história...

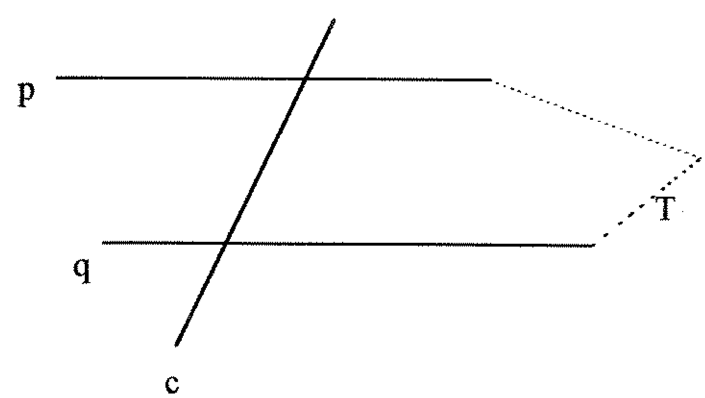
Prof.: Quem se lembra de outro teorema?

Aluno C: "Se uma reta transversal, ao interceptar duas retas dadas, faz com elas ângulos alternos internos congruentes, então as duas retas são paralelas".

Prof.: Você gostaria de demonstrá-lo para nós, *C* ?

Aluno C: Claro professora!

(lousa)



A hipótese é: existe a reta *c* incidindo sobre as retas ***p*** e ***q***, formando com elas ângulos alternos internos congruentes.

A tese é : ***p*** e ***q*** são paralelas entre si.

Vou negar a tese e supor que ***p*** e ***q*** encontram-se em um ponto T.

Assim teríamos o triângulo ABT, no qual o ângulo externo CAB é congruente a um ângulo interno não adjacente (por hipótese). Isto contradiria a proposição 16, segundo a qual "em um triângulo dado, quando se prolonga um de seus lados, o ângulo exterior formado é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes".

Portanto, chegamos a um absurdo.

Podemos supor as retas ***p*** e ***q*** encontrando-se no outro sentido, mas chegaríamos ao mesmo absurdo.

Como negando a tese chegamos a um absurdo, a tese é verdadeira. Logo, ***p // q***.

Aluno A: Nunca compreendi muito bem demonstrações por absurdo.

Aluno C: "Há duas regras da lógica que fornecem a base para a ´demonstração por absurdo': *a lei do terceiro excluído e a lei da contradição.* A lei do terceiro excluído determina que ou uma proposição é verdadeira ou sua negação o é. A lei da contradição estabelece a impossibilidade de uma afirmação e sua negação serem ambas verdadeiras. Para provar um teorema ´se H, então C´ (H por hipótese e C por conclusão) por esta técnica, nós começamos assumindo que ~C (a negação de C) é verdade. (...) É uma afirmação temporária através da qual nós derivamos a contradição. Desde que mostremos que ~C leva a uma contradição, pela lei da contradição e do terceiro excluído, poderemos concluir a veracidade de C"[41]. Compreendeu *A*?

Aluno A: Não. Esta sua explicação pareceu-me um tanto genérica para meu nível de compreensão...

Aluno D: Deixe-me ver se consigo explicar. Demonstração indireta ...

Aluno A: Não era demonstração por absurdo?

---

[41]TRUDEAU, R. J. , op. cit., p. 13 e 14 .

Prof.: No decorrer da história, várias denominações foram dadas a este tipo de raciocínio. Assim, Aristóteles referia-se a ele como raciocínio, ou demonstração, que conduz ao impossível, ou ainda, demonstração pelo impossível, o qual se opõe ao raciocínio ostensivo. Leibniz chamava-o de demonstração apológica, ou redução ao absurdo. Os escolásticos falavam em *reductio ad absurdum*, de *syllogismus, ductio, deductio* ou *argumentatio ad impossibile,* ou *per impossibile* ou *per incommodum.* Segundo Jean-Louis Gardies[42], devemos diferenciar prova por absurdo, a qual parte da negação de uma proposição para demonstrá-la, de redução ao absurdo, que é aquela que parte da proposição para refutá-la. Mas, *D*, por favor, continue.

Aluno D: "Demonstração indireta é aquela que, para estabelecer uma tese θ no interior de uma teoria dada, demonstra que a negação desta tese conduz, ao fim de um certo número de inferências, a duas consequências contraditórias α e não-α, das quais conhecemos a incompatibilidade lógica. Pode-se considerar como casos particulares deste caso geral: o caso no qual demonstra-se que a negação da tese θ implica em uma conseqüência α conhecida como falsa. O outro caso é aquele onde se mostra que não-θ implica θ. Nesta situação - não-θ implicando nela mesma - a expressão θ ocupa simplesmente o lugar de α na contradição 'α e não-α'."[43] Você entendeu agora, *A*?

Aluno A: Compreendi, e agora que compreendi posso afirmar mais convictamente que não consigo aceitá-la. Pelo que entendi, o que a demonstração indireta prova é apenas a impossibilidade de ocorrer a negação de uma afirmação, não a possibilidade desta afirmação ocorrer de fato.

Aluno C: A, você concorda que existe uma equivalência entre os argumentos lógicos: "se β, então φ e se não-φ, então não-β"?

Aluno A: Concordo.

---

[42] GARDIES, J. L., 1991.

[43] GARDIE, J. L., 1991, p. 9 e 10.

Aluno C: A existência desta equivalência é o que garante a equivalência lógica entre uma demonstração ostensiva e uma indireta. Uma sempre pode ser revertida em outra. Aristóteles já tinha conhecimento deste fato. Ele dizia: "o que se demonstra ostensivamente pode ser objeto de um raciocínio pelo impossível a partir dos mesmos termos, e o que se demonstra pelo impossível pode também se demonstrar ostensivamente"[44].

Prof.: Mas, Aristóteles pregava a superioridade da demonstração ostensiva sobre a apológica, pois, segundo ele, "a afirmativa é anterior à negação e mais conhecida que ela, já que a afirmação lhe é anterior, como o ser ao não ser. Portanto, se a proposição negativa é provada pela afirmativa, mas esta última não o é pela primeira, então a demonstração positiva, sendo anterior e mais conhecida, será superior"[45].

Aluno A: Aristóteles era sensato...

Prof.: Porém, para Platão, o raciocínio por absurdo tinha função propedêutica de descartar previamente os saberes ilusórios, os quais são obstáculos ao saber autêntico. É o que podemos notar no trecho, já citado aqui, do *Menon* que se refere ao diálogo entre Sócrates e o escravo.

Aluno A: Se um tipo de demonstração sempre pode ser revertido em outro, como você, *C*, reverteria a demonstração que acabou de fazer na lousa em uma demonstração direta?

Aluno C: Não sei, preciso pensar...

Prof.: Para passar de uma demonstração apológica para uma ostensiva equivalente, começamos, em primeiro lugar, por distinguir dentre os argumentos da indireta quais são premissas reconhecidas como verdades e as etapas da demonstração que são conseqüências destas premissas. Em segundo lugar, devemos verificar quais sentenças do raciocínio são estabelecidas pela admissão da negação da tese. As

[44] ARISTÓTELES, Primeiros Analíticos (s.d.) apud GARDIES - op. cit. - p. 23.

[45] ARISTÓTELES, Segundos Analíticos (s.d.) apud GARDIES - op. cit. - p. 156, 157.

primeiras continuarão a ter, na demonstração direta, o status de premissas. Já as últimas serão substituídas por suas respectivas negações.

Aluno C: Então, vamos ver se consigo transformar a demonstração por absurdo que acabei de fazer na lousa em sua equivalente ostensiva. Primeiro vou procurar quais as premissas envolvidas... Ah, é a proposição 16. A existência do triângulo ABT é conseqüência da negação da tese. Ficaria algo assim:

1- Por hipótese $\angle$ CAB $\cong$ $\angle$ ABD

2- A proposição 16 garante que "em um triângulo dado, quando se prolonga um de seus lados, o ângulo exterior formado é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes".

3- Assim, não existe um triângulo ABT, pois, se ele existisse, um ângulo externo - no caso o $\angle$ CAB - seria congruente a um ângulo interno - o $\angle$ ABD.

4- Da asserção anterior concluímos que não existe um ponto T no qual as retas **p** e **q** sejam concorrentes.

5. Logo, **p** e **q** são paralelas.

Aluno A: Então, se todo raciocínio apológico pode ser transformado em um equivalente ostensivo, por que não transformamos todas as demonstrações indiretas em diretas?

Prof.: Há alguns motivos pragmáticos para não realizarmos tal transformação. Um primeiro pode ser percebido nesta última demonstração de *C*. Há um momento na demonstração em que ele utilizou um pequeno raciocínio por absurdo - no terceiro passo da demostração - quando ele diz: "se existisse tal triângulo, um ângulo externo seria congruente a um ângulo interno".

Aluno A: Pode ser que haja conversões de um tipo de raciocínio para outro nas quais não apareça esta pequena demonstração por absurdo.

Aluno C: Como é teimoso este *A*!

Professora: Há outras razões que dificultam a realização de seu projeto, *A*. Nem sempre em uma demonstração, as proposições P_1, P_2, ...P_n implicam-se de uma forma linear, fornecendo justificação completa uma para a outra. É mais habitual que estas premissas sirvam de justificação nas implicações ulteriores. Por exemplo, vamos considerar a seguinte situação hipotética de demonstração, onde P_1 e P_2 são premissas; P_3, P_4 e P_5 são argumentos da demonstração e P_6 a conclusão. Assim, teremos:

(lousa)

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr, bend left] \arrow[rrrr, bend right] & P_2 & P_3 \arrow[r] & P_4 \arrow[r] & P_5 \arrow[r] & P_6 \end{tikzcd}$$

O retorno desta demonstração em sua equivalente seria:

$$\begin{array}{ccc} & \text{não } P_6 & \\ & \downarrow & \\ & \text{não } P_5 & \\ & \downarrow & \\ \text{não}P_2 & \text{ou} & \text{não } P_4 \\ & & \downarrow \\ & & \text{não } P_3 \\ & & \downarrow \\ & & \text{não } P_1 \end{array}$$

Aluno B: Complicada a transformação desta demonstração hipotética de um tipo de raciocínio para outro, não?

Professora: Esta ainda é simples. Há outras bem mais complicadas. Um exemplo é a mudança da demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado do raciocínio apológico para o ostensivo. Existe uma terceira razão que dificulta a passagem de um tipo de demonstração para outro. Quando estamos trabalhando demonstrações que envolvem quantificações, cada número representado genericamente na demonstração indireta está, na realidade, indicando um único número. Ou seja, basta demonstrar que a tese não se verifica para um número que a demonstração está realizada. Já no raciocínio ostensivo, cada número representado genericamente pode ser qualquer número pertencente ao conjunto universo, ou seja, a tese só é válida se for verdade para qualquer número do conjunto universo.

Aluno B: Realmente não é tarefa simples passar de um tipo de demonstração para outro. Qual seria o motivo que levou Euclides a utilizar tantas demonstrações por absurdo?

Professora: Primeiro precisamos lembrar a compilação, realizada por Euclides, dos trabalhos de outros sábios. Como já vimos, das provas desenvolvidas pelos pitagóricos, muitas apelam ao raciocínio por absurdo, então, é natural que encontremos nos *Elementos* estas demonstrações. Ademais, a demonstração indireta serve bem à finalidade do procedimento essencialmente sintético, ou seja, aquele que parte de elementos simples, aceitos imediatamente como verdades, ou admitidos como tal por convenção, ou ainda, de teses previamente estabelecidas para demonstrar novas teses. A síntese colocada pelo procedimento axiomático dá uma característica de imprevisibilidade ao empreendimento, pois parte-se dos elementos pré-estabelecidos e da tese a estabelecer, sem se ter uma noção clara do caminho a percorrer para se chegar à conclusão. Porém, como o enunciado desta nova tese é conhecido de antemão, um caminho possível para prová-la é negá-la e chegar a uma contradição. Por isto a demonstração por absurdo serve tão bem ao projeto de edificar uma ciência em alguns sistemas axiomáticos.

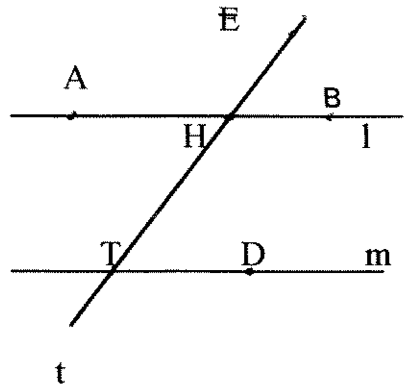
Aluno A: Vou refletir sobre tudo isto que vocês disseram.

Aluno D: Lembrei-me de outro teorema que pode ser demonstrado por absurdo. "Se ***l*** e ***m*** são retas paralelas e ***t*** é uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes e os ângulos colaterais internos suplementares". Posso demonstrar?

Prof.: Fique à vontade *D* !

Aluno D:

(lousa)



Hipótese: sejam duas retas ***l*** e ***m*** tal que ***l*** // ***m*** e ***t*** uma transversal

Quero provar 1{ ∠ AHT = ∠ HTD

2{∠ BHT + ∠HTD = 180°

Farei a demonstração pelo método indireto

Se a medida do ∠AHT for diferente da medida do ∠HTD, um deles será o maior.

Suponhamos ∠AHT o maior.

Podemos somar a medida do ∠BHT à medida do ∠AHT e à medida de ∠HTD, assim teríamos: ∠AHT + ∠BHT > ∠HTD + ∠BHT

Sabemos que ∠AHT + ∠BHT = 180°, logo ∠BHT + ∠HTD < 180°. Então, pelo postulado V, ***m*** e ***l*** se encontrarão quando prolongadas, o que contradiz a hipótese.

Logo, ∠AHT = ∠HTD. Demonstramos 1, agora vamos demonstrar 2.

∠AHT = ∠EHB pois são opostos pelo vértice

Assim, pelo axioma 1,∠ EHB = ∠HTD

∠EHB + ∠BHT = 180°

Portanto, ∠HTD +∠ BHT = 180°, como queríamos demonstrar.

Prof.: Bela demonstração, *D* . Este teorema tem uma importância especial dentro da estrutura dos *Elementos*. Alguém sabe por quê?

Aluno C: Porque é nele que Euclides utilizou pela primeira vez o quinto postulado em uma demonstração.

Aluno B: E qual o número deste teorema, três, quatro?

Prof.: Vinte e nove.

Aluno B: O quê? Vinte e nove? Eu havia percebido alguma coisa estranha neste quinto postulado... "Ele não deriva nem das propriedades gerais das grandezas enunciadas pelos axiomas, nem da possibilidade de construção expressas pelos três primeiros postulados (...) e nem tem a característica de evidência que possui o quarto postulado."[46] Até Euclides relutou em utilizá-lo.

Aluno C: Por que "relutou em utilizá-lo"? A organização que ele deu aos *Elementos* foi esta. Os primeiros vinte e oito teoremas necessitam somente dos primeiros quatro postulados para suas demonstrações e, a partir do vigésimo nono, utilizou o quinto postulado. Questão de organização.

Prof.: Na realidade, "muitas das primeiras vinte e oito proposições podem ser demonstradas de forma mais simples se utilizarmos o quinto postulado."[47] Por exemplo, a proposição - "se uma reta transversal, ao cortar duas retas dadas, faz com elas ângulos correspondentes congruentes, então as duas retas dadas são paralelas" (proposição 28) - pode ser demonstrada facilmente utilizando o quinto postulado.

Aluno B: Está vendo, o próprio "Euclides foi o mais longe possível sem empregá-lo, pois também não estava satisfeito com a natureza de 'postulado' de tal proposição."[48]

Aluno A: Vocês ficam com "histórias", enquanto poderíamos já ter estudado outros teoremas... Lembrei-me de um: "dado um triângulo qualquer, a soma de dois quaisquer ângulos internos é menor que dois retos".

Aluno B: Que interessante! Faço questão de tentar demonstrar este teorema.

Aluno A: Por favor, pode prová-lo.

Aluno B: Por hipótese temos um triângulo que, por definição, tem três ângulos. Sejam estes três ângulos A, B e C. Queremos demonstrar que: A+B, A+C e B+C são menores que 180°. Pelo postulado II, podemos prolongar um lado do triângulo,

---

[46] BKOUCHE, R., op. cit., p. 34.

[47] MORENO, L e BROMBERG, S. - op. cit. - p.14.

[48] Ibidem

por exemplo o lado AC. Determinaremos o ângulo externo adjacente a C. Vamos chamá-lo de D. Temos D>A. Qual teorema afirma isto?

Prof.: "Em um triângulo, se prolongarmos um dos lados, o ângulo externo será maior que cada um dos dois internos não adjacentes". É o teorema dezesseis.

Aluno B: Obrigado. Pelo axioma IV, podemos fazer: $C + D > C + A$.

Como $C + D = 180°$, temos $C + A < 180°$. De forma análoga demonstramos que as outras duas somas de pares de ângulos também são menores que dois retos.

Prof.: Ótima demonstração *B*, e sem desenho!

Aluno B: Obrigado professora. Vocês notaram que não utilizei o quinto postulado?

Aluno D: Observamos não só isto, como também o fato de você ter explicitado em todas as passagens os axiomas, postulados e definições utilizados .

Aluno B: Muito bem! E vocês perceberam que este teorema é o recíproco do quinto postulado?

_ !!!

Aluno B: Como pode um postulado ter como recíproco um teorema?

Prof.: Você está sugerindo que o quinto postulado é na realidade um teorema?

Aluno B: Estou.

Aluno A: Isto é um absurdo! O quinto postulado não está enunciado na forma de teorema.

Aluno B: A, segundo você mesmo, é tudo uma questão de formulação de enunciado. Podemos formular o quinto postulado assim: "se duas retas ***a*** e ***b*** quando cortadas por uma transversal *c*, formam ângulos internos do mesmo lado não suplementares, então ***a*** e ***b*** se encontrarão do lado em que a soma dos ângulos internos for menor".

Aluno D: B tem razão...

Aluno C: Não acho que o quinto postulado possa ser um teorema.

Aluno B: Em um sistema axiomático não adianta somente "intuirmos" algo, precisamos demonstrar nossas afirmações.

Aluno A: Não tinha pensado nesta formulação para o quinto postulado... Talvez ele seja mesmo um teorema...

Prof.: Historicamente, "a demora, interpretada como reticência de Euclides para empregar o quinto postulado, fez com que os geômetras, desde a Antiguidade, suspeitassem de que estavam diante de uma proposição disfarçada em postulado. Tal suspeita se fundamentava, também, no fato de, tecnicamente, o postulado das paralelas ser recíproco da proposição dezessete"[49].

Aluno C: Continuo achando que o quinto postulado é mesmo um postulado. Se o problema for a formulação do enunciado, podemos formulá-lo assim: "por um ponto ***P*** tomado fora de uma reta ***l***, podemos traçar uma única reta ***h*** paralela a ***l***".

Aluno D: Euclides deu esta opção de formulação nos "Elementos"?

Prof.: Não, este enunciado pertence àquela história da cópia da cópia ... Nós o chamamos de postulado de Playfair, devido ao fato do matemático inglês John Playfair (1748-1819) ter proposto substituir o quinto postulado por este enunciado. Porém, esta enunciação já era conhecida por Proclo.

Aluno A: Mas podemos demonstrar a existência de uma paralela a uma reta por um ponto fora dela. Sejam ***a*** uma reta e ***P*** um ponto não pertencente em ***a***. Há um teorema - o 12 - que diz "dada uma linha reta e um ponto fora dela, podemos traçar uma perpendicular à reta que passa pelo ponto". Assim, podemos traçar a perpendicular a ***a*** por ***P***. Seja ***Q*** a interseção da perpendicular com ***a***. Em seguida, traçamos a perpendicular ao segmento PQ que passa por ***P***. Aí, lembramos da seguinte proposição: "se uma reta transversal, ao cortar duas outras retas, faz com elas ângulos alternos internos congruentes, então as duas retas serão paralelas". Portanto, demonstramos a existência de uma paralela a ***a*** por ***P***.

Aluno B: E não foi utilizado o quinto postulado.

Aluno C: É evidente a possibilidade de demonstrarmos a existência de uma reta paralela a outra por um ponto dado. Aceitamos como postulado a unicidade desta paralela e não a sua existência. Agora, se vocês preferirem, podemos também substituir o quinto postulado pela seguinte afirmação: "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°".

[49] MORENO, L. e BROMBERG, S. - op. cit., p. 18.

Aluno B: Se demonstramos a existência de uma reta paralela por um ponto a outra reta dada , quem garante a impossibilidade de provarmos a sua unicidade?Além do mais, se o quinto postulado for um teorema, as asserções sobre as paralelas e sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo também o serão. Poderíamos tentar demonstrar estes enunciados, utilizando somente as definições, axiomas e os quatro primeiros postulados do sistema axiomático de Euclides.

Prof.: Idéia excelente! *B* está propondo utilizarmos a Geometria Neutra, ou seja, as definições, axiomas, os quatro primeiros postulados e os teoremas, que não necessitam do quinto postulado para serem demonstrados, contidos nos *Elementos*, para tentarmos demonstrar o postulado número cinco. Como nosso encontro de hoje está acabando, vou pedir para vocês tentarem fazer esta demonstração em casa trazerendo-a na próxima aula. Pode ser?

Aluno C: Desculpe-me professora, mas acho isto perda de tempo, o quinto postulado é um postulado.

Prof.: Você tem como provar isto?

Aluno C: Não.

Prof.: E se deixássemos seus colegas procurarem uma demonstração para o postulado, e você trouxesse uma prova da equivalência entre o quinto postulado de Euclides e o postulado de Playfair?

Aluno C: Seria mais interessant

Prof.: Então, até lá.

CAPÍTULO II
TENTANDO DEMONSTRAR O QUINTO POSTULADO

"Não se trata de saber qual é o poder
que age do exterior sobre a ciência,
mas que efeitos de poder circulam entre os
enunciados científicos, qual é o seu regime interior de poder;
como e porque em certos momentos
ele se modifica de forma global."

Michel Foucault, 1984.

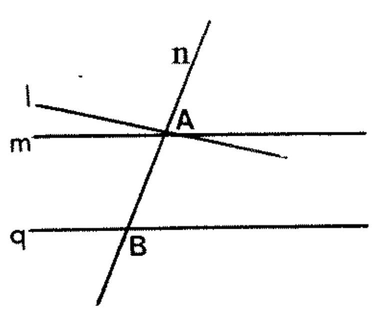
AULA III

Prof.: No final da última aula, combinamos que *A*, *B* e *D* procurariam uma demonstração para o quinto postulado de Euclides e *C* faria a demonstração da equivalência entre o quinto postulado de Euclides e o postulado de Playfair. Quem quer começar?

C: Se meus colegas permitirem, gostaria de expor a demonstração que consegui.

Consentimento geral.

C: Utilizarei três passos para realizar meu intento.Primeiro mostrarei que, se ***m*** e ***n*** são duas retas que formam, com uma transversal, ângulos internos cuja soma é diferente de 180°, então ***m*** e ***n*** se interceptam. A seguir, provarei que por um ponto fora de uma reta existe uma única reta paralela a reta dada. Por fim, explicarei a equivalência entre os dois postulados. Para realizar o primeiro passo, precisarei demonstrar o seguinte teorema: "se duas retas paralelas são cortadas por uma tranversal, então os ângulos correspondentes são congruentes", sem utilizar o quinto postulado de Euclides.



Sejam ***m*** e ***q*** duas retas paralelas e seja ***n*** uma reta que intercepta ***m*** e ***q*** nos pontos **A** e **B**, respectivamente.

Consideremos ***l*** passando por **A** e formando com a transversal quatro ângulos congruentes aos correspondentes formados por ***q*** com a mesma transversal.

Lembremos da proposição 28: "se, ao cortarmos duas retas com uma transversal, os ângulos correspondentes são congruentes, então as retas são paralelas".

Assim, concluímos que ***q*** e ***l*** são paralelas.

Pela proposição 30 a qual enuncia: "se uma reta ***a*** é paralela às retas ***b*** e ***c***, então ***b*** e ***c*** ou são paralelas ou são coincidentes", concluímos que ***m*** e ***l*** são coincidentes.

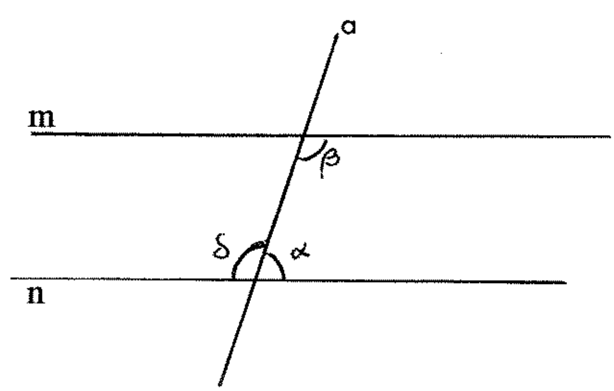
Portanto, ***m*** forma com a reta ***n*** ângulos congruentes aos formados por ***q*** com a reta ***n***.

B: Desculpe-me *C*, mas a proposição 30 é demonstrada utilizando-se o quinto postulado de Euclides.

C: Mas podemos demonstrá-la, e a 28 também, utilizando o postulado de Playfair.

Prof.: Proponho que vocês, em casa, demonstrem essas proposições utilizadas por *C* utilizando o postulado de Playfair. Por favor *C*, continue.

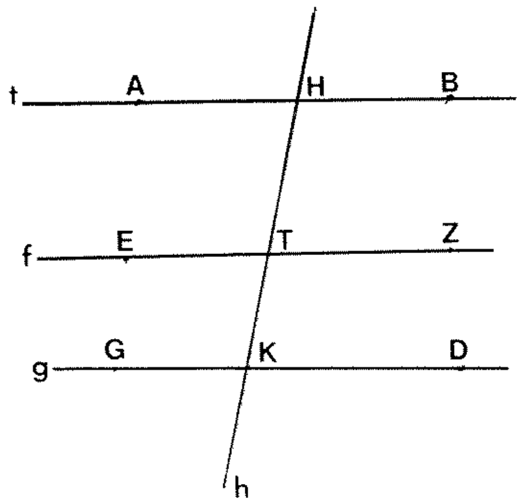
C: Agora vou terminar a primeira etapa, demonstrando o quinto postulado de Euclides. A hipótese é que $\alpha + \beta = 180°$. A tese é ***m*** e ***n*** se interceptam. Vou fazer a demonstração por absurdo. Suponhamos que ***m*** e ***n*** são paralelas como mostra a figura.



Assim, pelo teorema demonstrado anteriormente, temos que $\beta = \delta$ (alternos internos) $\delta+\alpha= 180° \Rightarrow \alpha+\beta=180°$ o que contradiz a hipótese.

Logo, se $\alpha+\beta=180°$, ***m*** e ***n*** se interceptam.

Agora, vou realizar o segundo passo. Para isso, porém, preciso demonstrar, utilizando o quinto postulado de Euclides, que retas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si. A hipótese é : sejam ***t*** e ***g*** paralelas a reta ***f***. Quero demonstrar que *t* é paralela a *g*. Para demonstrar façamos incidir sobre *t*, *f* e *g* a reta *h* - pela hipótese podemos fazer tal coisa - como na figura :



t é paralela a *f*, temos
$\angle$ AHT e o $\angle$ HTZ são congruentes.
Como *f* é paralela a *g*, temos:
$\angle$ HTZ e o $\angle$ TKD também são congruentes.
Daí temos que $\angle$ AHT $\cong$ $\angle$ TKD
Portanto, *t* // *g*.

Prof.: Quais os teorema implícitos nessa demonstração?

D: Uma reta transversal, ao incidir sobre duas retas paralelas forma com elas ângulos alternos congruentes, ângulos correspondentes congruentes e ângulos colaterais suplementares. Já demonstramos isso em aula.

A: C utilizou-se também da proposição que diz "se uma reta ao incidir sobre outras duas forma com essas ângulos alternos internos congruentes entre si, então as duas retas são paralelas entre si".

C: É interessante lembrarmos que, ao demonstrarmos a proposição enunciada por *D*, utilizamos o quinto postulado de Euclides e que o teorema enunciado por *A*, não necessita do quinto postulado para ser demonstrado. Bem, agora vou demonstrar o postulado de Playfair. A hipótese é: existe um ponto **P** não pertencente a *l* . A tese é: existe uma única reta paralela a *l* que passa por **P**. *A* já demonstrou na aula passada a existência desta reta, agora vou demonstrar a sua unicidade. Suponhamos que existam ***m*** e ***n*** ambas paralelas a *l* e ambas passando por **P**. Assim, pelo teorema demonstrado anteriormente, temos: ***m // l*** e ***n//l***, então ***m//n*** . Mas como ***m*** e ***n*** se interceptam no ponto **P**, então, ***m*** e ***n*** são coincidentes. Logo, existe uma única reta paralela a outra reta dada, que passa por um ponto dado, não pertencente à essa última.

B: E como se explica a equivalência?

C: Da seguinte forma: utilizando a geometria neutra e o postulado de Playfair demonstrei o quinto postulado de Euclides. Depois, utilizando a geometria neutra e o quinto postulado de Euclides demonstrei o postulado de Playfair. Logo, os dois postulados são equivalentes.

Prof.: Excelente demonstração, *C*. O que você fez chama-se *metageometria.*

B: Metageometria?

Prof.: "Em geometria nós examinamos figuras geométricas e informamos (em ′axiomas′ e ′teoremas′) o que estamos vendo. Deste modo, os objetos de nosso estudo são figuras e o sistema por nós construído é uma lista de proposições acerca destas figuras. Em metageometria, por outro lado, os objetos de estudo são os próprios sistemas geométricos, e assim nossas informações referem-se a proposições sobre proposições (metateoremas)"[50]. Agora já podemos passar para as demonstrações do quinto postulado sabendo que tanto faz demonstrarmos o postulado de Euclides ou o de Playfair.

D: Ou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°...

Prof.: Realmente, isso ainda precisa ser demonstrado. Pensemos nisso depois. Agora vejamos quem quer mostrar a prova que conseguiu para a proposta de vocês da última aula, ou seja, provar que o quinto postulado é, na realidade, um teorema?

B: Eu gostaria de expor minha demonstração.

Prof.: Fique à vontade *B*.

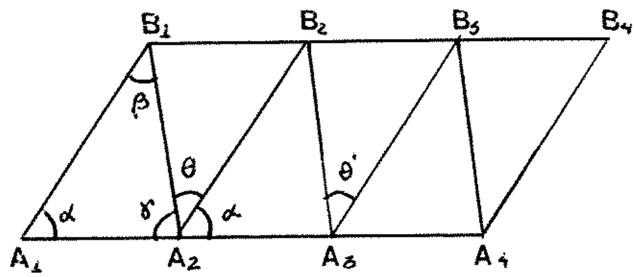
B: (dirigindo-se à lousa)

Já que o quinto postulado de Euclides é equivalente ao teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, vou demonstrar, utilizando-me da geometria neutra, que qualquer das seguintes afirmações levam a uma contradição. Primeira: a

---

50 TRUDEAU, R. , op. cit., p. 123.

soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°. Segunda: a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180°. Vamos demonstrar a primeira. Seja um triângulo $A_1B_1A_2$, conforme a figura, no qual designaremos os ângulos em A_1, B_1, A_2 respectivemente por α, β, γ. Consideremos sobre o segmento de reta A_1A_2 os pontos consecutivos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formando os segmentos congruentes $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ .Agora, vamos construir sobre esses segmentos, do mesmo lado do vértice B_1, os triângulos $A_2A_3B_2$, $A_3A_4B_3$,... congruentes ao triângulo $A_1A_2B_1$.



Ao ligar os segmentos B_1B_2, B_2B_3,..., formaremos os triângulos $B_1B_2A_2$, $B_2B_3A_3$, ..., que são congruentes entre si, pois

$$B_1A_2 = B_2A_3 = \ldots \qquad \text{e} \qquad B_2A_2 = B_3A_3 = \ldots$$

Por outro lado, o $\angle B_1A_2A_3$ exterior ao triângulo $B_1A_2A_1$ e suplementar ao ângulo γ, é maior que o $\angle B_1A_1A_2$, ou seja, α - pelo teorema 16 já citado nesse curso - portanto, o segmento A_2B_2 fica no interior desse ângulo, o qual é igual a:

$$\angle A_3A_2B_2 + \angle B_2A_2B_1$$

Designando o $\angle B_2A_2B_1$ por θ, teremos que $\alpha + \theta + \gamma = 180°$. (1)

Vamos designar por θ' o $\angle B_2A_3B_3$, daí temos que $\alpha + \theta' + \gamma = 180°$ (2)

De (1) e (2) concluímos que $\theta = \theta'$.

Podemos fazer esse mesmo processo até o último triângulo $B_{n-1}B_nA_n$ e concluiremos este é congruente aos precedentes. Logo, todos os segmentos B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ são congruentes, assim como os segmentos A_nB_n e o segmento A_1B_1.

Agora, vamos supor que a soma dos ângulos α, β, γ do triângulo $A_1B_1A_2$ é superior a 180°. Nesse caso, β será maior que θ, pois se β fosse menor ou igual que θ, a soma dos ângulos internos em questão seria menor ou igual a 180°.

Daí temos, por comparação dos triângulos $A_1B_1A_2$ e$B_2A_2B_1$ que $A_1A_2 > B_1B_2$ - pelo teorema que afirma que o lado maior de um triângulo opõe-se ao maior ângulo.

Existe, portanto, um segmento C_1C_2 tal que:

$A_1A_2 = B_1B_2 + C_1C_2$

Em virtude do teorema que afirma: a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, teremos:

$$A_1B_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_n > A_1A_n.$$

$$A_1B_1 + (n-1).B_1B_2 + A_nB_n > (n-1).A_1A_2$$

$$2.A_1B_1 + (n-1)\,B_1B_2 > (n-1)\,B_1B_2 + (n-1)\,C_1C_2$$

$$2.A_1B_1 > (n.-1)\,C_1C_2$$

Porém, se n for suficientemente grande, essa desigualdade contradiz o princípio de Arquimedes, segundo o qual "se AB e CD são segmentos, então, existe um número n tal que, se o segmento CD se justapõe n vezes ao segmento AB, pode-se obter um ponto E com AE = n.CD, de forma que B esteja entre A e E". Ao contradizer o princípio de Arquimedes, evidentemente ela também contradiz o segundo postulado, pois teríamos um limite ($2.A_1B_1$) para a medida de uma reta. Portanto, A_1A_2 não é maior que B_1B_2 , e segue-se a impossibilidade de $\beta>\theta$.

C: E por que o princípio de Arquimedes pode ser utilizado em uma demonstração sobre o sistema axiomático de Euclides?

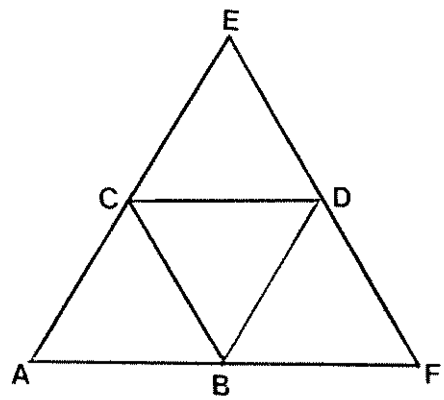
B: Ele equivale ao segundo postulado de Euclides. Vamos voltar à minha demonstração. O absurdo surgiu de supormos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°, portanto, essa soma deve ser menor ou igual a 180°.

D: Ufa! E isso tudo só para demonstrar a primeira parte!

C: Está certo, vamos à segunda parte da prova.

B: Na segunda parte, quero demonstrar que, se considerarmos a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo menor que dois retos, chegaremos também a uma contradição.Seja ABC um triângulo no qual, se possível, a soma das medidas dos ângulos internos é menor que 180°. Vamos definir defeito de um triângulo como sendo $\eta = 180° - (\angle A + \angle B + \angle C)$

Encontramos o ponto D simétrico ao ponto A, em relação ao lado BC, conforme mostra a figura



O defeito do novo triângulo BCD será também η. Podemos traçar por D uma transversal que encontra os lados do ângulo cujo vértice é A em E e F. Podemos demonstrar facilmente que o defeito do triângulo AEF é a soma dos defeitos dos quatro triângulos dos quais é composto. Desse modo tal defeito é maior que $2.\eta$.

Considerando agora o triângulo AEF e repetindo a construção, encontraremos um triângulo cujo defeito é maior que $4.\eta$. Após *n* operações, teremos um triângulo cujo defeito é maior que $2\ \eta$. Mas para um *n* suficientemente grande, o defeito seria maior que dois ângulos retos, o que levaria a um absurdo uma vez que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo seria um número negativo. Portanto, segue-se que $\eta = 0$ e que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

_!!!

Prof.: Muito interessante *B*! Adrien Marie Legendre (1752-1833), famoso matemático francês, fez essa mesma demonstração em seu livro *Reflexões sobre diferentes maneiras de demonstrar a teoria das paralelas ou o teorema da soma de três ângulos de um triângulo.*

A: Não foi esse Legendre que participou da comissão encarregada, em 1790, de elaborar um sistema padronizado para medidas lineares?

Prof.: Foi ele mesmo. Legendre fez parte da comissão que criou o sistema métrico decimal tal qual conhecemos hoje. Esse foi um dos cargos públicos que ocupou. Foi também professor e assessor científico. Além desses cargos, produziu várias pesquisas científicas em matemática pura, aplicada, nos campos da Análise, Equações Diferenciais e Teoria dos Números. Possui, também, pesquisas publicadas sobre astronomia, mecânica.

C: Como trabalhava esse Legendre!

Prof.: "Embora não fosse rico, tinha recursos suficientes para dedicar-se ao estudo e à pesquisa sem ter de se preocupar com 'ganhar a vida'. Mas não deixou de ter empregos remunerados. (...) Além de ser um cientista de grande mérito, Legendre foi também um autêntico professor, que se preocupava até mesmo com questões de ensino elementar. Nesse domínio seu trabalho mais importante foi um livro chamado *Éléments de Géometrie*, publicado no final do século XVIII e que dominaria o ensino da Geometria por cerca de 100 anos. Esse livro ficou muito popular, pois era bem mais acessível aos estudantes que o antigo e difícil tratado original de Euclides. Tanto assim que o livro de Legendre, além de usado nas escolas francesas, foi traduzido em vários outros países, inclusive no Brasil, onde foi, largamente usado, alcançando mais de 25 edições!"[51]

C: O quê? Os alunos estudavam *Os Elementos* de Euclides no ensino elementar?!?

---

[51] ÁVILA, G. - "Legendre e o postulado das paralelas" - in Revista do Professor de Matemática - SBM - nº 22- 1992 - p. 18 a 28

D: Por que a admiração? Ainda hoje encontramos livros didáticos que introduzem o conteúdo de Geometria no volume correspondente à sétima série do primeiro grau e de forma completamente axiomática.

C: Você tem razão. Foi assim o meu primeiro contato com a Geometria. Lembro-me de que, na época, não entendia nada daquelas coisas - axiomas e teoremas - ensinadas na sétima série. E as demonstrações... Ficava horas decorando-as.

Prof.: Historicamente, a dificuldade de se entender Matemática tem sido conseqüência da escolha inadequada da metodologia de ensino e dos recursos didáticos, como por exemplo o livro didático, utilizados. O ensino de Geometria foi prejudicado durante muitos anos porque os professores insistiam em ensiná-la utilizando *Os Elementos* como livro didático. Essa obra foi escrita para especialistas e, ao contrário do que pensam muitos educadores, o título não significa que se trata de uma obra cujo conteúdo seja uma introdução elementar à Geometria. No ensino elementar, a importância da Geometria não reside no treino do "rigor", mas na possibilidade de criar, experimentar, levantar hipóteses, testá-las, reformulá-las e tirar conclusões. Esse processo é a base do pensamento hipotético-dedutivo. Já o professor de matemática "deve ser informado além daquilo que ensina, inclusive sobre fundamentos e axiomática, justamente para que tenha senso crítico que o auxilie a decidir sensatamente sobre o que deve ensinar e como fazê-lo"[52] . Essa é a razão de ser desse nosso curso.

B: Professora, se entendi direito, você disse que a demonstração realizada aqui por mim, é igual a apresentada por Legendre em uma de suas obras?

Prof.: Sim, eu disse. As várias tentativas que Legendre fez para demonstrar o quinto postulado de Euclides apareceram, de 1794 a 1833, sucessivamente, nas diversas edições de seu livro referido anteriormente. Em cada uma delas, Legendre corrigia uma falha na demonstração, até que em 1833, ano de sua morte, ele apresentou essa última prova para o quinto postulado[53].

---

[52] Ibidem, p. 28.

[53] Cf. ÁVILA, G. , op. cit., p. 19

B: O quê? Está demonstrado desde o século XIX que o quinto postulado é, na realidade, um teorema?!?

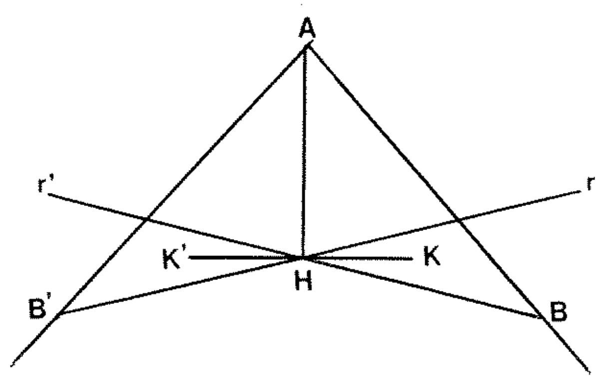
Prof.: Eu não disse isso. Para responder sua pergunta acho interessante fazermos um estudo dessa última parte de sua demonstração. Há um postulado implícito nela. Qual é ele?

_ ...

C: Através de um ponto qualquer dado no interior de um ângulo, podemos sempre desenhar uma linha reta que intercepta os dois lados deste ângulo.

B: Não havia pensado nisso... Mas de qualquer forma, essa asserção pode perfeitamente ser um postulado devido à sua evidência.

Prof.: Vamos analisar este postulado. Sejam AB e HK duas linhas retas, das quais AB forma um ângulo agudo e HK um ângulo reto com AH, conforme esta figura. (lousa)



Vamos desenhar a reta AB' simétrica a AB com relação ao lado AH. Percebam que estamos fazendo a construção proposta por Legendre.

Em virtude da hipótese de Legendre, por H passa uma reta *r* a qual encontra os dois lados do ângulo BAB'. Se essa linha for diferente de HK, então a simétrica a *r* em relação a AH, isto é, *r'* também intercepta os lados do ângulo BAB'. Daí segue que HK também intercepta os lados do ângulo BAB'. Nesse processo, o que demonstramos?

C: Que se duas retas - no caso AB e HK - são interceptadas por uma transversal- no caso AH- formando com esta ângulos internos menores que dois retos, então as duas retas - AB e HK - se interceptam! É o quinto postulado de Euclides!

B: Então minha hipótese implícita e o quinto postulado são equivalentes?

D: Meu caro *B*, sua demonstração está 'furada', pois nela você utilizou o que queria demonstrar.

C: Além disso, estive pensando na demonstação da primeira parte, e concluí que os pontos B_1, B_2 ...B_n serão colineares, somente se for válido o quinto postulado.

A: É mesmo! Você utilizou o conceito de equidistândia entre retas paralelas.

B: Tanto tempo perdido, para nada...

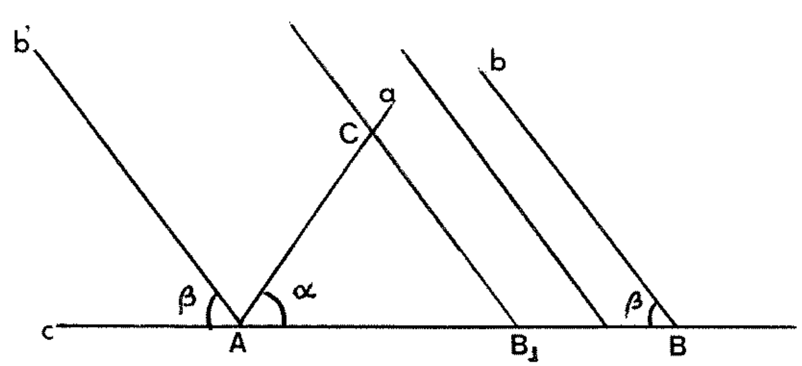
Prof.: Não é verdade *B*, você provou algo muito importante. Através de sua demonstração, podemos inferir que na geometria euclidiana o quinto postulado equivale à proposição da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser 180°.

B: Apesar de minha demonstração ter uma falha, como a de Legendre, continuo acreditando na possibilidade de provar que o quinto postulado é um teorema.

Prof.: Vejamos, alguém mais trouxe uma demonstração do quinto postulado?

A: Eu trouxe. Quero demonstrar o quinto postulado de Euclides e, para isso, assumi como postulado a seguinte afirmação "para toda figura existe uma figura semelhante de grandeza arbitrária"

(lousa)



Sejam ***a*** e ***b***, duas linhas retas e *c* uma transversal que as intercepta nos pontos A e B respectivamente. Sejam α e β, respectivamente, as medidas dos ângulos que as retas ***a*** e ***b*** formam com a reta *c*, tal que $\alpha + \beta < 180°$. Por A, desenharemos a reta ***b'*** de maneira que ***b*** e ***b'*** formem com *c* ângulos correspondentes congruentes. Moveremos a reta ***b*** continuamente ao longo do segmento AB, mantendo com *c* sempre um ângulo congruente a β. Antes de encontrar sua posição final ***b'***, ***b*** deve interceptar ***a***. Assim, determinamos o triângulo AB C com ângulos em A e B respectivamente iguais a α e β. Mas por nossa hipótese sobre figuras semelhantes, sobre o lado AB, o qual é homólogo a AB', poderemos construir o triângulo ABC, semelhante ao triângulo AB C . Dessa forma concluimos que as retas ***a*** e ***b*** se interceptam, como queríamos demonstrar.

C: Interessante sua demonstração, *A*. Porém, se bem me recordo dos conteúdos que estudei em minha época de primeiro e segundo graus, parece-me que a relação de semelhança só existe se o quinto postulado for válido.

Prof.: C está correto. O quinto postulado de Euclides equivale à possibilidade de, dado um triângulo, existir outro triângulo semelhante e não congruente a ele. A demonstração dessa equivalência é simples, façam-na em casa e, se houver alguma dúvida, nós a discutiremos em nosso próximo encontro.

A: Então, eu também utilizei a asserção que queria demonstrar?

Prof.: Não só você, mas também o famoso matemático inglês, membro-fundador da Royal Society, John Wallis (1616-1703), pois as demonstrações apresentadas por você e por ele são análogas.

B: A Royal Society não foi aquela da qual Newton participou?

Prof.: É ela mesma. Fizeram parte da Royal Society nomes de grande importância para a ciência, tais como Newton, Boyle, Hooke e o próprio Wallis. Esses e outros grandes cientistas mantinham financeiramente a Royal Society, custeando as próprias investigações científicas. A meta dessa sociedade era desenvolver um conhecimento que pudesse ser socialmente utilizado, como podemos perceber pelas palavras de Hooke nos Estatutos da Royal Society, escritas em 1663: "O objetivo da Royal Society é melhorar o conhecimento das coisas naturais, e de todas as artes úteis, manufaturas, práticas mecânicas, engenhos e invenções, por meio de experiências - (sem se imiscuir em Teologia, Metafísica, Moral, Política, Retórica, ou Lógica)"[54]. Porém, esses cientistas, ao menos no início de existência dessa sociedade, aprenderam muito mais com a manufatura e a navegação do que produziram novos conhecimentos que colaborassem para o desenvolvimento delas.

B: Muito interessante esta preocupação com as artes úteis - como Hooke as denomina - demonstrada por esses grandes nomes da ciência.

Prof.: Tal preocupação reflete as mudanças sociais desencadeadas pela passagem do sistema feudal, da Idade Média, para o início do Capitalismo, da Idade Moderna. No século XVII, os técnicos e artífices já haviam se estabelecido como essenciais à produção de dinheiro e, portanto, para o aumento da riqueza dos países que se lançavam ao mar em busca de matérias-primas e de mercados para seus produtos manufaturados. Dessa maneira, as atividades relacionadas com a indústria e, principalmente, com a navegação tornaram-se o centro das atenções dos estudiosos.

D: Ou seja, essa pretensa neutralidade política da produção científica expressa nos estatutos da Royal Society, na realidade camufla todo um compromisso com o sistema político e econômico da época...

A: John Wallis fez parte de todo esse movimento cultural! Estou bem acompanhado em meu fracasso!

Prof.: Não considero seu feito um fracasso, pois, como *B*, você também demonstrou algo importante. Quem percebeu a que estou me referindo?

D: Não sei se é a isso que você se refere, mas "a equivalência entre os postulados de Wallis e de Euclides nos mostra que se fosse possível um sistema geométrico no qual se rejeitasse o postulado euclidiano, a existência de figuras semelhantes nesse sistema seria impossível."[55]

---

[54]Apud BERNAL, J. D. , op. cit., p. 453

[55] BONOLA (s.d.) apud SOUZA, J. C. M. , 1948.

Prof.: É exatamente isso.

C: Como? Um sistema no qual se rejeitasse o postulado euclidiano das paralelas? E colocar o quê em seu lugar?

B: Caro *C*, se o quinto postulado for realmente um teorema, nós não precisaremos colocar nada no lugar dele.

D: Não creio que a professora esteja se referindo a isso. Entendi o 'rejeitasse' como uma substituição do quinto postulado por algo completamente novo.

A: Com essa mudança você estaria criando não só algo novo, mas também um delírio de sua mente, provavelmente algum absurdo.

B: Não concordo com você ,*A*, e fundamento minha discordância na diferenciação feita por Kant entre conhecimento científico e pensamento. O primeiro resulta de um processo no qual a imaginação sintetiza o que é captado pela sensibilidade e organizado pelas categorias do entendimento.Já o pensamento não necessita da sensibilidade, ou seja, dos dados empíricos. Portanto, o sistema geométrico ao qual *D* se referiu é possível, porém não seria um conhecimento científico[56].

A: Se pensarmos em ciências empíricas, como por exemplo a Física, poderemos entender a relação entre sensibilidade e desenvolvimento de teorias nesse campo do saber. Porém, querer explicar o conhecimento matemático como sendo puro reflexo das sensações é um completo disparate, aliás, já discutimos sobre isso.

C: Mas *B* não afirmou que o conhecimento matemático é puro reflexo das sensações, ele também falou algo sobre categorias de entendimento, ou seja, raciocínio.

D: Exatamente. Era o empirismo que pregava essa supremacia dos sentidos, não o criticismo de Kant. Aliás, o empirismo trazia em seu bojo um sério problema em termos de teoria do conhecimento, porquanto ameaçava a autonomia do espírito o qual deveria, segundo essa filosofia, "desempenhar tão-somente o papel de um

---

[56] Uma discussão sobre este assunto pode ser encontrada em LACROIX, J. - Kant e o kantismo - Ed. Rés - Portugal

simples espelho e de um espelho que apenas pode refletir as imagens, sem as produzir ou elaborar jamais por sua própria conta"[57]

A: Não importa se é *só* reflexo dos sentidos, ou se é *também* reflexo dos sentidos, ambas as afirmações são absurdas. A matemática é um conhecimento puramente racional.

B: É o que pensavam os racionalistas do século XVI...

C: Desculpem-me, mas vocês ficam falando de empirismo, racionalismo, como se todo mundo soubesse o que significam essas palavras...

B: O empirismo e o racionalismo foram movimentos filosóficos de oposição às idéias que vigoraram durante o Feudalismo. O conhecimento, na Europa, durante a Idade Média, era entendido como o caminho de reconciliação do homem com o mundo; na Idade Moderna, o conhecimento é visto como um meio de dominar a natureza, extraindo dela a riqueza material. Se estou bem lembrado, o precursor do empirismo, Francis Bacon (1561-1626) em sua obra *Novum organum,* afirma que "se alguém se dispõe a instaurar o poder e o domínio do gênero humano sobre o universo, a sua ambição (se assim pode ser chamada) seria, sem dúvida, a mais sábia e a mais nobre de todas. Pois bem, o império do homem sobre as coisas se apóia, unicamente, nas artes e nas ciências. A natureza não se domina, senão obedecendo-lhe"[58]. Ao mesmo tempo, René Descartes (1596-1650), em seu racionalismo, proclamava que suas conclusões mostraram-lhe "que se pode chegar a conhecimentos muito úteis à vida; e que em vez dessa filosofia especulativa que se ensina nas escolas é possível encontrar uma filosofia prática pela qual conhecendo a força e a ação do fogo, da água, do ar, das estrelas, dos céus e de todos os outros corpos que nos rodeiam tão distintamente como conhecemos os vários ofícios dos nossos artífices, poderíamos utilizá-los da mesma maneira para todos os fins para que são adequados tornando-nos dessa forma os senhores e possuidores da

---

[57] CASSIRER, E. , 1992 , p. 172.

[58] BACON, F. - Novum organum - I aforismo - p. 129 apud ANDERY, A. M. et al., 1992, p. 191.

Natureza."[59]. Essas falas explicam, em parte, a conciliação, já comentada aqui, entre os estudiosos e as artes e ofícios.

Prof.: Essa atitude pragmática frente ao conhecimento traz consigo a questão: por qual caminho atingimos o conhecimento? Isto é, ela coloca o problema do método. Tanto o empirismo que toma corpo na Inglaterra com Bacon, como o racionalismo, organizado na França por Descartes, tentam responder a esta questão. Segundo o empirismo, nosso conhecimento é erigido por meio de um grande número de experiências sensíveis[60] e da indução. Já para o racionalismo, o conhecimento é conseguido exclusivamente por via racional e dedutiva. O método dedutivo da matemática e a própria matemática, tornam-se, então, os baluartes do racionalismo e os pontos de convergência das críticas empiristas.

D: Segundo os empiristas, devia-se combater, no domínio da física, não só o espírito de sistema da metafísica, mas também o da matemática, porque essa última pretendia ultrapassar seu próprio universo conceitual e fornecer verdades dogmáticas sobre a realidade, segundo moldes unicamente racionais.

A: E qual o problema da matemática fornecer verdades segundo moldes unicamente racionais?

Prof.: A partir do racionalismo, impõe-se como rigor o estabelecimento das leis as quais buscam definir a essência de tudo o que pode manifestar-se à consciência, no tempo e no espaço. Essas leis, concebidas pela física matemática, são entendidas como as verdades da natureza. A única expressão que lhes convém é a linguagem matemática, pois ela fornece a tais verdades uma forma acabada, límpida, translúcida e única. Galileu foi o primeiro cientista a afirmar explicitamente que as únicas propriedades da matéria com as quais era possível trabalhar cientificamente com um grau de certeza eram a extensão, a posição e a densidade. No entanto, não foi Galileu, mas Descartes quem percebeu inteiramente o alcance de tal utilização

---

59 DESCARTES, R. - Discurso do método - apud BERNAL, J. D. - op. cit., p. 443, 444.

60 Estamos utilizando o termo "experiências sensíveis" para diferenciar este tipo de experiências das "experiências mentais".

para a matemática. Com esse último, é estabelecida toda a ênfase dada à quantificação e à preocupação quase exclusiva com medidas no estudo do universo. Mas podemos perceber, já em Galileu, a importância da matemática para a nova maneira de encarar o universo. Em sua obra *Saggiatore*, Galileu ao indicar para Sarsi o caminho para a construção do conhecimento afirma: "parece-me também perceber em Sarsi sólida crença que, para filosofar, seja necessário apoiar-se nas opiniões de algum célebre autor, de tal forma que o nosso raciocínio, quando não concordasse com as demonstrações de outro, tivesse que permanecer estéril e infecundo. Talvez considere a filosofia como um livro e fantasia de um homem, como a Ilíada e Orlando Furioso, livros em que a coisa menos importante é a verdade daquilo que apresentam escrito. Sr. Sarsi, a coisa não é assim. A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito na linguagem matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um labirinto."[61] O fato do universo estar escrito na linguagem matemática pressupõe que alguns números possuem propriedades místicas, ou um determinismo metafísico. Kepler também combinava o misticismo dos números e o rigor dos cálculos para buscar os mistérios do universo, como podemos perceber pelo título de seu primeiro livro *Mysterium Cosmographicum*. Parece haver, então, um enlace entre a metafísica e as verdades matemáticas. O que pode nos levar a concluir que o objetivo proposto pelo racionalismo é descobrir, nas leis determinadas do universo, o vestígio da divindade.

D: O empirismo questiona todo esse aspecto metafísico do determinismo das leis matemáticas, apresentando como alternativa à quantificação, o sensualismo, ou seja, coloca em relevo a observação das qualidades dos objetos a serem estudados.

---

[61] GALILEI, G., Saggiatore, p. 119 apud ANDERY, A. M. et al., op. cit., p. 186.

Prof.: Kuhn aponta a relação existente entre a oposição racionalismo/empirismo e a separação gradual entre a matemática e a física. Essa relação pode ser percebida pela exposição feita sobre o assunto por Christian Huyghens no seu *Traité de la lumiére* (1690). Esse autor estabelece que "não se trata de atingir em física a mesma evidência que nas demonstrações e deduções matemáticas, já que não existe nenhuma certeza *intuitiva* das verdades físicas fundamentais".[62]

Prof.: Com a crítica do empirismo ao racionalismo, o ideal do conhecimento da natureza deixou de se inspirar no modelo da geometria a fim de optar pelo da aritmética.

D: A Física foi aproximando-se cada vez mais do empirismo, das ciências empíricas e da Aritmética e afastando-se da Geometria.

Prof.: No século XVIII, ocorreu uma crise na análise matemática, devido à imprecisão dos conceitos que sustentavam o cálculo infinitesimal, ou seja, exatamente no ramo da matemática que se mostrava mais fecundo para resolver vários problemas colocados pela física. Assim, iniciou-se na matemática um movimento de busca de seus próprios fundamentos. Essa "nova pesquisa matemática emancipou-se gradualmente da antiga tendência de ver na mecânica e na astronomia a meta final das ciências exatas."[63]

C: Mas, os empiristas criticavam o método geométrico e ao mesmo tempo, utilizavam a aritmética?

Prof.: Não vamos nos esquecer de que as verdades da geometria, tal como foram pressupostas pelos gregos da Antiguidade, eram eternas e independentes da interferência do ser humano. Para o empirismo a existência, ou não, das verdades depende da experiência prática, experiência esta que depende das sensações humanas. Portanto, a crítica empirista à geometria concernia ao caráter dogmático das verdades desse campo do saber. Por exemplo, R. P. Castel escreveu, no século XVIII: "a Física é simples, natural e fácil, me refiro a fácil de compreender. Seus

---

[62] CASSIRER, E. , op. cit., p. 95.

[63] STRUIK , D.J., op. cit., p. 225.

termos e seus objetos são conhecidos por nós. Observamos naturalmente e experimentamos a maioria das coisas, a luz, o calor, o frio, o vento,o ar, a água, o fogo, a gravidade, a força, a duração, etc. Cada olhar é uma observação da natureza, cada operação de nossos sentidos ou de nossas mãos é uma experiência. Todo o mundo é um pouco Físico em maior ou menor grau conforme sua mente seja mais ou menos capaz de um raciocínio natural. Já a Geometria é completamente abstrata e misteriosa em seus termos."[64] Essa não é uma crítica isolada. Havia então uma vontade generalizada de separar a Física das matemáticas. Exceção a isso são as ciências físico-matemáticas desenvolvidas na Alemanha, pois nesse país a tradição filosófica, apesar de considerar insuficiente a interpretação matemática do mundo, segue o racionalismo de Leibniz, para o qual as leis da realidade não podem afastar-se das leis da lógica e da matemática.

D: O modo matemático, caracteristicamente grego, de tratar a ciência, trouxe consigo um entrave real para o desenvolvimento daquelas ciências que ainda não podiam ser reduzidas a modelos matemáticos como a biologia, por exemplo, apesar de ter sido bem sucedido naqueles domínios em que os gregos já haviam se aventurado, como por exemplo a mecânica.

B: Além, é claro, da quantificação ter sido um obstáculo a novas descobertas científicas para a Física daquela época, pois alguns cientistas utilizavam-na da forma mais extravagante possível. Por exemplo, "no século XVIII, Buffon chega à conclusão de que fazia 74832 anos que a Terra havia se desprendido do Sol.(...) O Conde de Tressan se refere à explosão da lágrima batávica, simples gota de vidro fervendo que se mistura na água fria, para fazer compreender a explosão que separou a matéria dos planetas e a massa do Sol."[65] Fazia-se uma completa confusão no que se refere à precisão e à realidade das escalas.

---

[64] CASTEL, 1743, p. 6 apud BACHELARD, G. , 1991, p. 270.

[65] BACHELARD, G. , op. cit., p. 263.

D: Curioso, se por um lado o empirismo, por seu questionamento à aparência dogmática das afirmações matemáticas, acaba acarretando afirmações como as de Castel, por outro critica também os resultados pretensamente científicos, os quais abusam das noções de precisão e de escala. A negação das generalizações, inclusive as matemáticas, nesse último caso, leva a uma atitude bastante científica.

B: Kant viveu entre os anos de 1724 e 1804, ou seja, no período da crise de fundamentos da matemática e de todas as críticas do emprirismo a esse campo do saber. Sua pergunta fundamental foi: o que pode a razão conhecer? Ou seja, colocou em questão o estatuto epistemológico das ciências e o da metafísica.

B: Com Kant, finalmente, o estatuto epistemológico do conhecimento matemático não pode mais ser confundido com o da metafísica.

Prof.: Para buscar esses estatutos, Kant sintetizou as propostas do empirismo e as do racionalismo, superando ambas. O criticismo outorga tanta importância à razão como à experiência no processo de aquisição de conhecimento. Segundo ele, "a razão deve ir à natureza tendo em uma das mãos os princípios, segundo os quais apenas fenômenos concordantes entre si podem valer como leis, e na outra a experimentação que imaginou segundo os seus princípios, na verdade para ser instruída por ela, não porém na qualidade de um escolar que se deixa ditar tudo o que o meste quer, e sim na de um juiz, cujas funções obrigam as testemunhas a responder às questões que ele lhes propõe."[66]

C: Pelo que entendi dessa citação, Kant pressupõe um sujeito ativo no ato de conhecer.

Prof.: É isso mesmo. Com Kant, a fonte do conhecimento deixa de ser o objeto externo e passa a ser o sujeito. Para o criticismo, nós só conhecemos as coisas levando a elas o que temos a priori.

D: Além de pressupor um sujeito ativo no ato de conhecimento, é extremamente interessante a função atribuída por ele à imaginação.

---

[66] Kant, I. , "Crítica da Razão Pura" in <u>Os Pensadores</u> - Ed. Abril Cultural , SP, 1974, p. 11.

Prof.: As idéias de Kant surgem no contexto da escola alemã, baseada na filosofia de Leibniz. Para Leibniz não há universo fora da imaginação humana, pois, segundo ele, "o corpo não tem unidade verdadeira. Sua unidade vem de nossa percepção, é um ser de razão, ou melhor, de imaginação, um fenômeno"[67]. Se a unidade do corpo provém da imaginação, o que dizer do universo? Da escola de Leibniz, também fazem parte as idéias de Tetens. Esse último utiliza-se das idéias de Leibniz para construir suas críticas ao sensualismo-empirismo. Segundo Tetens, a atividade poética não pode ser explicada como simples acúmulo de impressões. Por atividade poética entende toda a atividade criadora, inclusive a científica. Podemos perceber que Tetens, assim como Kant, estabelece um papel fundamental para a imaginação no ato de conhecer.

C: E como fica a questão da verdade em Kant?

B: Segundo Kant, nunca se atinge a essência das coisas. Conseguimos apenas explicar aquilo que se manifesta para o sujeito cognoscente, isto é, o fenômeno. Cada sujeito pode ter uma percepção diferente do fenômeno. Podemos perceber que assim o é para Kant pela seguinte passagem de seu livro *A crítica da razão pura*: "o que possam ser os objetos em si mesmos não podemos jamais conhecer, mesmo por meio do conhecimento mais esclarecido do seu fenômeno, que unicamente nos é dado."[68] Dessa maneira, concluímos que no criticismo não se fala mais em verdade objetiva no sentido utilizado pelo racionalismo. Para o criticismo, o conhecimento científico é constituído por juízos sintéticos *a priori*, ou seja, juízos que a razão sintetiza, a partir das experiências empíricas e de nossas formas (estruturas) a priori. A verificação da veracidade destes juízos só se efetiva por meio da empiria. Em uma passagem da *Crítica*, Kant afirma que "para conhecer um objeto requer-se que eu possa provar sua possibilidade (seja pelo testemunho da experiência a partir da sua realidade, seja *a priori* pela razão). Posso, porém, *pensar* o que quiser, desde que

---

[67] Apud FERRY, L. , 1994, p. 96

[68] KANT, I., op. cit., p. 50.

não me contradiga, isto é, quando o meu conceito for apenas um pensamento possível, embora não possa garantir se, no conjunto de todas as possibilidades, corresponde ou não a este objeto. Mas, para atribuir realidade objetiva (possibilidade real, pois a primeira era apenas lógica) a um tal conceito, requer-se-á algo mais."[69]

C: E onde fica a universalidade do conhecimento científico?

B: A síntese é realizada a partir de nossas estruturas da razão e da sensibilidade - as formas - que além de existirem anteriormente a toda experiência, ainda são universais, ou seja, transcendem o indivíduo. Desse modo, Kant consegue explicar a universalidade do conhecimento.

D: Mas, com essas formas não caímos novamente nas idéias inatas?

Prof.: Não, pois essas formas são apenas maneiras de estruturação da razão e da sensibilidade. Elas não possuem conteúdo próprio. O conteúdo vem da experiência.

A: Posso compreender esta teoria do conhecimento no que se refere às ciências naturais, afinal nelas podemos ter acesso aos fenômenos. Contudo, como explicamos o conhecimento geométrico?

B: A "Geometria é uma ciência que determina sinteticamente e de modo a priori as propriedades do espaço"[70]. Temos contato com essas propriedades por meio de nossa intuição - entendida aqui como a representação dos fenômenos - completamente a priori. Nesse apriorismo encontra-se a universalidade da Geometria.

A: Mas o espaço não é exterior ao sujeito? Como se pode, então, falar em apriorismo?

B: Você ainda não entendeu a filosofia kantiana. Kant centra o conhecimento no sujeito. Não há conhecimento sem sujeito cognoscente. A concepção kantiana de espaço não foge à regra. Quando eu digo: este livro está sobre a mesa e ao lado desta caneta, estou percebendo relações entre estes objetos. O que me possibilita perceber

[69] Ibidem, p. 16.

[70] KANT , I., op. cit., p. 42.

essas relações é a forma - espaço - que existe *a priori* em mim, mas enquanto forma, algo completamente vazio. As relações entre os objetos - dadas empiricamente - são o conteúdo dessa forma. Podemos perceber que assim o é para o criticismo pela seguinte passagem da *Crítica da Razão* Pura: "o espaço não é nenhum conceito empírico tirado de experiências externas. Pois para certas sensações relacionarem-se com algo fora de mim (isto é, com algo em um lugar do espaço diverso daquele em que me encontro), e igualmente para que eu possa representá-las como fora de mim e uma ao lado da outra - por conseguinte, não simplesmente como diferentes, mas como situadas em lugares diferentes - deve a representação do espaço servir-lhes já de fundamento"[71]. Para Kant, o conhecimento geométrico, enquanto conhecimento, só pode existir a partir do sujeito.

Prof.: B tem razão. Kant afirma que "a Matemática e a Física são os dois conhecimentos teóricos da razão que devem determinar os seus *objetos a priori,* a primeira de modo inteiramente puro, a segunda pelo menos em parte."[72]

C: Como assim, "de modo completamente puro", a forma não é vazia sem a experiência?

Prof.: Não podemos negar a existência empírica da Matemática. Ela está escrita nos livros, nos cadernos, etc, porém seus objetos, segundo Kant, referem-se somente à razão. Por isso seus conceitos existem de modo completamente puro. É interessante notar que no criticismo as verdades da Matemática continuam sendo universais - garantidas pelo apriorismo - apesar de não mais referirem-se às coisas em si. A partir de Kant, não podemos afirmar que a Geometria é a linguagem do universo, além disso, ela, como todo o conhecimento, só existe porque existe o sujeito. A Geometria deixa de ser o conhecimento do que existe eternamente e independente do ser humano. Isso implica que, a partir de Kant, não se pode mais tachar este campo do saber de dogmático e metafísico, conforme faziam os empiristas do século XVIII.

---

[71] Ibidem, p. 41.

[72] Ibidem, p. 10.

C: No final do século XVIII, Matemática e Física estavam se separando, os empiristas não tinham mais motivo de acusar o conhecimento matemático de metafísico e a Matemática estava em uma crise de fundamentos. Que século!

Prof.: Além de tudo isso, entre o final do século XVIII e início do XIX, o desenvolvimento do Capitalismo e os ideais da Revolução Francesa fizeram surgir, por um lado, um número cada vez maior de jovens intelectuais com o desejo de reconhecimento social e de estabilidade econômica que não queriam, no entanto, entrar para o clero; e de outro, um número de governantes desejosos em mostrarem-se ilustrados, para os quais a principal função da educação superior era a formação de funcionários públicos - advogados, mestres e médicos. A junção desses dois níveis de desejo impulsionou a educação técnica e científica, levando a criação da Escola Politécnica em 1795 e da Escola Normal Superior em 1794, ambas na França, e a fundação ou a reformulação de várias universidades, sobretudo na Alemanha. O modelo da Escola Politécnica foi reproduzido em Praga, Viena, Estocolmo, São Petesburgo, Copenhagen, em toda a Alemanha e Bélgica. "Os matemáticos do século XIX não se encontravam mais nas cortes reais ou nos salões da aristocracia. A sua principal ocupação não consistia mais em ser membro de uma academia culta; eram freqüentemente empregados por universidades e escolas técnicas e eram professores, assim como investigadores."[73] A institucionalização, a partir do século XIX, da profissão de matemático nas universidades possibilitou a pesquisa dos fundamentos da matemática emancipando-a dos problemas colocados pela realidade empírica.

A: Desculpem-me, mas, mesmo com todas as críticas do empirismo ao racionalismo e de toda essa história de intuição a priori, continuarei considerando a atividade matemática como puramente racional.

Prof.: Está bem, *A*... Alguém mais fez a demonstração do quinto postulado?

_ ...

---

[73] STRUIK, D. J. - op. cit., p. 226.

Prof.: Então proponho observarmos as demonstrações realizadas por *A* e por *B*. O que pode ter levado ao erro em ambas?

A: Vejamos o que elas têm em comum...

C: A análise dos erros dessas demonstrações podem levar-nos a metateoremas, quais sejam, a equivalência entre o quinto postulado de Euclides e a existência de figuras semelhantes ou entre ele e a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a dois ângulos retos. Além, é claro, dessa última proposição enunciada por *D*, (se fosse possível um sistema geométrico no qual se rejeitasse o quinto postulado euclidiano, a existência de figuras semelhantes, nesse sistema, seria impossível) a qual gerou toda essa discussão filosófica.

A: As duas utilizam figuras. Talvez as figuras tenham favorecido o erro, porquanto fornecem um caráter de evidência aos postulados, implícitos ou não, não provocando, ou até impedindo, quem faz a demonstração de buscar os fundamentos de tais asserções.

D: Não tinha pensado nisso. Como são visuais esses matemáticos!

B: Você fala como se você não fosse matemático e visual nato...

Prof.: *B* nos fornece uma pista a respeito dos cuidados que devemos tomar ao realizarmos uma demonstração. Porém, não podemos nos esquecer da importância da visualização e do manuseio de materiais na aprendizagem da geometria elementar. Ernest Mach em seu livro *Space and Geometry* faz uma análise do desenvolvimento epistemológico da Geometria e dos possíveis caminhos a seguir para ensiná-la. Segundo ele, "é errado, na instrução elementar, cultivar predominantemente o lado lógico da matéria (geometria) e negligenciar a possibilidade de abrir aos jovens estudantes o conhecimento produtivo contido na experiência"[74].

---

[74] MACH, E. , 1988, p. 68.

A: Mas, como acabamos de perceber através dos erros de demonstração há pouco cometidos, "a geometria teórica não necessita considerar estas variações (empíricas), visto que assume objetos que satisfazem completamente o requisito da teoria pura."[75]

Prof.: Ótima conclusão, *A*. Como nosso encontro de hoje está terminando, gostaria de sugerir dois caminhos para a demonstração do quinto postulado. O primeiro é considerar um quadrilátero isósceles, cujos ângulos da base são retos. Procurem descobrir quais as possibilidades de medidas para os outros dois ângulos e quais as relações entre elas, as possíveis medidas do quarto lado e a medida da base. O outro caminho é imaginar um quadrilátero com três ângulos retos. Analisem quais podem ser as medidas do quarto ângulo e quais os vínculos entre elas e as medidas dos lados.

C: Professora, em ambos os casos, é evidente a solução:a soma das medidas dos ângulos que faltam é igual a 90°.

Prof.: *C*, acabamos de ver a necessidade de tomarmos cuidado com 'evidências'. Vamos tentar fazer essas demonstrações sem nos deixarmos levar pelo aspecto figurativo, está bem? Até a próxima aula, então.

---

[75] Ibidem, p. 85.

AULA IV

D: Professora, suas sugestões conduziram-nos a fatos muito estranhos...

Prof.: Ah, vocês fizeram as demonstrações?

A: Não, pois não sabíamos o que fazer com os resultados aos quais chegamos.

Prof.: Vocês trabalharam todos juntos?

B: Trabalhamos. Até o *C* interessou-se pelo problema...

Prof.: Ótimo! Quem vai expor os resultados conseguidos?

D: Posso fazê-lo. Primeiro pensamos na hipótese de dois ângulos retos e fomos verificar se haveria alguma relação entre as medidas dos outros dois ângulos e as medidas das perpendiculares.

Prof.: E qual foi a conclusão?

D: Chegamos a um teorema: " se um quadrilátero tem os ângulos consecutivos A e B retos, e os lados AD e BC congruentes, então o ângulo C é congruente ao ângulo D; mas se os lados AD e BC forem de medidas diferentes, então entre os dois ângulos C e D será maior o que for adjacente ao menor lado, e vice-versa."

A demonstração desse teorema é simples.

(lousa)

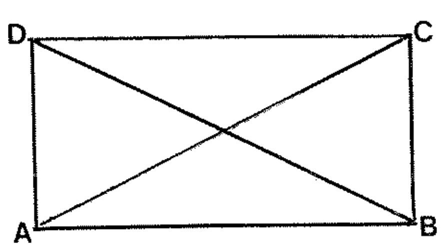


figura 1

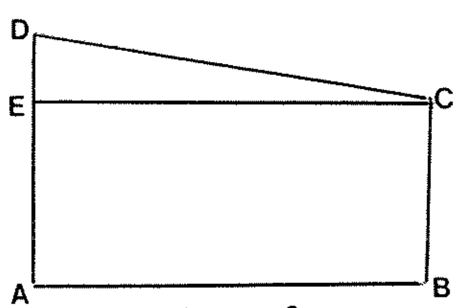


figura 2

Vamos fazer primeiro a que se refere ao caso dos lados AD e BC serem de medidas iguais.Como mostra a figura 1.

Liguemos os pontos A e C e depois D e B. Consideremos os triângulos CAB e DBA. A seguir pela proposição quatro dos *Elementos* (se dois triângulos têm dois lados iguais e os ângulos respectivamente formados por estes lados forem congruentes, então os triângulos são congruentes), temos que AC e DB são congruentes.

Consideremos os triângulos ACD e BDC. Pela proposição euclidiana (se dois triângulos têm todos os lados correspondentes congruentes, então estes triângulos são congruentes), segue que os ângulos ACD e BDC são congruentes.

Suponhamos agora que as medidas de AD e CB são diferentes, como mostra a figura 2:

Consideremos DA>CB. Queremos mostrar que $\angle$ CDA < $\angle$ DCB.

Marquemos E sobre DA de forma que EA = CB.

Desenhemos EC

$\angle$ CDA < $\angle$ CEA , pois em um triângulo o maior lado é adjacente ao menor ângulo (isso nos é garantido pela proposição 18 dos *Elementos*).

$\angle$ CEA = $\angle$ ECB, pelo teorema que acabamos de demostrar.

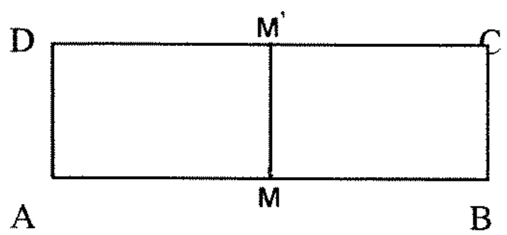
$\angle$ ECB < $\angle$ DCB, por construção

Portanto, $\angle$ CDA < $\angle$ DCB, pela propriedade transitiva.

Se DA< CB, mostramos de maneira análoga que $\angle$ CDA > $\angle$ DCB.

C: Como a proposta na aula passada foi considerarmos iguais as medidas das perpendiculares, então, os ângulos CDA e DCB serão necessariamente congruentes. Pela hipótese euclidiana - a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° - os ângulos C e D são também retos. Desse modo, se os considerarmos obtusos ou agudos, estaremos negando o quinto postulado. Se chegarmos em algum absurdo, teremos demonstrado o quinto postulado. Dessa maneira, trabalhamos com as hipóteses desses dois ângulos serem obtusos, e depois com a de serem agudos.

B: Assim, chegamos na seguinte proposição: "no quadrilátero isósceles com dois ângulos consecutivos retos teremos, de acordo com a hipótese do ângulo reto, ou do ângulo obtuso, ou do ângulo agudo,respectivamente AB = CD, ou AB > CD, ou AB < CD. De fato, pela hipótese do ângulo reto, segue imediatamente que AB = CD. Para demonstrarmos a tese do ângulo obtuso, consideremos o quadrilátero ABCD e tracemos MM', a mediatriz de AB, conforme a figura (lousa)



O segmento MM'divide o quadrilátero ABCD em dois outros congruentes, com ângulos retos em M e em M'. Se ∠ ADM' é obtuso, então ∠ ADM' > ∠ DAM, assim teremos, pela proposição anterior, AM > DM', e, da mesma forma concluímos que BM > CM'. Portanto, AB> CD.

Da mesma maneira, demonstramos que, pela hipótese do ângulo agudo, teremos AB < CD. Por redução ao absurdo, demonstramos o teorema inverso a esse.

Prof.: Até agora não encontrei os referidos 'fatos estranhos'...

D: O primeiro vem agora. Fomos estudar quais as consequências desses fatos, até agora abordados, na soma dos ângulos internos de um triângulo e encontramos outro teorema.

A: Para facilitar a comunicação, vamos chamar de "ângulos do topo"[76] a esses dois os quais podem ser ou retos, ou obtusos, ou agudos e que são opostos aos dois ângulos retos formados pelas perpendiculares à base. A proposição é a seguinte: "se,

[76] Expressão utilizada por Trudeau (1987: 132) para referir-se aos ângulos opostos aos dois ângulos retos formados pelas perpendiculares.

nos extremos de um lado de um dado triângulo, levantarmos perpendiculares a uma linha reta *l* que passa pelos pontos médios dos outros dois lados, formando um quadrilátero, então

1- o quadrilátero formado é do mesmo tipo desses estudados até agora.

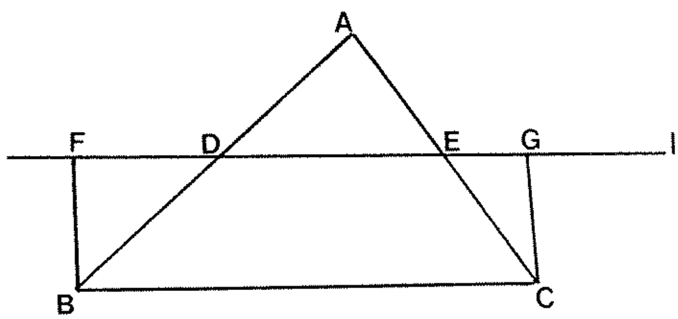
Prof.: Desculpe-me por interrompê-lo, mas esse quadrilátero é conhecido como quadrilátero de Saccheri.

A: Bem, então fica assim:

1- o quadrilátero formado é um quadrilátero de Saccheri, no qual "topo" é o lado do triângulo de cujos extremos levantamos as perpendiculares, ou seja, a base do triângulo.

2- a soma de seus dois ângulos do topo é a mesma que a dos três ângulos internos do triângulo.

(lousa)



Por hipótese, seja o triângulo ABC, no qual dois lados - por exemplo AB e AC - foram bissectados em D e E. Desenhemos DE e vamos prolongá-la nos dois sentidos, assim determinaremos a reta *l*. Tracemos as perpendiculares à *l* pelos pontos B e C.

Agora, tracemos a perpendicular à reta *l* pelo ponto A. Assim, determinamos o ponto H sobre a reta *l*. Há três casos a considerar. O ponto H pode estar entre D e E, ou pode coincidir com o ponto D ou pode estar fora do segmento DE. Como em nossos estudos já vimos que nos três casos chegamos à mesma conclusão, mostraremos somente um deles. Qual você quer que demonstremos?

Prof.: Pode ser o primeiro caso.

A: H está entre D e E.

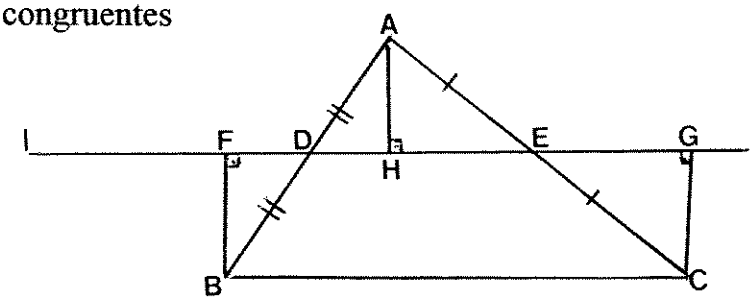
Por construção, temos que os triângulos BFD e AHD são congruentes, o que implica que FB = AH

Δ CGE e o Δ AHE são congruentes

GC = AH

e

FB = GC



Portanto GFBC é um quadrilátero de Saccheri cujo topo é BC. Demonstramos a primeira parte do teorema. Na sequência demonstraremos a segunda parte.

1) $\angle$ DBF = $\angle$ DAH, por congruência de triângulos (FED e HAD)

2) $\angle$ DBF + $\angle$ ABC = $\angle$ DAH + $\angle$ ABC, pelo axioma 2 aplicado ao passo anterior

3) $\angle$ ECG = $\angle$ EAH, por congruência de triângulos

4) $\angle$ ECG + $\angle$ ACB = $\angle$ EAH + $\angle$ ACB, pelo axioma 2 aplicado ao passo anterior

5) $\angle$ DBF +$\angle$ ABC +$\angle$ ECG +$\angle$ ACB =$\angle$ DAH +$\angle$ ABC+$\angle$ EAH +$\angle$ ACB, pelo axioma 2 aplicado aos passos 2 e 4

Portanto, $\angle$ FBC + $\angle$ GCB = $\angle$ BAC + $\angle$ ABC + $\angle$ ACB .

Prof.: Continuo não percebendo 'fato estranho' algum.

D: Esse teorema afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior, menor ou igual a dois retos...

Prof.: Isso eu já percebi, mas onde está o problema?

B: O problema está no fato de não termos conseguido demonstrar o absurdo da hipótese do ângulo agudo.

Prof.: Ah, sim... Mas, vocês conseguiram fazê-lo para a hipótese do ângulo obtuso?

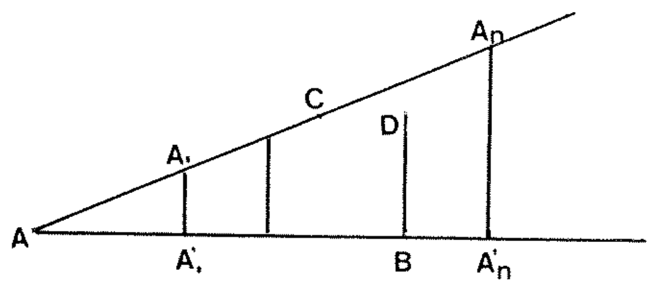
B: Bem, mais ou menos... Você quer ver a demonstração?

(Risos)

Prof.: Claro!

B: Nós começamos demonstrando a seguinte proposição: "Se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo for maior que dois retos, então uma perpendicular e uma oblíqua a uma mesma reta se encontram". Nosso raciocínio foi o seguinte:

(lousa)



Sejam AC e BD duas retas: a primeira oblíqua e a segunda perpendicular à reta AB. Sobre AC, do lado do ângulo agudo $\angle$ CAB e da perpendicular BD tomamos o segmento arbitrário AA_1 e construimos sua projeção AA'_1 sobre AB. Se o ponto B estiver entre AA'_1, a demonstração é imediata. Caso contrário, determinamos um número ***n*** bastante grande, para que o enésimo múltiplo de AA'_1 seja maior que AB. A seguir, sobre o lado AC, do lado de AA_1, construimos AA_n, múltiplo de AA_1, segundo o número ***n***. Traçamos a partir do ponto A_n a perpendicular $A_nA'_n$ sobre AB. Formamos o triângulo $AA_nA'_n$, cuja soma é maior que dois retos. Como, por construção, o $\angle$ BAA_n é agudo e o $\angle$ AA'_nA_n é reto, então o $\angle$ $AA_nA'_n$ é obtuso. Sabemos que o maior ângulo se opõe ao maior lado - pela proposição 18 dos *Elementos*. Temos

$AA'_n > AA_n$

$AA_n > AB$ por construção

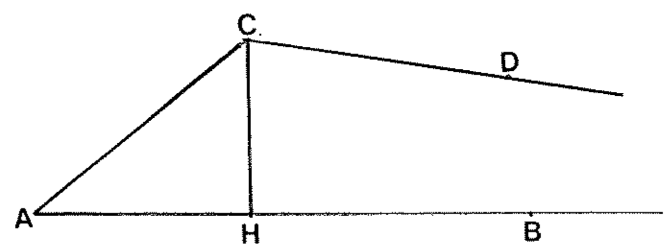
Pela propriedade transitiva, $AA'_n > AB$

Portanto, BD perpendicular ao lado AB encontrará a reta AA_n oblíqua a AB.

O passo seguinte de nossa demonstração foi utilizar duas retas ***a*** e ***b***, cortadas por uma transversal *c*, formando ângulos internos do mesmo lado não suplementares e verificar o que ocorre na hipótese do ângulo obtuso.

Utilizamos a seguinte figura:

(lousa)



Sejam AB e CD duas retas cortadas pela reta AC.

Suponhamos, por hipótese, que: 1) $\angle$ BAC + $\angle$ ACD < 180°

2) a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é maior que 180°

Então, um dos ângulos $\angle$ BAC ou $\angle$ ACD, suponhamos, o primeiro, será agudo. A partir de C, traçamos uma perpendicular CH sobre AB. No triângulo ACH, em virtude das hipóteses feitas, teremos $\angle$ HAC + $\angle$ ACH + $\angle$ CHA > 180°.

Porém, também por hipótese, temos $\angle$ BAC + $\angle$ ACD < 180°.

Combinando estas duas relações obtemos: $\angle$ CHA > $\angle$ HCD.

Como $\angle$ CHA é reto, o $\angle$ HCD é agudo.

Pelo teorema que acabamos de demonstrar, podemos concluir que as retas AB, perpendicular a CH, e CD, oblíqua a CH, se encontrarão. Ou seja, com a hipótese do ângulo obtuso, demonstramos que o quinto postulado é verdadeiro. Portanto, por redução ao absurdo, concluímos que a hipótese do ângulo obtuso é falsa.

C: Na realidade, demonstramos o absurdo da hipótese do ângulo obtuso naquele caso do quadrilátero de três angulos retos.

Prof.: Por que você disse que haviam demonstrado "mais ou menos"?

B: Você não percebeu nenhum erro na demonstração?!?

Prof.: Percebi uma hipótese implícita, se é a isso que você se refere... E vocês também perceberam?

B: Percebemos. Mas a vontade de demonstrar o quinto postulado era tão grande, que, na demonstração da proposição - "se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo for maior que dois retos, então uma perpendicular e uma oblíqua a uma mesma reta se encontram" - acabamos supondo como verdadeira a hipótese implícita da reta ser infinita.

C: Eu não estou com vontade nenhuma de demonstrar o quinto postulado, tanto assim que percebi essa tal hipótese implícita e alertei o grupo para o erro da demonstração.

D: Com relação à hipótese do ângulo agudo, nós tentamos chegar a algum absurdo, mas não conseguimos. Dela, derivamos alguns resultados que são claramente aplicáveis a retas assintóticas. Acabamos por desistir da demonstração.

Prof.: Vocês estão de parabéns! Estudos análogos ao de vocês foram realizados pelo padre jesuíta e geômetra genovês Gerolamo Saccheri (1667-1733)*. Em sua obra, *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia*, ou seja, *Euclides defendido de todo ataque* [Milão, 1733], Saccheri pretende, como o próprio nome do livro indica, por termo às críticas que os geômetras de então faziam aos *Elementos*. Segundo Saccheri, as celeumas giravam em torno de três pontos dos trabalhos de Euclides: o quinto postulado, a explicação sobre grandezas proporcionais contida no livro quinto e a explicação sobre relações de proporções do VI livro dos *Elementos*. Saccheri devota grande parte de seus estudos à prova do quinto postulado.

A: Não foi por essa época que os tais empiristas andavam criticando as verdades matemáticas?

---

*Os trabalhos completos de Saccheri relativos ao quinto postulado de Euclides encontram-se no livro: ENGEL, F. e STÄCKEL, P. , 1968, p. 34-135.

Prof.: Muito bem lembrado, *A*. É interessante notar que além dessas críticas apontadas pelo eminente jesuíta genovês e as recordadas , agora, por você, mais dois movimentos de crítica estavam ocorrendo com relação à geometria. O primeiro de ordem formal, refere-se à herança aristotélica com relação às demonstrações por absurdo. Como já vimos, Aristóteles, apesar de reconhecer que uma demonstração apológica sempre pode ser convertida em uma ostensiva, afirmava que esta última era preferível àquela. Com Descartes, o método analítico se impõe como rigor e há uma tendência geral que prega a transformação de todas as demonstrações da geometria em diretas. Evidentemente, é muito mais simples pregar tal modificação do que efetivá-la.

D: Mas, Saccheri utilizou-se não só da demonstração indireta, como também da redução ao absurdo em sua obra...

Prof.: É isso que distingue o feito de Saccheri. Aliás, a tradição pedagógica jesuíta é uma notável exceção à herança aristotélica de descrédito do raciocínio por absurdo. "O reconhecimento da plena legitimidade deste tipo de demonstração tornou-se uma constante da tradição pedagógica da Companhia de Jesus: já na metade do século XVII, o padre Tacquet, em seus *Elementa euclidea geometriae planae ac solidae*, acrescenta um apêndice onde demonstra que a verdade se deixa deduzir diretamente do falso"[77]

B: E de onde será que Saccheri tirou a idéia de tentar demonstrar o postulado das paralelas por absurdo?

Prof.: Saccheri foi o primeiro pensador ocidental a tentar fazer uma demonstração por absurdo para o quinto postulado. Porém, a idéia de uma demonstração por absurdo para o quinto postulado já havia aparecido entre os matemáticos árabes Omar Al Khayyam (1038/48 - 1123/24) e Nasir-Eddin (1201 - 1274). Saccheri não só conhecia as tentativas de demonstração dos árabes, como criticou os trabalhos de Nasir-Eddin. Este último tentou demonstrar o quinto postulado de Euclides partindo do critério de retas paralelas proposto por Geminus e seguindo o mesmo caminho

[77] GARDIES, J. L. , op. cit., p. 166

pelo qual vocês demonstraram a proposição: "se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo for maior que dois retos, então uma perpendicular e uma oblíqua a uma mesma reta se encontram". Porém, o matemático árabe considerou somente a hipótese da soma das medidas dos ângulos internos serem dois retos.

A: Não estou lembrado do critério de paralelas de Geminus. Qual é ele?

Prof.: Retas paralelas são as que mantém sempre a mesma distância uma da outra, ou seja, se traçarmos uma reta perpendicular a uma delas, esta será, também, perpendicular a outra. É interessante notar que o objetivo dos trabalhos de Geminus foi, evidentemente, examinar os princípios - axiomas e postulados - e o desenvolvimento lógico da geometria de Euclides, com o intuito de defender tal geometria das críticas que eram feitas, na época, tanto a seus princípios quanto à validade de deduções realizadas a partir deles[78].

C: Então, desde a Antiguidade havia críticas de nível formal à obra de Euclides.Qual foi o outro movimento de crítica ocorria em relação à geometria?

Prof.: Foi um movimento de caráter pedagógico. "A modernização do ensino de geometria, ou seja, sua liberação do rígido método de Euclides, começou na França por volta de 1550 e foi um episódio da luta formidável travada entre o humanismo moderno e a velha escolástica. Petrus Ramus que, não só na matemática, mas em outros ramos do saber ocupava um posto preeminente entre os apóstolos das novas idéias, escreveu naquela época, um texto de matemática (Arithmeticae, livro 2, Geometricae, livro 27) onde se abandona por completo, tanto na forma como no fundamento, o caminho seguido por Euclides. A tendência de Ramus, explicitamente indicada no primeiro livro, é considerar a geometria como a arte de medir bem ('ars bene metiendi'). Devido a isto, o interesse prático prevalece sobre todas as demais considerações. Começa explicando o modo de executar algumas medições topográficas simples, descreve os aparatos necessários para tais medições, procurando esclarecê-lo com numerosas e interessantes figuras. Também concede

[78] Cf. HEATH, T., 1981, p. 225.

um lugar para as deduções lógicas, porém não as considera como objetivo principal em si mesmas, mas como meio auxiliar para obter propriedades observadas e outras que não são imediatas, mas úteis para as aplicações práticas"[79].

B: Pelo que já vimos sobre a busca, vigente na Idade Moderna, de aplicações práticas para o saber, podemos concluir que Petrus Ramus era, realmente, um homem de sua época. Mas como explicar que depois de mais de quatrocentos anos ainda iniciemos os estudos de geometria com a axiomática de Euclides?

Prof.: Meu caro *B,* não é fácil derrubar verdades[80] estabelecidas: as idéias revolucionárias de Petrus Ramus foram muito difundidas nos países protestantes - mas apenas nestes - principalmente depois que Ramus morreu como mártir no massacre de São Bartolomeu (1572). Quase dois séculos depois, em 1733, Saccheri escrevia: "quem estudou matemática, reconhece as grandes vantagens dos *Elementos* de Euclides. Como testemunhas posso mencionar Arquimedes, Apollonius e Theodosius, e, além deles, quase inúmeros outros autores matemáticos até o presente, que usam os *Elementos* de Euclides como fundamento há muito comprovado e cem por cento inabalável"[81], e na passagem na qual se refere aos defeitos apontados por outros autores sobre as explicações euclidianas de proporções, afirmava que "será o único alvo de meu segundo livro discutir profundamente as mencionadas explicações de Euclides e demonstrar, ao mesmo tempo, que a glória de Euclides foi agredida com injustiça"[82]. Já no final do século XVIII, mais de duzentos anos após a obra de Ramus, Legendre escreveu seus *Elementos de Geometria,* já discutidos aqui, que apesar de serem mais acessíveis aos estudantes que os *Elementos* de Euclides, seguem rigorosamente os métodos do geômetra grego. O que daí concluímos é que, não obstante todas as críticas à

---

[79] KLEIN, F., 1927, p. 293 e 294.

[80] Verdade aqui está sendo entendida como os tipos de discurso que uma sociedade acolhe e faz funcionar como verdadeiros, segundo definição de FOUCAULT, M. (1984).

[81] SACCHERI, G., "Euclides ab amninaevo vindicatus", in ENGEL, F. e STÄCKEL, P., op. cit. - p. 45.

[82] Ibidem - p. 47

estrutura formal da obra de Euclides feitas por matemáticos desde a Antiguidade; apesar das controvérsias levantadas pelos empiristas ingleses relativamente às verdades da geometria; a despeito da proposta alternativa de Petrus Ramus para o ensino dessa disciplina, os *Elementos* e as verdades da geometria continuaram inabaláveis por séculos. O pior é que toda essa vontade, expressada por Saccheri, de manter uma verdade estabelecida acabou por constringir sua obra.

A: Por quê? Ele também não conseguiu demonstrar o quinto postulado?

Prof.: Não. A figura fundamental utilizada por Saccheri foi o quadrilátero isósceles com dois ângulos retos consecutivos e o caminho utilizado por ele foi o exposto aqui por vocês. Porém, como vocês, ele não soube o que fazer com os resultados aos quais brilhantemente chegou. "Admitida a primeira hipótese (ângulo reto) concluía o ilustre jesuita Saccheri que a soma dos ângulos internos de um triângulo era igual a dois retos. (...) No segundo caso (ângulo obtuso), a soma dos ângulos de um triângulo seria maior que dois retos. Firmando-se, ainda, na hipótese de ser a reta infinita, inferia pela validez do V postulado. Mas desse postulado decorria que a soma dos ângulos internos de um triângulo era igual a dois retos. Logo, a hipótese do ângulo obtuso era contraditória e, por esse motivo, devia ser rejeitada. Aceita a terceira hipótese (ângulo agudo), a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois retos. Com a intenção de demolir também a hipótese do ângulo agudo, desenvolveu várias proposições, as quais, (tivesse ele permanecido no campo puramente dedutivo) não o levariam à contradição."[83]

A: Não o levariam à contradição?!?

Prof.: Não. No entanto, a possibilidade de que o quinto postulado euclidiano podia ser não demonstrável era completamente absurda para Saccheri como podemos notar pelas seguintes passagens de *Euclides defendido de todo o ataque:* "certamente ninguém duvida da verdade desta alegação [do quinto postulado], contudo Euclides só é criticado porque usou para ela o nome de axioma." E alguns parágrafos depois: "vou dividir este livro em duas partes. No primeiro seguirei aqueles geômetras mais

[83] SOUZA, J. C. M., op. cit., p. 34.

velhos e assim não me preocuparei com a natureza ou o nome daquela linha, a qual em todos seus pontos mantém a mesma distância de uma reta dada. Procederei somente de forma a provar claramente o discutível axioma de Euclides, sem cair em círculos viciosos"[84]. Mas, à semelhança de seus antecessores, Saccheri assentou o seu edifício lógico numa nova hipótese intuitiva que lhe permitia destruir a terceira hipótese. Não que ele não tivesse consciência do que estava fazendo, ele a tinha como podemos perceber pelo seguinte trecho do prefácio do aludido livro: "restam até o final da primeira parte deste livro ainda doze teoremas. Não indico as argumentações em pormenor, porque são muito complexas, mas digo somente que lá finalmente a contraditória hipótese do ângulo agudo se mostrará de uma incorreção evidente, por que deveria admitir duas linhas retas, as quais se aproximam e ao mesmo tempo possuem uma perpendicular em comum. Será demonstrado que isto contradiz a natureza da linha reta"[85]. Ou seja, ele descartou a possibilidade de retas assintóticas.

D: Então, Saccheri utilizou-se de duas hipóteses intuitivas implícitas: a da infinitude da reta e a da não existência de retas paralelas assintóticas. Podemos considerar suas demonstrações rigorosas? Podemos concordar com elas?

B: Concordo plenamente com Saccheri.

C: Eu não. Não conseguimos deduzir contradições no caso da hipótese do ângulo agudo, nem ele. Parece-me que assentar uma prova em um postulado não existente no sistema é um tanto ilógico.

A: Mas você consegue imaginar retas paralelas assintóticas?

C: Lá vem você de novo com essa necessidade de visualizar coisas. Já vimos que isto pode induzir a erros... E neste caso não se trata de visualização, mas de intuição.

Prof.: A qual sentido de intuição vocês estão se referindo?

---

[84] SACCHERI, G. , in ENGEL, F. e STÄCKEL, P. , op. cit., p. 45 e 46

[85] Ibidem, p. 49.

A: Como assim, a qual sentido? Existe outro além de 'uma idéia de caráter inventivo'?

Prof.: Existe o significado filosófico ao qual *B* se referiu em nossa aula passada. Desde a Antiguidade, "intuição" significava o conhecimento imediato que o intelecto tem frente a um objeto. Atualmente, os matemáticos e cientistas em geral utilizam esse termo com o significado que você disse, *A*. Concordo com *C* quando ele afirma a possibilidade da intuição levar a erros, porém é interessante considerarmos a seguinte afirmação do matemático francês Poincaré que viveu no final do século passado e início desde século: " com a lógica demonstra-se, mas somente com a intuição inventa-se..."[86]

D: A meu ver, até podemos intuir fatos, mas precisamos demonstrar a veracidade dos mesmos.

Prof.: Mas voltemos aos estudos desenvolvidos por vocês. E o quadrilátero triretângulo, vocês o estudaram também? A quais resultados vocês chegaram?

C: Bem, dado um quadrilátero com três ângulos retos, consideramos três naturezas possíveis para o quarto ângulo, quais sejam, reto, obtuso ou agudo. A primeira hipótese leva facilmente ao sistema de Euclides. A segunda leva a um absurdo.

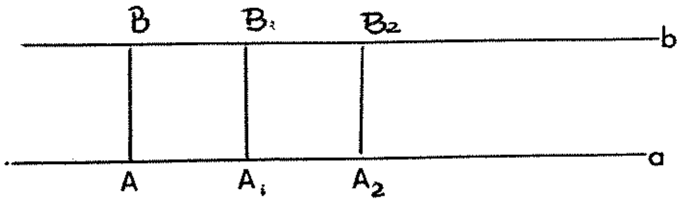
Prof.: E como vocês chegaram a esse absurdo?

A: Lembramos da demonstração do matemático Legendre vista em nosso último encontro e utilizamos um caminho similar. Tomamos duas retas ***a*** e ***b*** perpendiculares a um segmento AB.

Marcamos pontos equidistantes B_1 , B_2, ...,B_n e desenhamos as perpendiculares $B_1A_1, B_2A_2,...,B_nA_n$ a reta ***a***. Por hipótese o ângulo A_1B_1B é obtuso e por construção, o ângulo ABB_1 é reto.

---

[86] POINCARÉ, H., 1909, p. 137 , apud Dicionário de Filosofia - Ed. Mestre Jou - 1960 - p. 554.



Assim, utilizando o primeiro teorema estudado nesta aula, o lado AB é maior que o lado A_1B_1. Da mesma forma demonstramos que o lado A_1B_1 é maior que o lado A_2B_2 e tal fato nos leva a concluir que os A_nB_n diminuem continuamente.

Assim, $AB > A_1B_1$

Pelo axioma IV (se a coisa desiguais somarmos a mesma quantidade, os totais serão diferentes), podemos fazer

$$AB + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots + A_nB_n > A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots + A_nB_n$$

$$AB > (A_1B_1 - A_2B_2) + (A_2B_2 - A_3B_3) + \ldots + (A_{n-1}B_{n-1} - A_nB_n) + A_nB_n$$

Por construção, temos que

$$AB - A_1B_1 = A_1B_1 - A_2B_2 = A_{n-1}B_{n-1} - A_nB_n$$

$$AB - A_nB_n > n.(AB - A_1B_1)$$

o que contradiz o axioma de Arquimedes e o segundo postulado de Euclides.

D: Daí concluímos que a hipótese do ângulo obtuso nos leva a uma contradição, mas não conseguimos demonstrar contradições na hipótese de considerarmos o ângulo agudo...

C: A cada tentativa me convenço mais da independência do quinto postulado em relação aos outros.

Prof.: Muito interessante! Vocês já ouviram falar do grande matemático suíço Johann-Heinrich Lambert (1728-1777)?

D: Esse Lambert foi aquele filósofo que primeiro escreveu uma fenomenologia?

Prof.: Ele mesmo.

C: Fenomenologia? O que é isso?

Prof.: Segundo Lambert, "a fenomenologia ocupa-se de maneira geral com a determinação do que é real e verdadeiro e com cada espécie de aparência"[87]. Ou seja, a fenomenologia busca a verdade por trás dos fenômenos, muitas vezes enganosos, que os sentidos nos revelam. O interessante nessa teoria é que ela tenta explicar, ao mesmo tempo, a ciência - desenvolvida pelo caminho do desvelamento - e a arte. Pois se são conhecidos os caminhos das aparências para a verdade, pode-se muito bem realizar o caminho inverso, partindo-se das verdades e criando "aparências".

A: O que ele quer dizer com "cada espécie de aparência"?

Prof.: Bem, a aparência seria um meio termo entre o verdadeiro e o falso. Lambert classifica as possíveis aparências em: *aparência objetiva*, que provém de uma mudança real no objeto; *aparência subjetiva* que decorre de uma mudança nas faculdades receptivas do sujeito; e *aparência relativa* que resulta de uma alteração na relação sujeito-objeto. Segundo ele, o método para a superação das aparências devia ser o mesmo que o utilizado pela óptica e pela astronomia. Em *A Fenomenologia*, Lambert afirma que "os opticistas já há muito tempo nos fornecem uma teoria da aparência visual e a fenomenologia, em sua acepção mais geral, pode ser qualificada como uma óptica transcedental"[88].

C: Por que o método da óptica e da astronomia?

D: C, às vezes fico abismado com sua mémoria, ou melhor, com a falta dela... Você não está lembrado de nossa última aula quando discutimos sobre quais ciências tiveram um rápido desenvolvimento graças ao racionalismo? Ora, é evidente que a óptica e a astronomia estavam a "pleno vapor" na época em que viveu Lambert, pois, além de admitirem um modelo matemático, ainda eram extremamente importantes para a navegação. Parece-me muito natural que esse filósofo fosse buscar na óptica e na astronomia, o caminho para se atingir as verdades "das coisas em si".

---

[87] LAMBERT, J. H., apud FERRY, L., 1994 - p. 395.

[88] LAMBERT, J. H. apud FERRY, L., op. cit., p. 395

C: Desculpe-me *D*, mas é sua memória que anda lhe pregando peças. Na aula passada, utilizou-se como exemplo de ciência que teve um rápido desenvolvimento, entre os séculos XVII e XVIII, a mecânica e não a óptica.

Prof.: Voltando ao Lambert, "trata-se, pois, segundo o procedimento da óptica e da astronomia, de ir da aparência ao verdadeiro, do possível ao real: essa função da fenomenologia é explicitamente exposta por Lambert num texto redigido para o concurso da Academia de Berlim em 1763, cujo tema era a diferença entre a evidência das verdades metafísicas e a das verdades matemáticas. Nesse ensaio intitulado Über die Methode die Metaphysik, die Theologie und die Moral richtiger zu beweisen (Sobre o método que permite demonstrar de maneira mais exata a metafísica, a teologia e a moral), Lambert empenha-se em mostrar como, sendo certas as matemáticas, seria conveniente tomá-las como modelo para a metafísica, uma vez que esta última opera com os mesmos conceitos"[89].

C: Deve ter sido reprovado...

B: Talvez não, pois a exposição de Lambert indica que ele estava de acordo com a tendência, da época, de achar que os conceitos matemáticos e os metafísicos tinham o mesmo estatuto.

Prof.: Pois bem, esse mesmo Lambert, na segunda metade do século XVIII, tomou conhecimento dos trabalhos de Saccheri por meio de seu amigo A. G. Kaestner que o persuadiu a ler as refutações dos trabalhos do jesuíta genovês elaboradas por G. S. Klügel (1739-1812). Ao conhecer os trabalhos de Klügel, Lambert retomou a questão do postulado das paralelas e admitiu como ponto de partida o quadrilátero triretângulo. Assim como vocês, provou que a hipótese do ângulo reto levava ao sistema euclidiano. A hipótese do ângulo obtuso acarretava a impossibilidade da infinitude das retas, como já foi demonstrado aqui, porém observou que tal hipótese seria realizável sobre uma esfera de raio imaginário. Ponderou que a hipótese do ângulo agudo seria possível em uma superfície esférica, mas estudando mais

---

[89] FERRY, L., op. cit., p. 375.

Geometrias não-euclidianas:
um estudo histórico-pedagógico

Errata

Página/Linha	Onde se lê	Leia-se
29/2	pirâmedes	pirâmides
54/24	ângulos A, B e C	ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$
55/2	Vamos chamá-lo de D	Vamos chamá-lo de $\hat{D}$
60/12	$\alpha+\beta= 180°$	$\alpha+\beta\neq 180°$
105/Nota de rodapé 98	Ibidem, p. 97	RAY, op. cit., p. 97
119/Nota de rodapé 114	pressupostol	pressuposto
122/Nota de rodapé 121	Ibidem, p. 270	STRUIK, op. cit., p. 270
135/19	enquanto, partir	enquanto, a partir
145/3	mostrava-se	mostrou-se
148/6	Ambas são grandiosas, da mesma época.	Ambas são grandiosas e da mesma época.
172/2	estreita-mente	estreitamente

profundamente essa possibilidade, chegou à existência de uma unidade de medida absoluta, uma medida de comprimento que não depende da escolha de uma unidade de medida arbitrária. "Lambert pensou que esta inesperada propriedade de comprimentos dava-lhe a contradição que buscava, pois esta propriedade de quantidades tinha sido expressamente negada por seu mentor filosófico Wolff, um seguidor de Leibniz. Mas, a princípio, Lambert decidiu rejeitar este princípio filosófico a priori e reter a conclusão matemática sem ver nela uma contradição. Seguindo este caminho, não chegou a uma conclusão definitiva e, talvez por esta razão, não tenha publicado seus trabalhos sobre o postulado das paralelas - ele foi publicado postumamente em 1786 por seu colega Johann Bernouilli III. Tudo o que Lambert forneceu como caminho para uma conclusão foi uma lista de sugestões para provar que a nova geometria não podia existir, o que era, evidentemente, seu desejo"[90].

B: Estão vendo, eu sabia que alguém conseguiria demonstrar o quinto postulado. Esse negócio de medida absoluta não existe.

A: Eu não entendi o significado de uma medida absoluta.

Prof.: Há uma distinção entre *absoluto* e *relativo*. Em algumas situações, os elementos envolvidos podem ser divididos em dois grupos. Um primeiro grupo ao qual pertencem os elementos que permanecem fixos e um segundo grupo, no qual os elementos podem variar em um número possível de casos. Os do primeiro grupo são considerados absolutos e os do segundo relativos. Por exemplo, não há uma medida absoluta para todos os comprimentos, mas a Teoria da Relatividade utiliza-se de uma medida que depende do meio, mas para cada meio é absoluta, qual seja, a velocidade da luz. E o que dizer da medida de temperatura 0 kelvin?

_ !!!

D: Então existe algo como uma medida absoluta? Se for assim, Lambert não poderia ter concluído pela absurdez da hipótese do ângulo agudo.

---

[90] GRAY, J., in PHILLIPS, E. R. (ed.) , 1987, p. 42.

A: Professora, estou começando a achar impossível a solução desse nosso problema...

Prof.: Outros matemáticos também já pensaram isso. Aparentemente, o primeiro a escrevê-lo foi G. S. Klügel, cujos trabalhos despertaram a atenção de Lambert para o V postulado de Euclides. Klügel doutorou-se na Universidade de Göttingen, com a orientação do amigo de Lambert, A. G. Kaestner. Em sua tese, *Review of the most celebrated attemps at demonstrating the theory of parallels* de 1763, Klügel examina 28 tentativas de provar o quinto postulado (incluindo a de Saccheri), concluindo que todas eram deficientes, e levantando a opinião de que o quinto postulado não é demonstrável, mas fundamentado somente pelo julgamento de nossos sentidos. É claro que foi somente a opinião de Klügel; ele não pôde provar que o quinto postulado não tem demonstração.[91]

B: Professora, você sabia o tempo todo da inexistência de uma prova para o quinto postulado e nos deixou ter todo esse trabalho?

Prof.: Eu não afirmei tal inexistência... Mas, voltando ao Lambert, Bonola[92] afirma que o geômetra suíço estava imbuído do desejo de provar que o quinto postulado é realmente um postulado e isso o conduziu ao erro. Tal desejo é explicável se lembrarmos que Lambert, assim como Saccheri, viveu em um período no qual as verdades da matemática eram análogas às verdades metafísicas, como ele mesmo afirmou. Dentro da matemática, a geometria euclidiana era a verdade mais incontestável, já que, tradicionalmente, expressava a realidade do espaço físico. Essa tradição vem dos gregos deste a Antiguidade e é retomada, explicitamente, no Renascimento por Galileu. Segundo Husserl[93], Galileu foi o primeiro cientista a importar para a Física, o método, a axiomatização e a concepção de espaço da geometria euclidiana. Newton segue os passos de Galileu e supõe um espaço contínuo, ou seja, que não apresenta lacunas; tridimensional (tem comprimento,

---

[91] Cf. TRUDEAU, R. , op. cit., p. 154.

[92] BONOLA, R., op. cit.

[93] HUSSERL, E. , 1980.

largura e altura); infinito e ilimitado (não tem limites nem extremos); absoluto; homogêneo, isto é, que não tem pontos privilegiados ou singulares; e isotrópico (apresenta-se igualmente para qualquer direção).

B: Para Newton, não só o espaço, mas também o tempo era absoluto. "A posição de Newton permite distinguir três modos distintos em que o espaço e o tempo podem ser considerados "absolutos":

1- Espaço e tempo podem exibir uma independência 'absoluta' de objetos e eventos.

2- Espaço e tempo podem ser 'substâncias' de algum tipo, com propriedades invariáveis "absolutas" e distintas.

3- Espaço e tempo podem precisar ser elementos "absolutos", irredutíveis e essenciais na explicação geral do movimento"[94]

D: Segundo Newton, "o espaço era o sensorium - consciência ou cérebro - de Deus, e, portanto, devia ser aboluto. Evitou desta maneira, confundir-se com teorias relativistas. A sua teoria não oferecia razões para que todos os planetas se encontrassem mais ou menos no mesmo plano e girassem todos, mais ou menos, na mesma direção (...). Newton disfarçou honestamente a sua ignorância quanto às origens postulando que tal fora a vontade de Deus no início da criação"[95]. O embate espaço absoluto-espaço relativo toma corpo nas discussões entre os newtonianos e Leibniz. Este último, em 1715, já criticava a concepção de espaço de Newton e defendia a adoção de conceitos relativos de tempo e espaço.

Prof.: Não só Leibniz, mas também Berkeley, "em seu estudo *De motu* (1721), descartou as noções de espaço e tempo absolutos, por não terem significado. Para ele, somente a experiência sensorial pode justificar os significados, e já que o espaço e o tempo não encontram fundamentos em nossa experiência sensorial, não há motivo para aceitá-los como palavras dotadas de significação"[96]. Mas, segundo Cassirer, quando Berkeley propõe a subjetividade do espaço, está colocando em

---

[94] RAY, C., 1991, p. 184.

[95] BERNAL, J. D., op. cit., p. 485.

[96] RAY, C., op. cit., p. 159.

questão o conceito de verdade em geral, pois "se o espaço, elemento fundamental da percepção humana, é somente engendrado pela convergência e interação das diversas impressões sensíveis, então não pode pretender nenhuma necessidade, nenhuma dignidade racional que seja superior à que cabe aos seus elementos"[97], ou seja, nenhuma dignidade superior às impressões sensíveis.

A: Como pode alguém duvidar da objetividade da verdade? Aliás, se Newton não tivesse se utilizado da Geometria Euclidiana, o que iria utilizar?

Prof.: Ótima observação, "era a Geometria Euclidiana ou nada. Além do mais, por que alguém questionaria esses axiomas [da geometria euclidiana] quando pareciam tão afinados com a evidência de nossos olhos? Duvidar de Euclides era uma heresia quase tão grande como ser ateu"[98].

B: Na primeira metade do século XVIII, temos ao mesmo tempo a crítica da concepção de espaço de Newton e a gradual separação entre Matemática e Física. Teria isso alguma relação com o fato de Lambert ter pensado na possibilidade de triângulos em superfícies esféricas?

Prof.: Provavelmente não. Parece-me que tal fato está muito mais relacionado com o voltar-se da ciência em direção às aplicações práticas. Não podemos nos esquecer da importância dos problemas colocados pela navegação no que tange ao desenvolvimento da ciência, principalmente para a astronomia e para a mecânica. Aliás são esses problemas que vão levar à síntese newtoniana desses dois campos do saber, síntese que acarreta, no final das contas, a importância dada por Lambert à astronomia e à óptica. Lambert não desconhecia a astronomia voltada para a navegação, como podemos perceber pela seguinte passagem de *A Fenomenologia*: "já que muitas vezes a aparência pode ser muito diferente da verdade, até mesmo completamente oposta, os opticistas adotaram, em particular na astronomia, uma linguagem apropriada à aparência e indicaram a tradução dessa linguagem na

[97] CASSIRER, E., op. cit., p. 160.

[98] Ibidem, p. 97.

linguagem da verdade e inversamente, desta para aquela. Isso constitui, com efeito, a diferença entre a astronomia esférica e a astronomia teórica"[99]. Devemos nos lembrar de que a geometria esférica já era conhecida desde a época de Euclides. Como vimos, na compilação realizada por Euclides ficaram de fora a geometria esférica e o estudo das secções cônicas. Porém, para os matemáticos posteriores a Euclides, tal geometria não era considerada como um conhecimento que escapasse do campo da geometria euclidiana.

A: E escapa?

Prof.: Vou deixar que você mesmo busque a resposta para essa sua pergunta. Não podemos pensar que esses fatos apontados há pouco expliquem totalmente a percepção de Lambert da possibilidade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser maior que 180°. Além deles, devemos dar crédito, também, à genialidade de Lambert.

D: Ora, se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo em uma superfície esférica é maior que 180°, então, tal superfície não segue a geometria euclidiana... Podemos inventar uma geometria fantástica sobre a superfície da esfera!

B: O que você quer dizer com "fantástica"? Uma geometria inventada, sem compromisso com a realidade empírica, existente somente na imaginação?

D: Ela teria compromisso com a realidade empírica sim, afinal é a geometria das navegações. Mas seria uma geometria completamente diferente da euclidiana.

C: Ih... Uma geometria que tem compromisso com a realidade empírica, mas que não segue os postulados e teoremas da geometria euclidiana? Já começo a ver pessoas aqui puxando-se pelos cabelos. Isso está ficando parecido com nossa primeira aula... A citação do Frege e todas aquelas insanidades.

A: Vamos falar sério! Por que Lambert não atinou com a possibilidade de criar uma medida absoluta?

[99] LAMBERT, J. H. in FERRY, L., op. cit., p. 381.

Prof.: Talvez porque, na época, o conhecimento era tido como uma pura apreensão do reflexo da realidade exterior e, ao que tudo indicava, a realidade do espaço exterior era euclidiana. Pelo visto, ainda hoje várias pessoas pensam assim... Como nosso tempo de aula está acabando, proponho que vocês pensem nessa discussão para que possamos continuá-la na próxima aula.

CAPÍTULO III
PRODUZINDO NOVAS GEOMETRIAS

"Esta é a natureza do infinito:
Todas as coisas possuem seus próprios vórtices,
e quando um navegante da Eternidade
Alcança este Vórtice, percebe que ele
turbilhonante gira no sentido inverso
E penetra numa esfera que se engloba como o sol,a lua,
ou como um firmamento de constelada magnitude."

William Blake, 1808

AULA V

B: Até este momento eu pensava que a teoria kantiana do espaço estava completamente correta. Agora começa a ficar tudo confuso. Falou-se aqui em espaço físico, geométrico e psicológico. Podemos pensar em uma identidade entre eles?

Prof.: O que vocês acham?

D: A mim me parece que, antes de discutirmos a existência ou não de tal identidade, deveríamos precisar o conceito de espaço.

A: Segundo Aristóteles, o espaço é um lugar, isto é, a posição de um corpo entre os outros corpos. Aristóteles já definia o espaço nesse sentido como "o limite imóvel que abrange um corpo". De fato, em sua *Física*, Aristóteles escreveu: "por lugar entende-se algo como um recipiente - o recipiente sendo um lugar transportável. Mas, o recipiente não é parte da coisa a qual contém. Portanto, ele é separável desta coisa, ele não é a forma a qual contém, é diferente da matéria."[100] Mas, se por um lado, segundo Aristóteles, o espaço é diferente da matéria, por outro, ele se define por meio da posição de um corpo em relação aos outros, portanto, não há o espaço se não houver matéria. Aliás, Aristóteles reconhecia que essa definição é idêntica ao conceito platônico no ponto em que esse afirma que sem matéria não há espaço. Nesse sentido, não existe espaço vazio. Platão e Aristóteles concedem realidade física ao espaço. [101]

C: Para mim, espaço é um continente de todos os objetos materiais. Ele é infinito e pode ser vazio, mas possui uma realidade física.

Prof.: A teoria a qual *A* se refere foi a que prevaleceu em toda a Antiguidade e Idade Média. Descartes aceitou a dependência entre espaço e matéria, porém afirmou a identidade entre eles, como podemos perceber pela seguinte passagem de seu

---

[100] ARISTÓTELES apud ROSENFELD, B.A. , 1988, p. 183.

[101] Cf. ABBAGNANO, N., SP - 1960 - p. 330 - 333.

Principia Philosophiae: " o espaço, ou lugar interno, difere da substância física contida nele somente em nosso pensamento. Atualmente, as mesmas dimensões que compõem o espaço, compõem o corpo." E acrescenta: "é claro que não existe no mundo algo como espaço vazio - no sentido dado pelos filósofos, qual seja, o espaço sem qualquer substância - já que a extensão do espaço como um lugar inerente não difere da extensão de um corpo." Podemos perceber que Descartes estabelece entre espaço e lugar somente uma diferença nominal. Segundo ele "se dizemos que uma coisa está em tal lugar, entendemos somente que está situada de tal modo em relação a outras coisas; mas se acrescentarmos que ocupa tal espaço ou um tal lugar, entendemos também que ela é de uma grandeza e de uma tal figura, que pode preenchê-lo exatamente."[102] Essa visão de impossibilidade do espaço vazio foi também foi desenvolvida por Leibniz em seu *Novos ensaios sobre o entendimento humano*.

D: E a concepção de espaço de *C*?

Prof.: A concepção de espaço de *C* era defendida por Demócrito e pelos estóicos. Durante muito tempo essa concepção ficou obliterada pela aristotélica, insurgindo, novamente, da nova Física nascida no Renascimento. O espaço, na física newtoniana, é essencialmente um "recipiente" absoluto, infinito, tridimensional, independente da matéria e, como tal, pode ser vazio.

B: O sensorium de Deus pode ser vazio?

Prof.: Boa observação, *B*. Talvez, essa tenha sido uma das perguntas que gerou todo o debate entre newtonianos e leibnizianos, já que essas discussões não tinham apenas um caráter científico, mas também uma conotação teológica. É interessante notarmos que a tese da realidade física do espaço, afirmada tanto por *A* como por C, é própria da Filosofia Antiga. Enquanto para Platão e para Aristóteles, o espaço é uma condição para a existência do mundo, para os neoplatônicos, o espaço é o próprio Deus. Essa última concepção passa por toda a Idade Média e vemos

[102] DESCARTES, R. apud ROSENFELD , B. A. , op. cit., p. 184.

Espinosa (1632-1677) afirmar que "tudo o que é, é em Deus". Desta forma, o espaço torna-se algo metafísico. Há outra maneira de entender o espaço, defendida por Einstein na Teoria da Relatividade. Para ele, o espaço não e um ente geométrico, mas um ente físico. Para essa teoria não faz sentido falar do espaço precindindo do *campo* que é usado para representar os fenômenos físicos. Esse campo é o que determina os pontos de singularidade do espaço-tempo.

B: E qual dessas concepções é a correta?

Prof.: Depende da sua escolha de um dos modelos de representação dentre os vários historicamente concebidos por físicos e filósofos.

A: Não concordo com esta dependência. Existe um único espaço, do qual temos uma concepção imperfeita. O modelo de representação do espaço utilizado pela Física é que é conforme o espaço real.

D: Se o modelo físico fosse reflexo do espaço real, o espaço real, da Antiguidade até os dias atuais, já teria mudado de configuração algumas vezes... A Física, como toda ciência, possui dinamismo interno e suas teorias mudam no decorrer do tempo. É verdade que os cientistas procuram aproximar-se da realidade empírica, mas todas as suas teorias são apenas possíveis modelos do universo real.

Prof.: Como estávamos dizendo, a tese da realidade física do espaço é inerente à Filosofia Antiga, quer essa concebesse o espaço como lugar, quer o concebesse como matéria. Na Idade Moderna, como já vimos, Berkeley e todos os empiristas irão contestar esta concepção, afirmando a tese da subjetividade do espaço, ou seja, a de que o espaço é uma idéia derivada das sensações. Apesar de todas as críticas dos empiristas e as de Leibniz à idéia newtoniana de espaço, foi esta última que prevaleceu e Kant, um século depois do físico inglês, também afirmava a existência de um espaço como um contender, infinito e absoluto.

B: Mas o absoluto para Kant não significa que o espaço seja o sensorium de Deus[103].

---

[103] Cf. ABBAGNANO, N., 1960, p. 330 a 333.

Prof.: Não. No criticismo, ele é absoluto por ser o sensorium transcedental do sujeito cognoscente. Kant, em sua formação, estudou ciências naturais e para ele, nesse campo, a autoridade máxima era Newton. Pelas seguintes passagens da *Crítica*: "não é jamais possível fazer-se uma representação de que não haja nenhum espaço, embora se possa muito bem pensar que não se encontre nele nenhum objeto", e alguns parágrafos depois, "o espaço é representado por uma grandeza infinita dada"[104], podemos inferir que, no criticismo, o espaço é um receptáculo infinito, e pode ser vazio. Porém, não existirá espaço se não houver o sujeito, já que aquele é uma *forma a priori* deste. A realidade do espaço é uma condição subjetiva que nos permite perceber tudo o que é externo a nós.

D: Como fica a objetividade da geometria no criticismo?

Prof.: Como já foi dito aqui, uma intuição a priori e transcedental serve de fundamento para todos os conceitos da geometria. Assim, conforme Kant, "todos os princípios geométricos - por exemplo, que num triângulo a soma dos dois lados é maior do que o terceiro lado - não são jamais deduzidos de conceitos universais de linha e triângulo, mas da intuição, e isso de modo a priori e com certeza apodítica"[105]

B: Eu posso concluir disso que o espaço pode ser uma ou outra coisa, dependendo da posição filosófica aceita? Se assim for, eu fico com a teoria de Kant, pois ela consegue explicar, sem recorrer a inatismos, não só o espaço percebido, mas também como essa percepção se conforma às leis da geometria euclidiana.

Prof.: Será? Imaginem um sistema de coordenadas tridimensional. Esse sistema, desenvolvido por Descartes, é apenas uma outra forma de manifestação do sistema da Geometria Euclidiana, concordam? Pois bem, imaginem um sólido cujo ponto mais próximo da origem esteja à distância **d** daquela origem. Agora, realizem uma translação desse sólido de forma que o ponto mais próximo da origem fique à

---

[104] KANT, I. , op. cit., p. 41.

[105] KANT, I. , op. cit., p. 41.

distância **d'** dessa origem e **d'** > **d.** Esse corpo teve suas medidas - arestas, área superficial e volume - alterados?

C: É evidente que não.

Prof.: Bem, então agora imaginem esse mesmo sólido bem próximo do nariz de vocês. Agora, afastem-no bastante desse referencial. O tamanho percebido se alterou?

_ !?!

B: Então, o espaço percebido não segue as mesmas propriedades do espaço euclidiano?!? Quando isso foi percebido pela primeira vez?

Prof.: No final do século passado. Então, é legítimo inferir a identidade entre espaço físico, psicológico e geométrico?

B: Vejamos: o espaço físico depende do modelo adotado para o espaço real, se é que o espaço real existe... A Física toma emprestado esses modelos da Geometria. Mas, o espaço percebido, ou seja, o espaço psicológico, não obedece às propriedades da geometria euclidiana. Então, não podemos inferir por tal identidade.

Prof.: Husserl[106] faz uma diferenciação interessante entre espaço vivido - do qual percebemos todas as particularidades e nuances - e espaço puro, do qual são abstraídas todas as particularidades, ficando somente com o que é invariante, isso é, a extensão. Segundo esse autor, é com o espaço puro que trabalham as disciplinas matemáticas.

B: Por toda essa discussão, podemos concluir que a Geometria não tem o compromisso de expressar a realidade do espaço.

Prof.: "Em uma intervenção no colóquio InterIREM de Tailleville (junho/ 1977) sobre a 'Introdução de uma Perspectiva Histórica no Ensino da Matemática' Brigitte Senechal recordava que a Geometria era o estudo das figuras do espaço antes de ser o estudo do espaço. Somente no século XIX, com Riemann e Klein, o espaço aparece como objeto geométrico; antes disto ele era apenas o lugar dos fenômenos

[106] HUSSERL - op. cit. , p. 2.

geométricos, e o conceito de espaço participava mais do domínio filosófico do que do domínio geométrico."[107]

D: Fazendo uma sinopse, podemos afirmar que Saccheri e Lambert encontraram como dificuldade para desenvolver seus trabalhos a concepção de que a geometria euclidiana era uma verdade inquestionável e a única geometria possível, pois expressava a identidade das leis matemáticas com as do mundo físico. Lambert atina com a possibilidade de triângulos construídos sobre a esfera, os quais, por sinal, já eram conhecidos desde a Grécia Antiga, mas ganham destaque na ciência, com a trigonometria esférica, na época das grandes navegações. Porém, a inexistência de uma medida absoluta na geometria foi um entrave para os trabalhos de Lambert, pois como pensar na possibilidade da invenção de uma medida absoluta na Geometria se na euclidiana - esse saber tido como o reflexo da realidade - não havia nada igual? A teoria do conhecimento de Kant propõe um sujeito ativo e criador no ato de conhecer. O conhecimento não é mais o reflexo da realidade, mas o que o indivíduo percebe dessa realidade, ou seja, não há uma correspondência biunívoca entre verdade ôntica e conhecimento. Com o criticismo, as verdades da geometria não mais referem-se às coisas em si e ela passa a ser um conhecimento que só existe porque existe o sujeito cognoscente. Logo, pode-se até pensar em inventar algo como uma medida absoluta dentro de uma geometria que não seja a euclidiana. Porém, para Kant, o espaço percebido era euclidiano, o que já vimos não ser verdade, pois existe uma diferenciação entre o espaço percebido, o físico e o geométrico.

C: Considerando toda essa explanação de *D* mais os trabalhos de Klügel, nos quais é sugerida a inexistência de uma demonstração para o quinto postulado de Euclides, poderíamos tentar inventar uma geometria na qual seriam utilizados os postulados mais caóticos possíveis, como por exemplo um que afirmasse a existência de várias

---

[107] BKOUCHE, R. , in SENECHAL, B. , 1980.

retas paralelas à uma reta dada, todas passando por um mesmo ponto não pertencente à esta reta dada, ou seja, uma negação do quinto postulado de Euclides.

Prof.: Como ficaria a axiomática de uma geometria que utilizasse esse seu "postulado caótico"?

B: Ela conteria os nove axiomas, os quatro primeiros postulados, um quinto postulado que seria algo como "dada uma reta ***l*** e um ponto **P** não pertencente a ***l***, podemos traçar ao menos duas retas paralelas a ***l*** que passam por **P**", além das vinte e oito primeiras proposições dos *Elementos* e outras que demonstraríamos utilizando esse novo postulado.

Prof.: Esse novo postulado corresponde ao utilizado por Saccheri para tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides. Já temos algumas consequências dele, quais são?

C: Em um triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é menor que 180°.

D: Nessa nova geometria não existem figuras semelhantes que não sejam congruentes.

A: Em um quadrilátero, cujos lados perpendiculares à base possuem a mesma medida, os ângulos do 'topo' são congruentes.

B: Ah, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é menor que 360°.

Prof.: Muito bem! Os fatos enunciados por vocês pertencem às geometrias não-euclidianas. Gauss, Lobatschewski e Bolyai foram os inventores desse novo tipo de geometria.

D: Então é isto a geometria não-euclidiana! Que coisa simples!

A: Desculpe-me professora, mas o que você quer dizer com "inventores de uma nova geometria"? Como pode alguém inventar uma geometria? Pode-se descobri-la, mas inventar...

B: *A*, por favor, deixe de ser platônico.

C: Gauss, Lobatschewski e Bolyai trabalharam juntos na construção das geometrias não-euclidianas?

Prof.: Não. Struik, em seu livro *História Concisa das Matemáticas,* disserta sobre o aparecimento das geometrias não-euclidianas e expressa-se da seguinte forma sobre o assunto: "é notável como as novas idéias surgiram independentemente em Gotinga, Budapeste e Kazan, no mesmo período, depois de uma incubação de 2000 anos".[108]

A: Talvez, houvesse alguma "coisa no ar"que propiciasse esse surgimento simultâneo...

B: A, onde você esteve durante essas cinco aulas? A Matemática não é um campo do saber alienado do resto do mundo. As pessoas que produzem esse saber possuem uma vida extra-acadêmica pela qual relacionam-se com outros campos da produção humana - científica, artística, técnica, política, etc.

D: Durante séculos, desde a Antiguidade, a geometria euclidiana era o conhecimento que refletia as verdadeiras leis do universo. Na Idade Moderna, Galileu e Newton realizaram, explicitamente, a relação geometria/leis da física, ou seja, geometria/leis do universo. Com o advento do empirismo nos séculos XVII e XVIII essa relação começa a ser contestada. As verdades geométricas são consideradas dogmáticas. Enquanto a física aproxima-se, cada vez mais, das ciências empíricas, a Geometria e a Matemática em geral vão buscar seus próprios fundamentos. Temos aí a separação entre Geometria e Física, depois de milênios de união. Os matemáticos - profissão então institucionalizada - apesar de buscarem os fundamentos da matemática ainda consideram-na o reflexo da realidade do mundo físico. Com a teoria do conhecimento de Kant, o conhecimento deixa de ser puro reflexo da realidade. Além disso, o criticismo abre a possibilidade da existência de uma forma de pensamento que não se submete à realidade empírica, qual seja, o pensamento lógico. Todos esses fatos podem ter influenciado o surgimento das geometrias não-euclidianas.

A: A teoria de conhecimento de Kant? Ela afirma que o espaço é uma intuição a qual necessariamente segue a geometria euclidiana...

---

[108] STRUIK, D. J. , op. cit., p. 271.

B: A tem razão. Na *Crítica da Razão Pura,* Kant afirma que "a geometria percorre o seu seguro caminho mediante meros conhecimentos *a priori*, sem precisar pedir à Filosofia um atestado concernente à descendência pura e legítima do seu conceito fundamental de espaço. No entanto, o uso do conceito refere-se, nesta ciência, apenas ao mundo sensível externo, do qual o espaço é a forma pura de sua intuição e no qual, portanto, todo o conhecimento geométrico, por fundar-se sobre intuição *a priori*, possui evidência imediata, sendo os objetos dados *a priori* (segundo a forma), pelo próprio conhecimento, na intuição."[109] Não vejo evidência nenhuma nessas possíveis paralelas à uma reta dada, as quais passam, todas, por um mesmo ponto não pertencente à essa reta.

Prof.: Depende do que você está entendendo por "evidente": se algo passível de visão, como era entendido pelos antigos gregos, ou se algo logicamente dado. Parece que os matemáticos do final do século XVIII e início do XIX, concebiam a "evidência" no primeiro sentido. Essa concepção foi, sem dúvida, um dos motivos da dificuldade de aceitação das novas geometrias pela comunidade matemática, e também o motivo o qual levou Gauss a não publicar suas descobertas acerca dessas geometrias, pois ele tinha consciência de que a filosofia dominante entre os matemáticos era a kantiana. Como Gauss havia previsto, quando os matemáticos souberam da invenção das geometrias não-euclidianas, opuseram-se a elas. "Começaram por dizer não ser possível que a geometria euclidiana fosse somente uma de muitas geometrias, e não a geometria do universo, nem que uma geometria matematicamente válida se baseasse num postulado que não era uma verdade evidente. Principalmente o segundo ponto custava a aceitar, porque, se um Bolyai, um Gauss, um Lobatschewski podiam inventar um postulado que nada tinha que ver com a realidade nem com o senso comum e derivar dele um sistema matemático logicamente válido, forçoso era concluir ser a matemática, também, uma invenção.

---

[109] KANT , I., op. cit., p. 77.

Em particular, a geometria de Euclides era uma invenção, embora mais conforme o senso comum do que a de Lobatschewski."[110]

C: Ou seja, mesmo depois do surgimento das geometrias não-euclidianas, não foi fácil derrocar a concepção de que a geometria euclidiana era uma verdade única e inabalável, e o criticismo teve uma participação nessa dificuldade. Mas, por outro lado, a teoria do conhecimento de Kant afirma: "primeiro, que as coisas físicas não são demasiado coisas, não têm essência rígida, mas que se deixam elaborar em formas que não são as que têm por nascimento. Segundo, que o homem possui uma intimidade criadora capaz de inventar *um mundo* para si com formas novas para os objetos, imprevisíveis por qualquer lei física, de maneira semelhante se dá na vida mental. E assim se realiza a possibilidade de constuir diversas geometrias."[111]

Prof.: Há uma passagem nos *Prolegômenos* na qual podemos interpretar a impossibilidade da invenção de uma geometria diferente da euclidiana. Nela, Kant escreve: "as proposições da geometria não podem ser relacionadas com as determinações de uma simples criação de nossa fantasia poética e nem seguramente com objetos reais (...). A sensibilidade, cuja forma a geometria toma para fundamento, é a condição de possibilidade dos fenômentos externos, não podendo, portanto, estes conter outra coisa senão o que a geometria lhes prescreve"[112].

D: O que ele quer dizer com fantasia poética?

Prof.: Vocês estão lembrados do que significa atividade poética para Tetens?

A: Toda a atividade criadora, inclusive a científica.

Prof.: Apesar da interpretação da teoria do conhecimento de Kant, realizada pelos matemáticos da época, dificultar a aceitação das novas geometrias, podemos perceber a influência dessa mesma teoria na formação das geometrias não-euclidianas, por uma afirmação de Lobatschewski: "na realidade, na natureza, nós conhecemos apenas o movimento, é ele que possibilita a percepção através dos

---

110 GUILLEN, M., 1987, p. 119

111 BACCA, D. J., op. cit., p. XLIX.

112 KANT, I., "Prolegômenos" in Os Pensadores, Ed. Abril Cultural, SP, 1974 , p. 123 e 124.

sentidos. Todos os outros conceitos, por exemplo aqueles da geometria, são produzidos artificialmente por nosso espírito e tirados das propriedades do movimento, e por esta razão, o espaço ele mesmo, não existe para nós."[113] Ou seja, Lobatschewski entendia o conhecimento geométrico como algo produzido pelo sujeito e dependente deste, uma concepção de conhecimento tipicamente kantiana, apesar de negar explicitamente a noção kantiana de espaço.

C: Então, a filosofia kantiana, ao mesmo tempo, favoreceu e dificultou o surgimento das geometrias não-euclidianas?

Prof.: Parece que foi isso mesmo o que ocorreu[114].

A: Não sei se concordo com toda essa interferência externa na produção da matemática.

D: Como você explica a invenção das geometrias não-euclidianas na mesma época, em lugares tão diversos e por pessoas que produziram seus trabalhos independentemente umas das outras?

A: "Em matemática é bem conhecida a situação na qual alguns pesquisadores, trabalhando independentemente e desconhecendo-se uns aos outros, acabam envolvendo-se na discussão referente à prioridade de suas descobertas. Para o historiador da ciência esse fato é interpretado com base na convicção de que a matemática não é resultado do acaso de manipulações incertas que, de modo caótico e imprevisível, conduz à emergência do novo conhecimento matemático. A matemática desenvolve-se de modo harmonioso e comensurável"[115].

---

[113] LOBATCHEVSKI, N. I. apud BKOUCHE, R. , 1982, p. 35.

[114] FANG, J. e TAKAYAMA, K. P (1975 - pp 261 - 282) expõem um ponto de vista complementar a este. Estes autores apontam para uma relação entre a primeira concepção subjetivista de espaço proposta por Kant em seus primeiros trabalhos, na qual não é pressupostol nenhum apriorismo e a criação das geometrias não-euclidianas. Não incorporamos este ponto de vista ao texto, devido ao fato de não termos conseguido ter acesso a estes primeiros trabalhos de Kant.

[115] BARABASHEV, A. - "O empirismo como um fenômeno histórico da filosofia da matemática" - Revue Internationale de Philosophie - Vol. 42 - nº 167 - abril/88 - tradução de Antonio Miguel. O autor desse artigo considera que: "talvez , a existência de descobertas independêntes e simultâneas seja apenas uma premissa da história da matemática, e sua rejeição teria gerado uma história da matemática completamente distinta da que possuímos atualmente".

D: Então responda-me: a transformação da matemática de um saber prescritivo para um conhecimento que se utiliza do método dedutivo é explicado somente pela história interna da matemática? Lambert e Saccheri repudiaram as conclusões de seus trabalhos. A maneira internalista de reconstituição histórica nos oferece algum indício do porquê de tal atitude?

A: Pensando dessa maneira, fatores externos também foram importantes no surgimento dessas novas geometrias, mas não devemos ignorar os fatores internos...

Prof.: Muito bem colocado, *A*. Não podemos, por exemplo, negar que o estágio de desenvolvimento da trigonometria esférica, na época, teve uma importância primordial nos trabalhos de Lobatschewski e Bolyai, pois tanto um como o outro ficaram parcialmente persuadidos da consistência de suas teoria quando perceberam que a trigonometria desenvolvida por meio delas era igual às funções de trigonometria hiperbólica esférica desenvolvida por Lambert em 1766.

B: O quê? Lambert desenvolveu uma trigonometria hiperbólica esférica em 1766 e não percebeu a conexão entre ela e seus trabalhos de tentativa para a demonstração do quinto postulado euclidiano?!?

Prof.: Parece que não. "Embora tenha utilizado essas funções em seus trabalhos de astronomia, aparentemente, Lambert nunca se perguntou qual espécie de triângulo obedeceria às leis da trigonometria hiperbólica esférica"[116]. Porém, Bolyai e Lobatschewski perceberam essa conexão. Tal percepção levou esses matemáticos a aceitarem os resultados que outros estudiosos, antes deles, rejeitaram. Além disso, a seguinte afirmação de Lobatschewski "é bem conhecido que até esta data a teoria das paralelas permaneceu incompleta. Os esforços infrutíferos realizados desde os tempos de Euclides ao longo de dois mil anos, têm me conduzido a supor que a verdade a estabelecer [o quinto postulado] não está implicada nas noções anteriores"[117], demonstra que ele estava convencido da a inexistência de uma

[116] GRAY, J., 1987, p. 46, 47.

[117] LOBATCHEVSKI , N. apud BKOUCHE, R. , op. cit., p. 35.

demonstração para o quinto postulado de Euclides. Não há dúvidas de que as tentativas de demonstração do postulado das paralelas, realizadas no período anterior a Lobatschewski, foram importantes para seus trabalhos.

C: Lobatschewski conhecia os trabalhos de Klügel?

Prof.: Segundo Trudeau, os trabalhos de Klügel eram conhecidos pelos matemáticos inventores das novas geometrias e propiciaram o surgimento dessas. Porém, segundo Bonola, não podemos inferir se Lobatschewski teve um contato direto com os trabalhos de Saccheri e de Lambert, ou mesmo se conheceu os trabalhos de Klügel.

D: Professora, você disse algo sobre Gauss não ter publicado suas descobertas? Conte-nos mais sobre isso.

Prof.: "Gauss, matemático alemão considerado por Felix Klein como o maior geômetra do século XVIII, consagrou ao problema das paralelas trinta e cinco anos de sua existência. Tudo leva a crer que Gauss tenha chegado à conclusão de que seria possível construir-se uma nova geometria - que ele denominara 'não-euclidiana'- baseada num postulado diferente do de Euclides. 'O postulado das paralelas' - afirmava Gauss - 'é indemonstrável, isto é, não pode ser deduzido dos fundamentos do espaço, exatamente porque adiciona um elemento novo a seus fundamentos; logo, negando-se aquele postulado, é possível construir uma nova geometria tão lógica e coerente quanto a geometria de Euclides.' A essa geometria possível deu Gauss o qualificativo de *anti-euclidiana*, depois de *astral*, por fim o de *não-euclidiana*. (...) Por um singular excesso de prudência e receando a 'gritaria dos beócios' Gauss não publicou os resultados a que havia chegado."[118]

C: Se ele não publicou seus trabalhos, como podemos saber se realmente chegou à conclusão da impossibilidade de demonstração do quinto postulado de Euclides?

Prof.: Por suas correspondências, principalmente com Bolyai.

B: Mas você não disse que eles trabalharam separadamente?

Prof.: "Gauss mantinha correspondência com Farkas Bolyai, pai de János Bolyai. Este último é que foi um dos inventores da geometria não-euclidiana. Farkas era

[118] SOUZA, J. C. M., op. cit., p. 38-41.

professor de matemática em uma cidade de província da Hungria, "tinha estudado em Gotinga ao mesmo tempo que Gauss. Ambos mantinham uma correspondência ocasional. Farkas passou muito tempo tentando provar o quinto postulado de Euclides, mas não chegou a qualquer conclusão. O seu filho herdou esta paixão e também começou a trabalhar numa prova, apesar dos apelos do seu pai para fazer outra coisa. (...) János Bolyai entrou no Exército e adquiriu a reputação de um oficial arrojado. Começou a aceitar o quinto postulado como um axioma independente e descobriu que era possível construir uma geometria, baseada noutro axioma, na qual, através de um ponto no plano, se pudesse traçar uma infinidade de retas que não interceptassem uma linha nesse plano."[119] Em 1832, publicou seus resultados em forma de apêndice em um livro de seu pai. Bolyai terminou seu *Apêndice* construindo um círculo de área equivalente à de um quadrado e enunciando o seguinte dilema: ou o axioma de Euclides é verdadeiro, ou a quadratura do círculo é possível[120] Farkas escreveu a Gauss para que este último opinasse sobre as idéias arrojadas de János. Gauss respondeu entusiasticamente ao trabalho de János, afirmando, porém, que não poderia aplaudi-lo, pois, se o fizesse, estaria aplaudindo a si próprio, já que havia chegado àqueles resultados há alguns anos. "O jovem János ficou profundamente desapontado com esta carta que o elevava à dignidade de grande cientista, mas que lhe roubava a prioridade. O desapontamento aumentou em razão do pouco reconhecimento posterior, embora ele continuasse a escrever sobre matemática, por exemplo sobre uma representação geométrica dos imaginários. Ficou ainda mais irritado quando tomou conhecimento do livro de Lobatschewski através de uma tradução alemã de 1840; continuou uma vida retirada até morrer, em 1860."[121]

C: Em que ano Lobatschewski publicou sua obra?

---

[119] STRUIK, D. J. , op. cit., p. 269, 270.

[120] Cf. BABARIN, P., 1928, p. 12.

[121] Ibidem, p. 270.

Prof.: Lobatschewski, com 33 anos de idade, tornou públicos seus estudos sobre a nova geometria em fevereiro de 1826, em sua comunicação à Sociedade de Física e Matemática de Kazan, de cuja universidade era professor. Porém, pode-se inferir pelo manuscrito de seus livros sobre Geometria Elementar, que em 1823 ele já sabia da inexistência de uma prova para o quinto postulado. Lobatchevski nasceu em 1793 e foi o segundo filho de um modesto funcionário que morreu quando ele tinha sete anos de idade. Depois da morte do pai, a família mudou-se para Kazan, onde as crianças poderiam ter instrução escolar. Com nove anos de idade, Lobatschewski iniciou seus estudos secundários graças a uma bolsa conseguida por seus próprios méritos. Em 1807 ingressou na universidade e cultivou com verdadeira paixão a Matemática. Seus professores, percebendo que ele era um matemático em estado potencial, dedicaram-lhe uma atenção especial. Entre esses professores estava J. M. Bartels, antigo professor e amigo fiel de Gauss. Em 1811, Lobatschewski obteve o título de mestre, dois anos depois foi nomeado professor adjunto e três anos mais tarde, ou seja, com vinte e dois anos, catedrático titular de Matemática. Além de professor titular de Matemática, era também administrador da biblioteca universitária. Em 1825 substituiu o administrador da universidade e em 1827 o nomearam reitor. Francisco Vera, em seu livro *Veinte matemáticos célebres,* conta que a universidade era a casa e a vida de Lobtschewski. Esse autor relata um fato curioso em seu livro. "Uma manhã apareceu no vestíbulo da universidade um estrangeiro, que, dirigindo-se a um criado em mangas de camisa que varria o chão, manifestou seu desejo de visitar o edifício. O criado ofereceu-se para servir de guia, deixando o visitante assombrado pela precisão com que respondia a suas perguntas, o que o fez acreditar que o atraso do povo russo era fantasia inventada pelos jornais ocidentais. Fácil é imaginar a estupefação do estrangeiro - que era um representante diplomático de passagem por Kazan - quando naquela noite, em um banquete oficial dado em sua honra, reconheceu ao ser apresentado ao reitor da universidade, o moço da limpeza que pela manhã lhe havia servido de cicerone."[122] Porém, por razões

[122] VERA, F. , 1961, p. 137.

ainda não esclarecidas, em 1846, Lobatschewski foi destituído de seu cargo de reitor e também de professor da universidade. Em 1855 apresentou o original de sua *Pangeometria*, manuscrito em russo e em francês por outra pessoa, porque na época estava quase cego. No ano seguinte morreu esse que foi um dos primeiros homens a desafiar os dogmas da geometria euclidiana.

C: Então "existiu um elo em tudo isso: Gauss, em Gotinga, era colega de estudo do velho Bolyai e o professor de Lobatschewski em Kazan fora J. M. Bartels, que tinha sido um dos professores de Gauss."[123] Lobatchevski não teria tomado contato com os trabalhos de Gauss através de seu professor?

Prof.: Segundo Morris Kline[124], tanto Lobatschewski como Bolyai devem muito de seus trabalhos a Gauss. Conforme Kline, Bartels deve ter comunicado a Lobatschewski o avanço nos trabalhos sobre as geometrias não-euclidianas desenvolvido por Gauss, enquanto Bolyai teria tido notícias desse trabalho por meio de suas correspondências com Gauss. Portanto, na visão de Kline, foi Gauss o único inventor das geometrias não-euclidianas. Bonola discorda dessa visão. Segundo ele, "antes de 1807, Gauss tentou resolver o problema das paralelas e, de seus esforços até esta data, nada tinha nascido além do desejo de superar os obstáculos aos quais suas pesquisas o conduziram. Desse modo, qualquer coisa que Bartels pudesse ter aprendido de Gauss antes de 1807, seria de uma característica negativa. Sobre a opinião posterior de Gauss, parece completamente certo que Bartels não teve notícias dela, assim nós podemos ter certeza que Lobatchevski criou sua geometria completamente independentemente de qualquer influência de Gauss."[125] Bonola afirma também que Gauss não pode ser considerado um dos inventores da geometria não-euclidiana, uma vez que não publicou seus resultados sobre essa nova geometria. Mas Gauss manteve contato com outros pensadores que também analisaram o postulado das paralelas. "Schweikart, que era jurista e cultivava a

---

[123] STRUIK, D. J., op. cit., p. 271.

[124] KLINE, M., 1972.

[125] BONOLA, R. , op. cit., p. 91,92.

Geometria, fez chegar às mãos de Gauss uma teoria (que não se animou a publicar) na qual mostra, com notável e invulgar clareza, a possibilidade de ser construído um novo edifício desligado em seus fundamentos da proposição euclidiana. Um segundo analista, Taurinus, sobrinho de Schweikart, embora convencido da verdade absoluta do V postulado, pregava a possibilidade lógica de serem aceitas as hipóteses já contidas nos estudos de Saccheri e Lambert."[126]

A: Toda essa conversa está muito interessante, mas qual a garantia de que esse novo sistema axiomático é consistente, ou seja, o que nos garante que um sistema axiomático estruturado sobre as definições, os axiomas, os postulados 1 a 4 e a negação do quinto postulado de Euclides não nos leva a teoremas contraditórios?

Prof.: Ótima pergunta! Podemos ter certeza dessa consistência?

B: Professora, nosso tempo de hoje está acabando. Poderíamos discutir essa questão no próximo encontro?

Prof.: Pode ser. Até lá, pensem sobre esse assunto para que possamos conduzir esta discussão.

---

[126] SOUZA, J. C. M. , op. cit., p. 39.

AULA VI

C: Caros colegas, creio que consegui uma prova lógica da consistência das geometrias não-euclidianas.

Prof.: Uma prova lógica? Em quais leis da lógica ela está embasada?

C: Na lei do terceiro excluído e na lei da contradição.

A: O quê? Novamente demonstração por absurdo?

C: Novamente...Como todos devem estar lembrados, essa demonstração é feita pela negação da tese, o que conduz a uma contradição e à conclusão de que a tese é verdadeira. Bem, a geometria não-euclidiana está assentada sobre as definições, axiomas, os quatro primeiros postulados e a negação do quinto. Se alguma contradição for deduzida dessas premissas, então tal dedução pode ser vista por um outro ângulo, como a prova por absurdo do quinto postulado! Logo, se a geometria não-euclidiana for inconsistente, a geometria euclidiana também o será. Estão vendo, eu tinha razão, o quinto postulado é realmente independente dos demais.

Prof.: Magnífico *C* !

B: Professora, você realmente sabia da inexistência de uma demonstação para o quinto postulado de Euclides e nos fez perder todo esse tempo procurando algo inexistente!

Prof.: Todos concordam que foi perda de tempo?

B: Claro que foi. Poderíamos ter visto muito mais conteúdo, mais teoremas...

D: Desculpe-me *B*, mas essa sua visão de educação é muito estreita. Neste processo de problematização histórica do quinto postulado, tivemos a oportunidade de refletir sobre nossas concepções filosóficas de mundo, discutirmos e, muitas vezes, reformularmos essas concepções frente a problemas que nos eram colocados. Você mesmo, no início deste curso era um kantiano convicto, agora...

C: Além de haver uma diferença qualitativa entre este processo e as disciplinas que normalmente fazemos no curso de licenciatura em matemática. Nas outras, ficamos o tempo todo decorando teoremas e demonstrações. Nessa, devido ao problema levantado por você, tivemos a necessidade de procurar nossos próprios caminhos para demonstrações e, conseqüentemente, a fundamentação destes caminhos o que nos levou a pesquisar muito e descobrir vários fatos da geometria, tanto nos livros, como em nossas próprias tentativas de demonstração.

A: Isso sem falar de toda a discussão filosófica e histórica inerente a este processo. Normalmente, no ensino de matemática, não temos a oportunidade de discutir as relações da matemática com outros campos do saber, desenvolvendo, assim, uma percepção errônea de que a matemática paira acima de qualquer atividade humana. Devido a essa concepção desenvolvida, acostumamo-nos a não pensar criticamente a matemática e muito menos em suas utilizações sociais. Toda esta discussão me fez perceber o dinamismo interno da matemática e os modos como ela se relaciona com os outros campos do saber.

_ !!!

Prof.: Concordo com seus colegas, a educação não deve ser entendida como uma mera transmissão de conteúdos meticulosamente separados em diversas disciplinas e em diferentes séries. Tal transmissão pressupõe um sujeito passivo no ato de conhecer. Não estamos mais na época de Aristóteles, nem na dos empiristas da Idade Moderna. Acredito que as pessoas tenham acesso ao conhecimento de forma ativa. Toda a educação, inclusive a matemática, deve proporcionar situações nas quais o indivíduo possa refletir sobre suas crenças, perceber as origens destas, e poder optar de forma consciente entre superá-las ou não. Isso não é possível se acessarmos o legado cultural, do qual a matemática faz parte, de maneira fragmentada, acrítica e a-histórica. Além deste objetivo maior, estamos buscando, aqui, não aprender a usar a matemática de maneira mecânica, mas fazer, criar, inventar caminhos para a matemática. Com estes novos caminhos, poderemos alterar a realidade, tanto a externa quanto a interna à matemática. Por sua vez, a realidade alterada exigirá de nós outras formas de conceber a matemática e, outra vez, buscaremos novos caminhos, num processo dinâmico e infinito.

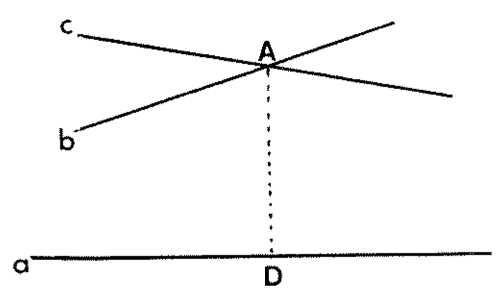
B: Desculpem-me, fui precipitado em minhas conclusões. Pensando bem, o desafio colocado pela problematização histórica da possibilidade, ou não, de provar o quinto postulado criou em mim um envolvimento no processo de aprendizagem raro em nosso curso de licenciatura e tudo isto me deixou muito ansioso.

Prof.: Não precisa se desculpar *B*. Você colocou o que estava sentindo em relação ao nosso curso e, assim, todos nós pudemos pensar sobre nossos próprios sentimentos. Isso também faz parte do processo de aprendizagem.

A: E por falar em sentimentos, estou com um sério problema. Não consigo visualizar, nem mesmo intuir este quinto postulado da geometria de Lobatchevski. Como seria a figura de duas retas paralelas à uma reta dada passando por um ponto fora desta reta dada?

Prof.: Ah, É evidente *A*. (risos). Seria algo assim:

(lousa)



C: Como alguém pode pensar numa coisa dessa como sendo duas retas paralelas?

D: "Lobatschewski, obviamente, não construiu seus argumentos a partir da figura: desenvolveu logicamente uma teoria que contradiz o que estamos acostumados a ver em desenhos. Esta contradição entre as possibilidades lógicas e a representação visual é um grande obstáculo que devemos superar para compreender o desenvolvimento da geometria."[127]

[127] MORENO, L. E BROMBERG, S , op. cit., p. 39.

Prof.: Lobatschewski não se ateve ao conceito grego de evidência - o que se pode ver com os olhos ou com a intuição - e utilizou o conceito de evidência lógica - o que se pode concluir com o raciocínio lógico.

B: Isso sem falar da intuição geométrica...

Prof.: "A descoberta da possibilidade de uma geometria não-euclidiana teve por efeito colocar em questão a intuição geométrica como a fundadora do rigor. Até o início do século XIX, a construção euclidiana se mostrou como o lugar exclusivo do rigor matemático e tornou-se o modelo, talvez único, de uma teoria solidamente fundamentada."[128]

C: É estranho... "A possibilidade de uma geometria não-euclidiana colocou em questão o raciocício fundamentado sobre a intuição geométrica. Ao mesmo tempo, seus fundadores Gauss, Lobatschewski e Bolyai utilizavaram-se de um método do tipo euclidiano para desenvolver suas geometrias"[129]

Prof.: Muito bem observado *C*. Esse fato colocou o problema de se determinar novas regras de raciocínio que assegurassem a validade das demonstrações.

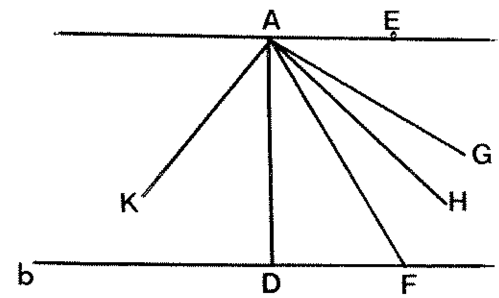
A: E como são as demonstrações das geometrias não-euclidianas?

Prof.: Como disse *C*, elas seguem o modelo euclidiano. No entanto, nelas não podemos utilizar o método de visualização, nem da intuição geométrica como validação das conclusões. Vamos estudar alguns fatos da geometria de Lobatschewski para compreendermos melhor o significado de não utilizar a visualização e a intuição. Primeiro vamos definir ângulo de paralelismo. Seja ***b*** uma reta dada e **A** um ponto fora dela. " Podemos traçar por **A** a reta perpendicular a ***b***. Seja **D** o ponto de interseção entre a perpendicular e a reta ***b***. Agora tracemos a perpendicular ao segmento AD pelo ponto **A**. Seja AE o segmento perpendicular a AD.

---

[128] BKOUCHE, R., 1982 - p. 41.

[129] Ibidem, p. 42.



Na região do ângulo reto EAD estão todas as linhas retas as quais passam pelo ponto **A** e encontram a linha ***b***, como por exemplo $\overleftrightarrow{AF}$, ou mesmo outras, como a perpendicular $\overleftrightarrow{AE}$ que não interceptam a reta dada. Assumiremos que podem existir outras retas, como por exemplo $\overleftrightarrow{AG}$, as quais não cortam ***b***, mesmo quando prolongadas. Entre as linhas que cortam a reta dada e as que não cortam, deve haver uma reta limite $\overleftrightarrow{AH}$, paralela a ***b***, de forma que todas as retas que estiverem de um dos lados de $\overleftrightarrow{AH}$ serão paralelas à ***b*** e todas as que estiverem do outro lado interceptarão ***b***. O ângulo HAD entre a paralela $\overleftrightarrow{AH}$ e a perpendicular $\overleftrightarrow{AD}$ é chamado de ângulo de paralelismo, o qual designaremos por $\Pi(p)$ para $AD = p$.

Se $\Pi(p)$ é um ângulo reto, então o prolongamento de AE será paralelo à reta ***b***.

Se $\Pi(p)$ for menor que um ângulo reto, então, do outro lado de AD, fazendo um mesmo ângulo $DAK = \Pi(p)$ estará a reta $\overleftrightarrow{AK}$ paralela à reta ***b***.

Sobre essa hipótese nós devemos fazer uma distinção entre lados em paralelismo."[130]

D: Em sua exposição, pude perceber três tipos de posição de retas em relação a uma reta dada: as que interceptam-na; as que não a encontram e a que é o limite entre estes dois tipos.

Prof.: Ao primeiro tipo chamamos de retas secantes, ao segundo hiperparalelas. As retas limite são as paralelas à reta dada.

---

[130] LOBATSCHEWSKI, N. , p. 13 in BONOLA, R., 1955

B: Essas são as paralelas que se encontram no infinito?

Prof.: Exatamente.

C: Esses fatos da geometria de Lobatschewski que acabamos de estudar, levam-me a concluir que as geometrias não-euclidianas derrubaram a noção kantiana de geometria. Segundo Kant, o espaço euclidiano de três dimensões é uma intuição pura, um dado incontornável da representação humana. Porém, as geometrias não-euclidianas são, ao mesmo tempo, incontestáveis e no entanto irrepresentáveis, o que contradiz a teoria de Kant.

Prof.: As geometrias não-euclidianas não são irrepresentáveis.

B: A representação à qual Kant se refere não é necessariamente visual, mas uma representação que está presente toda vez que chegamos a qualquer tipo de entendimento. Uma passagem da *Crítica* ilustra bem esse fato: "o entendimento é, falando de modo geral, o poder de conhecimentos. Estes consistem na relação determinada de representações dadas a um objeto"[131].

C: Pois bem, vamos considerar de outra maneira. A meu ver, com o evento das geometrias não-euclidianas, a geometria, em geral, deixou de ser um conhecimento que reflete a realidade do espaço físico e passou a ser uma construção lógica organizado em forma de sistema axiomático. Já vimos que podemos estudar os sistemas axiomáticos de duas maneiras, quais sejam, o estudo semântico de suas sentenças, isto é, dos axiomas e teoremas, ou o estudo sintático das mesmas. Se considerarmos a geometria como sendo um constructo lógico destituído de significados, estaremos fazendo uma análise sintática de suas proposições e estas, por referirem-se apenas a leis da lógica, serão analíticas e não sintéticas como afirmava Kant. Se, por outro lado, trabalharmos semanticamente com as proposições das diferentes geometrias, elas passarão a ter um caráter empírico e, assim, a geometria não será um conhecimento a priori.

B: Se estivermos no referencial teórico kantiano, suas argumentações não têm sustentação. Vejamos primeiramente o problema das proposições serem analíticas ou

[131] KANT , I., op. cit., p. 84

sintéticas. Segundo Kant, *síntese* é toda conjunção - entendida como um ato de espontaneidade da capacidade de representação - dos múltiplos que formam um conceito. Toda a *análise* - pressupõe uma síntese[132]. Logo, mesmo que façamos um estudo unicamente sintático das proposições da geometria, estas continuarão a ser sintéticas, já que sem uma síntese inicial não é possível fazer-se análise alguma. Vejamos, agora, sua fala sobre a geometria se transformar em um conhecimento empírico. Essa sua fala demonstra completo desconhecimento do criticismo. Vou citar um trecho da *Crítica da Razão Pura* para vermos se você compreende o disparate de seu argumento: "Todos os conceitos matemáticos não são por si conhecimentos, a menos que se pressuponha a existência de coisas que possam apresentar-se somente segundo a forma daquela intuição sensível pura. Coisas no espaço e no tempo são, porém, dadas somente enquanto são percepções (representações acompanhadas de sensação), por conseguinte, através de representação empírica. Conseqüentemente, os conceitos puros do entendimento, mesmo quando aplicados a intuições a priori (como na Matemática), produzem um conhecimento somente enquanto tais intuições - e, por conseguinte, através delas, também os conceitos puros do entendimento - puderem ser aplicadas a intuições empíricas"[133]. Portanto, meu caro *C*, tanto sua primeira conclusão, como a segunda não possuem o menor fundamento.

C: E o que você me diz daquela história de que a sensibilidade dos fenômenos externos, não pode conter outra coisa senão o que a geometria lhes prescreve?

B: Foi um equívoco ocasionado pelo desconhecimento das geometrias não-euclidianas, as quais, diga-se de passagem, não tinham ainda sido inventadas quando Kant escreveu essas idéias.

C: Então, você tem que concordar que as geometrias não-euclidianas derrubaram o apriorismo kantiano de espaço.

---

[132] Cf. KANT, I., op. cit., p 81 e 82.

[133] Ibidem, p. 88 e 89.

D: Desculpe-me *C*, mas acho que você está sendo simplista demais nessas suas colocações. Vimos, na aula passada - e você mesmo fez esta observação - que a elaboração de um novo discurso, por mais coerente que possa ser, é insuficiente para suplantar uma verdade estabelecida. Discutimos como as geometrias não-euclidianas ficaram olvidadas durante muito tempo, porque a euclidiana era considerada uma verdade incontestável e o criticismo, de alguma maneira corroborou essa incontestabilidade. Não vejo como o surgimento das geometrias não-euclidianas pode, sozinho, derrubar o apriorismo kantiano, posto que o consideremos uma verdade estabalecida na época do surgimento dessas geometrias.

Prof.: *D* tem razão. A aceitação pela comunidade matemática das geometrias não-euclidianas e a utilização de seu discurso para refutar o apriorismo kantiano inserem-se em um contexto maior do que somente uma disputa entre matemáticos kantianos e não kantianos. Até aproximadamente 1870, as geometrias não-euclidianas eram consideradas uma aberração do conhecimento matemático. Por essa época, os ideais do Liberalismo econômico, o naturalismo científico e as teorias da evolução de Darwin começaram a colocar em questão tudo o que fosse a priori - os direitos naturais; a autoridade de algumas leis científicas; as leis que pregam a ética humanitária. A única lei que passou a ser aceita era a da luta pela sobrevivência, sobrevivência do mais forte. É nesse contexto que as geometrias não-euclidianas ganharam status de saber científico e foram utilizadas para rebater as teses apriorísticas colocadas por Kant na Estética Transcedental.

A: O que foi o naturalismo científico?

Prof.: Um movimento científico o qual pregava que princípios racionais não explicam o universo; que não há verdades a priori; que a metafísica é um esconderijo para a ignorância; e que somente a experimentação e a investigação científicas concretas produzem um conhecimento verdadeiro.

B: No final do século XIX, tanto a geometria euclidiana, como a não-euclidiana eram consideradas verdadeiras? Como podem dois sistemas contraditórios serem ambos verdadeiros?

C: Com o desenvolvimento das geometrias alternativas, o problema de *verdade física* se transforma no problema de *coerência lógica.* É essa transformação de enfoque que torna possível a coexistência de várias geometrias diferentes.

Prof.: Por outro lado, o problema de qual das geometrias corresponderia a verdade física colocou-se na gênese das geometrias não-euclidianas. Bolyai, Lobatschewski e Gauss consideraram que a determinação de qual das geometria seria a mais adequada à explicação de fenômenos físicos, só poderia ser realizada de maneira empírica.

B: Esta forma de considerar a verdade é tipicamente kantiana. Como já vimos, para Kant a razão pode criar pensamentos, porém, somente com a validação empírica estes pensamentos tornam-se verdades.

A: Sendo assim, o problema da verdade que se coloca com as geometrias não-euclidianas não é mais a da tríplice unidade entre ser, verdade ôntica e verdade ontológica. Aliás, pelo estudado aqui, essa correspondência biunívoca já deixara de existir há muito tempo em outros campos do conhecimento, devido às filosofias empirista e kantiana. Com essa última, a verdade ôntica fica submetida à verdade ontológica. O último reduto do determinismo racionalista era mesmo a matemática. As geometrias não-euclidianas vêm corroborar a noção kantiana de verdade.

Prof.: Lobatschewski tentou verificar qual das geometrias devería ser utilizada como modelo do mundo físico. Utilizando-se de dados astronômicos, calculou a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo formado pela estrela Sirius e outras duas, determinando que a diferença entre esta soma e 180° era de 0,000372 segundos. Rosenfeld[134] informa-nos que, com os instrumentos da época, Lobatschewski não pode calcular com maior precisão essa diferença que é cerca de cem vezes menor do que o matemático russo supunha. De qualquer maneira, Lobatschewski concluiu que em triângulos muito pequenos, tal diferença devia ser diminuta o suficiente para fundamentar a atitude que considerava os princípios da geomentria euclidiana como rigorosamente estabalecidos. Lobatschewski percebeu a

---

[134] ROSENFELD , B. A., op. cit., p. 208.

impossibilidade de uma determinação empírica de qual geometria era a "verdadeira", ou seja, de qual pode ser usada, mais apropriadamente, para descrever o mundo físico.

A: Então, fica a nosso critério escolher qual geometria vamos utilizar como modelo para o mundo físico? É evidente que a geometria escolhida será a que fornecer maior simplicidade de cálculos.

Prof.: O matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) sustentava uma posição análoga à sua, *A*. Segundo ele, "a razão tem suas preferências, porém estas preferências não têm um caráter imperativo. Tem suas preferências pelo mais simples, porque entre todas as coisas equivalentes, a mais simples é a mais cômoda. Assim, nossas experiências seriam igualmente compatíveis com a geometria de Euclides e com a geometria de Lobatschewski, que supunha a curvatura do espaço muito pequena. Escolhemos a geometria de Euclides, porque é a mais simples"[135]

A: Podemos concluir que a impossibilidade de verificação empírica impõe como critérios de verdade o da coerência lógica e o da simplicidade?

Prof.: Não podemos pensar na simplicidade como um critério de verdade, pois ele é completamente subjetivo. O que é simples para mim pode não ser para você. Além disso, há diferença entre coerência lógica e verdade em matemática. Coerência refere-se somente à lógica, enquanto, partir das geometrias não-euclidianas, a verdade em matemática começou a ser entendida como a correspondência entre os conceitos abstratos e a realidade empírica.

B: A teoria de Lobatschewski "foi aliada ao sensualismo e ao empirismo corrente, compelindo a geometria a tomar seu lugar entre as ciências experimentais."[136] Mas isso não significa que, novamente, tentou-se estabelecer uma correspondência direta entre os objetos matemáticos e a verdade ôntica?

Prof.: Não, a noção de modelo permitiu a interconexão entre os conceitos e a realidade sem que aqueles pretendessem expressar a verdade absoluta dessa.

---

135 POINCARÉ, E. e EINSTEIN, A. (s. d.), p. 99.

136 BONOLA , R., op. cit., p. 92, 93.

B: Qual o conceito de modelo?

Prof.: Um *modelo* para um sistema axiomático formal é uma interpretação dos termos primitivos, sobre a qual os axiomas tornam-se afirmações verdadeiras.

D: Sintetisando, podemos dizer que "a geometria euclidiana, durante muito tempo, permaneceu como exemplo de um tipo de conhecimento absoluto e verdadeiro. Poderíamos encontrar, especialmente nos trabalhos britânicos, afirmações como: 'é tão certo que Deus existe, assim como é certo que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°'. Esse conhecimento não era apenas matematicamente consistente, mas era matematicamente verdadeiro e descritivo da realidade. Bem, esse tipo de conhecimento se caracterizava pelo fato de seu oposto ser inconcebível. Se você compreendesse realmente o que era um triângulo, então este fato, que não parecia essencial a respeito do triângulo, se tornava um fato necessário. Um conceito humano, um conceito subjetivo, neste caso um triângulo, se adaptam perfeitamente a uma realidade que todos nós experimentamos. A geometria não-euclidiana pode ser vista como a noção de que a soma dos ângulos de um triângulo poderia não ser 180°. Repentinamente, a superestrutura inteira da ética, da religião, e a esperança de se encontrar um conhecimento verdadeiro nas ciências entrou em colapso. Essa esperança se apoiava na crença de que já existia pelo menos uma parte de tal conhecimento, mas, agora que já não mais havia aquela certeza de que a soma dos ângulos de um triângulo era 180°, então não havia mais a certeza da existência de Deus"[137]. A reação imediata foi a rejeição dessas novas geometrias. Porém, no momento em que o discurso das geometrias não-euclidianas foi ao encontro dos novos discursos produzidos pela sociedade capitalista (o naturalismo científico, liberalismo econômico, teoria da evolução de Darwin), tal discurso foi apropriado por essa e utilizado para refutar o apriorismo kantiano. A partir daí, o universo, já reduzido, das verdades absolutas e incontestáveis perdeu seu baluarte: a geometria euclidiana.

C: As geometrias não-euclidianas revolucionaram a matemática...

---

[137] DAVIS, P. J. e HERSH, R. , 1988, p. 219

Prof.: No livro *O escândalo da Geometria*, Julio Cesar de Mello e Souza afirma que Lobatschewski foi um verdadeiro Copérnico da geometria. Aliás, as geometrias não-euclidianas parecem adequar-se muito bem ao modelo das revoluções científicas criado por Khun. Mas voltemos um pouco atrás em nossa discussão. Quando *C* afirmou a impossibilidade de representação das geometrias não-euclidianas, eu neguei tal impossibilidade.

C: Eu achei muito estranha aquela sua colocação. Já vimos como os criadores das novas geometrias dispensaram a visualização. Depois da fala do *B*, sobre o que seria a representação para Kant, entendi que você não estava se referindo a uma representação visual, mas a outro tipo de representação.

Prof.: Você está enganado. Minha asserção dizia respeito à representação visual. Lobatschewski e Bolyai reduziram a questão da consistência de suas geometrias à da Análise Real. Porém, depois deles vários matemáticos criaram modelos para a geometria não-euclidiana. Tais modelos permitem uma visualização dos fatos da geometria hiperbólica.

A: Geometria hiperbólica?

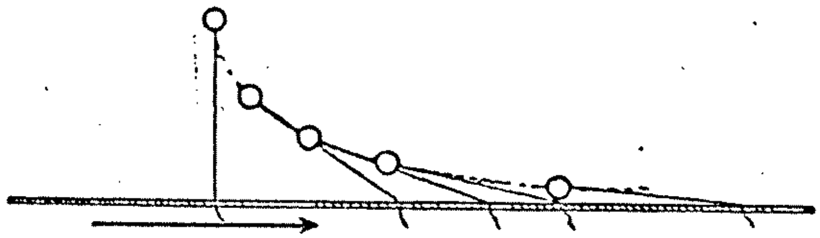
Prof.: É o outro nome dado à geometria desenvolvida por Lobatschewski e Bolyai. Esse nome deve-se ao modelo criado por Eugenio Beltrami (1835-1900), matemático italiano. Beltrami, em seu livro *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea,* de 1868, propôs o primeiro modelo para essa geometria, denominado pseudo-esfera.

B: Pseudo-esfera?

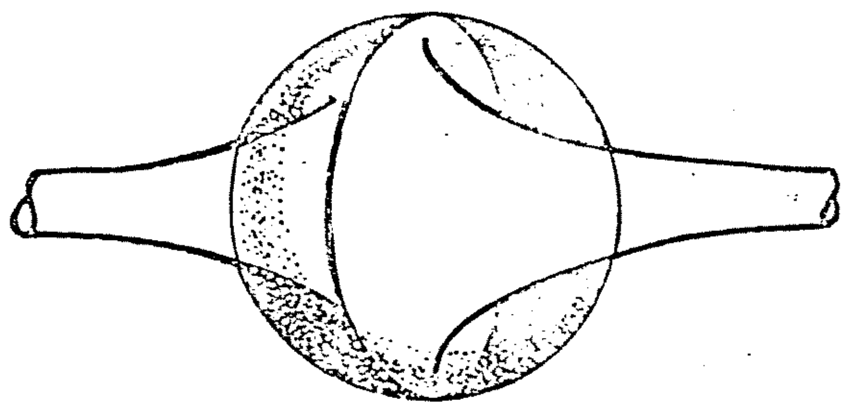
Prof.: Vocês sabem o que é uma tractriz?

C: A tractriz foi imaginada por um médico francês, Claudio Perrault (1613-1688), que a apresentou sob forma de um problema: qual seria a curva descrita por um ponto pesado preso ao extremo de um fio, supondo que o outro extremo desse fio percorresse uma reta fixa? Essa curva não pode ser construída com régua e compasso, mas Huyghens descobriu várias formas mecânicas para desenhá-la. Leibniz reconheceu uma propriedade notável dessa curva: "a porção da tangente, num ponto M, compreendida entre esse ponto e a reta fixa é de comprimento constante".

Prof.: Farei na lousa o esboço de uma tractriz.



Pois bem, imaginem esta curva girando ao redor de suas assíntotas. No fim da rotação completa ela vai gerar uma superfície de revolução, ilimitada, conhecida pelo nome de pseudo-esfera.



D: Qual a relação entre esta superfície esquisita e a esfera?

Prof.: Elas possuem várias propriedades em comum. Por exemplo, vamos chamar de raio da pseudo-esfera, ao raio do círculo de Beltrami da superfície. A área da pseudo-esfera é igual à área de uma esfera que tenha o mesmo raio.

A: Uma superfície infinita de área finita?!? A cada momento, isso está ficando mais parecido com um mundo fantástico.

C: O volume da pseudo-esfera também é igual ao da esfera?

Prof.: Não. Se o volume da esfera for *V*, o volume da pseudo-esfera será $\frac{1}{2}V$. Outro modelo interessante foi o proposto por Poincaré, em 1882.

A: Esse Poincaré é o mesmo que sustentava como critério de verdade a simplicidade?

Prof.: É ele mesmo. Poincaré reduz a consistência da geometria hiperbólica ao da euclidiana. Dessa maneira, Poincaré reduz o problema da consistência da geometria não-euclidiana à da euclidiana. É um modelo bastante simples de compreender. Vamos examiná-lo. Segundo ele, o plano de Lobatschewski consiste dos pontos que estão de um mesmo lado de uma reta, ou seja, o plano de Lobatschewski é um semi-plano euclidiano. O semi-plano de Poincaré é a região do plano euclidiano-cartesiano determinado pelos pontos de ordenada positiva. Os objetos geométricos dentro dessa região aos quais chamaremos de L-retas são:

(I) a interseção de retas (euclidianas) perpendiculares ao eixo das abscissas com o semi-plano.

(ii) a interseção de circunferências cujos centros pertencem ao eixo das abscissas com o semi-plano.

Observemos que os pontos da abscissa não estão no semi-plano. Segundo esse modelo, esses pontos estão no infinito ou são imaginários. Como podemos mostrar que por dois pontos do plano de Lobatschewski passa uma e somente uma L-reta?

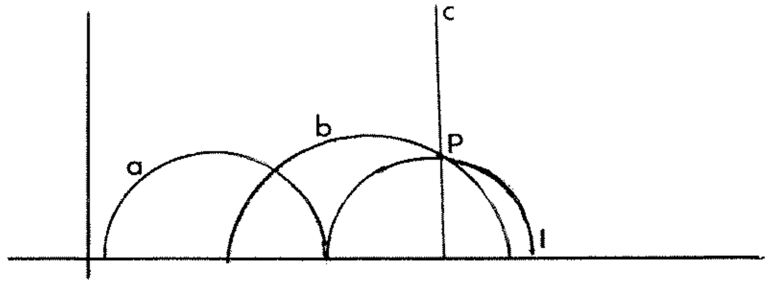
_ ...

C: No caso das abscissas serem iguais, teremos uma reta euclidiana que une os dois pontos da L-reta. Formaremos uma L-reta do primeiro tipo exposto por você.

B: Se as abscissas não forem iguais, podemos ligá-las com um segmento de reta euclidiano e determinar a mediatriz desse segmento. A intersecção da mediatriz com o eixo das abscissas será o centro da semi-circunferência, ou seja, da L-reta do segundo tipo.

Prof.: Ótimo! Vamos fazer um esboço do plano de Lobatschewski na lousa.

(lousa)



Percebam que dada uma L-reta ***a***, e um ponto ***P*** não pertencente a ela, podemos construir um feixe de retas que passam por esse ponto. Distinguimos três tipos de posição das retas desse feixe em relação à reta ***a:*** as retas secantes, como por exemplo ***b***; as hiperparalelas, neste nosso desenho, a reta ***c;*** e as paralelas, no caso, ***l***.

B: Por meio do modelo de Poincaré, fica fácil visualizar as retas paralelas se encontrando no infinito, já que os pontos pertencentes ao eixo das abscissas estão no infinito.

A: Só assim mesmo para conseguir visualizar uma coisa dessas. Nem o modelo de Beltrami nos fornece tal visualização.

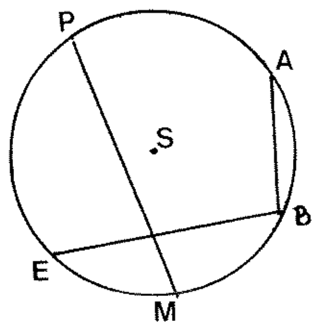
C: Eu consigo visualizar retas paralelas se encontrando no infinito pelo modelo de Beltrami. É só imaginar retas assintóticas.

A: Retas assintóticas vão se aproximando infinitamente, mas daí a dizer que você consegue visualizar a intersecção entre elas, há uma grande distância, *C.* Diria, até, uma distância infinita...

D: Concordo com *A.* O modelo de Poincaré é a única maneira que temos para visualizar retas paralelas se encontrando no infinito.

Prof.: Há outras formas interessantes de visualizarmos duas retas paralelas se encontrando no infinito. Uma delas é fornecida pelo modelo de Felix Klein (1849-1925). Klein, como Poincaré, propõe uma convenção para interpretar a geometria hiperbólica no plano euclidiano. O modelo é o seguinte: tracemos um círculo de raio **R.**

(lousa)



Admitimos as seguintes definições para plano, ponto e reta, no sentido de Lobatschewski:

Plano é o conjunto dos pontos do círculo de raio **R,** isto é, a porção do plano ocupada pelo círculo será um plano.

Ponto é todo ponto interior ao círculo. Por exemplo, o ponto **S.**

Ponto do infinito é qualquer ponto da circunferência. Por exemplo, o ponto **A.**

Reta é qualquer corda do círculo. Por exemplo, AB.

Paralelas são aquelas cuja intersecção está sobre a circunferência. AB e EB são paralelas.

Retas secantes são aquelas que se cortam no interior do círculo. Neste nosso exemplo, MP e EB são retas secantes.

Retas hiperparalelas são as que não se encontram, nem no interior do círculo, nem sobre a circunferência. No nosso desenho, MP e AB são hiperparalelas.

B: Realmente, esse modelo também nos fornece uma interpretação simples da geometria não-euclidiana, além de uma fácil visualização. Mas, professora, você falou de outras formas de visualização. Qual seria uma outra?

Prof.: Aquela utilizada pelos artistas plásticos e arquitetos do século XV.

_ !!!

D: Desculpe-me, professora, mas acho que você está enganada. Não seriam os artistas do século XIX ou XX?

Prof.: Não, *D,* não estou enganada. Os artistas aos quais me refiro viveram nos séculos XV e XVI. Aliás, para ser mais precisa, esses artistas foram buscar nos arquitetos do século I d.C., por exemplo em Vitrúvius, tal modelo.

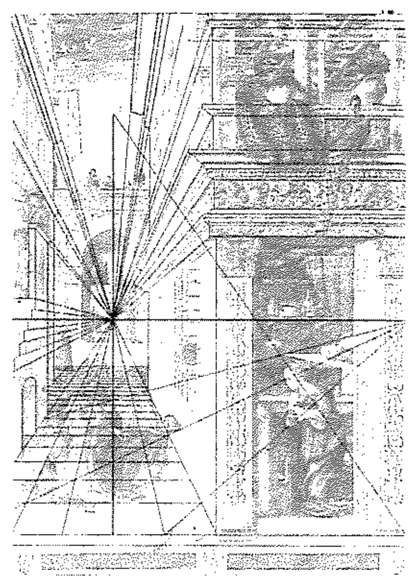
A: Cara professora, você está afirmando que os artistas plásticos e os arquitetos do século XV já possuíam um modelo para a geometria não-euclidiana, mesmo antes dela ser inventada?

Prof.: Não apenas tinham um modelo para essa geometria, como, também, se utilizavam dela em suas obras[138].

B: Professora, você quer nos fazer acreditar que nos quadros renascentistas, como por exemplo, na *Última Ceia* de Da Vinci, há geometria não-euclidiana? Sem querer ser indelicado, acho que você está precisando de férias.

Prof.: Sabia que vocês reagiriam assim, por isso trouxe uma fotografia de um quadro renascentista e o estudo sobre as paralelas que aparecem neste quadro. Trata-se de *A anunciação, com Santo Emidius* (1486) de Carlo Crivelli. Aqui está ela, o que vocês têm a dizer?

Esse é o estudo das paralelas do quadro



[138] Não estamos afirmando, aqui, que os artistas renascentistas tinham consciência de que a geometria utilizada por eles para representar a perspectiva era não-euclidiana. Voltaremos a esse assunto alguns parágrafos adiante.

E esta é a fotografia do quadro:

_!!!

C: Todas as paralelas do quadro as quais estão na direção que representa a profundidade se encontram num mesmo ponto!

A: Realmente, todas se encontram no ponto de fuga.

Prof.: Os artistas chamavam esse ponto de ponto no infinito.

D: Então, os artistas do Renascimento são os verdadeiros inventores das geometrias não-euclidianas?

Prof.: Não podemos afirmar isto. Não há dúvida de que eles utilizavam-se de uma geometria na qual as retas paralelas se encontram no infinito, porém, para eles, tratava-se da geometria euclidiana. Além disso, as geometrias não-euclidianas enquanto sistema axiomático só surgiram com Gauss, Lobatschewski e Bolyai.

B: Como os artistas renascentistas tiveram esta idéia genial para representarem retas paralelas?

A: Pelo que entendi, eles não tiveram a idéia genial, mas buscaram-na nos trabalhos dos gregos da Antiguidade.

C: Não acredito que os trabalhos de Leonardo da Vinci, ou de Rafael possam reduzir-se a cópias dos trabalhos de arquitetos gregos. Os artistas dos séculos XV e XVI possuíam uma formação universal. Eram contratados por príncipes, comerciantes e papas para realizarem todo tipo de tarefa, desde a criação de pinturas até palácios, igrejas e máquinas de guerra. "Como conseqüência, viam-se obrigados a aprender matemática, física, arquitetura, engenharia, escultura em pedra, trabalho com metais, anatomia, trabalho em madeira, óptica, estática e hidráulica. Realizaram trabalhos manuais, porém também se ocuparam com problemas abstratos"[139]. Já vimos a importância que os trabalhos técnicos e manuais adquiriram nesta época, a ponto dos cientistas buscarem conhecimentos que pudessem ser utilizados por artífices e navegadores.

D: O Renascimento significou, para os italianos, um verdadeiro nascer de novo, após um período de estagnação econômica e social. "Os italianos tinham plena consciência de que, no passado distante, a Itália, tendo Roma por capital, fora o centro do mundo civilizado, e de que seu poder e glória se dissiparam quando as tribos germânicas, os godos e os vândalos invadiram o país e desmantelaram o Império. A idéia de um renascimento associava-se, na mente dos romanos, à idéia de uma ressurreição da 'grandeza de Roma'. O período entre a Idade Clássica, para a qual voltaram os olhos com orgulho, e a nova era de renascença, que aguardavam com esperança, era meramente um melancólico interregno, 'O Período do Intermédio'. Assim, a idéia de uma renascença foi responsável pela concepção de

---

[139] KLINE, M., 1972, p. 312.

que o período interveniente era uma Idade Média - e ainda usamos esta denominação."[140]

Prof.: Florença, próspera cidade mercantil, foi o local onde essa esperança mostrava-se mais intensamente. Nas primeiras décadas do século XV, surgiu nessa urbe um grupo de artistas dispostos a romper com os padrões artísticos da Idade Média. Foram inspirar-se na arte clássica dos gregos e romanos, porém o objetivo era ir muito além: criar uma nova arte. O escultor e arquiteto florentino Filippo Brunelleschi (1377 - 1446) foi o pioneiro desse grupo de artistas. Ao ser chamado para projetar igrejas e outras construções, Brunelleschi "decidiu descartar inteiramente o estilo tradicional e adotar o programa daqueles que ansiavam por um renascimento da grandeza romana. Consta que viajou para Roma com o objetivo de estudar as ruínas de templos e palácios, e de fazer esboços de suas formas e ornamentos. Jamais foi sua intenção copiar literalmente esses antigos edifícios. Seria muito difícil adaptá-los às necessidades da Florença quatrocentista. O que Brunelleschi tinha em mente era um novo processo de construção, em que as formas da arquitetura clássica fossem livremente usadas para criar novos modos de harmonia e beleza"[141]. Para realizar seus intentos, estudou a perspectiva utilizada pelos arquitetos da Antiguidade, a geometria de Euclides e óptica. Outro grande nome da utilização da geometria para o desenho de perspectivas foi o arquiteto, artista, antiquário e homem de letras, Leone Battista Alberti (1404-1472). Alberti apresentou suas idéias nos livros *Della Pittura* (1435), obra de característica profundamente matemática, na qual também é incluído algo de óptica e *Ludi Mathematici* (1450), que contém estudos sobre lançamento de projéteis em artilharia. Concebeu o princípio matemático que se converteria na base do sistema matemático de perspectiva adotado e aperfeiçoado por seus sucessores. A idéia básica do sistema de perspectiva é o princípio de projeção e seção. "Uma cena real é vista por um olho, considerado como um ponto. As linha de fuga desde vários

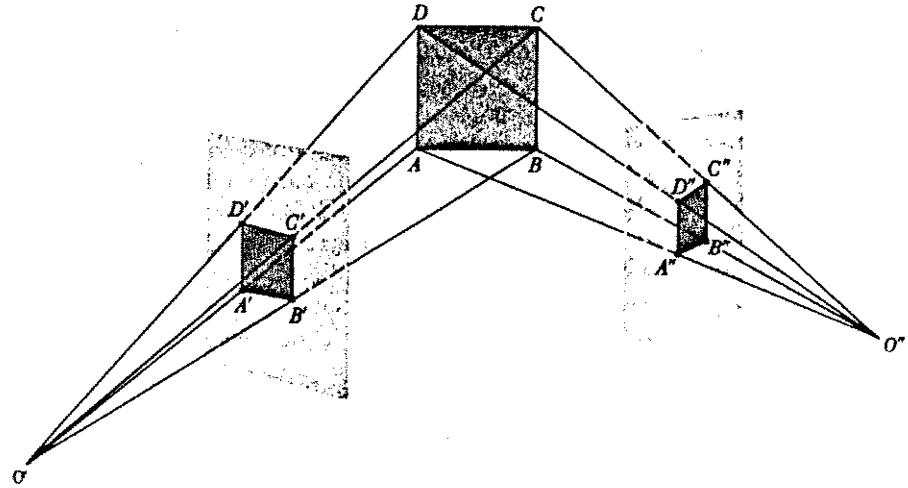
---

[140] GOMBRICH, E. H., 1993, p. 167, 168.

[141] Ibidem, p. 169.

pontos da cena até o olho constituem uma projeção. Segundo este princípio, a pintura deve conter uma seção de tal projeção, formada pelo que apareceria no plano que passasse através da projeção"[142].Seria algo como este desenho:

(lousa)



Podemos notar que a partir de O e de O' temos duas possíveis pinturas de uma mesma cena.

A: Não consigo perceber em quê o estudo de geometria pôde ajudar esses pintores do Renascimento. Há relações entre o retângulo original e a seção? Quais propriedades geométricas as duas seções têm em comum?

Prof.: Excelentes problemas, *A*. Essas questões, colocadas pela técnica da perspectiva levou muitos artistas do século XVII a estudarem geometria para tentar respondê-las e ao fazê-lo, inventaram um novo tipo de geometria: a projetiva.

A: São essas relações as estudadas pela geometria projetiva? Não sabia. Para ser sincero, nunca consegui entender muito bem qual a diferença entre geometria projetiva e euclidiana.

Prof.: Segundo Bkouche[143], podemos dizer que a geometria projetiva tem dois objetivos:o primeiro é dar métodos para representar sobre um plano todos os corpos de natureza tridimensional. O segundo é fornecer métodos para reconhecer, após uma descrição exata, as formas, e deduzir as propriedades e posições destas formas.

---

[142] KLINE, M., 1972, p. 382.

[143] BKOUCHE, 1982, p.21.

Os geômetras da Renascença, como você, *A*, consideraram os resultados obtidos pela geometria projetiva como sendo parte da geometria euclidiana. Aliás, a denominação - geometria projetiva - surgiu somente no século XIX, quando percebeu-se que estes estudos faziam parte de um novo ramo da matemática. A primeira grande obra de geometria projetiva foi o *Tratrado das propriedades projetivas das figuras,* escrito por Poncelet em 1822.

C: Parece que já ouvi essa história antes...

Prof.: Segundo Morris Kline[144], Girard Desargues (1591-1661) foi o primeiro a estudar os problemas colocados pela técnica de desenhar em perspectiva. Desargues era oficial do exército, engenheiro e arquiteto. A grande preocupação desse grande matemático era melhorar a formação e as técnicas dos artistas, arquitetos e escultores. A teoria pura interessava-lhe pouco. Foi ele quem inventou a terminologia - ponto no infinito - para indicar o ponto onde duas retas ***a*** e ***b***, paralelas, se encontram. Segundo Desargues, dadas duas retas paralelas, esse ponto no infinito devia ser considerado como um ponto a mais, além dos pontos usuais no qual elas se encontram. Além disso, qualquer paralela a ***a*** e ***b*** devia contê-lo e cortar, nele, ***a*** e ***b***. Contudo, apesar dos estudos de Desargues, os trabalhos definitivos sobre perspectiva foram escritos muito mais tarde por Brook Taylor e J. H. Lambert.

C: O estudo da geometria tinha, no Renascimento, uma outra razão de ser. Os artistas, assim como os físicos deste período, acreditavam em uma geometria perfeita subjacente na criação de Deus. Para eles a arte podia levar ao conhecimento dessa criação. Daí, toda a preocupação com uma arte que se aproximasse cada vez mais da realidade. A perspectiva teve um papel crucial nessa busca por uma representação fiel da natureza.

D: Não podemos generalizar dessa maneira a arte do Renascimento. Apesar de utilizarem os mesmos métodos, as obras dos artistas italianos e a dos setentrionais não tinham o mesmo objetivo. Os italianos procuravam expressar a perfeição do belo

---

[144] KLINE, M., op. cit., p. 384-392.

existente na natureza e, para isso, utilizavam-se da perspectiva e de proporções precisas. Já, os artistas ao norte dos Alpes utilizavam-se das grandes descobertas italianas somente na medida em que essas auxiliavam na concretização de uma grande arte religiosa. A beleza, para eles, não era entendida no mesmo sentido dado a ela pelos italianos. Para compreender melhor o que estou dizendo, comparem a obra de Leonardo da Vinci com a de Hieronymus Bosch. Ambas são grandiosas, da mesma época. Porém enquanto Leonardo procurava uma representação plausível do que podemos ver na natureza, Bosch mostrou que as técnicas de pintura descobertas pelos italianos "podiam ser invertidas para nos darem uma imagem igualmente plausível de figuras que nenhum olho humano jamais vira. Bosch ficou famoso por suas assustadoras representações das forças do mal"[145]. De qualquer maneira, fosse para exibir uma cena vista pelos olhos da razão, ou uma percebida pelos olhos do delírio, o espaço representado nas obras renascentistas era matematicamente controlado. Somente a partir do século XVIII, os artistas começaram a questionar a necessidade do aparato geométrico nas obras de arte. O poeta e pintor William Blake (1757-1827) foi um dos primeiros a se rebelar contra a função limitadora da matemática e da ciência, entendendo essas disciplinas como inimigas da inspiração religiosa e poética.

C: Agora compreendo a citação de Frege com a qual você, professora, iniciou nosso curso.

B: É notável que a revolta de Blake tenha ocorrido exatamente na época que tanto o rigor como as verdades matemáticas estavam sendo questionados.

Prof.: Ótima observação, *B.* Gostaría de voltar um pouco aos trabalhos de Alberti. Alison Cole em seu livro *Perspective*[146] observa que os métodos desenvolvidos por Alberti podem ter sido baseados particularmente sobre as técnicas utilizadas pelos elaboradores de mapas e pelos agrimensores. É interessante notarmos que a

---

[145] GOMBRICH, E. H., 1993, p. 275, 276.

[146] COLE, A., 1992, p. 13.

elaboração de mapas também serviu para estimular investigações sobre as projeções geométricas. "As explorações geográficas haviam revelado a inadequação dos mapas existentes. Ao mesmo tempo, eram desvelados novos conhecimentos geográficos. A nova confecção e impressão de mapas haviam começado na segunda metade do século XV em centros como Amberes e Amsterdam. O problema da confecção de mapas surge do fato de que uma esfera não pode ser cortada, aberta e estendida sobre um plano sem distorcer as distâncias. Ademais, as direções (ângulos) ou áreas, ou ambos, podem distorcer-se também. O método novo mais significativo de confecção de mapas se deve a Gerard Kremer, conhecido também como Mercator (1512-1594), que dedicou sua vida à ciência. Em 1569 publicou um mapa utilizando a famosa projeção de Mercator. (...) Apesar de nenhuma grande idéia matemática ter surgido dos trabalhos de elaboração de mapas no século XVI, o problema voltou a ser considerado mais tarde por outros matemáticos, levando-os a trabalhar em geometria diferencial"[147]. Alguns séculos mais tarde, ao estudar a geometria diferencial, Gauss reestruturou-a a partir da idéia de curvatura de superfície. Em seu livro *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* publicado em 1827, concluía que a esfera tem curvatura constante igual a $1/r^2$, onde r é o raio da esfera. O cilindro e o plano têm curvatura zero. A superfície encontrada por ele como exemplo de curvatura negativa foi uma obtida pela rotação da tractriz ao redor de seu eixo.

A: A pseudo-esfera!

Prof.: Isso mesmo. A importância da pseudo-esfera para as geometrias não-euclidianas é de fornecer-lhes um modelo de superfície na qual não há pontos singulares. A descoberta de uma superfície homogênea na qual é válida a geometria hiperbólica acabou com todas as possíveis objeções matemáticas à essa nova geometria. Mas, como vimos, a pseudo-esfera foi pensada, primeiramente, não em conexão com a geometria de Lobatschewski, mas nos estudos de geometria diferencial realizados por Gauss. Alguns anos mais tarde Beltrami utilizou-a como modelo para a nova geometria.

[147] KLINE, M., 1972, p. 316-318.

D: Se entendi direito sua explicação sobre curvatura, podemos concluir que a geometria realizada sobre a pseudo-esfera é diferente da realizada sobre o plano ou sobre o cilindro, e ambas diferem daquela realizada sobre a esfera. Então eu tinha razão! Pode-se inventar uma geometria sobre a esfera e esta será diversa da euclidiana!

A: Grande coisa! No meio de todas as geometrias que, hoje, vimos serem possíveis, uma a mais não faz a menor diferença.

Prof.: Claro que uma a mais faz diferença! Perceber que podemos ter geometrias construídas em superfícies de três tipos diferentes de curvatura possibilita uma síntese importante. É a partir dessa síntese que podemos falar em *geometrias* não-euclidianas. O matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), discípulo de Gauss, foi o primeiro a realizar tal síntese.

C: Bem, se na geometria euclidiana, por um ponto fora de uma reta podemos traçar somente uma reta que não intercepta a reta dada; se na hiperbólica, por um ponto fora de uma reta pode-se traçar infinitas retas que não cortam a reta dada; então nesta geometria sobre a esfera, não existe nenhuma reta que passe por um ponto fora de uma reta dada que não a encontre.

B: Mas não pode haver uma geometria sobre a esfera. Tal geometria equivale à hipótese do ângulo obtuso, já estudada por nós. Vimos que tal hipótese contradiz o segundo postulado de Euclides.

Prof.: Riemann também pensou nisso. Na geometria sobre a esfera, as retas não são infinitas e o segundo postulado não é válido. Riemann parte do primeiro, do terceiro e do quarto postulados de Euclides, além de um outro que afirma que "por um ponto tomado fora de uma reta não se pode tirar nenhuma paralela a essa reta" e constrói uma geometria inteiramente lógica, concluindo, por exemplo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos.

A: Pelo que entendi, com essa síntese realizada por Riemann, não faz o menor sentido colocarmos o problema da realidade do espaço dentro da matemática.

Prof.: Exatamente. Com as geometrias não-euclidianas tem-se a rejeição do problema sobre a realidade do espaço. Vimos a dificuldade encontrada por Lobatschewski para determinar, empiricamente, qual dos espaços corresponderia à estrutura física do mundo: o euclidiano ou o hiperbólico. A partir das investigações de Riemann, precisou-se reconhecer que o espaço não é nem real, nem irreal, embora possa, em algumas determinações métricas, ser empregado na descrição da realidade.

C: Que ótimo! Acabou nosso problema com relação à realidade do espaço! Que tal se agora estudássemos alguns teoremas das geometrias não-euclidianas?

B: Não vai dar tempo. Nossa aula está acabando.

D: E hoje é nosso último encontro...

Prof.: Ora, não se preocupem. Vocês têm autonomia suficiente para estudarem, sozinhos, os fatos das geometrias não-euclidianas.

A: Isso é verdade. Qual será o tema de nosso próximo curso?

Prof.: Próximo curso?!? Qual próximo curso?

D: Você ainda não planejou um curso para o próximo semestre?

Prof.: Não. O que vocês sugerem como tema?

B: Geometria analítica

A: Geometria projetiva.

.*C:* Geometria diferencial.

D: Cálculo diferencial.

Prof.: Temas muito interessantes, esses propostos por vocês. Vou pensar. Bem, até qualquer dia destes...

CAPÍTULO IV
ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

"A questão política para o intelectual
não é o erro, a ilusão, a consciência alienada,
ou a ideologia; é a própria verdade."

Michel Foucault, 1984.

Algumas considerações podem ser tecidas a partir da leitura do texto precedente, já que ela coloca, ao leitor, questões de diferentes naturezas.

Um primeiro tipo de questão, refere-se ao caráter histórico desse estudo. Podemos perguntar, por exemplo: qual o método de reconstituição histórica foi escolhido para elaborar aquele texto? Quais tipos de documentos foram utilizados nessa reconstituição?

Um segundo tipo de indagação, de natureza pedagógica, diz respeito ao sentido a dar a um empreendimento que visa à reconstituição histórica de um tema - no caso, o surgimento das geometrias não-euclidianas - com fins pedagógicos, ou seja, o que significa uma reconstituição histórica com fins pedagógicos?

Pode-se fazer uma pergunta que não esteja contemplada pelas duas anteriores: a quem se destina essa dissertação?

A seguir, faremos uma rápida exposição com o intuito de responder essas possíveis perguntas.

Teceremos, primeiramente, algumas considerações sobre o caráter histórico desse trabalho, para, em seguida, fazer uma discussão sobre sua natureza pedagógica. Finalizaremos essa discussão fazendo algumas referências a respeito do público alvo dessa dissertação.

I. *Sobre o histórico*

1. As reconstituições racionais da história

No livro *La metodologia de los programas de investigación científica,* Lakatos[148] analisa o que chama de **recontituições racionais da história da ciência** e suas relações com as diferentes posturas filosóficas dos investigadores.

Uma reconstituição racional da história da ciência é uma história interna da mesma. Para esta maneira de reconstituição, a história externa é secundária. As reconstituições racionais da história da ciência, analisadas por Lakatos, trazem implícitos os pontos de vista filosóficos do indutivismo, do convencionalismo, do falsacionismo metodológico e da metodologia dos programas de investigação científica.

Exporemos, aqui, de modo abreviado algumas características destas reconstituições e as críticas mais usuais feitas a elas por alguns autores, dentre eles, o próprio Lakatos.

A reconstituição **indutivista** baseia-se numa postura fundamentalmente céptica perante a ciência, que consiste na crença que uma proposição científica que não foi provada é pseudo-científica. O historiador indutivista só aceita duas classes de descobrimentos científicos genuínos: as proposições factuais sólidas e as generalizações indutivas. Somente estas constituem a espinha dorsal da história interna da ciência. Neste modo de reconstituição histórica, é negado o caráter científico aos sistemas já abandonados.

Um exemplo de explicação indutivista na história da matemática aparece no modo pelo qual o matemático russo Smogorzhevski[149] explica o surgimento da noção abstrata de retângulo:

"A pátria da geometria são os países do Antigo Oriente de onde, há varios milênios e devido às necessidades de agrimensura, arquitetura e astronomia, foram elaborados importantes princípios de aspecto prático para a medição de ângulos, áreas de algumas figuras e volumes dos corpos mais simples. Estes princípios se elaboraram empiricamente por vias práticas e, pelo visto, se transmitiram oralmente:

148 LAKATOS, I ., 1989.
149 SMOGORZHEVSKI, A. S.,1978 , p. 43

nos textos matemáticos que chegaram até nós achamos frequentemente aplicações dos princípios geométricos, mas não encontramos tentativas de formulá-los.

Com o tempo, quando se ampliou o círculo dos objetos aos quais se aplicavam os conhecimentos geométricos adquiridos, tornou-se clara a necessidade de formular os princípios geométricos em sua forma mais geral, fato esse que determinou a passagem da geometria de conceitos concretos à geometria de conceitos abstratos. Assim, por exemplo, o princípio elaborado para medir a área de uma parcela retangular de terra mostrou ser apto para medir a área da superfície de uma parede, etc... e, como resultado, surgiu a noção abstrata de retângulo." (1978, p. 43)

Outra explicação indutivista na história da matemática, agora no que diz respeito aos conceitos geométricos elementares, é fornecida por H. Eves, no Tomo I de seu livro *Estudios de la geometria*[150]. Segundo este autor, a observação pura e simples por parte do Homem primitivo do contorno do Sol, da Lua, do arco-íris, das corolas de muitas flores conduziu à concepção de círculo. Ou seja, a partir da observação de muitas formas parecidas, o homem foi induzido a criar o conceito de círculo.

Esta explicação baseia-se na crença que o Homem teria sido dotado de uma capacidade inata de perceber ordem, regularidades e semelhanças num universo físico de formas caóticas.

Segundo Gerdes[151], poderíamos endereçar as seguintes perguntas à forma de visão apresentada por H. Eves: "Como é que o Homem sabe quais são as formas que possuem um caráter ordenado? Ou melhor, por que e como o Homem aprende, necessariamente, a descobrir ordem na natureza? Por que certas formas simétricas (como o círculo, o quadrado, o pentágono regular, etc) teriam tido o poder de chamar a atenção do Homem mais do que outras? A noção de simetria foi apreendida pelo Homem pela mera observação das formas simétricas presentes na

---

[150] EVES, H. , 1963 p. 2.

[151] GERDES, P., 1987, p. 15.

natureza ou, ao contrário, somente após formas simétricas terem sido elevadas ao status de 'boas formas'e de 'belas for-mas' nas tarefas cotidianas de se produzir um artefato, é que o Homem aprendeu a ver a simetria de certas formas naturais?".

Parece-nos muito difícil responder a estas questões sem recorrer à história externa da ciência.

A dificuldade apontada no parágrafo anterior vai ao encontro das críticas feitas por Lakatos ao indutivismo como teoria interna da racionalidade da história da ciência. Segundo este autor, para explicar a eleição de fatos científicos, a reconstituição histórica indutivista recorre à história externa. Por isso, segundo Lakatos, o indutivismo é compatível com muitas teorias externas ou empíricas complementares, não podendo, portanto, ser considerada uma reconstituição racional da história.

Uma segunda forma de reconstituição racional da história do conhecimento científico baseia-se no ponto de vista filosófico do **convencionalismo**. O historiador convencionalista permite a construção de qualquer sistema que organize os fatos em algum todo coerente. Porém, o convencionalista não considera nenhum sistema científico como verdadeiro por ter sido provado, mas somente verdadeiro por convenção (ou possivelmente nem verdadeiro, nem falso). Segundo esta corrente, o progresso teórico é somente uma questão de conveniência (simplicidade) e não de conteúdo de verdade.

A escolha do historiador convencionalista recai, fundamentalmente, sobre os sistemas científicos mais simples. O eixo central de sua história interna está nas complicações dos sistemas e em suas substituições por outros mais simples. A história racional convencionalista não nega o caráter científico a sistemas já abandonados.

Na história da matemática podemos perceber a postura convencionalista através de Poincaré. Para exemplificar, citaremos um trecho do livro *Los* *fundamentos de la geometria*[152], - já citado no corpo da dissertação - no qual Poincaré faz a exaltação à simplicidade dos sistemas. Diz ele:

"Sem dúvida, a razão tem suas preferências, porém estas preferências não têm um caráter imperativo. Tem suas preferências pelo mais simples, porque entre todas as coisas equivalentes, a mais simples é a mais cômoda. Assim, nossas experiências seriam igualmente compatíveis com a geometria de Euclides e com a geometria de Lobatchewski, que supunha a curvatura do espaço muito pequena. Escolhemos a geometria de Euclides, porque é a mais simples." (p. 99)

Outro exemplo de explicação convencionalista na história da matemática pode ser encontrado na seguinte passagem do livro *Conceitos fundamentais da matemática*[153], de Bento Jesus Caraça, na qual o autor discute a 'fórmula' de resolução de uma equação de terceiro grau encontrada pelos algebristas italianos do início do século XVI:

"Como o leitor vê, a questão complica-se porque as fórmulas de resolução se tornam, à medida que o grau aumenta, cada vez menos manejáveis. Esta complicação atinge porém, em graus diferentes, um matemático teórico e um prático - o primeiro procura, antes de tudo, as possibilidades e, dentro delas, por um critério de *estética*, ama a *simplicidade*; o segundo, por um critério de *economia de trabalho*, procura processos expeditos de cálculo." (Caraça, 1978, p. 160, grifos do autor e que seriam nossos se não fossem dele).

Este modo dicotômico, subjetivo e arbitrário de associar e universalizar o critério estético da simplicidade ao trabalho do matemático teórico e o critério pragmático de economia e esforço à atividade do matemático prático é, além de discutível, surpreendente por ter sido utilizado - ainda que localmente - por um dos raros matemáticos historiadores que tentou escrever a história da matemática adotando, conscientemente, o ponto de vista filosófico do materialismo histórico dialético.

---

152 POINCARÉ, H. e EINSTEIN, A. (s/d)

153 CARAÇA, B. J.,1978.

A principal crítica feita por Lakatos aos hitoriadores convencionalistas refere-se, exatamente, ao modo como estes elevam o critério estético da simplicidade a um grau de universalidade, a fim de utilizá-lo como uma explicação histórica dotada de cientificidade. Segundo ele, as comparações em termos de simplicidade intuitiva seriam ilegítimas para uma reconstituição racional da história da ciência, já que dependem de gostos subjetivos.

Na década de trinta de nosso século, Popper mostrou que não era possível, nem necessário, justificar as leis da ciência por meio do raciocínio indutivo. A tese defendida por ele era a de que as teorias científicas não são construídas indutivamente a partir de fatos concretos observáveis. Ao contrário, são inventadas como hipóteses, conjecturas e só após isto são submetidas a testes experimentais com os quais se tenta refutá-las. Se sobreviverem, adquirem um certo grau de credibilidade e são consideradas experimentalmente estabelecidas, mas nunca são demonstradas.

Deste modo, Popper desenvolveu o **falsacionismo** contemporâneo, uma crítica lógica e epistemológica ao indutivismo e ao convencionalismo, e a essa nova postura filosófica perante a ciência associa-se uma terceira forma de reconstituição racional da mesma. Como seria de se esperar, o historiador falsacionista, ao reduzir o empreendimento científico a um conjunto de teorias falsáveis, acabará realizando uma reconstituição histórica da ciência que enfatizará a descrição e análise dos chamados "experimentos cruciais", isto é, experimentos nos quais fica demonstrado a falsabilidade de uma determinada teoria científica. A história interna popperiana pode ser complementada com teorias externas da história.

Não conseguimos um exemplo de uma reconstituição falsacionista da história da matemática.

Segundo Lakatos, uma pergunta que pode ser feita ao falsacionismo é: por que os cientistas entendem que os experimentos cruciais são positivos e verificadores ao invés de negativos? Além disto, segundo ele, esta forma de reconstituição histórica não pode ser considerada racional, já que pode ser complementada com teorias externas da história.

A reconstituição racional da ciência realizada pela **metodologia dos programas de investigação científica** foi a alternativa de Lakatos frentes às três anteriormente caracterizadas. Segundo ela, as grandes conquistas científicas são programas de investigação que podem ser avaliados em termos de transformações progressivas e regressivas de um problema, as revoluções científicas consistem em como um programa de investigação supera outro. O historiador que aceita esta metodologia como guia, busca na história da ciência programas de investigação rivais e mudanças progressivas e regressivas de problemáticas. Esta metodologia deve ser acompanhada pela história empírico-externa. Lakatos afirma que "uma forma de indicar as discrepâncias entre a história e sua reconstituição racional é relatar em notas de rodapé os 'desajustes' da história real em relação a sua reconstituição racional"[154].

Lakatos utiliza-se de sua metodologia dos programas de investigação científica no livro *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*[155], onde analisa o desenvolvimento da fórmula de Euler-Descartes. Neste livro, o texto contém o que o autor chama de "história destilada", ou seja, uma reconstituição racional da história, enquanto a história real aparece, segundo Lakatos, completamente confinada às notas de rodapé.

Uma passagem da introdução de *Provas e refutações* é especialmente interessante para explicitar a diferenciação feita por Lakatos entre "história destilada" e "história real": "a forma dialogada (do estudo de caso) deve refletir a dialética do caso; significa conter uma espécie de racionalidade reconstruída ou história 'destilada'. A verdadeira história aparecerá nas notas de rodapé de página, a

---

[154] LAKATOS, I., op. cit. p. 156

[155] LAKATOS, I , 1978.

maioria das quais, portanto, deve ser tomada como parte orgânica deste ensaio"(1978, p. 18)

Miguel[156] analisa a concepção da história destilada de Lakatos e afirma que ela "tem por propósito a ênfase pedagógica nas idéias, nos processos e nos métodos matemáticos, desligados voluntariamente do contexto de sua produção, ainda que tal contexto desempenhe um papel de fundamental importância para a constituição da destilação."(1993, p. 101)

Ainda, segundo Miguel, "uma outra passagem é significativa para ilustrar não apenas essa dicotomia como também a crença positivista de estar realmente reconstruindo, nas notas de rodapé de página, a história verdadeira. Trata-se da nota de rodapé 141 referente a uma manifestação feita pelo aluno Pi a respeito de poliedros não-simples ou poliedros com faces circundantes."(1993, p. 101)

A nota de rodapé à qual Miguel se refere é a seguinte: "assim, a declaração de Pi, embora correta heuristicamente (isto é, verdadeira numa história racional da matemática), é historicamente falsa. (Isto não nos deve preocupar: a história real é frequentemente uma caricatura de suas reconstruções racionais)"(Lakatos, 1978, p. 115).

A "história real" encontrada nas notas de rodapé do livro *Provas e refutações* é basicamente composta por uma junção de fatos não interpretados. Como exemplo, podemos utilizar a nota de rodapé 191 na qual Lakatos refere-se à invenção do termo "polítopos" para designar vértices, arestas, faces e poliedros. Diz ela: "Schläfli descobriu que esses termos podem ser abrangidos sob um único termo abstrato (1852). Chamou-os de 'poli-esquemas'. Listing (1861) chama-os de 'curian'. Mas foi Schläfli que estendeu a generalização a mais de três dimensões."(1978, p. 145).

Entendemos que a reconstituição racional da história desenvolvida por Lakatos, ao sugerir que a história é um juntar de fatos, sem interpretá-los, e ao pretender que algo como uma "história real" possa existir, vem corroborar com a

---

156 MIGUEL, A.,1993.

tradição positivista arraigada no ensino de matemática. Lakatos esquece-se que qualquer reconstituição histórica pressupõe um sujeito. Este sujeito possui um arcabouço teórico-científico e valores sociais que determinam as escolhas dos fatos históricos a serem estudados e a interpretação dos mesmos.

Adam Schaff, em seu livro *História e verdade* , faz uma análise das diferentes correntes filosóficas que pretendem explicar o que é e como se deve realizar uma reconstituição histórica. Segundo Schaff (1974, p. 216) "não há algo como 'fatos brutos'. Estes, por definição, não podem existir. Os fatos com que lidamos na ciência [história] trazem sempre a marca do sujeito."[157] E conclui, "portanto, nenhum acontecimento se destaca por si dos outros acon-tecimentos. A importância, o significado de um acontecimento é uma quali-ficação valorizante que precisa da existência do objeto valorizado e do sujeito valorizante"(1974, p. 221).

Além dos dois fatores apontados acima, quais sejam, o paradigma[158] científico adotado pelo historiador da ciência e todos os valores sociais que fazem parte da formação deste indivíduo, outro vem interferir na produção do conhecimento histórico: a atualidade do saber.

Foucault, em seu livro *A arqueologia do saber*[159], discorre sobre a importância da atualidade do saber científico nas alterações no discurso histórico. Chama de redistribuições recorrentes, as diferentes possibilidades de reescrever a história das ciências a partir de seu conhecimento atual. "Redistribuições recorrentes que fazem aparecer vários passados, várias formas de encadeamento, várias hierarquias de importância, várias redes de determinações, várias teleologias, para uma única e mesma ciência à medida que seu presente se modifica: de maneira que as descrições históricas se ordenam necessariamente pela atualidade do saber, multiplicam-se com suas transformações e não deixam, por sua vez, de romper com

---

[157] SCHAFF, A. , 1974

[158] Estamos utilizando o termo paradigma como definido por KHUN, T. no livro A Estrutura das Revoluções Científicas - Ed. Perspectiva - SP - 1992 - p. 218: "paradigma indica toda a constelação de crenças, valores, técnicas, etc..., partilhadas pelos membros de uma comunidade determinada".

[159] FOUCAULT, M. , 1972.

elas próprias (M. Serres acaba de dar a teoria deste fenômeno no domínio das matemáticas)" (Foucault, 1972, p.11).

Podemos encontrar um exemplo dessas redistribuições recorrentes na história do surgimento das geometrias não-euclidianas. A produção dessas geometrias, no século XIX, coloca uma primordial importância histórica nos -até então quase esquecidos - trabalhos de Saccheri, os quais passam a ser um estudo obrigatório para todo o historiador que pretenda realizar uma reconstituição histórica de tal surgimento.

O filósofo Michel Serres analisa diferentes maneiras, por ele encontradas, de reconstituições históricas da Matemática. No texto "*Anamneses matemáticas*"[160], desenvolve a teoria à qual se refere Foucault na citação precedente. Para determinar essas possíveis maneiras de reconstituição histórica, Serres inicia o texto realizando um produto cartesiano entre os modelos que ele denomina de **direto** e **recorrente** com os **conexo** e **não conexo**.

Segundo Serres, "os **modelos conexos diretos** são ao mesmo tempo, os modelos tradicionais e os da tradição. Eles têm o interesse de exprimir bastante bem a temporalidade da dedução ou o encadeamento rigoroso à maneira de Descartes. No caminho linear, sem corte, é impossível passar por sobre um elo.(...) Nos **modelos conexos de recorrência**, a edificação de uma nova linguagem para uma nova comunicação perfeita, a constituição de novas idealidades, o assumir a totalidade do edifício levam o cientista a retomar na íntegra o caminho percorrido nas épocas de grandes empreendimentos sistemáticos.É por isso que o juízo de recorrência não é apenas de prática histórica, mas sobretudo de prática epistemológica."(1990, p. 17 a 20)

Os **modelos não conexos** determinam cortes horizontais segundo os padrões de rigor e o refinamento analítico das diferentes épocas. Conforme Serres, "isso designa duas arqueologias distintas: a relativa ao movimento matemático como tal, que não cessa de reativar as suas origens e de aprofundar os seus alicerces, pela

[160] SERRES, M. , 1990.

iteração da sua recorrência interior, a que separa idealidades primitivas, que não eram matemáticas e que se tornam matemáticas, a que, pouco a pouco, historiciza a pré-história e dá uma linguagem ao que estava desprovido dela (...). Por outro lado tem-se aquela que consiste em ler a pré-história em conceitos abandonados que foram matemáticos, mas já não o são, em ler a pré-história morta sobre os fósseis arrastados pela história e abandonados por ela. A primeira é a arqueologia intrínseca à ciência." (1990, p. 24)

Podemos reconhecer no segundo tipo de arqueologia derivada do modelo não conexo, a reconstituição histórica indutivista que recusa o status de científico a conhecimentos outros que não os atuais.

Em todos os modelos citados por Serres, a reconstituição histórica limita-se ao estudo da história interna da matemática, o que nos conduz, novamente, à reconstituição racional da história.

Retomando o objetivo histórico de nosso trabalho, qual seja, o estudo da possibilidade do surgimento das geometrias não-euclidianas, entendemos que, para atingi-lo, uma reconstituição racional da história mostra-se algo um tanto limitador. Já discutimos, brevemente no corpo da dissertação, uma das limitações impostas por uma reconstituição histórica que privilegie os aspectos internos aos externos no estudo do surgimento das geomentrias não-euclidianas. Naquele momento do texto, fizemos uma reflexão sobre a impossibilidade de compreendermos integralmente os trabalhos de Saccheri e Lambert, se considerássemos somente os aspectos internos à Matemática. Mas, além dessa limitação, há outro motivo pelo qual optamos por considerar como importantes, nesse estudo, aspectos externos (sócio-político-econômico-culturais) à ciência, não adotando, assim, nenhuma das reconstituições racionais da história expostas anteriormente.

Esse motivo é não aceitarmos a visão segundo a qual a matemática é um conhecimento que independe da produção social humana. Para nós, a matemática faz parte desta produção e, assim, vincula-se a outros campos do saber e às necessidades sócio-político-econômicas nos diferentes contextos sociais.

Desta forma, consideramos que as reconstituições racionais da história, não eram convenientes para alcançarmos nossos objetivos, não só pelas críticas a elas endereçadas pelos autores aqui citados, mas também por colocarem em segundo plano os fatores externos no processo de produção do conhecimento matemático.

2. Nossa opção: o método arqueológico de pesquisa histórica proposto por Foucault

Quando resolvemos considerar os aspectos externos em uma reconstituição histórica da Matemática, podemos incorrer em dois erros.

O primeiro é desconsiderar a importância dos aspectos internos na reconstituição histórica da Matemática. Tal postura, dificulta a compreensão da dinâmica interna da Matemática, como por exemplo, das mudanças históricas nos padrões matemáticos de rigor, as quais podemos perceber pela leitura dessa dissertação. Além disso, a matemática pode desenvolver-se, também, a partir de necessidades estritamente internas, pois, como afirma Fernandes[161], as necessidades internas à matemática são parte das necessidades sociais.

O segundo erro é transformar os elos de ligação entre os fatores externos e internos em relações de causa e efeito.

Para não incorrer nesses erros, pareceu-nos que o caminho a ser seguido era o de superação dessa dualidade interno/externo. Apesar de, na fala de um dos alunos (p. 124), essa separação de aspectos ter sido citada na dissertação, buscamos, na totalidade do texto, superá-la.

O referencial teórico que se mostrou mais fecundo para ultrapassar essa dualidade foi o método arqueológico de pesquisa, desenvolvido por Foucault em *A*

---

[161] FERNANDES, C. S. - "Glosas de una concepción humanista, materialista de la Historia dialéctica y de la Matemática" - in BOLEMA - especial número 2 - UNESP Rio Claro - SP - 1992 - p. 93 a 103.

arqueologia do saber[162]. Essa dissertação mostra uma tentativa de utilizar o método arqueológico de pesquisa em História da Matemática.

Segundo Foucault, "a descrição arqueológica dos discursos procura descobrir todo o domínio das instituições, dos processos econômicos, das relações sociais com os quais pode-se articular uma formação discursiva."(1972 - p. 202)

Conforme ele, o método arqueológico de pesquisa é diferente da história das idéias, pois enquanto esta busca no discurso oculto dos documentos o fim das contradições, aquele analisa o que diz o discurso, sendo que as contradições não são problemas a se transpor

A mudança de enfoque, história das idéias - arqueologia, acarreta, logo de ínicio, duas alterações básicas no método de pesquisa histórica.

A primeira diz respeito à análise do documento. O documento, para a arqueologia, não vem corroborar as teorias históricas já prontas, ao invés disto, as teorias são elaboradas através da análise dos documentos.

Segundo Foucault (1972, p. 13) "é claro que desde que uma disciplina como a História existe, temo-nos servido de documentos, interrogamo-los, interrogamo-nos a respeito deles; indagamo-lhes não apenas o que eles queriam dizer, mas se diziam a verdade, e a que título podiam prendê-lo. (...) Ora, por uma mutação que não data de hoje, mas que sem dúvida ainda não acabou, a história mudou sua posição acerca do documento: ela se dá por tarefa primeira, nem tanto interpretá-lo, nem tanto determinar se ele diz a verdade e qual é seu valor expressivo, mas sim trabalhá-lo no interior e elaborá-lo: ela o organiza, recorta-o, distribui-o, ordena-o, reparte-o em níveis, estabelece séries, distingue o que é pertinente do que não é, delimita elementos, define unidades, descreve relações."

Nesse trabalho consideramos como documentos os discursos dos textos escritos até as primeiras publicações sobre das geometrias não-euclidianas - séc. XIX - e dos quadros de alguns artistas que viveram no período anterior a tal surgimento.

---

162 FOUCAULT, M. , 1972.

Uma dificuldade encontrada para realizar essa pesquisa sobre o surgimento das geometrias não-euclidianas foi a pouca disponibilidade de fontes primárias. Há muitos comentários sobre os trabalhos de Saccheri, Lambert, Legendre, Da Vinci - aos quais tivemos acesso - e pouquíssimos textos disponíveis, escritos por eles mesmos. Por exemplo, conseguimos achar somente uma cópia, em alemão, dos trabalhos integrais de Saccheri e Lambert sobre o postulado das paralelas (depois que fizemos a tradução desse texto para o português, descobrimos que os trabalhos de Saccheri foram traduzidos para o inglês por G. B. Halsted e publicados pela revista Math. Monthly, I 1894 e seguintes). Além desses tivemos acesso a outros documentos, quais sejam, pequenos textos encontrados como citações em outros livros e fotografias de quadros produzidos durante a Idade Média e Idade Moderna.

A segunda alteração colocada por esse método de pesquisa histórica é, de certa forma, decorrente da primeira, pois a organização, pelo método arqueológico, dos documentos disponíveis confere destaque às descontinuidades que eram suprimidas pela história em sua forma clássica.

Conforme Foucault (1972, p. 16), "para a história em sua forma clássica, o descontínuo era, ao mesmo tempo, o dado e o impensável; o que se oferecia sob a capa dos acontecimentos dispersos - decisões, acidentes, iniciativas, descobertas - e o que devia ser, pela análise, contornado, reduzido, apagado para que aparecesse a continuidade dos acontecimentos.(...) Ela (a descontinuidade) se tornou agora um dos elementos fundadores da análise histórica. Ela aparece em um triplo papel. Constitui, de início, uma operação deliberada do historiador(...): pois ele deve, pelo menos a título de hipótese sistemática, distinguir os níveis possíveis da análise, os métodos que são próprios a cada um e as periodizações que lhes convêm. Ela é o resultado de sua descrição: pois o que ele empreende descobrir são os limites de um processo, o ponto de inflexão de uma curva, a inversão de um movimento regulador. (...) Ela é, enfim, o conceito que o trabalho não deixa de especificar."

Foucault, na obra referida, argumenta que "na análise dos documentos não devemos utilizar textos, livros ou obras, mas formações discursivas que são definidas quando há uma regularidade entre os objetos, tipos de enunciação, conceitos e escolhas temáticas."(1972, p. 64)

Mas, o que seriam formações discursivas?

Para responder esta questão, precisamos definir o que Foucault classifica como **enunciado**.

Segundo este autor, enunciado "é uma função de existência que pertence, em particular, aos signos, e a partir da qual pode-se decidir, em seguida, pela análise ou pela intuição, se 'fazem sentido' ou não, segundo que regra se sucedem ou se justapõem, de que são signo, e que espécie de ato se encontra efetivado por sua formulação (oral ou escrita)" (1972, p. 108, 109).

Ou seja, frases são enunciados, proposições são enunciados, gráficos são enunciados, pinturas também são enunciados. Uma sequência de números escrita a partir, por exemplo, de um sorteio é um enunciado já que expõe a relação de probabilidade.

Agora, podemos explicitar as definições de formação discusiva e de discurso encontradas no livro *A arqueologia do saber*. Quando, em um conjunto de enunciados, podemos definir uma regularidade temos uma **formação discursiva**. Entenderemos por **discurso** "um conjunto de enunciados que provém de um mesmo sistema de formação" (Foucault, 1972, p. 135).

De posse dos documentos anteriormente citados, procuramos organizá-los segundo as regularidades que apresentavam. Assim, pudemos perceber como fazendo parte de uma mesma série de enunciados, os dos trabalhos de Lambert, Saccheri, Legendre, Espinosa, Newton, Kepler, Galileu, os dos racionalistas do século XVII e os de todos os artistas renascentistas italianos. A regularidade em questão é considerar a geometria euclidiana como uma verdade única, inquestionável e, até mesmo, metafísica.

Em outra série de enunciados, encontramos todos os dos críticos desde os dos filósofos gregos da Antiguidade até os dos empiristas ingleses dos séculos XVII e XVIII e os dos artistas plásticos do século XVIII, por exemplo W. Blake. tais enunciados altercavam tanto o rigor, quanto a natureza das verdades dessa geometria.

Em outra ainda, são colocados os discursos que se relacionam à Teoria do Conhecimento de Kant.

Feita essa organização de enunciados, terminamos por perceber as relações que explicitamos no texto da dissertação.

Talvez, seja interessante notar que essas séries possuem pontos de relação. Por exemplo, o discurso dos racionalistas e dos empiristas, do século XVII, apesar de incompatíveis - em relação às regularidades expostas acima - constituem-se a partir de uma mesma motivação, qual seja, as mudanças socio-político-econômico-culturais ocorridas no período de transição entre o Feudalismo e a Idade Moderna. Esses discursos podem ser um exemplo do que Foucault denomina de pontos de difração.

Segundo ele, "tais pontos se caracterizam inicialmente como pontos de incompatibilidade: dois objetos ou dois tipos de enunciação, ou dois conceitos podem aparecer, na mesma formação discursiva, sem poder entrar - sob pena de contradição manifesta ou inconsistência - em uma única e mesma série de enunciados. Caracterizam -se em seguida como pontos de equivalência: os dois elementos incompatíveis são formados da mesma maneira e a partir das mesmas regras." (1972, p. 82)

As geometrias euclidiana e não-euclidianas também podem ser entendidas como pontos de difração, pois como já observamos no texto, são enunciados que se contradizem, no que se refere à curvatura do espaço, e no entanto, são formados pelas mesmas regras.

Definidas todas as séries de enunciados e observadas as relações existentes entre elas, ficam duas quetões: o que vamos analisar? Qual o método utilizado na análise?

Segundo Foucault, "o que se analisa aqui (na arqueologia) não são, certamente, os estados terminais do discurso, mas os sistemas que tornaram possíveis as formas sistemáticas últimas; são *regularidades pré-terminais* em relação às quais o estado último, longe de constituir o lugar de nascimento do sistema, se define, antes, por suas variantes. Atrás do sistema acabado, o que se descobre (...) é um conjunto cerrado de relações múltiplas. E, além disso, essas relações, apesar de não serem a própria trama do texto, elas não são por natureza estranhas ao discurso" (1972, p. 94, grifos do autor)

Adotando o método arqueológico, o que buscamos nesta reconstituição histórica do surgimento não é somente o momento da invenção das geometrias não-euclidianas, ou seja, o momento no qual foram realizadas as primeiras publicações sobre elas, mas as "múltiplas relações", as "regularidades pré-terminais" que possibilitaram tal surgimento. Portanto, a análise realizada busca tornar claro como as relações determinadas a partir da organização dos enunciados podem ter influenciado o surgimento dessas geometrias.

Esse método de pesquisa nos pareceu extremamente interessante por considerar, não apenas os jogos de enunciados que foram historicamente aceitos, mas também os que não foram.

Segundo Foucautlt, "todos os jogos possíveis não estão efetivamente realizados: há muitos conjuntos parciais, compatibilidades regionais, arquiteturas coerentes que teriam podido aparecer e que não estão manifestas. Para dar conta somente das escolhas que foram realizadas, dentre todas as que o poderiam ter sido, é preciso descrever instâncias específicas de decisão. Em primeiro lugar entre elas, o papel que desempenha o discurso estudado em relação aos que lhe são contemporâneos e que lhe são vizinhos.(...) O discurso estudado pode estar também em uma relação de analogia, de oposição, ou de complementaridade com alguns outros discursos.(...) Pode-se, finalmente, descrever, entre diversos discursos, relações de delimitação recíproca, cada um deles apresentando as marcas distintivas de sua singularidade pela diferenciação de seu domínio, de seus métodos, de seus instrumentos, de seu domínio de aplicação.(...) Todo este jogo de relações constitui um princípio de determinação que admite ou exclui, no interior de um discurso dado, um certo número de enunciados." (1972, p. 83)

Esta "direção de pesquisa", como define Foucault, pareceu-nos particularmente útil para buscarmos explicações de questões como: por que Saccheri ou Lambert não perceberam que estavam, em seus respectivos trabalhos, lidando com um tipo completamente novo de geometria? Por que excluíram hipóteses consistentes de seus trabalhos? Por que o título do trabalho de Saccheri é "Euclides salvo de qualquer falha"?

Ao tentarmos compreender as escolhas feitas por Saccheri e Lambert, dentre todas as outras que eram possíveis, deparamo-nos com a questão da verdade estabelecida na época sobre a geometria euclidiana, ou seja, que essa geometria era o conhecimento pelo qual poderiam ser desvendados os mistérios da realidade física.

As conclusões às quais chegamos, no final do texto de reconstituição histórica, sobre as relações entre a aceitação das geometrias não-euclidianas pela comunidade científica, os novos discursos científicos (por exemplo, a Teoria da Evolução) e as práticas político-econômicas (práticas não-discursivas), foram possíveis a partir de uma das direções de pesquisa definida no método arqueológico, qual seja, "a determinação das escolhas teóricas realmente efetuadas depende também de uma outra instância. Essa instância se caracteriza, de início, pela *função* que deve exercer o discurso estudado *em um campo de práticas não discursivas*". (Foucaut,1972, p. 84, grifos do autor)

Assim, a reconstituição histórica, aqui realizada, buscou as relações entre o discurso matemático e os de outros campos do saber e entre esses discursos e o campo de práticas não discursivas. O método arqueológico supera a dualidade existente entre aspectos internos e externos, já que os enunciados são classificados, não segundo o campo do saber ao qual pertencem, mas segundo as regularidades que possuem em comum.

II. *Sobre o pedagógico*

Nesse estudo a história é utilizada como fonte de poblematização pedagógica.

Precisamos, agora, especificar o que entendemos por problematização e o que estamos chamando de pedagógico.

1. História: fonte de problematização

Em sua tese de doutorado, *Problematização: um caminho a ser percorrido em Educação Matemática*[163], Maria do Carmo D. Mendonça analisa alguns propósitos pedagógicos da problematização.

Esta autora, na obra referida, afirma que a problematização pode ser utilizada com o propósito psicológico de desinibir os poderes cognitivos; ou como um meio para conferir significado a uma experiência de vida; ou como um meio para o desenvolvimento de uma atitude artística, a arte de formular perguntas; ou como um método, um caminho para alcançar o conhecimento; ou ainda como motivação que impele o indivíduo à busca de soluções.

Dario Fiorentini, no seu trabalho de doutoramento *Rumos da pesquisa brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação*[164], analisa várias pesquisas realizadas em nível de pós-graduação. Dentre elas, muitas tratam da questão **resolução de problemas**, enquanto método pedagógico. Analisando-as, conclui:

"Os quatorze estudos, aqui analisados, mostram vários significados do que seja a resolução de problemas. Alguns a concebem como método de ensino que pressupõe a abordagem de todo e qualquer conteúdo no contexto de situações-problema. Outros como uma habilidade cognitiva estreitamente relacionada à natureza e ao significado dos conceitos envolvidos cuja aprendizagem pode ser

---

[163] MENDONÇA, M. C. D.., 1993.
[164] FIORENTINI, D.., 1994.

otimizada mediante estratégias e modelos especiais de ensino. Outros, ainda, como uma estratégia ou habilidade cognitiva estreita-mente relacionada ao contexto sócio-cultural de significação do problema. E, finalmente, há aqueles que a concebem como um processo especial constituído de etapas com estratégias e heurísticas próprias, as quais devem ser exploradas, ensinadas e desenvolvidas em sala de aula."(1994, p. 239)

Brousseau (1983, p. 179) define situação problema como sendo "uma situação que seja suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Trata-se, não de comunicar os conhecimentos que se deseja ensinar, mas de encontrar uma situação na qual estes conhecimentos sejam a estratégia ótima - dentre as possíveis - para obter o resultado buscado pelo aluno".

Higueras e Fernándes, no artigo *Los obstaculos en la enseñanza de la matematica*[165] afirmam que o objetivo de uma situação-problema é permitir que o aluno adquira novos conhecimentos tomando, em primeiro lugar, a consciência da insuficiência de seus antigos conhecimentos." (p. 130)

Antonio Miguel, em sua tese de doutorado, analisa, especificamente, a problematização histórico-pedagógica e afirma que essa deve ser **lógica, psicológica, sociológica, epistemológica, teleológica** e **axiológica**. Segundo ele, tal problematização visa à formação política do cidadão, isto é, do indivíduo que sabe-se histórica e socialmente condicionado, mas que é capaz de desenvolver um pensamento independente e crítico. Podemos perceber tal postura pela seguinte passagem:

"Por outro lado, a perspectiva aberta pela abordagem histórica e construtiva dos conteúdos matemáticos no sentido de restituir-lhes a sua dimensão axiológico-teleológica, acena com a possibilidade de retirar a matemática de seu isolamento escolar, imposto por uma já habitual abordagem estritamente técnica, tornando-a

[165] HIGUERAS, L. R. e FERNÁNDES, J. L. R. - "Los obstaculos en la enseñanza de la matematica" in IV Jornada Andaluzas de Educacion Matematica "Thales" - Benalmádena (Málaga) - set. 1989 - p. 125 à 132.

uma colaboradora a mais no atingimento das metas colocadas por um projeto educativo mais amplo que vise à formação do cidadão." (Miguel, 1993, p. 197)

Desta forma, Miguel aproxima-se de Paulo Freire, quando este último afirma: "a educação que se impõe aos que verdadeiramente se comprometem com a libertação não pode fundar-se numa compreensão dos homens como seres 'vazios' a quem o mundo 'encha' de conteúdos; não pode basear-se numa consciência especializada, mecanicistamente compartimentada, mas nos homens como 'corpos conscientes' e na consciência como consciência intencionada ao mundo. Não pode ser a do depósito de conteúdos, mas a problematização dos homens em suas relações com o mundo"(Freire, 1970, p. 68 apud Mendonça, 1993, p. 24)

Colocadas as diferentes maneiras de se perceber a função pedagógica da problematização, entenderemos a expressão "situação problema" do modo como a define Brousseau e com as finalidades a ela atribuídas por Antonio Miguel e Paulo Freire.

Assim, aproximamo-nos da segunda pergunta colocada por esta pesquisa, qual seja, o que significa uma reconstituição histórica com fins pedagógicos?

2. Estudo histórico pedagógico

Miguel, na obra citada, afirma que "para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histórias da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Tais histórias, no meu modo de entender, tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros, determinados problemas e métodos e não outros, a enfatizar a reconstituição, não tanto dos resultados matemáticos, mas dos contextos epistemológicos, psicológicos, sócio-político e culturais de sua produção, contribuindo, desse modo, para a explicação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas."(Miguel, 1993, p. 109)

Sobre o objetivo a ser perseguido por um estudo histórico-pedagógico comenta:

"Mas uma didática construtiva da matemática, de cunho histórico-social, não estaria cumprindo integralmente a sua função educativa se se restringisse a explicitar uma fundamentação psico-pedagógica e histórico-epistemológica relativa ao como se trabalhar deteminados conteúdos específicos. Isso porque, se ela se detivesse aí, estaria marginalizando uma dimensão de fundamental importância do processo educativo: a dimensão axiológico-teleológica." (Miguel, 1993, p. 196)

Podemos caracterizar a concepção de reconstituição histórica com fins pedagógicos, adotada aqui, como sendo uma reconstituição histórica realizada por meio do método arqueológico de pesquisa. Nela, investigamos e organizamos os discursos que podem ter influenciado a produção histórica do conhecimento, com o intuito de torná-los problematizações lógica, epistemológica, psicológica, sociológica, teleológica, axiológica e, é claro, matemática.

A finalidade última desta arqueologia é propiciar um ambiente onde o educando perceba a si próprio e ao conhecimento científico como sendo histórica e culturalmente condicionados; compartilhe com os demais elementos do grupo suas posturas filosóficas frente ao mundo; pense criticamente suas concepções matemáticas e valorativas em geral com o propósito de superá-las.

Porém, não entendemos que o processo pedagógico se dê somente em sala de aula ou mesmo na Escola. Acreditamos que ao ler a presente dissertação, o leitor estará passando por um processo pedagógico.

Mendonça, na obra acima referida, ao citar Pernambuco (1992), afirma a importância da relação dialógica no processo que busca a construção do conhecimento pela problematização: "o diálogo , a interlocução sobre o mundo, uma realidade partilhada embora vista sobre diferentes ângulos, é o principal motor, o que desencadeia e mantém o movimento do grupo. Paulo Freire, ao mostrar que o aluno é um educando que em par com o educador retoma em sala de aula um processo de produção de conhecimento, nos aponta o diálogo como instrumento por excelência pelo qual este conhecimento se produz. Iniciando sempre do universo do aluno, do que para ele é significativo, da sua maneira de pensar, do conhecimento que traz do seu grupo social, cabe à escola possibilitar-lhe a superação dessa visão inicial dando-lhe acesso a novas formas de pensar que constituem a base do conhecimento sistematizado contemporâneo."(p. 41)

A importância, ressaltada por Mendonça, da relação dialógica no processo de construção do conhecimento foi um dos motivos que nos levou a optar pelo diálogo como o articulador entre os caráteres histórico e pedagógico desse trabalho, ou seja, pela forma de apresentação - não original - desta dissertação.

A afirmação da não originalidade desta forma de se escrever um trabalho acadêmico, deve-se ao fato de Lakatos, em sua tese de doutorado (transformada posteriormente no livro *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*) já tê-la utilizado. Segundo este autor, a forma dialogada reflete a dialética da produção do conhecimento científico.

Outro motivo que nos levou a adotar o diálogo como forma de apresentação é que ele nos permite expor concomitantemente diferentes posturas filosóficas frente aos problemas que vão sendo colocados e analisar quais as consequências destas posturas no processo pedagógico rumo à produção do conhecimento erudito.[166]

Assim, o diálogo ideal, aqui apresentado, desenvolve-se com um grupo de alunos de um curso de licenciatura em Matemática. Isso permite que sejam explicitadas, por meio das posturas dos alunos *A, B, C* e *D* , as diferentes maneiras de posicionamento frente a produção do conhecimento matemático.

A escolha do grupo recaiu sobre um curso de licenciatura, não porque acreditemos que as geometrias não-euclidianas não possam ser ensinadas em primeiro e segundo graus, mas devido ao nível de aprofundamento que quisemos dar

[166] FERNÁNDEZ e HIGUERAS no artigo "La epistemologia historica, base de una teoria constructivista del aprendizage en matematicas" referem-se a diferenciação que deve ser feita entre saber "erudito"e saber "ensinado". Segundo eles, "para que um conhecimento matemático passe a ser objeto de ensino, deve sofrer uma série de alterações, deformações ou restrições que tornam possível seu ensino."

às discussões apresentadas. Tal aprofundamento não seria possível em uma classe de primeiro ou segundo graus.

O diálogo desenvolvido nessa dissertação deve ser compreendido ideal no mesmo sentido dos objetivos os quais traçamos em nossas ações pedagógicas. Os diálogos reais com os quais nos deparamos nessa ação dependem dos diferentes contextos sócio-culturais dos alunos. Porém, buscamos sempre superá-los tendo como referência nossos objetivos ideais, ou nossos diálogos ideais.

É interessante notar que Martin Buber, o grande estudioso do diálogo, observa que a relação dialógica prescinde das palavras. Ela pode se efetivar a partir de olhares, gestos e silêncios.

Nesse estudo histórico-pedagógico, a palavra foi privilegiada. Poucos foram os momentos de silêncio. Esses são explicitados no texto por meio de interrupções de assuntos, ou de respostas lacônicas que demonstram que algo deveria ter sido dito e não foi.

Longe de indicar o fim de uma discussão, essas suspensões de assuntos colocam perguntas ao leitor, o qual pode buscar respostas para elas, fornecendo ao diálogo uma continuidade em um outro nível que não o do texto da dissertação. Talvez seja nesses momentos de silêncio que o diálogo atinja, mais plenamente, sua dimensão pedagógica.

3. *A quem se destina essa dissertação*

É evidente que essa dissertação se destina a todos os que se interessem em lê-la. Porém, ela foi pensada, especificamente, para futuros professores de Matemática.

A formação de professores de Matemática, quase sempre tem se limitado a um estudo exclusivamente formalista dos campos que compõem a Matemática, desvinculando-os, deliberadamente, de todo o processo social de produção do conhecimento.

A idéia subjacente a esse tipo de formação de professores é que para ser um bom professor, deve-se "conhecer profundamente" a área a qual irá ensinar.

Aí se coloca a discussão sobre o que significa "saber profundamente". Para a grande maioria dos professores desses cursos, saber Matemática profundamente significa saber demonstrar teoremas, lidar com a linguagem matemática e, talvez, conhecer alguns fatos da História da Matemática, tais como, quem, em que época, *descobriu* tal teorema.

Outra maneira de se entender "saber profundamente" seria, além de conhecer teoremas e de saber lidar com a linguagem matemática, conseguir relacionar conceitos de diferentes campos desse conhecimento; refletir sobre os fundamentos da Matemática, perceber seu dinamismo interno; perceber suas relações com outros campos do saber e com as práticas não-discursivas.

Se o objetivo da formação de professores de Matemática for um "saber profundamente" nesse segundo sentido, um estudo histórico-pedagógico sobre as geometrias não-euclidianas pode se mostrar bastante interessante.

Essas geometrias trazem no bojo de seu desenvolvimento discussões importantes sobre concepção de verdade, de rigor, de consistência, de sistema axiomático e outras trabalhadas no corpo dessa dissertação; reflexões sobre os pontos de intersecção entre o discurso matemático e discursos de outros campos do conhecimento; análise dos momentos de continuidade e ruptura dentro da Matemática (há uma controvérsia, na Matemática, se há ou não essas rupturas dentro desse campo do saber. Não temos como objetivo desenvolver, aqui, essas discussões). Esses debates, além de colocarem um questionamento sobre os fundamentos da Matemática, ainda proporcionam uma percepção do dinamismo interno no qual se constrói esse saber.

Além disso, o estudo dessas geometrias pode proporcionar a superação do senso comum do que seja a geometria, possibilitando que o futuro professor teça relações, não somente entre figuras-figuras, figuras-propriedades, propriedades-

propriedades, mas também entre sistemas axiomatizados-sistemas axiomatizados, alcançando, assim, um estudo de Metageometria.

A discussão sobre a correspondência entre a geometria euclidiana e as leis do mundo empírico é interessante em um curso voltado para futuros professores de Matemática, pois até hoje, muitos licenciandos consideram que esse saber existe no Universo independentemente do ser humano. Para eles, a função do ser humano no que se refere à Matemática é o de descobrir as leis matemáticas pré-existentes na natureza.

Esse estudo histórico-pedagógico possibilita perceber e avaliar a origem e o desenvolvimento histórico de tal concepção, tornando possível uma opção consciente entre superar ou não esse modo de encarar a Matemática.

Finalizando, gostaríamos de reafirmar que esse estudo histórico-pedagógico não pretende ser um modelo a ser seguido, mas um texto sobre o qual, futuramente, as pessoas possam se debruçar, analisar, contestar, utilizar trechos, enfim, recriar.

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A. - Episódios da História Antiga da Matemática - SBM - Brasília 1984

ABBAGNANO, N. - Dicionário de Filosofia - Ed. Mestre Jou - SP - 1970

ALBERNAZ, J. M. - "Mudanças históricas da geometria e conflito entre teorias psico-pedagógicas: algumas consequências didáticas" in PCP UNIVERSO PEDAGÓGICO - Ano II - Número 3 - UFES

ANDERY, M. A, et alli - Para compreender a ciência: uma perspectiva histórica - S. Paulo - EDUC - 1988

ARON, R. - Dimensiones de la conciencia histórica - Fondo de Cultura Econômica - México - 1983

ARTIGUE, M. - "Epistemologie et didactique" in Recherches en didactique des mathematiques - Vol. 10/2.3 - 1990 - p. 242 à 283

ÀVILA, G. - "Legendre e o postulado das paralelas" in Revista do Professor de matemática - Número 22 - 1992 - p. 16 à 28

BACCA, J. D. G. - "Introdução filosófica aos Elementos de Euclides" in Euclides, Elementos de Geometria - Universidade Autonoma de México - México - 1944

BACHELARD, G. - La formacion del espiritu científico - Siglo XXI Ed. - Buenos Aires - 1991

_______ - O novo espírito científico - Ed. Tempo Brasileiro - R J - 1968

BARABASHEV, A. - "O empirismo como fenômeno histórico da filosofia da matematica - Revue Internationale de Philosophie - Vol. 42 - n° 167 -abril/88 - tradução Antonio Miguel

BARBARIN, P. - La geometrie non euclidienne - Ed. Gauthier Villars et Cia - Paris - 1928

BARBOSA, J. L. M. - Geometria euclidiana plana - Sociedade Brasileira de Matemática - RJ - 1985

BARKER, S. F. - Filosofia da matemática - Zahar Ed. - RJ - 1976

BARNES, B. e outros - Estudios sobre sociologia de la ciência - Alianza Editorial - Madrid - 1980

BARON, M. E. - A matemática grega - UnB - Brasília - 1985

BENNET, K. M. and BIRKHOFF, G. - "Felix Klein and his 'Erlanger Programm" in History and plilosophy of modern mathemaics - William Aspray and Philip Kitcher editors - University of Minnesota Press - Minnesota - 1985

BERNAL, J. D. - Ciência na história - Vol I - Livros Horizonte - Lisboa - 1969

BKOUCHE, R. - "Euclides, Klein, Hilbert et les autres..." in La riguer et le Calcul - Groupe Inter-Irem D'Epistemologie - Paris - 1982

________ - "Prefácio" in Senechal, B. - A noção de espaço - Grupo de geometria - Hermann - Paris - 1980

BLANCHÉ, R. - A axiomática - Editorial Presença - Lisboa - 1987

________ - História da lógica de Aristóteles a Bertrand Russell - Edições 70 - Lisboa - 1985

BONOLA, R. - Non-euclidean geometry - Dover Publications - NY - 1955

BOUTROUX, P. - L'ideal scientifique des mathematiciens" dans l'antiquetè et dans les temps modernes - Librairie Felix Alcan - Paris - 1920

BOYER, C. B. - História da matemática - EDUSP - SP - 1974

BROUSSEAU, G. - "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mahematiques" in Recherches en didactique des mathématiques - Vol. 4.2 - La Pensee Sauvage Ed. - França - 1983

BULCÃO, M. - O racionalismo da ciência contemporânea - Antares Ed. - RJ - 1981

BYERS, V. - "Why study the history of mathematics?" in Inst. J. Math Educ Sci Technol - 1982

CAMPEDELLI, L. - Fantasia y logica en la matematica

CARAÇA, B. J. - Conceitos fundamentais da matemática - Lisboa - 1978

CARMO, M. P. - "Geometrias não-euclidianas" - IMPA CNPq - RJ - 1987

CARRUCIO, E. - Mathematics and logic in history and in contemporany thought - London - 1964

CASSIRER, E. - A filosofia do Iluminismo - Ed. UNICAMP - SP - 1992

_______ - El problema del conocimiento en la filosofia y en la ciencia modernas - Fondo de Cultura Econômica - Buenos Aires - 1953

CASTELNUOVO, E. - "Panorama de la enseñanza matemática en el tiempo y en el espacio"- Educación Matemática - Vol I - nº 3 - dez/89 - p. 24 à 29

COLE, A. - Perspective - Dorling Kindersley - London - 1992

COOLIDGE, J. L. - The elements of non euclidean geometry - Oxford University Press - Oxford - 1940

_______ - A history of geometricals methods - Clarendon Press - Oxford - 1940

COUTINHO, L. - Convite às geometrias não euclidianas - RJ - 1989

DAVIS, P. J. e HERSH, R. - O sonho de Descartes - Ed. Francisco Alves - RJ - 1988

DIDEROT e D'ALEMBERT - Dicionário Raciocinado das ciências, das artes e dos ofícios - Discurso Preliminar - ed. Bilíngue - Trad. Fúlvia M. L. Moretto - Ed. UNESP - SP

DOU, A. - Fundamentos de la matemática - Ed. Labor - Barcelona - 1974.

ENGEL, F. e STÄCKEL, P. - Die Theorie der Parallellinien - Johnson Reprint Corporation - West Germany - 1968

EPSTEIN, I. - Revoluções científicas - Ed. Ática - SP - 1988

ERNEST, P. - The philosophy of mathematics education - Philadelphia Press - Philadelphia - 1991

EVES, H. W. - Estudios de la Geometria - Tomo I - Union Tipográfica Editorial - México - 1963

FABER, R. L. - Foundations of euclidean and non-euclidean geometry - Marcel Dekker, Inc. - NY - 1983

FANG, J. e TAKAYAMA, K. P. - Sociology of mathematics and mathematics - Padéia Press - NY - 1975

FERNANDES, C. S. - "Glosas de una concepción humanista, materialista de la historia dialéctica y de la matemática" in BOLEMA - Especial - Número 2 - 1992

FERRY, L. - Homo Aestheticus - Ed. Ensaio - SP - 1994

FIORENTINI, D. - Rumos da pesquisa brasileira em EM: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação - Tese de doutorado - FE - UNICAMP - Campinas - 1994

FOUCAULT, M. - Microfísica do poder - Ed. Graal - RJ - 1984

_______ - A arqueologia do saber - Ed. Vozes - RJ - 1972

GAMA, R. (org.) - Ciência e técnica - T. A. Queiroz Ed. - SP - 1993

GANS, D. - An introduction to non-euclidean geometry - Academy Press -

NY - 1973

GARDIE, J. L. - Le raisonnement par l'absurde - Presses Universitaires de France - Paris - 1991

GARDER, A. O. - "The history of mathematics as a part of the history of mankind" in The mathematics theacher - May 1968 - Vol. LXI - Número 5

GERDES, P. - "Matemáticos e a origem de conceitos geométricos elementares" in Sobre o despertar do pensamento geométrico - Tese doutoral - Universidade Eduardo Mondlane - 1987

GOMBRICH, E. H. - A História da Arte - Ed. Guanabara - RJ - 1993

GRAY, J. - "The discovery of non-euclidean geometry" in PHILLIPS, E. R. (ed.) - Studies in history of mathematics - The mathematical Assoc. of America - USA - 1987

GUILLEN, M. - Pontes para o infinito: o lado humano das matemáticas - Ed. Gradiva - Lisboa - 1987

HEATH, T. - A history of greek mathematics - Vol. II - Dover Publications - NY - 1981

HEGENBERG, L. - Lógica, simbolização e dedução - EDUSP - SP - 1925

HIGUERAS, L. R. e FERNÁNDES, J. L. R. - "Los obstaculos en la enseñaza de la matematica" in IV Jornada Andaluzas de Educacion Matemática 'Thales' - Benalmádena (Málaga) - set. 1989 - p. 125 à 132

________ - "La epistemologia historica, base de una teoria constructivista del aprendizage en matematicas" in IV Jornada Andaluzas de Educacion Matemática 'Thales' - Benalmádena (Málaga) - set. 1989 - p. 133 à 140

HIRSCHBERGER, J. - História da filosofia moderna - Vol. 3 - Ed. Herder - SP - 1960

HOGBEN, L. - Maravilhas da matemática - Ed. Globo - Porto Alegre - 1970

HOBSBAWN, E. J. - A era das revoluções - Paz e Terra - RJ - 1981

HUSSERL, E. - "A origem da geometria" in The crisis of european science - Tradução Maria A. V. Bicudo - IGCE - UNESP - Rio Claro - 1980

JOLY, F. - A cartografia - Papirus Ed. - Campinas - 1990

JOSEPH, G. G. - "Eurocentrism in mathematics: the historical dimensions" in CRISTINE, K. (ed.) Mathematics, Education and Society - UNESCO - Paris - 1989

KANT, I - Crítica da razão pura - Coleção Os Pensadores -Abril Cultural - SP 1983

_______ - Prolegômenos - Coleção Os Pensadores - Abril Cultural - SP - 1983

KASNER, E. e NENMAN , J. - "Geometrias diversas - plano e fantasia" in Matemática e imaginação - Zahar Ed. - RJ

KEDROV, B. W. - Classificación de las ciencias - Ed. Progresso - Moscou - 1974

KLEIN, F. - Matemática elemental - Vol II - Nuevas Gráficas - Madrid - 1927

KLINE, M. - Mathematics: The loss of certainty - Oxford University Press - NY - 1980

________ - El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias - Vol III - Alianza Editorial - Madrid - 1972

KHUN, T. - "Matematical versus experimental traditions in the development of physical science" in The essential tension - The University of Chicago Press - Chicago - 1977

_______ - A estrutura das revoluções científicas - Ed. Perspectiva - SP -1982

LACROIX, J. - Kant e o kantismo - Ed. Rés - Portugal

LACROIX, S. F. - Elements de geometrie - Gauthier-Villars - 1872

PLATÃO - A República - Ed. Globo - Porto Alegre - 1964

POINCARÉ, H. e EINSTEIN, A. - Los fundamentos de la geometria - Ibero Americana - Buenos Aires

PONCE, A. - Educação e luta de classes - Cortez Ed. - SP - 1983.

RAY, C. - Tempo, espaço e filosofia - Ed. Papirus - SP - 1991

RAYMOND, P. - A história e as ciências - Rés Ed. - Porto - 1979

REIS, F. S. - "Kant e geometrias" in Revista de estudos brasileiros - Ano V Vol. X - P. 34

RIBEIRO, J. U. - Política - Ed. Nova Fronteira - RJ - 1981

ROSENFELD, B. A. - History of mathematics and physics sciences: evolution of the concept of a geometric space - Springer-Verlag - London - 1988

SCHAFF, A. - História e verdade - Editorial Estampa - Lisboa - 1974

SERRES, M. - Hermes: uma filosofia das ciências - Ed. Graal - RJ - 1990

SHOENFIELD, J. R. - Mathematical Logic - Addison-Wesley Publishing Company - California - 1967

SMITH, D. E. - A source book in mathematics - Dover Publications - NY - 1959

SMOGORZERVISKI, A. S. - Acerca de la geometria de Lobachevski - Ed. Mir - Moscou - 1978

SOUZA, J. C. M. - O escândalo da geometria - Gráfica Ed. Aurora - RJ - 1948

STRUIK, D. J. - "Por que estudar a história da matemática?" in Gama, R. (org.) História da técnica e da tecnologia - EDUSP - SP - 1985

________ - História concisa das matemáticas - Ed. Gradiva - Lisboa - 1989

SZABÓ, A. - "The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definions an axioms"in Scripta Mathematica - Vol. XXVII - Número 2 - p. 113 à 139

TRUDEAU, R. - The non-euclidean revolution - Birkhäuser - Boston - 1987

UPINSKI, A. - A perversão matemática - Ed. Francisco Alves - RJ - 1989

VERA, F. - Viente matematicos celebres - Cia General Fabril Ed. - Argentina 1961

VERRIEST, G. - Introduction a la Geometrie non euclidienne - Gauthier-Villars Ed. - Paris - 1951

VOLPE, G. D. - A lógica como ciência histórica - Edições 70 - Lisboa - 1984

WILDER, R. L. - Evolution of mathematical concepts - John Wiley e Sons - NY - 1986

WHITEHEAD, A. N. - A ciência e o mundo moderno - Ed. Brasiliense - SP - 1946

________ - A função da razão - Ed. UnB - Brasília